VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA STAVEBNÍ

HELENA KOUTKOVÁ, KVĚTOSLAVA PRUDILOVÁ

SBÍRKA PŘÍKLADŮ Z MATEMATIKY III

MODUL BA02-M05

DVOJNÝ, TROJNÝ A KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU
FORMOU STUDIA

Obsah

Úvod

Sbírka úloh je určena především posluchačům třetího semestru Stavební fakulty VUT v Brně. Navazuje na teoretická skripta Matematika II (Modul 1 a Modul 2 -viz Literatura). Sbírka je věnována dvojrozměrnému, trojrozměrnému a křivkovému integrálu.

V kapitolách Dvojný a Trojný integrál jsou uvedeny řešené příklady, v každé kapitole přehledy vzorců na aplikace, v příloze přehled nejdůležitějších tabulkových integrálů. Každá kapitola obsahuje řadu neřešených příkladů s výsledky.

Děkujeme RNDr. O. Dlouhému za cenné rady a připomínky při vytváření sbírky.

Dále děkujeme za upozornění na jakékoliv případné nedostatky a chyby v této sbírce.

V Brně dne 4. listopadu 2007. Autoři

Kapitola 1

Dvojný integrál

1.1 Výpočet dvojného integrálu bez transformace

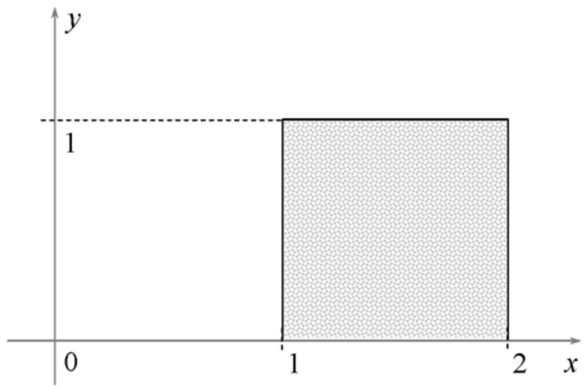
Příklad 1: Vypočítejte integrál $\int\int_D (x+y)\,dxdy$, kde integrační obor D je dán vztahy $0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$, $0 \le y \le 1$.

Řešení: Integrační obor je oblast druhého druhu. Funkce $f(x,y) = x+y$ je na D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Podle Fubiniho věty převedeme výpočet dvojného integrálu na výpočet dvojnásobného integrálu. Přitom nejprve budeme integrovat podle proměnné x, potom podle proměnné y.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D (x+y)\,dxdy &= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\,dx \right) dy = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 + xy \right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy \\
&= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}(1-y^2) + y\sqrt{1-y^2} \right) dy = \frac{1}{2}\left[y - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^1 \\
&+ \int\limits_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,dy = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{1-y^2} \\ t^2 = 1-y^2 \\ tdt = -ydy \end{array} \quad \begin{array}{c|c} y & t \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| = \frac{1}{3} - \int\limits_1^0 t^2\,dt = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Příklad 2: Vypočítejte integrál $\int\int_D y^x\,dxdy$, kde $D = \langle 1,2 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$.

Řešení: Integrační obor je čtverec - viz Obrázek 1.1. Jedná se o oblast, která je prvního i druhého druhu. Funkce $f(x,y) = y^x$ je na D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Podle Fubiniho věty převedeme výpočet dvojného integrálu na výpočet dvojnásobného integrálu. Přitom nezávisí na pořadí integrace. Výpočet nejprve provedeme za předpokladu, že je D oblast 1. druhu.



Obrázek 1.1: $D = \langle 1, 2\rangle \times \langle 0, 1\rangle$

$$\begin{aligned} \iint\limits_D y^x \, dxdy &= \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^1 y^x \, dy \right) dx = \int\limits_1^2 \left[\frac{y^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 dx = \int\limits_1^2 \frac{1}{x+1} dx \\ &= \left[\ln|x+1| \right]_1^2 = \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Při výpočtu pomocí oblasti 2. druhu dostaneme

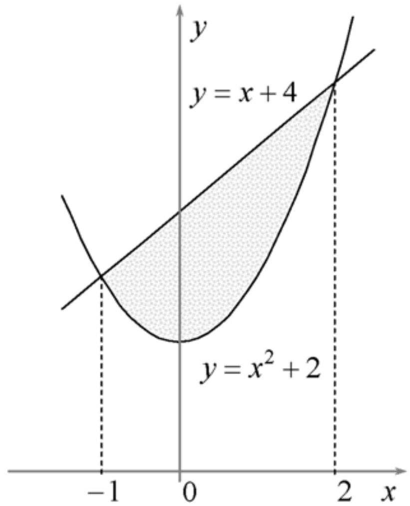
$$\iint\limits_D y^x \, dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_1^2 y^x \, dx \right) dy = \int\limits_0^1 \left[\frac{y^x}{\ln y} \right]_1^2 dy = \int\limits_0^1 \frac{y^2 - y}{\ln y} \, dy.$$

Tento integrál ale nelze vyřešit pomocí tabulkových integrálů. Z teoretického hlediska tedy sice nezáviselo na pořadí integrace, z praktického hlediska ano.

Příklad 3: Vypočítejte integrál $\int\int_D y \, dxdy$, je-li integrační obor D vymezen nerovnicemi: $y - x^2 - 2 \geq 0$, $y - x - 4 \leq 0$.

Řešení: Integrační obor je - viz Obrázek 1.2 - oblast prvního druhu. Funkce $f(x, y) = y$ je na D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Podle Fubiniho věty převedeme výpočet dvojného integrálu na výpočet dvojnásobného integrálu. Nejpve budeme integrovat podle proměnné y, potom podle x. Krajní meze $x-$ ové souřadnice oblasti získáme jako $x-$ové souřadnice průsečíku paraboly a přímky. Řešíme rovnici $x^2 + 2 = x + 4$, odtud $x^2 - x - 2 = 0$, tedy $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Tedy $D = \{[x, y] \in \mathbf{E_2};\ -1 \leq x \leq 2,\ x^2 + 2 \leq y \leq x + 4\}$.

$$\begin{aligned} \iint\limits_D y \, dxdy &= \int\limits_{-1}^2 \left(\int\limits_{x^2+2}^{x+4} y \, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^2 \left[y^2 \right]_{x^2+2}^{x+4} dx \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^2 \left((x+4)^2 - (x^2+2)^2 \right) dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^2 \left(-x^4 - 3x^2 + 8x + 12 \right) dx = \frac{81}{5}. \end{aligned}$$



Obrázek 1.2: $D:\ y - x^2 - 2 \geq 0,\ y - x - 4 \leq 0$

Příklad 4: Vypočítejte integrál $\int\int_D xy^2\,dxdy$, je-li integrační obor D určen nerovnicemi $x^2 + y^2 \leq 4$, $y + x - 2 \geq 0$.

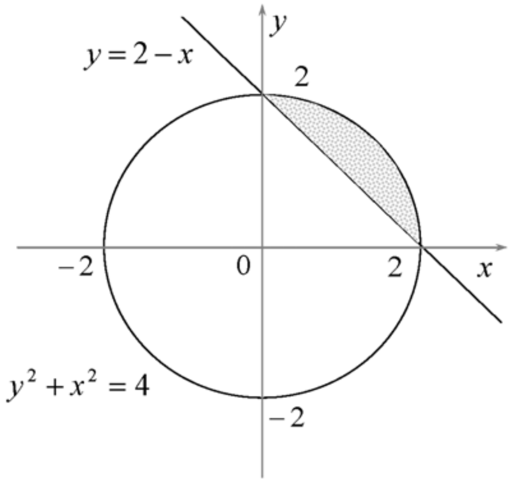
Řešení: Integrační obor je ohraničen přímkou a kružnicí - viz Obrázek 1.3. Jedná se o oblast, která je prvního i druhého druhu. Funkce $f(x, y) = xy^2$ je na oblasti D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Podle Fubiniho věty převedeme výpočet dvojného integrálu na výpočet dvojnásobného integrálu. Přitom nezávisí na pořadí integrace. Výpočet nejprve provedeme za předpokladu, že je D oblast 1. druhu. Tedy

$$D = \left\{[x, y] \in \mathbf{E_2};\ 0 \leq x \leq 2,\ 2 - x \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\right\}.$$

Potom

$$\begin{aligned}\iint\limits_D xy^2\,dxdy &= \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} xy^2\,dy\right) dx = \int\limits_0^2 \left[\frac{1}{3}xy^3\right]_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \int\limits_0^2 \frac{x}{3}\sqrt{(4 - x^2)^3}\,dx - \int\limits_0^2 \frac{x}{3}(2 - x)^3\,dx = \frac{8}{5}.\end{aligned}$$

První z integrálů řešíme substitucí $t = \sqrt{4 - x^2}$, druhý pomocí algebraických úprav nebo substitucí $t = 2 - x$.
Zvolíme-li oblast druhého druhu, tj. $D = \left\{[x, y] \in \mathbf{E_2};\ 0 \leq y \leq 2,\ 2 - y \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}\right\}$,



Obrázek 1.3: $D:\ x^2+y^2 \leq 4,\ y+x-2 \geq 0$

dostaneme:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D xy^2\,dxdy &= \int_0^2 \left(\int\limits_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} xy^2\,dx\right) dy = \int\limits_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} dy \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 y^2\left(4-y^2-(2-y)^2\right)\,dy = \int\limits_0^2 \left(2y^3-y^4\right)\,dx = \frac{8}{5}.\end{aligned}$$

Vidíme, že výpočet tohoto dvojného integrálu pomocí oblasti druhého druhu je jednodušší.

Příklad 5: Vypočtěte integrál$\int\int_D x^2 y\mathrm{e}^{xy} dxdy$, kde integrační obor D je obdélník daný nerovnicemi: $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2$.

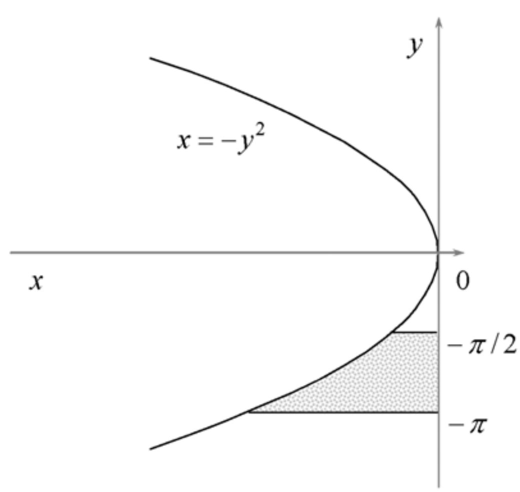
Řešení: Množina D je oblast prvního i druhého druhu. Funkce $f(x,y) = x^2y\mathrm{e}^{xy}$ je na oblasti D spojitá a ohraničená. Oblast D budeme uvažovat jako oblast prvního druhu.

Aplikujeme Fubiniho větu.

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x^2 y\mathrm{e}^{xy}\,dxdy &= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^2 x^2 y\mathrm{e}^{xy} dy\right) dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 y, & v'_y = \mathrm{e}^{xy} \\ u'_y = x^2, & v = \int \mathrm{e}^{xy}\,dy = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{xy} \end{array} \right| \\ &= \int\limits_0^1 \left(\Big[xy\mathrm{e}^{xy}\Big]_0^2 - \int\limits_0^2 x\mathrm{e}^{xy} dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left[\mathrm{e}^{xy}(xy-1)\right]_0^2\,dx \\ &= \int\limits_0^1 \big((2x-1)\mathrm{e}^{2x}+1\big)\,dx = \left[x\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2x} + x\right]_0^1 = 2.\end{aligned}$$

Příklad 6: Vypočítejte integrál $\int\int_D \cos\frac{x}{y}\,dxdy$, kde integrační obor D je určen nerovnicemi: $x \geq -y^2,\ -\pi \leq y \leq -\frac{\pi}{2},\ x \leq 0$.

Řešení: Integrační obor je ohraničen parabolou a třemi přímkami - viz Obrázek 1.4. Jedná se o oblast druhého druhu. Funkce $f(x,y) = \cos\frac{x}{y}$ je na oblasti D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Podle Fubiniho věty převedeme výpočet dvojného integrálu na výpočet dvojnásobného integrálu. Nejprve budeme integrovat podle proměnné x, potom podle y. Tedy



Obrázek 1.4: $D:\ x \geq -y^2,\ -\pi \leq y \leq -\frac{\pi}{2},\ x \leq 0$

$$\iint_D \cos\frac{x}{y}\,dxdy = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\left(\int_{-y^2}^{0}\cos\frac{x}{y}\,dx\right)dy = \left|\begin{array}{ll} t=\frac{x}{y} & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline -y^2 & -y \\ 0 & 0 \end{array} \\ dt=\frac{1}{y}dx & \end{array}\right|$$

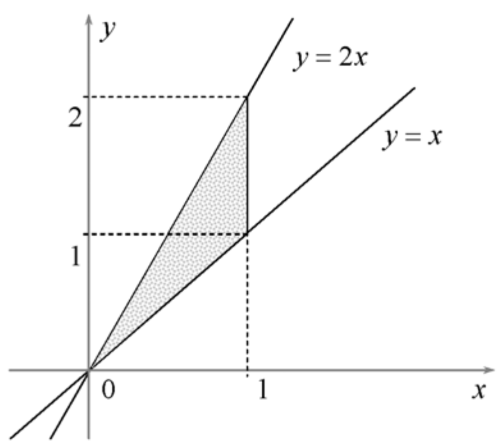
$$= \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\left(\int_{-y}^{0} y\cos t\,dt\right)dy = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} y\,[\sin t]_{-y}^{0}\,dy$$

$$= \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} y\sin y\,dy = \left|\begin{array}{ll} u=y, & v'=\sin y \\ u'=1, & v=-\cos y \end{array}\right|$$

$$= -\left[y\cos y\right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\cos y\,dy = \pi - 1.$$

Příklad 7: Vypočítejte integrál $\int\int_D \mathrm{e}^{x-y}\,dxdy$, je-li oblast D ohraničená trojúhelníkem s vrcholy $A=[0,0]$, $B=[1,1]$ $C=[1,2]$.

Řešení: Integrační obor je oblast prvního druhu, která je ohraničená třemi přímkami - viz Obrázek 1.5. Funkce $f(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}$ je na oblasti D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Podle Fubiniho věty převedeme dvojný integrál na dvojnásobný. Nejprve budeme integrovat podle proměnné y, potom podle x.



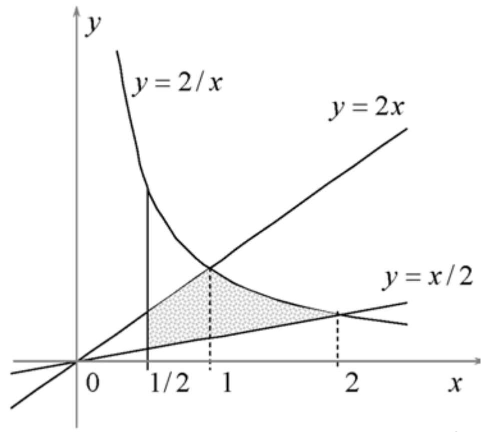
Obrázek 1.5: $D:\ A=[0,0]\,,\ B=[1,1]\ \ C=[1,2]$

$$\iint_D \mathrm{e}^{x-y}\,dxdy = \int_0^1\left(\int_x^{2x}\mathrm{e}^{x-y}\,dy\right)dx = \left|\begin{array}{ll} t=x-y & \begin{array}{c|c} y & t \\ \hline x & 0 \\ 2x & -x \end{array} \\ dt=-dy & \end{array}\right|$$

$$= -\int_0^1\left(\int_0^{-x}\mathrm{e}^t\,dt\right)dx = -\int_0^1\left[\mathrm{e}^t\right]_0^{-x}dx = \int_0^1\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)dx = \mathrm{e}^{-1}.$$

Příklad 8: Vypočítejte integrál $\int\int_D \frac{y}{x}\,dxdy$, kde množina D je omezená rovinná oblast ohraničená křivkami: $y = \frac{x}{2},\ y = 2x,\ y = \frac{2}{x},\ x = \frac{1}{2}$.

Řešení: Integrační obor D je ohraničen třemi přímkami a jednou větví hyperboly - viz Obrázek 1.6. Je zřejmé, že obor D není oblast prvního ani druhého druhu. Lze jej ale rozdělit na dvě oblasti prvního druhu D_1 a D_2 tak, že $D_1 \cup D_2 = D$. Funkce $f(x,y) = \frac{y}{x}$ je na D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Převedeme jej na součet dvou integrálů. Dostaneme:



Obrázek 1.6: $D:\ y = \frac{x}{2},\ y = 2x,\ y = \frac{2}{x},\ x = \frac{1}{2}$

$$\iint_D \frac{y}{x}\,dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{\frac{x}{2}}^{2x}\frac{y}{x}\,dy\right)dx + \int_{1}^{2}\left(\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}}\frac{y}{x}\,dy\right)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{2x}\left[y^2\right]_{\frac{x}{2}}^{2x}dx$$
$$+ \int_{1}^{2}\frac{1}{2x}\left[y^2\right]_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{15}{8}x\,dx + \int_{1}^{2}\left(\frac{2}{x^3}-\frac{x}{8}\right)dx = \frac{81}{64}.$$

Příklad 1.1.1: Převeďte $\int\int_D 1\,dxdy$ na dvojnásobný (pokud to lze) nebo na součet dvojnásobných integrálů. Množina D je omezená oblast v rovině ohraničená křivkami nebo určená nerovnicemi.

1. $D:\ x = 1,\ y = x,\ y = 2x$
2. $D:\ y = 5,\ y = 3x,\ y = \frac{1}{3}x$
3. $D:\ x + y = 1,\ y = x,\ y = \frac{1}{2}x$
4. $D:\ x = 1,\ x = 2,\ y - x = 5,\ y = 3$
5. $D:\ x \le y,\ y \le 1,\ x \ge 0$
6. $D:\ |x| \le y,\ y \le 2$
7. $D:\ y = x^2+1,\ y = x-1,\ 0 \le x \le 1$
8. $D:\ y^2 = x,\ 1 \le x \le 3$
9. $D:\ y \le x^2,\ y \le -x+2,\ y \ge 0$
10. $D:\ y \ge x^2,\ y \le -x+2,\ x \ge 0$
11. $D:\ y \le -2x,\ y^2 \le x$
12. $D:\ y \le x,\ y \ge x^2$
13. $D:\ x = 1,\ x = 2,\ y = x,\ y = \frac{1}{x}$
14. $D:\ y = 0,\ y = 1,\ x = \sqrt{y},$
    $x = 3 - 2y$
15. $D:\ y = 0,\ y = 1,\ y = \sqrt{x},$

$x = 3 - 2y$

16. $D: \; x - y^2 = 0, \; x^2 + y = 0,$
17. $D: \; x^3 \leq y, \; y^2 \leq x$
18. $D: \; y \geq x^2, \; y \leq \sqrt{8x}, \; y \geq -2x + 3$
19. $D: \; y \geq x^2, \; y \leq 2 - x^2$
20. $D: \; y \geq \operatorname{arctg} x \geq \frac{\pi}{4}, \; y \leq \frac{\pi}{3}$
21. $D: \; y \geq 1 - x, \; y \geq \ln x, \; y \leq 2$
22. $D: \; y = \sin x, \; y = \cos x, \; y = 0,$
$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Výsledky:

1. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_x^{2x} 1 \, dy \right) dx$
2. $\int\limits_0^5 \left(\int\limits_{\frac{1}{3}y}^{3y} 1 \, dx \right) dy$
3. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} 1 \, dy \right) dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\int\limits_{\frac{x}{2}}^{1-x} 1 \, dy \right) dx$
$= \int\limits_0^{\frac{1}{4}} \left(\int\limits_y^{2y} 1 \, dx \right) dy + \int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_y^{1-y} 1 \, dx \right) dy$
4. $\int\limits_1^2 \left(\int\limits_3^{5+x} 1 \, dy \right) dx$
5. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_x^1 1 \, dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^y 1 \, dx \right) dy$
6. $\int\limits_0^2 \left(\int\limits_{-y}^{y} 1 \, dx \right) dy$
7. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x-1}^{x^2+1} 1 \, dy \right) dx$
8. $\int\limits_1^3 \left(\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 1 \, dy \right) dx$
9. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} 1 \, dx \right) dy$
10. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^2}^{2-x} 1 \, dy \right) dx$
11. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \left(\int\limits_{-\sqrt{x}}^{-2x} 1 \, dy \right) dx = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(\int\limits_{y^2}^{-\frac{y}{2}} 1 \, dx \right) dy$
12. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^2}^{x} 1 \, dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_y^{\sqrt{y}} 1 \, dx \right) dy$
13. $\int\limits_1^2 \left(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} 1 \, dy \right) dx$
14. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} 1 \, dx \right) dy$
15. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{y^2}^{3-2y} 1 \, dx \right) dy$
16. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-\sqrt{y}}^{-x^2} 1 \, dy \right) dx = \int\limits_{-1}^{0} \left(\int\limits_{y^2}^{\sqrt{-y}} 1 \, dx \right) dy$
17. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^3}^{\sqrt{x}} 1 \, dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} 1 \, dx \right) dy$
18. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int\limits_{-2x+3}^{\sqrt{8x}} 1 \, dy \right) dx + \int\limits_1^2 \left(\int\limits_{x^2}^{\sqrt{8x}} 1 \, dy \right) dx$
$= \int\limits_1^2 \left(\int\limits_{\frac{3-y}{2}}^{\sqrt{y}} 1 \, dx \right) dy + \int\limits_2^4 \left(\int\limits_{\frac{y^2}{8}}^{\sqrt{y}} 1 \, dx \right) dy$
19. $\int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{x^2}^{2-x^2} 1 \, dy \right) dx$
20. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \left(\int\limits_{\operatorname{arctg} x}^{\frac{\pi}{3}} 1 \, dy \right) dx$
21. $\int\limits_0^2 \left(\int\limits_{1-y}^{\mathrm{e}^y} 1 \, dx \right) dy$
22. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int\limits_{\arcsin y}^{\arccos y} 1 \, dx \right) dy$

Příklad 1.1.2: Vypočtěte následující $\int\int_D f(x,y)dxdy$, je-li oblast D dána nerovnicemi:

1. $\iint\limits_D (x^2+2y)\,dxdy,\ D: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$ $\left[\frac{14}{3}\right]$
2. $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dxdy, \quad D:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ $\left[\frac{\pi}{12}\right]$
3. $\iint\limits_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dxdy, \quad D:\ 3 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 2$ $\left[\ln\frac{25}{24}\right]$
4. $\iint\limits_D e^x\,dxdy, \quad D:\ 1 \le y \le 2,\ 0 \le x \le \ln y$ $\left[\frac{1}{2}\right]$
5. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy, \quad D:\ 1 \le x \le 2,\ \frac{1}{x} \le y \le x$ $\left[\frac{9}{4}\right]$
6. $\iint\limits_D e^{x+y}\,dxdy, \quad D:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$ $\left[(e-1)\left(e^2-1\right)\right]$
7. $\iint\limits_D \sin(2x+y)\,dxdy, \quad D: 0 \le x \le \pi,\ \frac{\pi}{4} \le y \le \pi$ $[0]$
8. $\iint\limits_D x^4\,dxdy, \quad D:\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2},\ \cos y \le x \le 1$ $\left[\frac{15\pi-16}{150}\right]$
9. $\int\int\limits_D \varrho^2 \sin^2\varphi\, d\rho d\varphi, \quad D:\ 0 \le \varrho \le 3\cos\varphi,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ $\left[\frac{12}{5}\right]$
10. $\iint\limits_D x^2 y \cos\left(xy^2\right)dxdy, \quad D:\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le 2$ $\left[-\frac{\pi}{16}\right]$
11. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy, \quad D:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$ $\left[\frac{\pi}{6}\right]$
12. $\iint\limits_D (2x-y+3)\,dxdy, \quad D:\ 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le x,\ y \le \frac{4}{x}$ $[24+12\ln 2]$
13. $\iint\limits_D |x-1|\,dxdy, \quad D:\ x^2-y-1 \le 0,\ x-y+1 \ge 0$ $\left[\frac{37}{12}\right]$
14. $\iint\limits_D |x|\,dxdy, \quad D:\ y \le \frac{\pi}{3},\ y \ge -x,\ y \ge \operatorname{arctg} x$ $\left[\frac{\pi^3-27\pi+81\sqrt{3}}{162}\right]$
15. $\iint\limits_D |x+y-2|\,dxdy, \quad D:\ y \ge x^{\frac{2}{3}},\ y \le 2-x^2$ $\left[\frac{8}{3}\right]$
16. $\iint\limits_D |y-x^2|\,dxdy, \quad D:\ x \ge 0,\ 0 \le y \le 1,\ y \ge \ln x$ $\left[\frac{5e^3-26}{45}\right]$
17. $\iint\limits_D |y-x|\,dxdy, \quad D:\ x \le 2,\ y \le 4x,\ y \le \frac{4}{x},\ y \ge \frac{x}{4}$ $\left[\frac{41}{12}\right]$
18. $\iint\limits_D |y-x|\,dxdy, \quad D:\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ \ln x \le y \le 1$ $\left[\frac{3e^2-11}{12}\right]$

Příklad 1.1.3: Vypočtěte následující integrály $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, je-li D omezená rovinná oblast ohraničená danými křivkami:

1. $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy,\ D: y=0,\ y=x,\ x+y=2$ $\left[\frac{2}{3}\right]$
2. $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dxdy,\ D: x=0,\ y=\pi,\ y=x$ $[-2]$
3. $\iint\limits_D \frac{x}{y^2}\,dxdy,\ D: x=1,\ y=3,\ y=x$ $\left[\frac{2}{3}\right]$
4. $\iint\limits_D sin\,y^2\,dxdy,\ D: y=3,\ y=3x,\ y=\frac{1}{3}x$ $\left[\frac{4}{9}\sin 9\right]$
5. $\iint\limits_D (x^2+y)\,dxdy,\ D: y=x^2,\ y^2=x$ $\left[\frac{33}{140}\right]$
6. $\iint\limits_D x\,dxdy,\ D: x=0,\ y=3-x^2+2x,\ y=\frac{3}{2}x$ $\left[\frac{10}{3}\right]$
7. $\iint\limits_D y\,dxdy,\ D: y+x-4=0,\ x^2-y+2=0$ $\left[\frac{81}{5}\right]$
8. $\iint\limits_D xy\,dxdy,\ D: xy=1,\ 2y+2x-5=0$ $\left[\frac{165}{128}-\ln 2\right]$
9. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy,\ D: x=2,\ y=x,\ xy=1$ $\left[\frac{9}{4}\right]$
10. $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,dxdy,\ D: y=1,\ y=2,\ x=0,\ x=y^2$ $\left[\mathrm{e}^2-\frac{3}{2}\right]$
11. $\iint\limits_D dxdy,\ D: x+y-4=0,\ x+y-12=0,\ y^2=2x$ $[62]$
12. $\iint\limits_D (x+y+10)\,dxdy,\ D: x^2+y^2=4$ $[40\pi]$
13. $\iint\limits_D xy\,dxdy,\ D: y\geq 0,\ (x-2)^2+y^2=1$ $\left[\frac{4}{3}\right]$
14. $\iint\limits_D (x^2+y)\,dxdy,\ D: y=\frac{1}{2}x,\ y=2x,\ xy=2,\ x\geq 0$ $\left[\frac{17}{6}\right]$
15. $\iint\limits_D |(x-1)\,y|\,dxdy,\ D:\ x=0,\ y=-x+2,\ y=-1$ $\left[\frac{41}{24}\right]$
16. $\iint\limits_D \frac{x}{3}\,dxdy,\ D: x=2+\sin y,\ x=0,\ y=0,\ y=2\pi$ $\left[\frac{3\pi}{2}\right]$
17. $\iint\limits_D |x|e^y\,dxdy,\ D: y=x^2,\ y=x$ $\left[\frac{3-\mathrm{e}}{2}\right]$
18. $\iint\limits_D |y-x|\,dxdy,\ D: y=\sqrt{x},\ y=0,\ x=1$ pro $x\geq 0$ $\left[\frac{11}{60}\right]$

19. $\iint\limits_D |y - x^2|\, dxdy,\ D : y = \sqrt{x},\ y = x^4$ pro $x \geq 0$ $\left[\frac{13}{140}\right]$

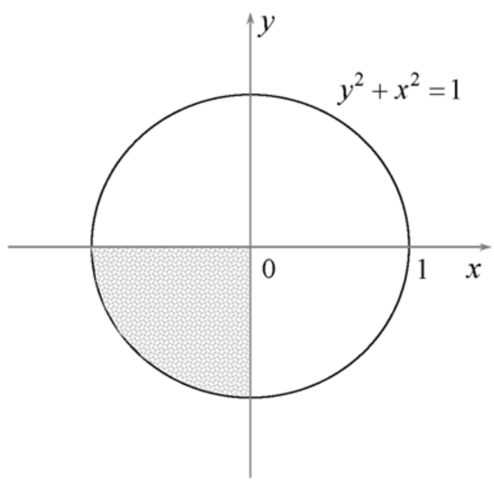
20. $\iint\limits_D |y - x^2|\, dxdy,\ D : y = \sqrt{2 - x},\ y = 0$ pro $x \geq 0$ $\left[\frac{512\sqrt{2}-238}{420}\right]$

1.2 Transformace dvojného integrálu

Příklad 1: Vypočtěte integrál $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\, dxdy$, kde množina

$$D = \left\{\ [x, y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq 0,\ y \leq 0\right\}.$$

Řešení: Funkce $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ je na oblasti D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Množina D je výseč kruhu se středem v počátku souřadného systému - viz Obrázek 1.7. Výpočet provedeme transformací dvojného integrálu do polárních souřadnic:



Obrázek 1.7: $D = \{\ [x, y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq 0,\ y \leq 0\}$

$$\begin{array}{lll} x = \varrho\cos\varphi & D^*: & 0 \leq \varrho \leq 1 \\ y = \varrho\sin\varphi & & \pi \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi \\ |J| = \varrho & & \end{array}$$

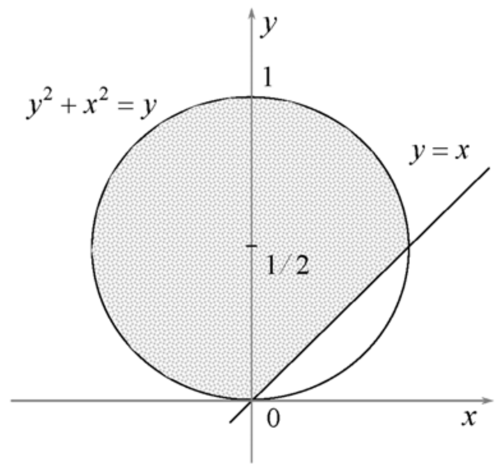
Potom

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\, dxdy &= \iint\limits_{D^*} \mathrm{e}^{-\varrho^2}\varrho\, d\varrho d\varphi = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \varrho\, \mathrm{e}^{-\varrho^2} d\varphi\right) d\varrho = \int\limits_0^1 \varrho\, \mathrm{e}^{-\varrho^2}\, [\varphi]_\pi^{\frac{3}{2}\pi}\, d\rho \\
&= \frac{1}{2}\pi \int\limits_0^1 \varrho \mathrm{e}^{-\varrho^2} d\varrho = \left| \begin{array}{ll} t = -\varrho^2 & \begin{array}{c|c} \varrho & t \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{array} \\ dt = -2\varrho\, d\varrho & \end{array} \right| = -\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{-1} \mathrm{e}^t\, dt \\
&= \frac{\pi}{4}\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Příklad 2: Vypočtěte integrál $\iint\limits_D dxdy$, kde množina

$$D = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^2+y^2 \le y,\ x \le y\}\,.$$

Řešení: Funkce $f(x,y) = 1$ je na oblasti D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Množina D je znázorněna na Obrázku 1.8. Výpočet provedeme transformací dvojného integrálu do polárních souřadnic:



Obrázek 1.8: $D = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^2+y^2 \le y,\ x \le y\}$

$$\begin{array}{lll} x = \varrho\cos\varphi & D^*: & 0 \le \varrho \le \sin\varphi \\ y = \varrho\sin\varphi & & \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \pi \\ |J| = \varrho & & \end{array}$$

Potom

$$\begin{aligned} \iint\limits_D dxdy &= \iint\limits_{D^*} \varrho\, d\varrho d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(\int\limits_0^{\sin\varphi} \varrho\, d\varrho \right) d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (1-\cos 2\varphi)\ d\varphi \\ &= \frac{1}{4}\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \frac{1}{16}\,(3\pi+2)\,. \end{aligned}$$

Příklad 1.2.1: Vyjádřete dvojný integrál použitím transformace do polárních souřadnic:

1. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2;\ x^2+y^2 \le 3\}$
2. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2;\ x^2+y^2 \le ax\}$, je-li a) $a = 4$, b) $a = -4$
3. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2;\ x^2+y^2 \le by\}$, je-li a) $b = 2$, b) $b = -2$

4. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2;\ x^2+y^2 \le 16,\ x^2+y^2 \ge 1, y \ge x,\ y \ge -x\ \}$

5. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$ kde D je omezená oblast v rovině ohraničená rovinnými křivkami: $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=8x,\ y=x,\ y=2x$

6. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$ kde D je vnitřní část pravé smyčky Bernoulliovy lemniskáty $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)\,,\ a \ge 0$

Výsledky:

1. $\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\sqrt{3}} f(\rho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\right)d\varphi$

2. a) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^{4\cos\varphi} f(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\right)d\varphi,$ b) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\int\limits_0^{4\cos\varphi} f(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\right)d\varphi$

3. a) $\int\limits_0^{\pi}\left(\int\limits_0^{2\sin\varphi} f(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\right)d\varphi,$ b) $\int\limits_{-\pi}^{0}\left(\int\limits_0^{2\sin\varphi} f(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\right)d\varphi$

4. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\int\limits_1^{4} f(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\right)d\varphi$

5. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arctg}2}\left(\int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi)\,\varrho\,d\varrho\right)d\varphi$

6. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_0^{a\sqrt{\cos2\varphi}} f(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi)\,\varrho\,d\varrho\right)d\varphi$

Příklad 1.2.2: Vypočtěte integrály s použitím transformace do polárních souřadnic:

1. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2; x^2+y^2 \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$

2. $\int\limits_0^4 [\int\limits_0^{\sqrt{16-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy]dx$

3. $\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2;\ x^2+y^2 \le 3x,\}$

4. $\iint\limits_D \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2;\ x^2+y^2 \ge 1,\ x^2+y^2 \le 9,\ y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}, y \le x\sqrt{3}\}$

5. $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2;\ 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ y \ge 0\}$

6. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2;\ 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ y \ge |x|\}$

7. $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2;\ x^2+y^2 \le 2y,\ x \ge 0\}$

8. $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2;\ \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2,\ y \ge 0\}$

9. $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2;\ 1 \le x^2+y^2 \le \mathrm{e}^2\}$

10. $\iint\limits_D |xy|\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2;\ x^2+y^2-2y \le 0\}$

11. $\iint\limits_D |x|\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2;\ x^2+y^2 \le ay,\ a > 0\}$

12. $\iint\limits_D |y|\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2;\ x^2+y^2+2x-6y+6 \le 0\}$

13. $\iint\limits_D |x|\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2;\ x^2+y^2-4y \le 0 \le x^2+y^2-2y,\ y \le -x\ \}$

14. $\iint\limits_D |y|\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2;\ x^2+y^2-2x \ge 0,\ x^2+y^2-4x \le 0\}$

15. $\iint\limits_D |x|\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2;\ x^2+y^2 \le ay,\ y+\sqrt{3}x \ge 0,\ a \ge 0\}$

16. $\iint\limits_D |x|y^2\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E}_2;\ 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \le y \le 0\}$

Výsledky:

1. $\left[\frac{1}{2}\pi\right]$
2. $\left[\frac{\pi}{4}\left(17\ln 17 - 16\right)\right]$
3. $[9\pi - 12]$
4. $\left[\frac{\pi^2}{6}\right]$
5. $\left[\ \frac{1}{2}\pi(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-9}\right]$
6. $\left[\ \frac{15}{8}\pi\right]$
7. $\left[\ \frac{8}{3}(\pi - \frac{4}{3}\right]$
8. $[\ -3\pi^2]$
9. $[\ 2\pi]$
10. $\left[\frac{4}{3}\right]$
11. $\left[\frac{a^3}{6}\right]$
12. $[12\pi]$
13. $\left[\frac{112}{3}\right]$
14. $\left[\frac{28}{3}\right]$
15. $\left[\frac{23a^3}{192}\right]$
16. $\left[\frac{31\sqrt{3}}{60}\right]$

Příklad 1.2.3: Vypočtěte dvojný integrál pomocí transformace do zobecněných polárních souřadnic

1. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-\frac{y^2}{4}}\,dxdy,\ \ D=\{[x,y]\in \mathbf{E}_2; x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\}$
2. $\iint\limits_D xy\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in \mathbf{E}_2; \frac{x^2}{4}+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$
3. $\iint\limits_D (9x^2+4y^2+4)\,dxdy,\ \ D=\{[x,y]\in \mathbf{E}_2; 9x^2+4y^2\le 36\}$
4. $\iint\limits_D |x|\,dxdy,\ \ D=\{[x,y]\in \mathbf{E}_2; \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1,\ y\le 0,\ x\ge 0\}$

Výsledky:

1. $\left[\frac{4\pi}{3}\right]$
2. $\left[\frac{1}{2}\right]$
3. $[132\pi]$
4. $[4]$

Příklad 1.2.4: Vyjádřete $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ použitím vhodné transformace a následně vypočítejte pro zadanou funkci. D je omezená rovinná oblast, ohraničená křivkami nebo určená nerovnicemi.

1. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ f(x,y)=x+y,\ D:\ 0\le x\le 4,\ 2x\le y\le 3x$

   (Návod: Užijte transformační rovnice: $u=x,\ v=y-2x$.)
2. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ f(x,y)=(x-y)^2,\ D:\ 0\le x\le 2,\ 1-x\le y\le 2-x,$
   $y\ge 0$

   (Návod: Užijte transformační rovnice: $u=x+y,\ v=x-y$.)
3. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ f(x,y)=(x-y)^2,\ D:=0\le x\le 2,\ 1-x\le y\le 2-x$

   (Návod: Užijte transformační rovnice: $u=x,\ v=x+y$.)
4. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ f(x,y)=1,\ D:\ xy=\frac{1}{2},\ xy=2,\ 2y=x,\ y=2x,$
   pro $x\ge 0,\ y\ge 0$

   (Návod: Užijte transformační rovnice: $u=xy,\ y=vx$.)
5. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ xy=1,\ D:\ y^2=x,\ y^2=2x,\ xy=2$

   (Návod: Užijte transformační rovnice: $u=xy,\ y^2=vx$.)
6. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ f(x,y)=1,\ D:\ y^2=x,\ y^2=8x,\ y=x^2,\ y=\frac{x^2}{8}$

   (Návod: Užijte transformační rovnice: $x^2=uy,\ y^2=vx$.)

7. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ f(x,y)=1,\ D:\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\le a^{\frac{2}{3}},\ a\ge 0$

(Návod: Užijte transformační rovnice: $x=\varrho\cos^3\varphi,\ y=\varrho\sin^3\varphi$.)

Výsledky:

1. $\int\limits_0^4[\int\limits_0^u f(u,\ v+2u)\ dv]du$ $\left[\frac{224}{3}\right]$

2. $\frac{1}{2}\int\limits_1^2[\int\limits_{-u}^{-u+4} f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)dv]du$ $\left[\frac{10}{3}\right]$

3. $\int\limits_0^2[\int\limits_1^2 f(u,v-u)\,dv]du$ $\left[\frac{10}{3}\right]$

4. $\int\limits_{1/2}^2[\int\limits_{1/2}^2 f\left(\sqrt{\frac{u}{v}},\sqrt{uv}\right)\frac{1}{2|v|}du]dv$ $\left[\frac{3}{2}\ln 2\right]$

5. $\int\limits_1^2[\int\limits_1^2 f\left(\sqrt[3]{\frac{u^2}{v}},\sqrt[3]{uv}\right)\frac{1}{3|v|}\ du]dv$ $\left[\frac{1}{3}\ln 2\right]$

6. $\int\limits_1^8[\int\limits_1^8 f\left(\sqrt[3]{u^2v},\sqrt[3]{uv^2}\right)\frac{1}{3}\ du]dv$ $\left[\frac{49}{3}\right]$

7. $3\int\limits_0^a[\int\limits_0^{2\pi} f\left(\varrho\cos^3\varphi,\ \varrho\sin^3\varphi\right)\ \varrho\cos^2\varphi\ \sin^2\varphi\ d\varphi]d\varrho$ $\left[\frac{3}{8}\pi a^2\right]$

1.3 Geometrické aplikace dvojného integrálu

$A\subset \mathbf{E_2}$ je elementární oblast prvního nebo druhého druhu.

$O=\iint\limits_A dxdy\ \ [m^2]$ – obsah rovinné oblasti A

$V=\iint\limits_A (f(x,y)-g(x,y))\,dxdy\ \ [m^3]$ – objem válcového tělesa

$W=\{[x,y,z]\in \mathbf{E_3}:\ [x,y]\in A,\ g(x,y)\le z\le f(x,y)\}$

$S=\iint\limits_A \sqrt{1+\left(f'_x(x,y)\right)^2+\left(f'_y(x,y)\right)^2}dxdy\ \ [m^2]$ – obsah části plochy

$S=\{[x,y,z]\in \mathbf{E_3}:\ z=f(x,y),[x,y]\in A\}$

Poznámka: Doplňte příslušné jednotky v zadání a výsledcích.

Příklad 1.3.1: Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce A ohraničeného křivkami:

1. $x+y=1,\ x+y=2,\ y=\frac{1}{2}x,\ y=2x$
2. $y=\cos x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ y=0$
3. $y=4,\ y=2^x,\ y=2^{-2x}$
4. $y=x^2,\ y=4-x^2$
5. $y=-2,\ y=x+2,\ y=2,\ y^2=x$
6. $y=x^2,\ y=\sqrt{x}$
7. $xy=4,\ x^2=2y,\ y=4,\ x=0$
8. $y=\frac{1}{x},\ y=4x,\ y=8$ a přímkou $y=0$
9. $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=2x,\ y=x,\ y=0$
10. $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=8x,\ y=2x,\ y=x$
11. $(x-1)^2+y^2=1,\ x^2+(y-1)^2=1$
12. A omezený obrazec ohraničený křivkou $x^2+y^2=5$ a tečnou k této křivce v bodě $A=[1,2]$

Výsledky:

1. $\left[\frac{1}{2}\right]$
2. $[1]$
3. $\left[12-\frac{9}{\ln 4}\right]$
4. $\left[\frac{16\sqrt{2}}{3}\right]$
5. $\left[\frac{40}{3}\right]$
6. $\left[\frac{1}{3}\right]$
7. $\left[4\left(\frac{2}{3}+\ln 2\right)\right]$
8. $\left[\frac{15}{2}-\ln 4\right]$
9. $\left[\frac{3}{4}(\pi+2)\right]$
10. $[12\text{arctg}\ 2+6\sin 2\text{arctg}\ 2-3\pi-6]$
11. $\left[\frac{\pi}{2}-1\right]$
12. $\left[5-\frac{5}{2}\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$

Příklad 1.3.2: Vypočtěte obsah rovinného obrazce A:

1. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y\le -x^3,\ y\le 2x^3,\ y\ge x^3-1\}$
2. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ 9\,(y+2)\ge (x-1)^3\,,\ x-y-3\ge 0,\ x\ge 0\}$
3. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y\ge x^2,\ y\le\sqrt{8x},\ y\ge -2x+3\}$

4. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x \geq 0,\ \operatorname{arctg} x \leq y \leq 1\}$
5. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y \leq 1,\ y \leq x-1,\ y \geq \ln x\}$
6. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^2+y^2 \leq 4,\ x+y \geq 2\}$
7. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \leq 1,\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2} \geq 1\}$
8. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y \leq \arcsin x,\ y \geq \frac{x^2}{2},\ y \leq \frac{\pi}{2}\}$
9. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ (y+3)^2 \leq 3x-2,\ y+1+x^2 \leq 0\}$
10. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y \leq 1-x,\ y \leq e^x,\ y \geq 0\}$
11. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x \geq 1,\ \frac{1}{x^3} \leq y \leq \frac{1}{x^2}\}$
12. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x \leq 0,\ e^{3x} \leq y \leq e^x\}$
13. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x \geq 0,\ -e^{-x} \leq y \leq \frac{1}{x^2+1}\}$
14. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y \leq -x^2,\ y \leq x^3-2,\ 3x+2y+9 \geq 0\}$
15. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y \leq x^2+1,\ y \geq (x-1)^3,\ y \leq -x+3,\ x \geq 0\}$
16. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ 2x-y-4 \leq 0,\ y^2 \geq 4x,\ y+|x|^3 \leq 0\}$

Výsledky:

1. $\left[\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt{32}}\right)\right]$
2. $\left[\frac{9}{4}\right]$
3. $\left[\frac{19}{12}\right]$
4. $\left[\ln\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 1}\right]$
5. $\left[\frac{2e-5}{2}\right]$
6. $[\pi-2]$
7. $\left[\frac{3}{2}(\pi-2)\right]$
8. $\left[\frac{\pi\sqrt{\pi}-3}{3}\right]$
9. $\left[\frac{5}{3}\right]$
10. $\left[\frac{3}{2}\right]$
11. $\left[\frac{1}{2}\right]$
12. $\left[\frac{2}{3}\right]$
13. $\left[\frac{\pi+2}{2}\right]$
14. $\left[\frac{34}{3}\right]$
15. $\left[\frac{17}{6}\right]$
16. $\left[\frac{29}{3}\right]$

Příklad 1.3.3: Vypočtěte objem tělesa W ohraničeného plochami:

1. $6x-9y+5z=0,\ 3x-2y=0,\ 4x-y=0,\ x+y=5,\ z=0$
2. $x+y+z=6,\ 3x+2y=12,\ y=0,\ z=0$
3. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=\pi,\ y=\pi,\ z=\sin^2 x\,\sin^2 y$
4. $z=x^2+y^2,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

5. $z = 2x^2 + y^2 + 1,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$
6. $y = x^2,\ x + y + z = 4,\ y = 1,\ z = 0$
7. $x^2 = 6 - 5y,\ y^2 = x,\ 0 \leq z \leq 9$
8. $x^2 = y,\ x^2 = 4 - 3y,\ z = 0,\ z = 9$
9. $y = x^2,\ x = y^2,\ z = 12 + y - x^2,\ z = 0$
10. $z = x^2 - y^2,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x \leq 1$
11. $x^2 + z^2 = 16,\ y = 0,\ z = 0,\ y = x,\ x \geq 0$
12. $y = x^2,\ y^2 = x,\ z = x^2 - y^2$
13. $z = 4 - x^2 - y^2,\ 2z = 2 + x^2 + y^2$
14. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2,\ 2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$
15. $x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 - z^2 = -4$
16. $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0,\ x^2 + y^2 - z^2 = -4$
17. $x^2 + y^2 = a^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$
18. $x^2 + y^2 - 2ax = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2,\ a \geq 0$
19. $x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \geq 0$
20. $z = 4 - y^2,\ y = \frac{x^2}{2},\ z = 0$
21. $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z^2 = x^2 + y^2,\ z \geq 0$
22. $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 3z$
23. $z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = x,\ x^2 + y^2 = 2x,\ z = 0$
24. $z = xy,\ x^2 + y^2 = 2x,\ z \geq 0$
25. $z = -y^3,\ z = -x$ pro $-x \leq y \leq 0,\ x \leq 1$
26. $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$
27. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2,\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$

Výsledky:

1. $\left[\frac{15}{2}\right]$
2. $[4]$
3. $\left[\frac{\pi^2}{4}\right]$
4. $\left[\frac{1}{6}\right]$
5. $\left[\frac{3}{4}\right]$
6. $\left[\frac{68}{15}\right]$

7. $\left[\frac{243}{5}\right]$
8. $[16]$
9. $\left[\frac{569}{140}\right]$
10. $\left[\frac{1}{3}\right]$
11. $\left[\frac{64}{3}\right]$
12. $\left[\frac{1}{35}\right]$
13. $[3\pi]$
14. $[8\pi]$
15. $\left[\frac{32\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\right]$
16. $\left[\frac{32\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$
17. $\left[\frac{4\pi a^3}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)\right]$
18. $\left[\frac{16a^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)\right]$
19. $\left[\frac{32}{9}\right]$
20. $\left[\frac{256}{21}\right]$
21. $\left[21\pi\left(2-\sqrt{2}\right)\right]$
22. $\left[\frac{19\pi}{6}\right]$
23. $\left[\frac{45\pi}{32}\right]$
24. $\left[\frac{2}{3}\right]$
25. $\left[\frac{23}{60}\right]$
26. $[16\pi]$
27. $\left[4\pi\left(2-\sqrt{2}\right)\right]$

Příklad 1.3.4: Vypočtěte obsah plochy S, je-li:

1. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ 6x+3y+2z=12,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0 \,\}$
2. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ x+y+z-4=0,\ x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=2 \,\}$
3. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ z^2=2xy,\ x\geq 0,\ x\leq 3,\ y\geq 0,\ y\leq 6,\ z\geq 0 \,\}$
4. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ 2z=x^2,\ y\leq 2x,\ y\geq \frac{x}{2},\ x\leq 2\sqrt{2},\ \}$
5. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ x^2+z^2=1,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y\leq 2 \,\}$
6. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ x^2+y^2=2z,\ x^2+y^2\leq 1 \,\}$
7. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ z=xy,\ x^2+y^2\leq a^2 \,\}$
8. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ y^2+z^2=x^2,\ x^2+y^2\leq a^2 \,\}$
9. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1 \,\}$
10. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2\leq 1,\ z\geq 0 \,\}$
11. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ 3x^2+3y^2\leq z^2 \,\}$
12. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ x^2+y^2+z^2=9,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1 \,\}$
13. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ x^2+y^2-x\leq 0 \,\}$
14. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2\leq 2x \,\}$
15. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ y^2+z^2=2ax,\ y^2\leq ax,\ x\leq a,\ a > 0 \,\}$
16. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z^2\leq 2y \,\}$
17. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ z^2=4x,\ y^2\leq 4x,\ x\leq 1 \,\}$

18. $S = \{ [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ x^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 \leq 1 \}$
19. $S = \{ [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ z = -\frac{x^2}{2} + 2,\ \frac{x^3}{3} \leq y \leq x,\ x \geq 0 \}$
20. $S = \{ [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ z = -x^3,\ x^3 \leq y \leq 0,\ x \geq -1 \}$
21. $S = \{ [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ z = 4 - x^2,\ 0 \leq y \leq 2x,\ z \geq 0 \}$
22. $S = \{ [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ z = 2 - (x^2 + y^2)\,,\ 0 \leq y \leq x,\ z \geq 0 \}$

Výsledky:

1. $[14]$
2. $[4\sqrt{3}]$
3. $[36]$
4. $[13]$
5. $[2\pi]$
6. $\left[\frac{2}{3}\pi\left(\sqrt{8}-1\right)\right]$
7. $\left[\frac{2\pi}{3}\left((1+a^2)^{\frac{3}{2}}-1\right)\right]$
8. $[2\pi a^2]$
9. $\left[\frac{2}{3}\pi ab\left(\sqrt{8}-1\right)\right]$
10. $\left[4\pi\left(2-\sqrt{3}\right)\right]$
11. $\left[4\pi\left(2-\sqrt{3}\right)\right]$
12. $\left[72\arcsin\frac{2}{3}\right]$
13. $[\pi - 2]$
14. $[\sqrt{2}\pi]$
15. $\left[\frac{\pi a^2}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)\right]$
16. $[\pi\sqrt{2}]$
17. $\left[\frac{16}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)\right]$
18. $[8]$
19. $\left[\frac{47}{45}\right]$
20. $\left[\frac{10\sqrt{10}-1}{54}\right]$
21. $\left[\frac{17\sqrt{17}-1}{6}\right]$
22. $\left[\frac{13\pi}{24}\right]$

1.4 Fyzikální aplikace dvojného integrálu

$A \subset \mathbf{E_2}$ je elementární oblast prvního nebo druhého druhu. Tenká rovinná deska A má plošnou hustotu $\sigma(x,y)$ $[kg \cdot m^{-2}]$.

$m = \iint\limits_A \sigma(x,y)dxdy$ $[kg]$ – hmotnost desky A

$S_x = \iint\limits_A y\sigma(x,y)dxdy$ $[kg \cdot m]$ – statický moment desky A vzhledem k ose x

$S_y = \iint\limits_A x\sigma(x,y)dxdy$ $[kg \cdot m]$ – statický moment desky A vzhledem k ose y

$T = [t_1, t_2]\,,$ kde $t_1 = \dfrac{S_y}{m},\ t_2 = \dfrac{S_x}{m}$ – těžiště desky A

$I_x = \iint\limits_A y^2\sigma(x,y)dxdy$ $[kg \cdot m^2]$ – moment setrvačnosti desky A vzhledem k ose x

$I_y = \iint\limits_A x^2\sigma(x,y)dxdy$ $[kg \cdot m^2]$ – moment setrvačnosti desky A vzhledem k ose y

Poznámka: Doplňte příslušné jednotky v zadání a výsledcích.

Příklad 1.4.1: Vypočtěte hmotnost rovinného obrazce A, je-li $\sigma(x,y)$ plošná hustota:

1. A je omezená rovinná oblast ohraničená křivkami: $y = \mathrm{e}^{x},\ y = \mathrm{e}^{-2x}$, $y = 4;\ \sigma(x,y) = k$
2. A je omezená rovinná oblast ohraničená křivkami: $y = 2^{x},\ y = 2^{-2x}$, $x = 1;\ \sigma(x,y) = k$
3. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y \le x^3,\ y \ge 4x\ \};\ \sigma(x,y) = e^{x}$
4. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \sin 2x\ \};\ \sigma(x,y) = x^2$
5. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y \le 2x^3,\ y \le \frac{2}{x},\ x - y \le 1\ \};\ \sigma(x,y) = |x-1|$
6. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y \le e^{2x},\ y \ge e^{x},\ y \le e^{\pi}\ \};\ \sigma(x,y) = |y|$
7. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^2 + y^2 - 4x \le 0,\ x^2 + y^2 - 2x \ge 0,\ y \le x\ \};\ \sigma(x,y) = |x|$
8. $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^3 \le y,\ y^2 \le x\ \};\ \sigma(x,y) = |y - x|$

Výsledky:

1. $\left[k\left(-\frac{9}{2} + 12\ln 2\right)\right]$
2. $\left[k\left(\frac{5}{8}\frac{1}{\ln 2}\right)\right]$
3. $\left[\frac{26}{e^2} - 2\right]$
4. $\left[\frac{\pi^2-4}{8}\right]$
5. $\left[\frac{21-10\ln 2}{10}\right]$
6. $\left[\frac{2\pi e^{2\pi}-e^{2\pi}+1}{8}\right]$
7. $\left[\frac{7}{12}(9\pi + 8)\right]$
8. $\left[\frac{23}{420}\right]$

Příklad 1.4.2: Vypočtěte statický moment S_x vzhledem k ose x, resp. S_y vzhledem k ose y rovinného obrazce A, je-li $\sigma(x,y)$ plošná hustota:

1. $S_x,\ S_y$ omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = \frac{x}{2} + 3$, $y = \frac{x}{2} - 3,\ x = 0,\ x = 4;\ \sigma(x,y) = 1$
2. S_x omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = -1,\ y = 2$, $y = x,\ y = \ln x;\ \sigma(x,y) = k$
3. S_x rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ 0 \le y \le |\sin x|,\ 0 \le x \le \pi\ \}$; $\sigma(x,y) = |\cos x|$
4. S_y rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y \le x,\ y \le \frac{1}{x},\ y \ge \frac{1}{2}\ \};\ \sigma(x,y) = 2y$

5. S_x omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = x,\ x = y^2$;
   $\sigma(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

6. S_y rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \ln x \leq y \leq 1\ \}$;
   $\sigma(x,y) = xy$

7. S_y omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkou $y = \sin x$ a úsečkou spojující body $[0,0]$, $\left[\frac{\pi}{2},\ 1\right]$; $\sigma(x,y) = k$

8. $S_x,\ S_y$ omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y^2 = 4x + 4$,
   $y^2 = -2x + 4$; $\sigma(x,y) = 1$

9. S_x rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq x,\ y \geq 0\ \}$;
   $\sigma(x,y) = x^2$

10. S_x rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ 1 \leq x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 4,\ y \geq 0\ \}$; $\sigma(x,y) = x^2$

11. S_x rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ 1 \leq x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 4,\ y \geq 0,\ y \geq 2\sqrt{3}x\ \}$;
    $\sigma(x,y) = x^2$

12. S_x rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ 4 \leq x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 8,\ y \geq 0\ \}$; $\sigma(x,y) = x^2$

13. S_x rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \geq 2x,\ x \geq 0,$
    $y \geq 0\ \}$; $\sigma(x,y) = x$

14. S_y rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ 4x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \leq 0\ \}$;
    $\sigma(x,y) = |xy|$

15. S_x rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^2 + y^2 - 2x \geq 0,\ x^2 + y^2 - 4x \leq 0,$
    $y \geq 0,\ y \leq x\ \}$; $\sigma(x,y) = 1$

16. S_y omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = 2 - x,\ y = 2x^2 - 1$ pro $x \geq 0$; $\sigma(x,y) = 1$

17. S_y rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq -x,\ y \geq \sqrt{3}x\ \}$;
    $\sigma(x,y) = 1$

18. S_y omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = e^x,\ y = 0$ pro $x \leq -1$; $\sigma(x,y) = |x|$

19. S_y rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\ \}$;
    $\sigma(x,y) = x\sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Výsledky:

1. $[S_x = 24,\ S_y = 48]$
2. $\left[S_x = k\left(\mathrm{e}^2 + \frac{2}{\mathrm{e}} - 3\right)\right]$
3. $\left[S_x = \frac{1}{3}\right]$
4. $\left[S_y = -\frac{15}{64} + \ln 2\right]$
5. $\left[S_x = \frac{6-4\sqrt{2}}{5}\right]$
6. $\left[S_y = \frac{2e^3+1}{27}\right]$
7. $\left[S_y = k\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right)\right]$
8. $\left[S_x = 0,\ S_y = \frac{16}{5}\right]$
9. $\left[S_x = \frac{31\left(\sqrt{2}+4\right)}{60}\right]$
10. $\left[S_x = \frac{248}{15}\right]$
11. $\left[S_x = \frac{93}{10}\right]$
12. $\left[S_x = \frac{256}{15}\left(4\sqrt{2} - 1\right)\right]$
13. $\left[S_x = \frac{4}{3}\right]$
14. $\left[S_y = \frac{3}{40}\right]$
15. $\left[S_x = \frac{7}{2}\right]$
16. $\left[S_y = \frac{2}{3}\right]$
17. $\left[S_y = \frac{7}{6}\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\right]$
18. $\left[S_y = -\frac{5}{e}\right]$
19. $\left[S_y = \frac{32}{15}\pi\right]$

Příklad 1.4.3: Vypočtěte souřadnice (souřadnici) těžiště rovinného obrazce A, je-li $\sigma(x,y)$ plošná hustota:

1. T rovinného obrazce $A = \{\ [x,y] \in \mathbf{E_2};\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\ \}$; $\sigma(x,y) = xy$
2. T omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y^2 = 4x,\ y = x$; $\sigma(x,y) = 1$
3. T omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$; $\sigma(x,y) = 1$
4. T omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = -x,\ y = 2x - x^2$; $\sigma(x,y) = 1$
5. T omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = \sin x,\ y = 0$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$; $\sigma(x,y) = 1$
6. T rovinného obrazce $A = \{\ [x,y] \in \mathbf{E_2};\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\ \},\ a \ge 0$, $b \ge 0$; $\sigma(x,y) = 1$
7. x_T rovinného obrazce $A = \{\ [x,y] \in \mathbf{E_2};\ x^2 + y^2 \le r^2,\ 0 \le x \le y\ \},\ r \ge 0$; $\sigma(x,y) = x$
8. y_T rovinného obrazce $A = \{\ [x,y] \in \mathbf{E_2};\ 0 \le x \le y \le 3,\ y \le \frac{1}{x}\ \}$; $\sigma(x,y) = k$
9. T rovinného obrazce $A = \{\ [x,y] \in \mathbf{E_2};\ x^2 + y^2 \le 1,\ y \le x + 1,\ y \ge 0\ \}$; $\sigma(x,y) = 1$

10. x_T rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x\ \}$;
$\sigma(x,y) = xy$
11. T omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $x = 1,\ y = 0,\ y = \sqrt{x}$;
$\sigma(x,y) = \frac{1}{x+1}$
12. T rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 4x^2+y^2 \leq 4\ \}$;
$\sigma(x,y) = x$
13. T rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^2+y^2 \leq ay\ \},\ a \geq 0;\ \sigma(x,y) = y$
14. T omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $xy = 1,\ y^2 = 8x$,
$x = 2;\ \sigma(x,y) = 1$

Výsledky:

1. $T = \left[\frac{8a}{15},\ \frac{8b}{15}\right]$
2. $T = \left[\frac{8}{5},\ 2\right]$
3. $T = \left[\frac{2}{5},\ 0\right]$
4. $T = \left[\frac{3}{2},\ -\frac{3}{5}\right]$
5. $T = \left[\frac{\pi-4}{4(1-\sqrt{2})},\ \frac{\pi-2}{8(2-\sqrt{2})}\right]$
6. $T = \left[\frac{4a}{3\pi},\ \frac{4b}{3\pi}\right]$
7. $\left[x_T = \frac{3(\pi-2)r}{16\left(2-\sqrt{2}\right)}\right]$
8. $\left[y_T = \frac{14}{3(1+2\ln 3)}\right]$
9. $T = \left[\frac{2}{3(\pi+2)},\ \frac{2}{\pi+2}\right]$
10. $\left[x_T = \frac{124\left(4-\sqrt{2}\right)}{225}\right]$
11. $T = \left[\frac{3\pi-8}{12-3\pi},\ \frac{1-\ln 2}{4-\pi}\right]$
12. $T = \left[\frac{3\pi}{16},\ \frac{3}{4}\right]$
13. $T = \left[0,\ \frac{5a}{8}\right]$
14. $T = \left[\frac{141}{20(7-3\ln 2)},\ \frac{81}{8(7-3\ln 2)}\right]$

Příklad 1.4.4: Vypočtěte moment setrvačnosti rovinného obrazce A, je-li $\sigma(x,y)$ plošná hustota:

1. I_y rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ 6x+y \geq 6,\ 2x+y \leq 6,\ y \geq 0;\}$;
$\sigma(x,y) = k$
2. I_y rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ (x-a)^2+y^2 \leq a^2,\ a > 0\};\ \sigma(x,y) = k$
3. I_x omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $x+y = 2,\ x = 2$,
$y = 2;\ \sigma(x,y) = 1$
4. I_y omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $x = 0,\ x = 4$,
$y = \frac{x}{2}+3,\ y = \frac{x}{2}-3;\ \sigma(x,y) = x$

5. $I_x,\ I_y$ rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^2 \leq y \leq x\ \};\ \sigma(x,y) = k$
6. I_x rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y \leq -x^2+1,\ y \geq 0\};\ \sigma(x,y) = 1$
7. I_x omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = \sqrt{x},\ y = x^4;$
   $\sigma(x,y) = 1$
8. $I_x,\ I_y$ omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $xy = a^2,\ xy = 2a^2,$
   $x = 2y,\ 2x = y,\ x \geq 0,\ \sigma(x,y) = 1$
9. I_x rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^2+y^2 \leq r^2,\ r \geq 0\ \};\ \sigma(x,y) = 1$
10. I_x rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ y \geq x,\ y \geq -x\ \};$
    $\sigma(x,y) = y$
11. I_x rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1,\ 2x - \sqrt{3}y \leq 0,\ x \geq 0\ \};$
    $\sigma(x,y) = |x|$
12. I_y rovinného obrazce $A = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^2 \leq y \leq x\ \};\ \sigma(x,y) = \frac{1}{y+1}$
13. I_y omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = x^2,\ y = x;$
    $\sigma(x,y) = x\mathrm{e}^y$

Výsledky:

1. $[I_y = 13k]$
2. $\left[I_y = \frac{5\pi k a^4}{4}\right]$
3. $[I_x = 4]$
4. $[I_y = 384]$
5. $\left[I_x = \frac{k}{28},\ I_y = \frac{k}{20}\right]$
6. $\left[I_x = \frac{32}{105}\right]$
7. $\left[I_x = \frac{7}{65}\right]$
8. $\left[I_x = \frac{9a^4}{8},\ I_y = \frac{9a^4}{8}\right]$
9. $\left[I_x = \frac{1}{4}\pi r^4\right]$
10. $\left[I_x = \frac{31}{6}\sqrt{2}\right]$
11. $\left[I_x = \frac{24}{5}\left(1 - \frac{8}{7\sqrt{7}}\right)\right]$
12. $\left[I_y = \ln\sqrt[3]{2} + \frac{3\pi-13}{18}\right]$
13. $\left[I_y = \frac{11-4e}{2}\right]$

Kapitola 2

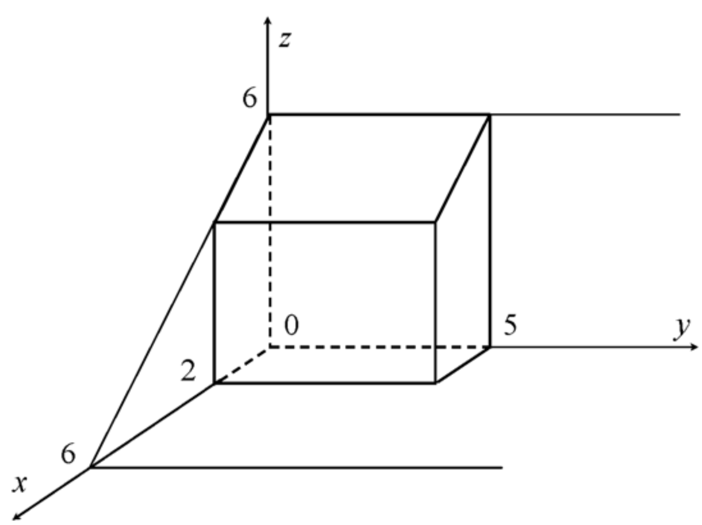
Trojný integrál

2.1 Výpočet trojného integrálu

Příklad 1: Vypočtěte integrál $\int\int\limits_W\int z^2\, dxdydz$, kde množina

$$W = \{\, [x, y, z] \,\in\, \mathbf{E_3};\, 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 5,\ 0 \le z \le 6 - x\}\,.$$

Řešení: Množina W je oblast prvního i druhého druhu v $\mathbf{E_3}$ - viz Obrázek 2.1. Funkce $f(x, y, z) = z^2$ je na oblasti W spojitá a ohraničená. Trojný integrál existuje. Podle Fubiniho věty převedeme výpočet trojného integrálu na výpočet trojnásobného integrálu. Výpočet provedeme za předpokladu, že W je oblast prvního druhu.



Obrázek 2.1: $W = \{\, [x, y, z] \,\in\, \mathbf{E_3};\, 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 5,\ 0 \le z \le 6 - x\}$

$$\begin{aligned}\iiint\limits_W z^2\,dxdydz &= \int_0^2\left(\int_0^5\left(\int_0^{6-x} z^2\,dz\right)dy\right)dx = \int_0^2\left(\int_0^5\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{6-x}dy\right)dx\\ &= \frac{1}{3}\int_0^2\left(\int_0^5 (6-x)^3\,dy\right)dx = \frac{1}{3}\int_0^2 (6-x)^3\,[y]_0^5\,dx\\ &= \frac{5}{3}\int_0^2 (6-x)^3\,dx = \frac{5}{3}\left[-\frac{(6-x)^4}{4}\right]_0^2 = \frac{1300}{3}\end{aligned}$$

Příklad 2.1.1: Převeďte trojný integrál $\iiint\limits_W dxdydz$ na trojnásobný (pokud to lze) nebo na součet trojnásobných integrálů. Množina W je omezená oblast v prostoru $\mathbf{E_3}$ ohraničená plochami nebo určená nerovnicemi.

1. $W: x \geq 0,\ y \geq 1,\ z \geq 0,\ 2z \leq 2 - 2x - y$
2. $W: x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ y \leq 1 - x,\ z \leq x + y$
3. $W: 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2,\ z \geq 0,\ z \leq 1 - y,\ z \leq y - 1$
4. $W: x \geq 0,\ x^2 \leq y \leq 1,\ z \leq 6$
5. $W: z = 0,\ z = 3\left(1 - y^2\right),\ y = |x|$
6. $W: y = 0,\ z = 0,\ x + z = \frac{\pi}{2},\ y = \sqrt{x}$
7. $W: z \geq e^x,\ z \leq e,\ 0 \leq y \leq 4,\ x \geq 0$
8. $W: z \geq -x^2,\ z \leq -y^3,\ x \leq 1,\ -x \leq y \leq 0$
9. $W: z \geq 0,\ z \leq 4 - y^2,\ x \geq 0,\ y \geq \ln x,\ y \geq 0$

Výsledky:

1. $\int\limits_1^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_1^{2-2x}\left(\int\limits_0^{1-x-\frac{y}{2}} dz\right)dy\right)dx = \int\limits_1^2\left(\int\limits_0^{1-\frac{y}{2}}\left(\int\limits_0^{1-x-\frac{y}{2}} dz\right)dx\right)dy$
2. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{1-x}\left(\int\limits_0^{x+y} dz\right)dy\right)dx$
3. $\int\limits_0^2\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{1-y} dz\right)dy\right)dx + \int\limits_0^2\left(\int\limits_1^2\left(\int\limits_0^{y-1} dz\right)dy\right)dx$
4. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_{x^2}^1\left(\int\limits_0^6 dz\right)dy\right)dx$

5. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-y}^{y} \left(\int\limits_0^{3\left(1-y^2\right)} dz \right) dx \right) dy$

6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{\sqrt{x}} \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-x} dz \right) dy \right) dx$

7. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^4 \left(\int\limits_{e^x}^{e} dz \right) dy \right) dx$

8. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-x}^{0} \left(\int\limits_{-x^2}^{-y^3} dz \right) dy \right) dx = \int\limits_{-1}^{0} \left(\int\limits_{-y}^{1} \left(\int\limits_{-x^2}^{-y^3} dz \right) dx \right) dy$

9. $\int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{e^y} \left(\int\limits_0^{4-y^2} dz \right) dx \right) dy$

Příklad 2.1.2: Vypočtěte následující integrály. Množina W je omezená oblast v prostoru $\mathbf{E_3}$ ohraničená plochami nebo určená nerovnicemi.

1. $\int\int\limits_W\int (x+y)\; dxdydz,\; W: 0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le 2,\; 0 \le z \le 3$

2. $\int\int\limits_W\int (x+y+z)\; dxdydz,\; W: 0 \le x \le 3,\; 0 \le y \le 2,\; 0 \le z \le 1$

3. $\int\int\limits_W\int z^2 r\, dtdrdz,\; W = \{[t,r,z] \in \mathbf{E_3};\; 0 \le t \le \pi,\; 0 \le r \le a,$
   $0 \le z \le b\},\; a,b > 0$

4. $\int\int\limits_W\int \frac{1}{\sqrt{x+y+z+1}}\, dxdydz,\; W: 0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le 1,\; 0 \le z \le 1$

5. $\int\int\limits_W\int \varrho^3 \sin\varphi \cos\varphi\, d\varrho d\varphi dz$, je-li $W = \{[\varrho,\varphi,z] \in \mathbf{E_3};\; 0 \le \varrho \le a,$
   $0 \le \varphi \le 2\pi,\; -\frac{1}{2} \le z \le \frac{1}{2}\}$

6. $\int\int\limits_W\int (x^2 z \cos x)\; dxdydz,\; W: 0 \le x \le 2\pi,\; 0 \le y \le 2,\; \frac{1}{2} \le z \le 1$

7. $\int\int\limits_W\int (2e^{3x+2y} z)\; dxdydz,\; W: 0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le 1,\; 0 \le z \le 1$

Výsledky:

1. $[9]$
2. $[18]$
3. $\left[\frac{1}{6}\pi a^2 b^3\right]$
4. $\left[\frac{8}{15}\left(31+12\sqrt{2}-27\sqrt{3}\right)\right]$

5. $[0]$
6. $[0]$
7. $\left[\frac{1}{6}\left(e^5 - e^3 - e^2 + 1\right)\right]$

Příklad 2.1.3: Vypočtěte následující integrály $\iiint\limits_{W} f\left(x,y,z\right)\,dxdydz$. Množina W je omezená oblast v prostoru $\mathbf{E_3}$ ohraničená plochami nebo určená nerovnicemi.

1. $\iiint\limits_{W} \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\,dxdydz,\ W: x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$
2. $\iiint\limits_{W} x\,dxdydz,\ W: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+2y+z\leq 1$
3. $\iiint\limits_{W} z\,dxdydz,\ W: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z\leq 1$
4. $\iiint\limits_{W} \frac{1}{x+y+1}\,dxdydz,\ W: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z\leq 1$
5. $\iiint\limits_{W} (x+y+z)\,dxdydz,\ W: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z\leq 4$
6. $\iiint\limits_{W} (2x-y+3z)^2\,dxdydz,\ W: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z\leq 1$
7. $\iiint\limits_{W} xyz\,dxdydz,\ W: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z\leq 1$
8. $\iiint\limits_{W} xy\,dxdydz,\ W: 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ 0\leq z\leq x+y,\ z\leq 2-x-y$
9. $\iiint\limits_{W} x^2yz^3\,dxdydz,\ W: z=xy,\ y=x,\ y=1,\ z=0$
10. $\iiint\limits_{W} x\,dxdydz,\ W: x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1,\ 0\leq z\leq x^2+y^2+1$
11. $\iiint\limits_{W} e^y\,dxdydz,\ W: 0\leq y\leq 3,\ x^2\leq z\leq 4$
12. $\iiint\limits_{W} dxdydz,\ W: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ z\leq 1-x^2,\ x+y\leq 1, y\leq 2x$
13. $\iiint\limits_{W} 16x^2yz\,dxdydz,\ W: x=1,\ y=0,\ y=-x,\ z=0,\ z=-y^3$
14. $\iiint\limits_{W} y\cos\left(x+z\right)dxdydz,\ W: y=0,\ z=0,\ y=\sqrt{x},\ x+z=\frac{\pi}{2}$
15. $\iiint\limits_{W} xyz\,dxdydz,\ W: y\geq x^2,\ x\geq y^2,\ z\geq 0,\ z\leq xy$
16. $\iiint\limits_{W} dxdydz,\ W: x=y^2,\ y=x,\ y=x-2,\ y=0,\ z=0,\ z=-\frac{3}{2}x+6$

Výsledky:

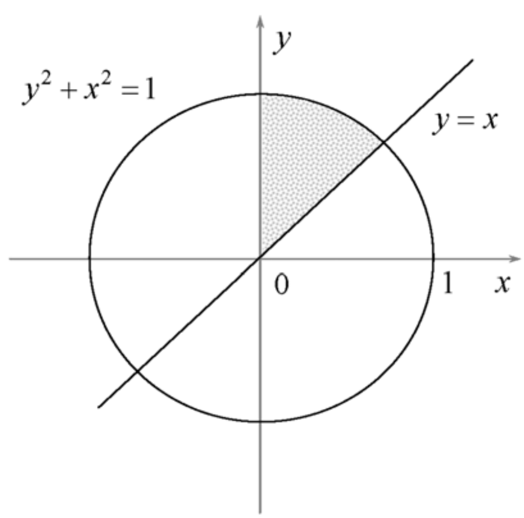
1. $\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{8}+\ln 2\right)\right]$
2. $\left[\frac{1}{48}\right]$
3. $\left[\frac{1}{24}\right]$
4. $\left[\frac{3}{2}-2\ln 2\right]$
5. $[32]$
6. $\left[\frac{1}{4}\right]$
7. $\left[\frac{1}{720}\right]$
8. $\left[\frac{3}{20}\right]$
9. $\left[\frac{1}{364}\right]$
10. $\left[\frac{3}{70}\right]$
11. $\left[\frac{32}{3}\left(e^3-1\right)\right]$
12. $\left[\frac{41}{162}\right]$
13. $\left[-\frac{1}{11}\right]$
14. $\left[\frac{1}{16}\left(\pi^2-8\right)\right]$
15. $\left[\frac{1}{96}\right]$
16. $\left[\frac{99}{10}\right]$

2.2 Transformace trojného integrálu

Příklad 1: Vypočítejte integrál $\displaystyle\iiint\limits_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, kde množina

$$W = \left\{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ 0 \le x \le y,\ z \ge 0,\ x^2+y^2+z^2 \le 1 \right\}.$$

Řešení: Množina W je $1/16$ koule ležící v 1. oktantu, její kolmý průmět do roviny $z=0$ je na Obrázku 2.2. Funkce $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ je na oblasti W spojitá a ohraničená. Trojný integrál tedy existuje. K řešení použijeme transformaci do sférických souřadnic.



Obrázek 2.2: $W = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ 0 \le x \le y,\ z \ge 0,\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

$$\begin{array}{lll} x = \varrho \cos\varphi \cos\gamma & A: & 0 \le \varrho \le 1 \\ y = \varrho \sin\varphi \cos\gamma & & \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ z = \varrho \sin\gamma & & 0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2} \\ |J| = \varrho^2 \cos\gamma & & \end{array}$$

Potom

$$\begin{aligned} & \int\int\int_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz \\ = & \iiint_A \sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi\cos^2\gamma + \varrho^2\sin^2\varphi\cos^2\gamma + \varrho^2\sin^2\gamma}\,\varrho^2\cos\gamma\,d\varrho\,d\varphi\,d\gamma \\ = & \iiint_A \varrho^3\cos\gamma\,d\varrho\,d\varphi\,d\gamma = \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho^3 \cos\gamma\,d\gamma \right) d\varphi \right) d\varrho \\ = & \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varrho^3 \left[\sin\gamma\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\,d\varphi \right) d\varrho = \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varrho^3\,d\varphi \right) d\varrho = \int_0^1 \varrho^3 \left[\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varrho \\ = & \frac{\pi}{4}\int_0^1 \varrho^3\,d\varrho = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

Příklad 2: Vypočtěte integrál $\int\int\int_W (x+y)\,dxdydz$, kde množina

$$W = \left\{\,[x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ 0 \le z \le y^2,\ x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\right\}.$$

Řešení: Množina W je válcové těleso, jehož tvořící přímky jsou rovnoběžné s osou z, a jehož kolmý průmět do roviny (x,y) je horní polovina kruhu ohraničená kružnicí se středem v počátku a poloměrem jedna. Těleso je zdola ohraničeno rovinou $z=0$ a shora parabolickým válcem $z=y^2$, který má površky rovnoběžné s osou x. Funkce $f(x,y,z) = x+y$ je na oblasti W spojitá a ohraničená. Trojný integrál existuje. K výpočtu trojného integrálu použijeme transformaci do cylindrických souřadnic:

$$\begin{array}{lll} x = \varrho\cos\varphi & A: & 0 \le \varrho \le 1 \\ y = \varrho\sin\varphi & & 0 \le \varphi \le \pi \\ z = z & & 0 \le z \le \varrho^2\sin^2\varphi \\ |J| = \rho & & \end{array}$$

Potom

$$\begin{aligned}
\int\int\int_W (x+y)\,dxdydz &= \iiint_A \varrho^2\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right)\,d\varrho\,d\varphi\,dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{\varrho^2\sin^2\varphi} \varrho^2\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right)\,dz \right) d\varphi \right) d\varrho \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \varrho^2\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right)[z]_0^{\varrho^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \right) d\varrho \\
&= \int_0^\pi \left(\int_0^1 \varrho^4\left(\sin^2\varphi\cos\varphi+\sin^2\varphi\sin\varphi\right) d\varrho \right) d\varphi \\
&= \int_0^\pi \left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^1 \left(\sin^2\varphi\cos\varphi+\sin^2\varphi\sin\varphi\right) d\varphi \\
&= \frac{1}{5}\int_0^\pi \left(\sin^2\varphi\cos\varphi+\sin^2\varphi\sin\varphi\right) d\varphi \\
&= \frac{1}{5}\int_0^\pi \sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi + \frac{1}{5}\int_0^\pi \sin^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \frac{4}{15}.
\end{aligned}$$

Oba určité integrály řešíme goniometrickou substitucí. Při výpočtu prvního integrálu zavedem substituci $t=\sin\varphi$, při výpočtu druhého substituci $t=\cos\varphi$.

Příklad 2.2.1: Převeďte trojný integrál $\int\int\int_W f(x,y,z)\;dxdydz$ na trojnásobný (pokud to lze) nebo na součet trojnásobných integrálů s použitím transformace do cylindrických nebo sférických souřadnic. Množina W je omezená oblast v prostoru $\mathbf{E_3}$ ohraničená plochami nebo určená nerovnicemi.

1. $W: x^2+y^2\le 1,\ x+y+z\le 6,\ z\ge 0$
2. $W: x^2+y^2\le 1,\ x^2+y^2-z-1\le 0,\ z\le 6$
3. $W: x^2+y^2\le 1,\ z\le\sqrt{x^2+y^2},\ z\ge 0,\ x\ge 0, y\ge 0$
4. $W: y\le x,\ y\ge -x,\ z-3\le-\left(x^2+y^2\right),\ z\ge 0$
5. $W: x^2+y^2-4y\le 0,\ 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}$
6. $W: x^2+y^2+z^2\le 4,\ x^2+y^2\le 3z^2,\ z\ge 0$
7. $W: 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\le y,\ z\ge 0$

---

8. $W: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$

Výsledky:

1. $\int\int\limits_A\int f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\, d\varrho d\varphi dz =$

$$=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{6-\varrho\cos\varphi-\varrho\sin\varphi} f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\, dz\right)d\varphi\right)d\varrho$$

2. $\int\int\limits_A\int f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\, d\varrho d\varphi dz = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_{\varrho^2-1}^{6} f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\, dz\right)d\varphi\right)d\varrho$

3. $\int\int\limits_A\int f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\, d\varrho d\varphi dz = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^{\varrho} f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\, dz\right)d\varphi\right)d\varrho$

4. $\int\int\limits_A\int f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\, d\varrho d\varphi dz = \int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_0^{3-\varrho^2} f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\, dz\right)d\varphi\right)d\varrho$

5. $\int\int\limits_A\int f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\, d\varrho d\varphi dz = \int\limits_0^{\pi}\left(\int\limits_0^{4\sin\varphi}\left(\int\limits_0^{\varrho} f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\, dz\right)d\varrho\right)d\varphi$

6. $\int\int\limits_A\int f(\varrho\cos\varphi\cos\gamma,\varrho\sin\varphi\cos\gamma,\varrho\sin\gamma)\ \varrho^2\cos\gamma\, d\varrho d\varphi d\gamma =$

$$=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(\varrho\cos\varphi\cos\gamma,\varrho\sin\varphi\cos\gamma,\varrho\sin\gamma)\ \varrho^2\cos\gamma\ d\gamma\right)d\varphi\right)d\varrho$$

7. $\int\int\limits_A\int f(\varrho\cos\varphi\cos\gamma,\varrho\sin\varphi\cos\gamma,\varrho\sin\gamma)\ \varrho^2\cos\gamma\, d\varrho d\varphi d\gamma =$

$$=\int\limits_1^2\left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varrho\cos\varphi\cos\gamma,\varrho\sin\varphi\cos\gamma,\varrho\sin\gamma)\ \varrho^2\cos\gamma\ d\gamma\right)d\varphi\right)d\varrho$$

8. $\int\int\limits_A\int f(2\varrho\cos\varphi\cos\gamma,3\varrho\sin\varphi\cos\gamma,4\varrho\sin\gamma)\,24\varrho^2\cos\gamma\, d\varrho d\varphi d\gamma =$

$$=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\varrho\cos\varphi\cos\gamma,3\varrho\sin\varphi\cos\gamma,4\varrho\sin\gamma)\,24\varrho^2\cos\gamma\, d\gamma\right)d\varphi\right)d\varrho$$

Příklad 2.2.2: Vypočtěte následující integrály $\int\int\int\limits_W f(x,y,z)\ dxdydz$. Množina W je omezená oblast v prostoru $\mathbf{E_3}$ ohraničená plochami nebo určená nerovnicemi. K výpočtu použijte transformace do cylindrických nebo sférických souřadnic.

1. $\int\int\int\limits_W y^2z^3\,dxdydz,\ W: x^2+y^2 \le 16,\ z \ge 0,\ z \le 4$
2. $\int\int\int\limits_W (x^2+y^2)\,dxdydz,\ W: 2z \ge x^2+y^2,\ z \le 2$
3. $\int\int\int\limits_W \frac{xy}{(4+z)^2}\,dxdydz,\ W: x^2+y^2 \le 4z \le 16$
4. $\int\int\int\limits_W \ dxdydz,\ W: x \ge 0,\ y \ge -x,\ x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le z \le x+1$
5. $\int\int\int\limits_W z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\ W: y \ge 0,\ z \ge 0,\ z \le 3,\ x^2+y^2 \le 2x$
6. $\int\int\int\limits_W 3z^2\,dxdydz,\ W: x^2+y^2 \le z,\ z \le 2-(x^2+y^2)$
7. $\int\int\int\limits_W z\,dxdydz,\ W: z^2 \ge 4\left(x^2+y^2\right),\ z \le 2$
8. $\int\int\int\limits_W y\,dxdydz,\ W: x \ge 0,\ y \le 4,\ y \ge \sqrt{x^2+z^2}$
9. $\int\int\int\limits_W y\,dxdydz,\ W: y \ge \sqrt{x^2+z^2},\ y \le 1,\ z \ge 0$
10. $\int\int\int\limits_W (x^2+y^2)\,dxdydz,\ W: z \ge 0,\ x^2+y^2+z^2 \le r^2$
11. $\int\int\int\limits_W xyz\,dxdydz,\ W: x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x^2+y^2+z^2 \le 1$
12. $\int\int\int\limits_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,\ W: 0 \le x \le y,\ z \ge 0,\ x^2+y^2+z^2 \le 1$
13. $\int\int\int\limits_W x^2yz\,dxdydz,\ W: x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \le 0,\ 4x^2+y^2+z^2 \le 1$
14. $\int\int\int\limits_W xy\,dxdydz,\ W: x^2+y^2+z^2-4z \le 0,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2}$
15. $\int\int\int\limits_W z\,dxdydz, W: x^2+y^2 \le 2z,\ x^2+y^2+z^2 \le 3$
16. $\int\int\int\limits_W \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\,dxdydz,\ W: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1,\ a,b,c > 0$

Výsledky:

1. $[4096\pi]$
2. $\left[\frac{16}{3}\pi\right]$
3. $[0]$
4. $\left[\frac{16+8\sqrt{2}+9\pi}{6}\right]$
5. $[8]$
6. $\left[\frac{7}{2}\pi\right]$
7. $[\pi]$
8. $[32\pi]$
9. $\left[\frac{1}{8}\pi\right]$
10. $\left[\frac{4}{15}\pi r^5\right]$
11. $\left[\frac{1}{48}\right]$
12. $\left[\frac{1}{16}\pi\right]$
13. $\left[-\frac{1}{840}\right]$
14. $[0]$
15. $\left[\frac{5}{3}\pi\right]$
16. $\left[\frac{4}{5}\pi abc\right]$

2.3 Geometrické a fyzikální aplikace trojného integrálu

$W \subset \mathbf{E_3}$ je elementární oblast prvního, druhého nebo třetího druhu. Těleso W má objemovou hustotu $\sigma(x, y, z)\,[kg \cdot m^{-3}]$

$V = \iiint\limits_W dxdydz\ \ [m^3]$ – objem tělesa W

$m = \iiint\limits_W \sigma(x, y, z)dxdydz\ \ [kg]$ – hmotnost tělesa W

$S_{xy} = \iiint\limits_W z\sigma(x, y, z)dxdydz\ \ [kg \cdot m]$ – statický moment tělesa W vzhledem k rovině (x, y)

$S_{xz} = \iiint\limits_W y\sigma(x, y, z)dxdydz\ \ [kg \cdot m]$ – statický moment tělesa W vzhledem k rovině (x, z)

$S_{yz} = \iiint\limits_W x\sigma(x, y, z)dxdydz\ \ [kg \cdot m]$ – statický moment tělesa W vzhledem k rovině (x, z)

$T = [t_1, t_2, t_3]$, kde $t_1 = \dfrac{S_{yz}}{m}$, $t_2 = \dfrac{S_{xz}}{m}$, $t_3 = \dfrac{S_{xy}}{m}$ – těžiště tělesa W

$I_x = \iiint\limits_W (y^2 + z^2)\sigma(x, y, z)dxdydz\ \ [kg \cdot m^2]$ – moment setrvačnosti tělesa W vzhledem k ose x

$I_y = \iiint\limits_W (x^2 + z^2)\sigma(x, y, z)dxdydz\ \ [kg \cdot m^2]$ – moment setrvačnosti tělesa W vzhledem k ose y

$I_z = \iiint\limits_W (x^2 + y^2)\sigma(x, y, z)dxdydz\ \ [kg \cdot m^2]$ – moment setrvačnosti tělesa W vzhledem k ose z

Poznámka: Doplňte příslušné jednotky v zadání a výsledcích.

Příklad 2.3.1: Vypočtěte objem tělesa W určeného nerovnicemi nebo ohraničeného plochami:

1. $W:\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ 2x + 2y + z - 6 = 0$
2. $W:\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x/3 + y + z/6 = 1$
3. $W:\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 3,\ y = 3,\ x + y + z = 4$

4. $W: \ x^2+y^2 \le 1, \ x+y+z \le 6, \ z \ge 0$
5. $W: \ x^2+y^2 \le 1, \ z \ge 0, \ x+y+\frac{z}{2} \le 1$
6. $W: \ 0 \le z \le x^2, \ 0 \le y \le 3, \ -1 \le x \le 1$
7. $W: \ 0 \le z \le 9, \ y \ge x^2, \ x^2 \le 4-3y$
8. $W: \ z \le 1, \ z \ge \sqrt[3]{x^2}, \ 0 \le y \le 1$
9. $W: \ y \ge \sqrt{x}, \ y \le 2\sqrt{x}, \ z \ge 0, \ x+z \le 4$
10. $W: \ z \le y^2+1, \ z \ge -x^2, \ x^2+y^2 \le 1, \ y \ge -x, \ x \ge 0$
11. $W: \ 2z \ge x^2+y^2, \ y+z \le 4$
12. $W: \ z \le x^2+y^2, \ z \ge 0, \ y \ge 1, \ y \le 2x, \ y \le 6-x$
13. $W: \ z \ge x^2+y^2, \ z \le y$
14. $W: \ \frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4} \le x, \ x \le 1$
15. $W: \ z \ge x^2+y^2, \ z \le x^2+2y^2, \ y \ge x, \ y \le 2x, \ y \le 1$
16. $W: \ y \ge x, \ x \ge y^2, \ z \ge x^2+y^2, \ z \le 2(x^2+y^2)$
17. $W: \ x^2+y^2+2y \le 0, \ 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$
18. $W: \ z \ge x^2+y^2, \ z^2 \le x^2+y^2$
19. $W: \ z \le 6-x^2-y^2, \ z \ge \sqrt{x^2+y^2}$
20. $W: \ z \ge 0, \ z \le x+2y, \ x^2+y^2 \le 2x, \ x^2+y^2 \le 2y$
21. $W: \ x^2+y^2+z^2 \le 4, \ x^2+y^2 \le 1$
22. $W: \ x^2+y^2+z^2 \le 9, \ x^2+y^2 \ge 4$
23. $W: \ x^2+y^2+z^2 \le 2z, \ x^2+y^2 \ge z^2$
24. $W: \ x^2+y^2+z^2 \le 4, \ x^2+y^2+(z-2)^2 \le 4$
25. $W: \ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{12} \le 1, \ 0 \le x \le \frac{3}{\sqrt{3}}y$

Výsledky:

1. $[9]$
2. $[3]$
3. $\left[\frac{31}{3}\right]$
4. $[6\pi]$
5. $\left[\frac{9\pi+10}{6}\right]$
6. $[1]$
7. $[16]$
8. $\left[\frac{4}{5}\right]$
9. $\left[\frac{128}{15}\right]$

10. $\left[\frac{9}{16}\pi\right]$
11. $\left[\frac{81}{4}\pi\right]$
12. $\left[\frac{2511}{32}\right]$
13. $\left[\frac{1}{32}\pi\right]$
14. $[3\pi]$
15. $\left[\frac{1}{8}\right]$
16. $\left[\frac{3}{35}\right]$
17. $\left[\frac{32}{9}\right]$
18. $\left[\frac{1}{6}\pi\right]$
19. $\left[\frac{32}{3}\pi\right]$
20. $\left[\frac{3}{4}(\pi-2)\right]$
21. $\left[\frac{4}{3}\pi\left(8-3\sqrt{3}\right)\right]$
22. $\left[\frac{20\pi\sqrt{5}}{3}\right]$
23. $\left[\frac{1}{3}\pi\right]$
24. $\left[\frac{10}{3}\pi\right]$
25. $\left[\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\right]$

Příklad 2.3.2: Vypočtěte hmotnost tělesa W určeného nerovnicemi nebo ohraničeného plochami, je-li $\sigma(x,y,z)$ hustota tělesa:

1. $W:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ z\ge 0,\ x+z+y\le 2;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
2. $W: y\ge 0,\ y\le \ln x,\ z\ge 0,\ y+z\le 1;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
3. $W:\ y\ge |x|,\ z\ge 0,\ z\le 3\left(1-y^2\right);\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
4. $W:\ x\le 1,\ y\ge 0,\ y\le x,\ z\le 0,\ z\ge -y^3;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
5. $W:\ x^2+y^2\le 1,\ z-y\le 0,\ 0\le x\le y;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
6. $W:\ x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le y^2,\ y\ge 0;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
7. $W:\ x^2+y^2\le 2x,\ x^2+y^2\ge 2z,\ z\ge 0;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
8. $W:\ y\ge 0,\ y\ge -x,\ z\le 0,\ x^2+y^2+z^2\le 1;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
9. $W:\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ y\le 0;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
10. $W:\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge \sqrt{x^2+y^2};\ \sigma(x,y,z)=1$
11. $W:\ x^2+y^2+z^2\le 2z,\ x^2+y^2\le z^2;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
12. $W:\ x^2+y^2+z^2-z\le 0,\ z\le \sqrt{x^2+y^2},\ y\le 0;\ \sigma(x,y,z)=|z|$

Výsledky:

1. $[k]$
2. $\left[k\left(2-\frac{e}{2}\right)\right]$
3. $\left[\frac{3}{2}k\right]$
4. $\left[\frac{1}{20}k\right]$
5. $\left[\frac{\sqrt{2}}{6}k\right]$
6. $\left[\frac{\pi}{8}k\right]$
7. $\left[\frac{3\pi}{4}k\right]$
8. $\left[\frac{\pi}{4}k\right]$
9. $\left[\frac{14\pi}{3}k\right]$
10. $\left[\frac{\pi}{12}\left(2-\sqrt{2}\right)\right]$
11. $[k\pi]$
12. $\left[\frac{\pi}{192}\right]$

Příklad 2.3.3: Vypočtěte statické momenty tělesa W vzhledem k souřadným rovinám, je-li $\sigma(x,y,z)$ hustota. Těleso W je určené nerovnicemi nebo ohraničené plochami.

1. $S_{xy},\ W:\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ y \leq 1-x^2,\ x+z \leq 2;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
2. $S_{yz},\ W:\ z \leq e^x,\ y \leq 1-x,\ x \geq 0,\ y \geq 0;\ z \geq 0;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
3. $S_{xy},\ W:\ 0 \leq z \leq \sqrt{y-x^2},\ y \leq 4;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
4. $S_{xy},\ W:\ z \geq x^2+y^2,\ z \leq 3,\ y \geq |x|;\ \sigma(x,y,z)=y$
5. $S_{xz},\ W:\ x^2+y^2 \geq 1,\ 1 \leq z \leq 5-x^2-y^2,\ y \geq |x|;\ \sigma(x,y,z)=|y|$
6. $S_{xz},\ W:\ x^2+y^2 \geq z,\ x^2+y^2+y \leq 0,\ x \geq 0;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
7. $S_{xz},\ W:\ x^2+y^2-4x \leq 0,\ x^2+y^2-2x \geq 0,\ y \geq 0;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
8. $S_{yz},\ W:\ x^2+y^2+z^2 \leq r^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0;\ \sigma(x,y,z)=1$
9. $S_{xz},\ W:\ 0 \leq x \leq y,\ x^2+y^2+z^2 \leq 4;\ \sigma(x,y,z)=k$
10. $S_{xz},\ W:\ 4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9,\ x \leq 0,\ y \leq 0,\ z \leq 0;\ \sigma(x,y,z)=|y|$
11. $S_{xy},\ W:\ x^2+y^2+z^2 \leq 9,\ z \leq \sqrt{x^2+y^2},\ 0 \leq x \leq y;\ \sigma(x,y,z)=y$
12. $S_{yz},\ W:\ x^2+y^2+z^2-4z \leq 0,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2},\ x \leq 0,\ y \geq 0;\ \sigma(x,y,z)=y$
13. $S_{xy},\ W:\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2 \leq 1;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
14. $S_{yz},\ W:\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{12} \leq 1,\ 0 \leq x \leq y;\ \sigma(x,y,z)=z^2$

Výsledky:

1. $\left[S_{xy}=\frac{14}{5}k\right]$
2. $\left[S_{yz}=k(3-e)\right]$
3. $\left[S_{xy}=\frac{128}{15}k\right]$
4. $\left[S_{xy}=\frac{9\sqrt{3}}{5}\right]$
5. $\left[S_{xz}=\frac{9(2+\pi)}{8}\right]$
6. $\left[S_{xz}=\frac{\pi}{32}k\right]$
7. $\left[S_{xz}=\frac{56}{3}k\right]$
8. $\left[S_{yz}=\frac{\pi r^4}{16}\right]$
9. $\left[S_{xz}=k\pi\sqrt{2}\right]$
10. $\left[S_{xz}=-\frac{\pi}{6}\right]$
11. $\left[S_{xy}=-\frac{81}{20}\right]$
12. $\left[S_{yz}=-\frac{3}{256}\right]$
13. $\left[S_{xy}=0\right]$
14. $\left[S_{yz}=\pi\left(6\sqrt{3}-3\sqrt{6}\right)\right]$

Příklad 2.3.4: Vypočtěte souřadnice (souřadnici) těžiště T tělesa W, je-li $\sigma(x, y, z)$ hustota. Těleso W je určené nerovnicemi nebo ohraničené plochami.

1. $T,\ W:\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4,\ z \ge 0,\ x + y + z \le 8;\ \sigma(x, y, z) = k,\ k > 0$
2. $T,\ W:\ x \ge 0,\ z \ge 0,\ 1 \le y \le 3,\ x + 2z \le 3;\ \sigma(x, y, z) = 1$
3. $z_T,\ W:\ y \le 0,\ z \ge 0,\ y^2 \ge 2z,\ x^2 + y^2 \le 2;\ \sigma(x, y, z) = k,\ k > 0$
4. $T,\ W:\ y \ge \sqrt{x},\ y \le 2\sqrt{x},\ x + z \le 1,\ z \ge 0;\ \sigma(x, y, z) = k,\ k > 0$
5. $T,\ W:\ z \ge 0,\ y \ge 4x^2,\ z \le \frac{1}{2}(4 - y);\ \sigma(x, y, z) = k,\ k > 0$
6. $T,\ W:\ z \le 4,\ z \ge 4(x^2 + y^2);\ \sigma(x, y, z) = k,\ k > 0$
7. $T,\ W:\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2},\ z \le 1;\ \sigma(x, y, z) = k,\ k > 0$
8. $T,\ W:\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le (y^2 - x^2);\ \sigma(x, y, z) = k,\ k > 0$
9. $T,\ W:\ x^2 + y^2 + z^2 \le 3a^2,\ x^2 + y^2 \le 2az,\ a > 0;\ \sigma(x, y, z) = k,\ k > 0$
10. $T,\ W:\ x^2 + y^2 + z^2 \le 9,\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2};\ \sigma(x, y, z) = k,\ k > 0$

Výsledky:

1. $T = \left[\frac{14}{15}, \frac{26}{15}, \frac{8}{3}\right]$
2. $T = \left[1,\ 1,\ \frac{1}{2}\right]$
3. $z_T = \frac{1}{4}$
4. $T = \left[\frac{3}{7}, \frac{15}{16}, \frac{2}{7}\right]$
5. $T = \left[0, \frac{12}{7}, \frac{4}{7}\right]$
6. $T = \left[0, 0, \frac{8}{3}\right]$
7. $T = \left[0, 0, \frac{3}{4}\right]$
8. $T = \left[0, \frac{4}{5}, \frac{4}{15}\right]$
9. $T = \left[0, 0, \frac{5a}{6\sqrt{3}-5}\right]$
10. $T = \left[0, 0, \frac{9}{8\left(2-\sqrt{2}\right)}\right]$

Příklad 2.3.5: Vypočtěte moment setrvačnosti tělesa W, je-li $\sigma(x, y, z)$ hustota. Těleso W je určené nerovnicemi nebo ohraničené plochami.

1. $I_z,\ W:\ z \le -x^2,\ z \ge -4,\ 0 \le y \le 2;\ \sigma(x, y, z) = k,\ k > 0$
2. $I_z,\ W:\ x^2 + y^2 \le z \le 1;\ \sigma(x, y, z) = 1$
3. $I_x,\ I_z,\ W:\ x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 3;\ \sigma(x, y, z) = k,\ k > 0$
4. $I_z,\ W:\ x^2 + y^2 \le 2x,\ 0 \le z \le a,\ y \ge 0;\ \sigma(x, y, z) = k,\ k > 0$
5. $I_z,\ W:\ z \ge 3\sqrt{x^2 + y^2},\ z \le 3;\ \sigma(x, y, z) = k,\ k > 0$

6. $I_y,\ W:\ y \geq \sqrt{x^2+z^2},\ y \leq 2;\ x \geq 0,\ z \geq 0;\ \sigma(x,y,z) = y$
7. $I_x,\ W:\ x^2+y^2+z^2 \leq r^2,\ \sigma(x,y,z)$ je přímo úměrná vzdálenosti bodu tělesa od středu koule
8. $I_z,\ W:\ x^2+y^2+z^2 \leq 2z,\ x^2+y^2 \leq z^2;\ \sigma(x,y,z) = |z|$
9. $I_z,\ W:\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1;\ \sigma(x,y,z) = 1$
10. $I,\ W:\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9} \leq 1;\ \sigma(x,y,z) = 1$

Výsledky:

1. $\left[I_z = \frac{2048}{45}k\right]$
2. $\left[I_z = \frac{\pi}{6}\right]$
3. $[I_x = 48\pi k,\ I_z = 24\pi k]$
4. $\left[I_z = \frac{3}{4}\pi a k\right]$
5. $\left[I_z = \frac{3}{10}\pi k\right]$
6. $\left[I_y = \frac{4}{3}\pi\right]$
7. $\left[I_x = \frac{4}{9}\pi r^6 k\right]$
8. $\left[I_z = \frac{13}{30}\pi\right]$
9. $\left[I_z = \frac{78}{5}\pi\right]$
10. $\left[I_x = I_y = \frac{624}{15}\pi,\ I_z = \frac{384}{15}\pi\right]$

Kapitola 3

Křivkový integrál

3.1 Výpočet křivkového integrálu

Příklad 3.1.1: Vypočtěte křivkové integrály 1. druhu po dané křivce γ:

1. $\int_\gamma \frac{1}{x-y}\,ds$, kde γ je úsečka $AB,\ A=[0,-2],\ B=[4,0]$
2. $\int_\gamma x\,ds$, kde γ je oblouk paraboly $y=x^2,\ A=[2,4],\ B=[1,1]$
3. $\int_\gamma (x+y)\,ds$, kde γ je obvod trojúhelníku s vrcholy $A=[1,-1],\ B=[2,-1],$ $C=[1,0]$
4. $\int_\gamma x^2y\,ds$, kde γ je oblouk kružnice $\vec{r}(t)=(a\cos t,\ a\sin t),\ t\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle,$ $a>0,\ a>0$ konstanta
5. $\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, kde γ je kružnice $x^2+y^2-ax=0,\ a>0$
6. $\int_\gamma x^2\,ds$, kde γ je oblouk AB křivky $y=lnx,\ A=[2,\ln 2],\ B=[1,0]$
7. $\int_\gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds$, kde γ je oblouk šroubovice $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=at;$ $t\in\langle 0,2\pi\rangle,\ a>0$
8. $\int_\gamma xy\,ds$, kde γ je obvod obdélníku určený křivkami $x=0,\ x=4,\ y=0,\ y=2$
9. $\int_\gamma (x^{4/3}+y^{4/3})\,ds$, kde γ je asteroida $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},\ a>0$
10. $\int_\gamma \sqrt{2y}\,ds$, kde γ je část cykloidy $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),$ $t\in\langle 0,2\pi\rangle,\ a>0$
11. $\int_\gamma (x^2+y^2)\,ds$, kde γ je křivka $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t),$ $t\in\langle 0,2\pi\rangle,\ a>0$
12. $\int_\gamma z\,ds$, kde γ je křivka $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t,\ t\in\langle 0,\sqrt{2}\rangle.$

13. $\int_\gamma \frac{z^2}{x^2+y^2}\,ds$, kde γ je oblouk šroubovice $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = at$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ a > 0$

14. $\int_\gamma \sqrt{16x^2+y^2}\,ds$, kde γ je elipsa $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$

15. $\int_\gamma (2z - \sqrt{x^2+y^2})\,ds$, kde γ je první závit šroubovice $x = t\cos t,\ y = t\sin t$, $z = t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$

16. $\int_\gamma (x-y)\,ds$, kde γ je kružnice $x^2 + y^2 - ax = 0,\ a > 0$

17. $\int_\gamma xy\,ds$, kde γ je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pro $x \geq 0,\ y \geq 0,\ a, b > 0$

18. $\int_\gamma 2(z-y^2)xy\,ds$, kde γ je proniková křivka ploch $x^2 + y^2 = 1,\ z = x^2$ pro $y \geq 0,\ y \geq -x$

19. $\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, kde γ je kružnice $x^2 + y^2 - 4x = 0$

20. $\int_\gamma |x(y-1)|\,ds$, kde γ je proniková křivka ploch $x^2 + y^2 - 2y = 0,\ z = x^2 + y^2$ pro $y \geq 1$

21. $\int_\gamma y\,ds$, kde γ je proniková křivka ploch $x^2 + y^2 = z^2,\ x^2 + y^2 = ax,\ a > 0$ v 1. oktantě

Výsledky:

1. $\left[\sqrt{5}\ln 2\right]$
2. $\left[\frac{1}{12}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)\right]$
3. $\left[1 + \sqrt{2}\right]$
4. $\left[\frac{a^4}{3}\right]$
5. $\left[2a^2\right]$
6. $\left[\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right)\right]$
7. $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3(4\pi^2 + 3)\right]$
8. $[24]$
9. $\left[4a^{\frac{7}{3}}\right]$
10. $\left[4\pi\sqrt{a^3}\right]$
11. $\left[2\pi^2 a^3(1 + 2\pi^2)\right]$
12. $\left[\frac{8-2\sqrt{2}}{3}\right]$
13. $\left[\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi^3 a\right]$
14. $[10\pi]$
15. $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{(2\pi^2+1)^3} - 1\right)\right]$
16. $\left[\frac{\pi a^2}{2}\right]$
17. $\left[\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}\right]$
18. $\left[\frac{1}{6}(\sqrt{8} - 1)\right]$
19. $[32]$
20. $\left[\frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 1)\right]$

21. $\left[\frac{a^3}{3}(2\sqrt{2}-1)\right]$

Příklad 3.1.2: Vypočtěte křivkové integrály 2. druhu po dané křivce γ (uvažujme pravotočivý souřadnicový systém):

1. $\int_\gamma y\,dx\,+\,x\,dy$, kde γ je orientovan a čtvrtkružnice $\vec{r}(t)=(a\cos t,\ a\sin t)$, $0\le t\le \pi/2$ a $A=[a,0]$ je počáteční bod, $a>0$
2. $\int_\gamma x\,dx\,+\,y\,dy\,+\,(x+y-1)\,dz$, kde γ je orientovaná úsečka $AB,\ A[1,1,1]$, $B=[2,3,4]$
3. $\int_\gamma (x^2+y^2)\,dx\,+\,(x^2-y^2)\,dy$, kde γ je orientovaná křivka $y=1-|1-x|$ pro $0\le x\le 2$, počáteční bod $A=[2,0]$
4. $\int_\gamma yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$, kde γ je oblouk AB šroubovice $\vec{r}(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt/2\pi)$ (orientovaný) od bodu $A=[a,0,0]$ do $B=[a,0,b],\ a,b>0$ konstanty
5. $\int_\gamma (2a-y)\,dx\,+\,x\,dy$, kde γ je oblouk cykloidy orientovaný souhlasně s daným parametrickým vyjádřením pro $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ t\in\langle 0,2\pi\rangle$, $a>0$
6. $\int_\gamma y^2\,dx\,-\,x^2\,dy$ po čtvrtkružnici (orientované) od bodu $A=[1,0]$ do bodu $B=[0,1]$
7. $\int_\gamma \frac{1}{|x|+|y|}\,dx\,+\,\frac{1}{|x|+|y|}\,dy$, kde γ je orientovaný obvod čtverce $ABCD,\ A=[1,0]$, $B=[0,1],\ C=[-1,0],\ D=[0,-1]$
8. $\int_\gamma (x^2-2xy)\,dx\,+\,(y^2-2xy)\,dy$, kde γ je orientovaný oblouk AB paraboly $y=x^2$ od bodu $A=[-1,1]$ do bodu $B=[1,1]$
9. $\int_\gamma (x+y)\,dx+(x-y)\,dy$, kde γ je orientovaný oblouk ABC elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $A=[0,b],\ B=[x_B>0,y_B>0],\ C=[a,0],\ a,b>0$
10. $\int_\gamma 2(x^2+y^2)\,dx+(2y-8)\,dy$, kde γ je orientovaná část kružnice $\vec{r}(t)=(a\cos t,a\sin t)$, $0<t<\pi,\ A=[a,0]$ je počáteční bod, $a>0$
11. $\int_\gamma (x^2+y^2)\,dx\,+\,(x^2-y^2)\,dy$, kde γ je obvod trojúhelníku s vrcholy $A=[0,0]$, $B=[1,0],\ C=[0,1]$ orientovaný kladně
12. $\int_\gamma xy\,dx\,+\,y^2\,dy$, kde γ je oblouk AB křivky $y=\arctan x$ od bodu $A=[1,?]$ do bodu $B=[0,?]$

13. $\int_\gamma y\,dx + x\,dy$, kde γ je oblouk ABC křivky $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$ od bodu $A=[0,y_A<0]$ do bodu $C=[1,y_C>0]$, je-li $B=[\sqrt{2},0]$

14. $\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$, kde γ je oblouk ABC na pronikové křivce ploch $z=xy$, $x^2+y^2=1$ od bodu $A=[1,?,?]$ do bodu $C=[-1,?,?]$, je-li $B=[?,1,?]$

15. $\int_\gamma x\,dx - 12y\,dy + 18\,dz$, kde γ je oblouk AB na pronikové křivce ploch $x+y-1 = 0,\ 9x^2+4y^2-36z=0$ od bodu $A=[1,?,?]$ do bodu $B=[?,1,?]$

16. $\int_\gamma \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$, kde γ je orientovaná úsečka $AB,\ A=[1,1,1],\ B=[4,4,4]$

17. $\int_\gamma x\,dx + y\,dy + yz\,dz$, kde γ je proniková křivka ploch $x^2+4y^2=z,\ (x-2)^2+4y^2=4$ orientovaná souhlasně s obloukem $ABC\subset\gamma$, kde $A=[0,0,0,]$, $B=[x_B>0,y_B>0,z_B>0],\ C=[x_C>0,0,t_C>0]$

18. $\int_\gamma y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, kde γ je oblouk ABC na pronikové křivce ploch $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2=ax,\ z\geq 0,\ a>0$ od bodu $A=[a,?,?]$ do bodu $C=[0,?,?]$, je-li $B=[x_B>0,y_B>0,z_B>0]$

Výsledky:

1. $[0]$
2. $[13]$
3. $\left[-\frac{4}{3}\right]$
4. $[0]$
5. $[-2\pi a^2]$
6. $\left[-\frac{4}{3}\right]$
7. $[0]$
8. $\left[-\frac{14}{15}\right]$
9. $\left[\frac{a^2+b^2}{2}\right]$
10. $[-4a^3]$
11. $[0]$
12. $\left[-\frac{1}{192}(\pi^3+48\pi-96)\right]$
13. $\left[\sqrt{2}\right]$
14. $\left[\frac{4-3\pi}{6}\right]$
15. $[-9]$
16. $\left[3\sqrt{3}\right]$
17. $[64\pi]$
18. $\left[-\frac{\pi a^3}{4}\right]$

Příklad 3.1.3: Ověřte, že daný integrál nezávisí na integrační cestě v $\mathbf{E_2}[\mathbf{E_3}]$ eventuálně v $\Omega \subset \mathbf{E_2}$ $[\Omega \subset \mathbf{E_3}]$ a vypočtěte jeho hodnotu od bodu A do bodu B:

1. $\int_\gamma \frac{1-y^2}{(1+x)^2}\,dx \;+\; \frac{2y}{1+x}\,dy,\ A=[0,0],\ B=[1,1]$
2. $\int_\gamma \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2},\ A=[-2,-6],\ B=[1,0]$
3. $\int_\gamma (2y-6xy^3)\,dx \;+\; (2x-9x^2y^2)\,dy,\ A=[0,0],\ B=[2,2]$
4. $\int_\gamma \frac{2-y^2}{2(1+x)^2}\,dx \;+\; \frac{y}{1+x}\,dy$ v oblasti $\Omega_1=\{[x,y]\in\mathbf{E_2};\ x<-1\}$, eventuálně $\Omega_2=\{[x,y]\in\mathbf{E_2};\ x>-1\},\ A=[0,0],\ B=[1,1]$
5. $\int_\gamma \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx \;+\; \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)dy$ v oblasti $\Omega=\mathbf{E_2}-\{[0,0]\},\ A=[3,4]$, $B=[5,12]$
6. $\int_\gamma \frac{x}{(x+y)^2}\,dx \;+\; \frac{2x+y}{(x+y)^2}\,dy$ v oblasti $\Omega_1=\{[x,y]\in\mathbf{E_2};\ y>-x\}$, eventuálně $\Omega_2=\{[x,y]\in\mathbf{E_2};\ y<-x\},\ A=[1,1],\ B=[3,2]$
7. $\int_\gamma \left(2xy^2+3x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{y^2}\right)dx \;+\; \left(2x^2y+3y^2+\frac{1}{y^2}-\frac{2x^2}{y^3}\right)dy$ v oblasti $\Omega_i\ (i=1,2,3,4)\subset\mathbf{E_2}$ neobsahující přímky $x=0$ a $y=0,\ A=[2,1],\ B=[1,2]$
8. $\int_\gamma x\,dx \;+\; y\,dy \;+\; (x+y-1)\,dz,\ A=[2,3,4],\ B=[1,1,1]$
9. $\int_\gamma xz^2\,dx \;+\; y^3\,dy \;+\; x^2z\,dz,\ A=[-1,1,2],\ B=[-4,2,-1]$
10. $\int_\gamma \frac{x\,dx+y\,dy+2z^3\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^4}}$ v oblasti $\Omega=\mathbf{E_3}-\{[0,0,0]\},\ A=[0,0,1],\ B=[0,2,0]$

Výsledky:

1. $\left[1, V(x,y)=\frac{y^2-1}{x+1}+c\right]$
2. $\left[-\frac{1}{2}\ln 40\right]$
3. $[-88]$
4. $\left[\frac{3}{4},\ V(x,y)=\frac{y^2-2}{2(x+1)}+c\right]$
5. $[56]$
6. $\left[\ln\frac{5}{2}-\frac{1}{10}\right]$
7. $\left[-\frac{15}{4}\right]$
8. $[-13]$
9. $\left[\frac{39}{4},\ V(x,y,z)=\frac{x^2z^2}{2}+\frac{y^4}{4}+c\right]$
10. $\left[1,\ V(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^4}+c\right]$

Příklad 3.1.4: Ověřte, že jsou splněny podmínky pro užití Greenovy věty a užijte ji k výpočtu následujících integrálů:

1. $\int_\gamma (x+y)^2\,dx - (x+y)^2\,dy$, kde γ je trojúhelník s vrcholy $O=[0,0]$, $A=[1,0]$, $B=[0,1]$ orientovaný kladně
2. $\int_\gamma (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$, kde γ je uzavřená záporně orientovaná křivka tvořená sinusoidou $y=\sin x$ a úsečkou na ose x pro $0\le x\le\pi$
3. $\int_\gamma (x^2-y^2)\,dx + (x^2+y^2)\,dy$, kde γ je uzavřená záporně orientovaná křivka tvořená půlkružnicí $y=\sqrt{r^2-x^2}$ a úsečkou na ose x
4. $\int_\gamma (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$, kde γ je elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ orientovaná kladně
5. $\int_\gamma \frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\,dx + \frac{2}{y}\arctan\frac{x}{y}\,dy$, kde γ je hranice oblasti $\Omega=\{[x,y]\in\mathbf{E_2};$ $1\le x^2+y^2\le 4,\ x\le y\le x\sqrt{3}\}$ orientovaná kladně
6. $6\int_\gamma (3x^2\cos y - y^3)\,dx + (x^3-2x^3\sin y)\,dy$, kde γ je kladně orientovaná kružnice $x^2+y^2=1$
7. $\int_\gamma (xy+x^2)\,dx + x^2y\,dy$, kde γ je kladně orientovaná hranice oblasti $\Omega=\{(x,y)\in\mathbf{E_2}; 0\le x\le y\le 1\}$
8. $\int_\gamma \frac{1}{y}\,dx - \frac{1}{x}\,dy$, kde γ je trojúhelník s vrcholy $A=[1,1],\ B=[2,1],\ C=[2,2]$ orientovaný kladně
9. $\int_\gamma (xy+x+y)\,dx + (xy+x-y)\,dy$, kde γ je kladně orientovaná kružnice $x^2+y^2=ax,\ a>0$
10. Vypočtěte rozdíl integrálů I_1-I_2, je-li $I_1=\int_{\gamma_1}(x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$, kde γ_1 je orientovaná úsečka AB, $I_2=\int_{\gamma_2}(x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$, kde γ_2 je orientovaný oblouk AB paraboly $y=x^2$, $A=[0,0],\ B=[1,1]$

Výsledky:

1. $\left[-\frac{4}{3}\right]$
2. $[4\pi]$
3. $\left[-\frac{4}{3}r^3\right]$
4. $[-2\pi ab]$
5. $\left[\frac{\ln 2}{12}\pi\right]$
6. $\left[\frac{3\pi}{2}\right]$
7. $\left[\frac{1}{12}\right]$
8. $\left[\frac{1}{2}\right]$
9. $\left[-\frac{\pi a^3}{8}\right]$
10. $\left[\frac{1}{3}\right]$

3.2 Geometrické a fyzikální aplikace křivkového integrálu

Hmotný drát ve tvaru rovinné křivky γ s lineární hustotou $\sigma(x,y)\ kg\cdot m^{-1}$

$m = \int\limits_\gamma \sigma(x,y)\,ds\ \ [kg]$ – hmotnost drátu γ

$S_x = \int\limits_\gamma y\sigma(x,y)\,ds\ \ [kg\cdot m]$ – statický moment drátu γ vzhledem k ose x

$S_y = \int\limits_\gamma x\sigma(x,y)\,ds\ \ [kg\cdot m]$ – statický moment drátu γ vzhledem k ose y

$T = \left[\dfrac{S_y}{m}, \dfrac{S_x}{m}\right]$ – těžiště drátu γ

$I_x = \int\limits_\gamma y^2\sigma(x,y)\,ds\ \ [kg\cdot m^2]$ – moment setrvačnosti drátu γ vzhledem k ose x

$I_y = \int\limits_\gamma x^2\sigma(x,y)\,ds\ \ [kg\cdot m^2]$ – moment setrvačnosti drátu γ vzhledem k ose y

Hmotný drát ve tvaru prostorové křivky γ s lineární hustotou $\sigma(x,y,z)\ \ [kg\cdot m^{-1}]$

$m = \int\limits_\gamma \sigma(x,y,z)\,ds\ \ [kg]$ – hmotnost drátu γ

$S_{xy} = \int\limits_\gamma z\sigma(x,y,z)\,ds\ ; [kg\cdot m]$ – statický moment drátu γ vzhledem k rovině (x,y)

$S_{xz} = \int\limits_\gamma y\sigma(x,y,z)\,ds\ ; [kg\cdot m]$ – statický moment drátu γ vzhledem k rovině (x,z)

$S_{yz} = \int\limits_\gamma x\sigma(x,y,z)\,ds\ ; [kg\cdot m]$ – statický moment drátu γ vzhledem k rovině (y,z)

$T = \left[\dfrac{S_{yz}}{m}, \dfrac{S_{xz}}{m}, \dfrac{S_{xy}}{m}\right]$ – těžiště drátu γ

$I_x = \int\limits_\gamma (y^2+z^2)\sigma(x,y,z)\,ds\ ; [kg\cdot m^2]$ – moment setrvačnosti drátu γ vzhledem k ose x

$I_y = \int\limits_\gamma (x^2+z^2)\sigma(x,y,z)\,ds\ ; [kg\cdot m^2]$ – moment setrvačnosti drátu γ vzhledem k ose y

$I_z = \int\limits_\gamma (x^2+y^2)\sigma(x,y,z)\,ds\ ; [kg\cdot m^2]$ – moment setrvačnosti drátu γ vzhledem k ose z

$l = \int\limits_{\gamma} ds$ $[m]$ – délka křivky křivky γ

$O = \int\limits_{\gamma} |f(x,y)|\, ds$ $[m^2]$ – obsah části válcové plochy s řídící křivkou γ v rovině $z = 0$, tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezené plochami $z = 0$, $z = f(x,y)$

$P = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma} x\, dy - y\, dx$ $[m^2]$ – obsah rovinného obrazce ohraničeného uzavřenou křivkou γ (plyne z Greenovy věty - křivka musí splňovat její předpoklady)

$A = \int\limits_{\gamma} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy$ $[J]$ – práce silového pole $\overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,,y), Q(x,y))$ při pohybu hmotného bodu po orientované rovinné křivce γ

$A = \int\limits_{\gamma} P(x,y,z)\, dx + Q(x,y,z)\, dy + R(x,y,z)\, dz$ $[J]$ – práce silového pole $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (P(x,,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ při pohybu hmotného bodu po orientované prostorové křivce γ

Poznámka: Doplňte příslušné jednotky v zadání a výsledcích.

Příklad 3.2.1: Vypočtěte délku křivky γ, je-li γ:

1. $\vec{r} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + vt\vec{k}$ pro $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $a,\ v > 0$ konstanty
2. část křivky na pronikové křivce ploch $y = x^2$, $z = \frac{4}{3}x^{3/2}$ pro $0 \le x \le 1$
3. část křivky na pronikové křivce ploch $z = -e^x$, $x + y = 1$ pro $x \ge 0$, $y \ge 0$

Výsledky:

1. $\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{a^2 + v^2}\right]$
2. $[2]$
3. $\left[\sqrt{e^2+2} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}\ln\left((\sqrt{e^2+2} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})\right)\right]$

Příklad 3.2.2: Vypočtěte obsah části válcové plochy Φ s řídící křivkou γ v rovině $z = 0$, tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a ohraničené plochami:

1. $\Phi: x^2 + y^2 = a^2$ ohraničené rovinami $z = 0,\ z = mx,\ a,\ m > 0$ konstanty
2. $\Phi: x^2 + y^2 = r^2$ vymezené plochami $z = r + \frac{x^2}{r},\ z = 0,\ r > 0$ konstanta
3. $\Phi: y - \operatorname{arctg} x = 0$ pro $0 \le x \le 1$ vymezené plochami $z = 0,\ z = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}$
4. $\Phi: y = \ln x$ pro $|y| \le 2$ vymezené plochami $z = 0,\ z = x^2$
5. $\Phi: x^2 + y^2 = 1$ vymezené plochami $z = x^2,\ z = 2 + y^2$
6. $\Phi: e^x - y = 0$ pro $x \le 1$ vymezené plochami $z = 0,\ z = e^{2x}$
7. $\Phi: 4x^2 + 8y^2 = 1$ pro $x \ge 0,\ y \ge 0$ vymezené plochami $z = 0,\ z = xy$
8. $\Phi: 4x^2 + 9y^2 = 36$ pro $y \ge 0$ vymezené plochami $z = 0,\ z = -xy$
9. $\Phi: y - \ln x = 0$ pro $1 \le x \le e^2$ vymezené plochami $z = 0,\ z = x^2$
10. $\Phi: \vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin t^3)$ pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ (γ je část asteroidy) vymezené plochami $z = 0,\ z = 2 - x - y$
11. $\Phi = \{[x, y] \in \mathbf{E_2};\ x = \cos t + t \sin t,\ y = \sin t - t \cos t,\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$ (γ je kruhová evolventa) vymezené plochami $z = -\sqrt{x^2 + y^2},\ z = x^2 + y^2$
12. $\Phi: y - \sqrt{x^3} = 0$ pro $0 \le x \le \frac{4}{3}$ vymezené plochami $z = x^2 + 1,\ z = -x$

Výsledky:

1. $[2a^2 m]$
2. $[3\pi r^2]$
3. $\left[\frac{16+3\pi}{12}\right]$
4. $\left[\frac{e^6-1}{3e^6}\sqrt{(e^4+1)^3}\right]$
5. $[4\pi]$
6. $\left[\frac{1}{3}(\sqrt{(e^2+1)^3} - 1)\right]$
7. $\left[\frac{1}{48}(\sqrt{8} - 1)\right]$
8. $\left[\frac{76}{5}\right]$
9. $\left[\frac{\sqrt{(e^4+1)^3} - 2\sqrt{2}}{3}\right]$
10. $\left[\frac{9}{5}\right]$
11. $\left[2\pi^2 + 4\pi^4 + \frac{\sqrt{(1+4\pi^2)^3}}{3}\right]$
12. $\left[(\frac{2}{9})^3(\frac{2^4(2^7-1)}{7} + \frac{2^2(2^5-1)}{5} + \frac{61(2^3-1)}{3}) = 5.02\right]$

Příklad 3.2.3: Vypočtěte obsah rovinného obrazce A, je-li:

1. $A = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ x^2 \le y \le x\}$
2. $A = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ x \ge 0,\ e^x \le y \le e^\pi\}$
3. $A = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,\ y \le \frac{b}{a}x,\ y \ge 0;\ a,b > 0\}$
4. $A = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} \le 1,\ y \le \frac{3}{2}x,\ y \ge \frac{1}{2}x\}$
5. $A = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ y \le \arcsin x,\ y \ge \frac{x^2}{2},\ y \le \frac{\pi}{2}\}$
6. $A = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ y \ge \ln x,\ -x+1 \le y \le 1\}$
7. A je vymezen asteroidou $\gamma : \vec{r}(t) = a(\cos^3 t\vec{i} + \sin^3 t\vec{j}),\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ a > 0$
8. A je vymezen kardioidou $\gamma : \vec{r}(t) = (2a\cos t - a\cos 2t)\vec{i} + (2a\sin t - a\sin 2t)\vec{j}),$ $t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ a > 0$

Výsledky:

1. $\left[\frac{1}{6}\right]$
2. $[(\pi - 1)e^\pi + 1]$
3. $\left[\frac{\pi ab}{8}\right]$
4. $\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right]$
5. $\left[\frac{\pi\sqrt{\pi}-3}{3}\right]$
6. $\left[\frac{2e-3}{2}\right]$
7. $\left[\frac{3}{8}a^2\pi\right]$
8. $[6\pi a^2]$

Příklad 3.2.4: Vypočtěte hmotnost křivky γ, je-li hustota křivky $\sigma(\vec{r})$:

1. $\gamma : y = \sqrt{x^3}$ pro $0 \le x \le \frac{4}{9},\ \sigma(x,y) = x$
2. asteroida $\gamma = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in \langle 0,\ \pi\rangle,\ a > 0\},$ $\sigma(\vec{r}(t)) = \sin^2 t|\cos t|$
3. $\gamma : \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ pro $y \ge 0,\ \sigma(x,y) = |x|y$
4. šroubovice $\gamma = \{[x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ x = at\cos t,\ y = at\sin t,\ z = vt,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle,$ $a, v > 0\},\ \sigma(x,y,z) = z$
5. $\gamma : \vec{r} = e^t(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \vec{k})$ pro $t \le 0,\ \sigma(x,y,z) = z$
6. γ je proniková křivka ploch $x^2+y^2+z^2 = 1,\ x+y+z = 0,\ \sigma(x,y,z) = kx^2,\ k > 0$

7. $\gamma : \vec{r} = a(t\vec{i} + \frac{t^2}{2}\vec{j} + \frac{t^3}{3}\vec{k}),\ t \in \langle 0,1\rangle,\ a > 0,\ \sigma(x,y,z) = \sqrt{\frac{2y}{a}}$

8. γ je část pronikové křivky ploch $x^2 + y^2 - 2y = 0,\ z = x^2 + y^2$ pro $y \geq 1,\ \sigma(x,y,z) = |x(y-1)|$

9. γ je část pronikové křivky ploch $x^2 + y^2 = z^2,\ x^2 + y^2 = ax$ v 1. oktantu, $a > 0,\ \sigma(x,y,z) = y$

Výsledky:

1. $\left[\frac{64}{1215}(\sqrt{2}+1)\right]$
2. $\left[\frac{12a}{15}\right]$
3. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}(27 - 5\sqrt{5})\right]$
4. $\left[\frac{v}{3a^2}(\sqrt{(a^2(4\pi^2+1)+v^2)^3} - \sqrt{(a^2+v^2)^3})\right]$
5. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
6. $\left[\frac{2\pi k}{3}\right]$
7. $\left[\frac{a}{16}(6\sqrt{3} - 2 + 3\ln\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}\right]$
8. $\left[\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\right]$
9. $\left[\frac{a^2}{3}(2\sqrt{2}-1)\right]$

Příklad 3.2.5: Hustota křivky γ je $\sigma(\vec{r})$. Vypočtěte statický moment:

1. vzhledem k ose y křivky $\gamma : y = x^2$ pro $x \in \langle 0,1\rangle$, je-li $\sigma(x,y) = y$

2. vzhledem k ose x křivky $\gamma : x^2 + y^2 = a^2,\ a > 0$ pro $x > 0,\ y > 0$, je-li $\sigma(x,y) = xy$

3. vzhledem k přímce $x = 0$ křivky $\gamma : \vec{r} = \cos^3 t\vec{i} + \sin^3 t\vec{j}$ pro $t \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle$, je-li $\sigma(\vec{r}(t)) = \sin^2 t$

4. vzhledem k rovině $y = 0$ křivky $\gamma : \vec{r} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + vt\vec{k}$ pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, $a, v > 0$, je-li $\sigma(x,y,z) = \sin^3 \arccos\frac{x}{a}$

5. vzhledem k rovině $x = 0$ křivky $\gamma : \vec{r} = t\vec{i} + t\vec{j} + \sqrt{t}\vec{k}$ pro $t \in \langle 0,2\rangle$, je-li hustota $\sigma(x,y,z) = |z|$

6. vzhledem k rovině $y = 0$ křivky γ, kde γ je část křivky na pronikové křivce ploch $x^2 + y^2 = 1$, pro $y \geq 0,\ z = -x$, je-li hustota $\sigma(x,y,z) = |x|$

7. vzhledem k rovině $z = 0$ křivky $\gamma : \vec{r} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + e^t\vec{k}$ pro $t \leq 1$, je-li hustota $\sigma(x,y,z) = z$

Výsledky:

1. $\left[\frac{25\sqrt{5}+1}{120}\right]$
2. $\left[\frac{a^4}{3}\right]$
3. $\left[-\frac{6}{35}\right]$
4. $\left[\frac{3\pi a}{16}\sqrt{a^2+v^2}\right]$
5. $\left[\frac{391\sqrt{17}+1}{480}\right]$
6. $\left[\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)\right]$
7. $\left[\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right]$

Příklad 3.2.6: Vypočtěte souřadnice (souřadnici) těžiště $T = [x_T, y_T]$, eventuálně $T = [x_T, y_T, z_T]$ křivky γ, je-li $\sigma(\vec{r})$ hustota křivky γ:

1. x_T křivky $\gamma : x^2 + y^2 = a^2$ pro $x \leq 0,\ y \geq 0,\ a > 0,\ \sigma(x,y,z) = |x|y^2$
2. y_T křivky $\gamma : \vec{r}(t) = a(t - \sin t)\vec{i} + a(1-\cos t)\vec{j},\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ a > 0,\ \sigma(\vec{r}(t)) = |\sin t|$
3. T homogenního oblouku cykloidy $\gamma : \vec{r}(t) = a(t-\sin t)\vec{i} + a(1-\cos t)\vec{j}$,

   $t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ a > 0,\ \sigma(\vec{r}(t)) = k,\ k > 0$
4. T křivky $\gamma : \vec{r}(t) = a(\cos^3 t\vec{i} + \sin^3 t\vec{j}),\ t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle,\ a > 0,\ \sigma(\vec{r}(t)) = k,\ k > 0$
5. y_T křivky $\gamma : \vec{r}(t) = a(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k})$ pro $t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ a > 0,\ \sigma(x,y,z) = \frac{z^2}{x^2+y^2}$
6. x_T křivky $\gamma : \vec{r}(t) = e^t(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \vec{k}),\ t \in (-\infty, 0\rangle,\ \sigma(x,y,z) = z$
7. T křivky $\gamma : \vec{r}(t) = (a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + v\vec{k})$ pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle,\ a, v > 0,\ \sigma(x,y,z) = \sin^3 \arccos\frac{x}{a}$
8. homogenního oblouku $\gamma : \vec{r}(t) = e^t(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \vec{k}),\ t \in (-\infty, 0\rangle,\ \sigma(x,y,z) = k,\ k > 0$
9. poloviny homogenního závitu šroubovice $\gamma : \vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ pro

   $t \in \langle 0, \pi\rangle,\ \sigma(x,y,z) = k,\ a, b, k > 0$ jsou konstanty

Výsledky:

1. $\left[-\frac{3a\pi}{16}\right]$
2. $\left[\frac{6a}{5}\right]$
3. $\left[T = [\pi a, \frac{4}{3}a]\right]$
4. $\left[T = [\frac{64a}{75\pi}, \frac{4(15\pi-16)a\pi}{75\pi}]\right]$
5. $\left[-\frac{3a}{2\pi}\right]$

6. $\left[\frac{3}{5}\right]$
7. $\left[T = [\frac{3a}{8}, \frac{9\pi a}{32}, \frac{7v}{6}]\right]$
8. $\left[T = [\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{2}]\right]$
9. $\left[T = [0, \frac{2a}{\pi}, \frac{b\pi}{2}]\right]$

Příklad 3.2.7: V každém bodě silového pole v $\mathbf{E_2}$ působí síla $F(\vec{r})$. Vypočítejte práci A tohoto pole při pohybu hmotného bodu po orientované křivce γ:

1. γ je orientovaná úsečka MN ležící na přímce $y = x$, $M = [0, ?]$, $N = [?, 1]$, $F(\vec{r}) = (xy, x + y)$
2. γ je oblouk MN na parabole $y = x^2$, (orientovaný) od bodu $M = [0, 0]$ do bodu $N = [1, 1]$, $F(\vec{r}) = (xy, x + y)$
3. γ je kladně orientovaný obvod trojúhelníku MNP, $M = [a, 0]$, $N = [a, a]$, $P = [0, a]$, $a > 0$, $F(\vec{r}) = (y^2, (x + y)^2)$
4. $\gamma: \ x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$ orientovaná záporně, $F(\vec{r}) = (-x^2y, xy^2)$
5. γ je oblouk AB křivky $\gamma : y = \operatorname{arctg} x$ od bodu $A = [1, ?]$ do bodu $B = [0, ?]$;
   $F(\vec{r}) = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}$
6. γ je kladně orientovaná křivka ohraničující rovinnou oblast $\Omega = \{[x, y] \in \mathbf{E_2};$
   $x \leq e^2, \ 0 \leq y \leq \ln x\}$, $F(\vec{r}) = xy^2\vec{i} + 2x^2y\vec{j}$
   [Poznámka: K výpočtu práce po uzavřené křivce v rovině lze užít Greenovu větu.]
7. γ je oblouk MN křivky $y = \ln x$ od bodu $M = [?, 1]$ do bodu $N = [1, ?]$; $F(\vec{r}) = y^2\vec{i} + x^3\vec{j}$
8. γ je kladně orientovaná uzavřená křivka tvořená oblouky na křivkách $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $F(\vec{r}) = xy\vec{i} - y\vec{j}$
9. γ je záporně orientovaná křivka ohraničující rovinnou oblast $\Omega = \{[x, y] \in \mathbf{E_2};$
   $x \geq 0, \ e^x \leq y \leq e^\pi\}, F(\vec{r}) = xy\vec{i} + y\vec{j}$
10. γ je kladně orientovaná uzavřená křivka tvořená z částí ležících na křivkách $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \frac{\pi}{4}$, $x = 0$; $F(\vec{r}) = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}$
11. γ je záporně orientovaná křivka ohraničující rovinný obrazec $\Omega = \{[x, y] \in \mathbf{E_2};$
    $x^2 + y^2 \leq ax, \ y \geq 0\}$, $F(\vec{r}) = (e^x \sin y - 16y)\vec{i} + (e^x \cos y - 16)\vec{j}$

12. γ je oblouk MN křivky $y = \ln x$ od bodu $M = [?, 1]$ do bodu $N = [e^2, ?]$, $F(\vec{r}) = xy\vec{i} - \ln y\vec{j}$

13. γ je kladně orientovaná křivka ohraničující rovinnou oblast $\Omega = \{[x, y] \in \mathbf{E_2};\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, $a, b > 0$; $F(\vec{r}) = (x + y)\vec{i} + (\frac{x^3 y}{3} + x + y)\vec{j}$

14. γ je část kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ ležící v 1. kvadrantu, $r > 0$; $F(\vec{r})$ má konstantní velikost k a směr kladné osy x

15. γ je menší oblouk křivky $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$ od bodu $M = [-a, 0]$ do bodu $N = [0, b]$; $F(\vec{r})$ v každém bodě roviny směřuje do počátku souřadnicového systému a má velikost nepřímo úměrnou vzdálenosti působiště síly od počátku souřadnicového systému

    [Návod: $F(\vec{r}) = |F(\vec{r})|\vec{F}^0(\vec{r})$, kde $\vec{F}^0(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_1(\vec{r})}{|\vec{F}_1(\vec{r})|}$ je jednotkový, souhlasně kolineární vektor s $F(\vec{r})$, přitom $\vec{F}_1(\vec{r})$ je vhodný souhlasně kolineární vektor s $F(\vec{r})$, zde $\vec{F}_1(\vec{r}) = \overrightarrow{XO}$, $X = [x, y]$, $O = [0, 0]$, k je koeficient nepřímé úměrnosti.]

16. γ je oblouk MN paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $M = [2, 5]$ do bodu $N = [-1, 2]$; $F(\vec{r})$ v každém bodě roviny je rovnoběžný s osou y a směřuje k bodům osy x, její velikost je rovna převrácené hodnotě čtverce vzdálenosti působiště síly od osy x

Výsledky:

1. $\left[\frac{4}{3}\right]$
2. $\left[\frac{17}{12}\right]$
3. $\left[\frac{2}{3}a^3\right]$
4. $\left[-\frac{\pi a^4}{2}\right]$
5. $\left[\frac{16-8\pi-\pi^2}{32} - \ln\sqrt{2}\right]$
6. $\left[\frac{5e^4-1}{4}\right]$
7. $\left[\frac{7-3e-e^3}{3}\right]$
8. $\left[-\frac{3}{20}\right]$
9. $\left[\frac{(\pi^2-2\pi+2)e^\pi-2}{2}\right]$
10. $\left[\frac{\pi-4+\ln 16}{8}\right]$
11. $[-2\pi a^2]$
12. $\left[\frac{3e^4-e^2-6}{4}\right]$
13. $\left[\frac{a^3 b^2}{15}\right]$
14. $[-kr]$
15. $\left[A = -\frac{k(b^2-a^2)}{2(b^2+a^2)}\right]$
16. $\left[\frac{3}{10}\right]$

Příklad 3.2.8: V každém bodě silového pole v $\mathbf{E_3}$ působí síla $F(\vec{r})$. Vypočítejte práci tohoto pole při pohybu hmotného bodu po orientované křivce γ:

1. γ : $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, ct)$ orientované souhlasně s daným parametrickým vyjádřením pro $t \in \langle 0, \pi \rangle$, $c > 0$; $F(\vec{r}) = (y, z, yz)$

2. γ : $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ orientované souhlasně s daným parametrickým vyjádřením pro $t \in \langle 0, \pi \rangle$; $F(\vec{r}) = (y, z, yz)$

3. γ je lomená křivka $OMNPO$ orientovaná souhlasně s orientací její části OMN, kde $O = [0, 0, 0]$, $M = [0, 1, 0]$, $N = [1, 1, 0]$, $P = [1, 1, 1]$, $F(\vec{r}) = \vec{r}$

4. γ je oblouk pronikové křivky ploch $y = \sqrt{1 - x^2}$, $z = y^2$ (orientovaný) od bodu $M = [?, 1, ?]$, do bodu $N = [1, ?, ?]$; $F(\vec{r}) = y\vec{i} - x\vec{j} + x^2y^2\vec{k}$

5. γ je oblouk MNP pronikové křivky ploch $x^2 + y^2 = 1$, $z = -x^3$ od bodu $M = [0, y_M < 0, z_M]$ do bodu $P = [x_P < 0, 0, z_P]$, kde $N = [x_N < 0, y_N > 0, z_N > 0]$; $F(\vec{r}) = xy\vec{i} + y^2\vec{j} + yz\vec{k}$

6. γ je oblouk MNP pronikové křivky ploch $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $z = -x$ od bodu $M = [0, y_M > 0, z_M]$ do bodu $P = [x_P < 0, 0, z_P]$, kde $N = [x_N > 0, y_N > 0, z_N]$; $F(\vec{r}) = y\vec{i} + x^2\vec{j} - xz\vec{k}$

7. γ je oblouk pronikové křivky ploch $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$ v prvním oktantě od bodu $M = [0, ?, ?]$ do bodu $N = [a, ?, ?]$; $F(\vec{r}) = \vec{r}$

8. γ je oblouk pronikové křivky ploch $y = \sqrt{3x}$, $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ od bodu $A = [?, ?, 0]$ do bodu $B = [0, ?, ?]$, $F(\vec{r}) = (xy^2, -y, z)$

9. γ je proniková křivka ploch $z = \sqrt{y - x^2}$, $y = 4 - x^2$ od bodu $A = [x_A > 0, ?, 0]$ do bodu $B = [x_B < 0, ?, 0]$, $F(\vec{r}) = xz\vec{i} + x^3\vec{j} + yz\vec{k}$

10. γ je oblouk MNP pronikové křivky ploch $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2$ od bodu $M = [x_M > 0, 0, z_M]$ do bodu $P = [x_P < 0, y_P = -x_P, z_P]$, kde $N = [x_N > 0, y_N > 0, z_N > 0]$; $F(\vec{r}) = (y, -x, -yz)$

11. γ je tvořena oblouky na kulové ploše $x^2+y^2+z^2 = 1$ ležící v rovinách $x = 0$, $y = 0$ v 1. oktantu od bodu $A = [1, 0, 0]$ do bodu $B = [0, 1, 0]$; $F(\vec{r}) = (-x^2z, xy, xz^3)$

12. γ je uzavřená křivka tvořená oblouky na ploše $z = 1 - x^2$ pro $x \geq 0$, $z \geq 0$, které leží postupně v rovinách $y = 0, z = 0, y = x$, γ je orientována souhlasně s orientací oblouku $MNP \subset \gamma$, kde $M = [x_M > 0, 0, z_M > 0]$, $N = [x_N > 0, y_N > 0, z_N > 0]$, $P = [1, y_P > 0, 0]$; $F(\vec{r}) = (x, z^2, e^{xy})$

13. γ je proniková křivka ploch $x^2+y^2=a^2,\ \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1,\ a,h>0,\ \gamma$ je orientována souhlasně s orientací oblouku $MNP\subset\gamma$, kde $M=[a,0,0],\ N=[x_N>0,$ $y_N>0,z_N>0],\ P=[-a,0,2h];\ F(\vec{r})=(y-z,z-x,x-y)$

14. γ je uzavřená křivka v 1. oktantu tvořená oblouky na ploše $z=\sqrt{x^2+y^2}$, které leží postupně v rovinách $x=0,y=1,x=2,y=0,\ \gamma$ je orientována souhlasně s orientací oblouku $MNP\subset\gamma$, kde $M=[0,0,?],\ N=[0,1,?],\ P=[2,1,?];\ F(\vec{r})=(e^x,(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}},yz^3)$

15. $\gamma:\ \vec{r}=a\cos t\vec{i}+a\sin t\vec{j}+bt\vec{k},\ a,b>0$ od bodu $M=[a,0,0]$ do bodu $N=[-a,0,\pi b];\ F(\vec{r})$ v každém bodě $\mathbf{E_3}$ směřuje do počátku souřadnicového systému a její velikost je rovna převrácené hodnotě čtverce vzdálenosti působiště síly od počátku souřadnicového systému

Výsledky:

1. $\left[\frac{\pi}{2}(2c^2-4c-1)\right]$
2. $\left[\frac{2e^{2\pi}-5e^{\pi}-5\pi-3}{10}\right]$
3. $[0]$
4. $\left[\frac{3\pi-1}{6}\right]$
5. $\left[-\frac{8}{35}\right]$
6. $\left[\frac{3}{2}\pi\right]$
7. $[a^2]$
8. $\left[\frac{5}{2}\right]$
9. $\left[\frac{16\sqrt{2}}{5}\right]$
10. $\left[\frac{7\sqrt{2}-45\pi}{60}\right]$
11. $\left[\frac{15\pi+32}{240}\right]$
12. $\left[\frac{38-15e}{15}\right]$
13. $[-2\pi a(h+a)]$
14. $[-14]$
15. $\left[\frac{a-\sqrt{a^2+b^2\pi^2}}{a\sqrt{a^2+b^2\pi^2}}\right]$

Příklad 3.2.9: Ověřte, že pr ace v silovém poli $F(\vec{r})$ nezávisí na integrační cestě v $\mathbf{E_2}\,[\mathbf{E_3}]$, eventuálně v $\Omega\subset\mathbf{E_2}\,[\Omega\subset\mathbf{E_3}]$, určete potenciál $V(\vec{r})$ tohoto silového pole a vypočtěte práci A od bodu M do bodu N.

1. $F(\vec{r})=(x^2-y^2,5-2xy),\ M=[1,2],\ N=[2,3]$
2. $F(\vec{r})=(x\cos 2y+1)\vec{i}-x^2\sin 2y\vec{j},\ M=[0,-\frac{\pi}{2}],\ N=[\frac{\pi}{2},\pi]$
3. $F(\vec{r})=-\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\vec{j},\ M=[1,1],\ N=[2,2]$
4. $F(\vec{r})=(2x+3y)\vec{i}+(3x-4y)\vec{j},\ M=[0,0],\ N=[1,4]$

5. $F(\vec{r}) = (1 - 2xy - y^2, 1 - 2xy - x^2),\ M = [0, 2],\ N = [1, 0]$

6. $F(\vec{r}) = \frac{1}{(x+y)^2}(x + 2y, y),\ M = [9, 1],\ N = [5, 5]$

7. $F(\vec{r}) = (\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}, \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}),\ M = [1, 2],\ N = [2, 3]$

8. $F(\vec{r}) = yx^{y-1}\vec{i} + x^y \ln x\vec{j},\ M = [2, 1],\ N = [1, 3]$

9. $F(\vec{r}) = (x^2 + yz)\vec{i} + (y^2 + xz)\vec{j} + (z^2 + xy)\vec{k},\ M = [1, -2, 3],\ N = [2, 3, 4]$

10. $F(\vec{r}) = yz\vec{i} + (2 + xz)\vec{j} + (xy - 1)\vec{k},\ M = [0, 1, 0],\ N = [-2, 0, 1]$

11. $F(\vec{r}) = 2xy\vec{i} + (x^2 - z)\vec{j} + (1 - y)\vec{k},\ M = [0, 0, 0],\ N = [1, 1, 1]$

12. $F(\vec{r}) = (x + yz)\vec{i} + (y + xz)\vec{j} + (z + xy)\vec{k},\ M = [1, 2, 3],\ N = [0, 0, 0]$

13. $F(\vec{r}) = x\vec{i} + y\vec{j} - \vec{k},\ M = [2, 3, 4],\ N = [1, 1, 1]$

14. $F(\vec{r}) = (yz^2, xz^2, 2xyz),\ M = [1, 1, -1],\ N = [-3, 4, 1]$

15. $F(\vec{r}) = (2x + \frac{1}{x+y})\vec{i} + \frac{1}{x+y}\vec{j} + \vec{k},\ M = [1, 2, 3],\ N = [-2, 5, -1]$

Výsledky:

1. $\left[V = \frac{x^3}{3} - y^2x + 5y + c;\ A = -\frac{20}{3}\right]$

2. $\left[V = \frac{x^2}{2}\cos 2y + x + c;\ A = \frac{\pi(\pi+4)}{8}\right]$

3. $\left[\Omega = \mathbf{E_2} - \{[0, 0]\},\ V = -\mathrm{arctg}\frac{x}{y} + c;\ A = 0\right]$

4. $[V = x^2 + 3xy - 2y^2 + c;\ A = -19]$

5. $[x + y - x^2y - y^2x + c;\ A = -1]$

6. [$\Omega_i (i = 1, 2)$ oblasti v $\mathbf{E_2}$ neobsahující přímku $y = -x$; $V = -\frac{x}{x+y} + \ln|x + y|$; $A = -\frac{2}{5}$]

7. [$\Omega_i (i = 1, 2, ..., 6)$ oblasti v $\mathbf{E_2}$ neobsahující přímky $y = 0, x = 0, y = x$; $V = \frac{y^2}{y-x} + \ln|\frac{y}{x}| - y + c$, $A = 4 + \ln\frac{3}{4}$]

8. [$\Omega = \{[x, y] \in \mathbf{E_2}; x > 0\}$; $V = x^y + c$, $A = -1$]

9. $\left[V = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} + xyz + c;\ A = \frac{169}{3}\right]$

10. $[V = xyz + 2y - z + c;\ A = 3]$

11. $[V = x^2 - yz + z + c;\ A = 1]$

12. $\left[V = \frac{x^2+y^2+z^2}{2} + xyz + c;\ A = -13\right]$

13. $\left[V = \frac{x^2+y^2}{2} - z + c;\ A = -\frac{5}{2}\right]$

14. $[V = xyz^2 + c;\ A = -13]$

15. [$\Omega_i (i = 1, 2)$ oblasti v $\mathbf{E_3}$ neobsahující rovinu $y = -x$; $V = x^2 + \ln|x + y| + z + c,\ A = -1$]

Příloha A

Tabulkové integrály

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (x \in R,\ n \in N \cup \{0\})$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad (x \in (0,\infty)\,,\ \alpha \in R,\ \alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} = \ln|x| + c \qquad (x \in (0,\infty)\,\text{nebo}\ x \in (-\infty, 0))$$

$$\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + c \qquad (x \in R)$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln \mathrm{a}} + c \qquad (x \in R,\ a > 0,\ a \neq 1\ \text{je konstanta})$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \qquad (x \in R)$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \qquad (x \in R)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathrm{cotg}\,x + c \qquad (x \in (k\pi, (k+1)\pi)\,,\ k \in Z)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}\,x + c \qquad (x \in ((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2)\,,\ k \in Z)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{arctg}\,x + c \qquad (x \in R)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c \qquad (x \in (-1,1))$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + c \quad (x \in R)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c \quad (x \in (1,\infty)\,\text{nebo}\ x \in (-\infty,-1))$$

Literatura

[1] Berman G.N.: *Sbornik zadač po kursu matematičeskovo analýza.* Nauka Moskva 1972.

[2] Daněček J., Dlouhý O. Přibyl O.: *Matematika II. Modul 1. Dvojný a trojný integrál. Studijní opory pro studijní programy s kombinovanou formou sudia.* FAST VUT Brno 2004.

[3] Daněček J., Dlouhý O. Přibyl O.: *Matematika II. Modul 2. Křivkové integrály. Studijní opory pro studijní programy s kombinovanou formou sudia.* FAST VUT Brno 2004.

[4] Děmidovič B.P.: *Sbornik zadač i upražněnij po matematičeskomu analýzu.* GIFML Moskva 1963.

[5] Eliáš J., Horváth J., Kajan J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky IV.* Alfa Bratislava 1985.

[6] Jirásek F., Čipera S., Vacek M.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky II.* SNTL Praha 1989.

[7] Minorskij V.P.: *Sbírka úloh z vyšší matematiky.* SNTL Praha 1964.

[8] Prudilová K., Sekaninová J., Slatinský E.: *Sbírka příkladů z matematiky III.* CERM Brno 2001.

[9] Tomica R.: *Cvičení z matematiky II.* SNTL Praha 1967.