

Kapitola 1

Funkční řady

1.0.1 Posloupnosti funkcí

Definice 1.0.1 Zobrazení množiny \mathbb{N} do množiny funkcí $\mathcal{F}(M)$, $M \subset \mathbb{R}$ nazýváme *posloupností funkcí* a značíme $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice 1.0.2 Necht' je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaná na množině M . Jestliže pro každé $x \in M$ číselná posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, říkáme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje bodově* k funkci f na množině M .

Definice 1.0.3 Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině $M \subset \mathcal{D}$ *stejněměrně* k funkci f jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a pro každé $x \in M$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (1.1)$$

Poznámka. Stejněměrnou konvergenci označujeme $f_n \rightrightarrows f$.

Věta 1.0.1 (Bolzano-Cachyova podmínka) *Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejněměrně k funkci f na množině $M \subset \mathcal{D}$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$, každé $m \geq n_0$ a každé $x \in M$ platí*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (1.2)$$

Důsledek 1.0.1 *Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejněměrně k funkci f na množině $M \subset \mathcal{D}$ právě tehdy, když*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Věta 1.0.2 *Konverguje-li posloupnost spojitých funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ k funkci f stejněměrně na množině $M \subset \mathcal{D}$, pak funkce f je na M spojitá.*

1.1 Obecné funkční řady

Definice 1.1.1 Necht' je dána posloupnost funkcí $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Rekurence

$$\begin{cases} s_1(x) &= f_1(x) \\ s_{n+1}(x) &= s_n(x) + f_{n+1}(x) \end{cases}$$

definuje indukci jedinou posloupnost

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

Posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *posloupností částečných součtů řady* tvořenou posloupností $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Pro limitu posloupnosti $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (jestliže existuje!) užíváme symbol

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \tag{1.3}$$

a nazýváme *nekonečnou funkční řadou* tvořenou posloupností funkcí $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Definice 1.1.2 Necht' je dána funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ definovaná na množině \mathcal{D} a $M \subset \mathcal{D}$. Jestliže pro každé $x \in M$ posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje bodově (konverguje stejnoměrně) k funkci f , říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *konverguje bodově (konverguje stejnoměrně)* na množině M k funkci f .

Věta 1.1.1 (*Weierstrassovo kritérium*) Necht' je dána funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ definovaná na množině $M \subset \mathcal{D}$. Jestliže existuje číselná konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy taková, že platí

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad \forall x \in M, \forall n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}$$

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M .

1.1.1 Mocninné řady

Definice 1.1.3 Řadu funkcí tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

kde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je daná posloupnost a $c \in \mathbb{R}$ nazýváme *mocninnou řadou* o středu v bodě c . Čísla a_n nazýváme *koefficienty* mocninné řady.

Věta 1.1.2 (Abelova) *Konverguje-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ v bodě $r \neq 0$, pak řada konverguje absolutně pro každé $x \in (-r, r)$.*

Definice 1.1.4 Necht' $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninná řada. Číslo

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

nazýváme *poloměr konvergence* mocninné řady.

Věta 1.1.3 *Necht' $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $\rho \geq 0$. Pak*

- (a) *jestliže $\rho > 0$ pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje absolutně pro každé $|x| < \rho$,*
- (b) *Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nekonverguje jestliže $|x| > \rho$.*

Tvrzení 1.1.1 *Necht' existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, pak poloměr konvergence je*

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$$

Věta 1.1.4 *Necht' $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $\rho > 0$.*

- *Pak mocninná řada konverguje stejnoměrně na intervalu $[c-r, c+r]$ pro každé $0 < r < \rho$.*
- *Konverguje-li mocninná řada v bodě $c+\rho$, pak konverguje stejnoměrně na intervalu $[c-r, c+\rho]$ pro každé $0 < r < \rho$.*
- *Konverguje-li mocninná řada v bodě $c-\rho$, pak konverguje stejnoměrně na intervalu $[c-\rho, c+r]$ pro každé $0 < r < \rho$.*

Věta 1.1.5 *Necht' $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $\rho > 0$. Pak součet mocninné řady je spojitá funkce na intervalu, kde daná řada konverguje stejnoměrně.*

Věta 1.1.6 *Necht' $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $\rho > 0$. Pak odpovídající mocninná řada derivací má stejný poloměr konvergence a součet řady s má derivaci na intervalu $(c-\rho, c+\rho)$ a platí*

$$(s(x))' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x-c)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-c)^{n-1}$$

Věta 1.1.7 *Necht' $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $\rho > 0$. Pak odpovídající mocninná řada integrálů má stejný poloměr konvergence a součet řady má integrál na intervalu $(c-\rho, c+\rho)$ a platí*

$$\int_c^x s(t) dt = \int_c^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-c)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_c^x a_n(t-c)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1}$$

Algebraické operace s mocninnými řadami

Věta 1.1.8 Necht' $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ jsou dvě mocninné řady s poloměry konvergence $\varrho_1 > 0$ a $\varrho_2 > 0$. Pak řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-c)^n$$

má poloměr konvergence $\sigma = \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (x-c)^n$$

má poloměr konvergence $\sigma = \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$.

Vyjádření funkcí mocninnou řadou - Taylorova řada

Taylorova řada je důležitým příkladem mocninných řad.

Věta 1.1.9 Necht' $\varrho > 0$ je poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$$

se součtem f na $(c - \varrho, c + \varrho)$. Pak funkce f má na tomto intervalu derivace všech řádů a platí

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (1.4)$$

Definice 1.1.5 Je-li f funkce, která má v bodě $c \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů, pak mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce f se středem v bodě c .

Věta 1.1.10 Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Má-li funkce f v bodě $c \in I$ (c je střed intervalu I) derivace všech řádů, pak pro $x \in I$ platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$$

tehdy a jen tehdy, platí-li pro zbytek $R_{n+1}(x)$ v Taylorově vzorci $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$ pro všechna $x \in I$.

Věta 1.1.11 Necht' funkce f má tyto vlastnosti:

(a) $f \in C^\infty(I)$,

(b) existují čísla c, M taková, že pro každé $x \in I$ a každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí $|f^{(k)}(x)| \leq c M^k$.

Pak Taylorova řada funkce f konverguje na intervalu I k funkci f , tj. platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k \quad \forall x \in I$$

kde c je střed intervalu I .

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}, \quad \forall x \in (-1, 1]$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Binomická řada $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \mathbb{N}$, $x > -1$

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1}$$

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$$

konverguje v intervalu $(-1, 1)$.

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Kapitola 2

FOURIEROVY ŘADY

Uvažujme interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ($(a, b) \subset \mathbb{R}$). Množinu všech funkcí spojitých na $[a, b]$ resp. na (a, b) označme $C([a, b])$ resp. $C((a, b))$. Symbolem $C^1([a, b])$, $C^1((a, b))$ ($C^2([a, b])$, $C^2((a, b))$) označme množinu všech funkcí jejichž první (druhá) derivace je spojitá na $[a, b]$ resp. na (a, b) .

2.0.2 Ortogonální systémy

Řekneme, že funkce f je z prostoru $L_2((a, b))$, jestliže

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \quad (2.1)$$

ve smyslu Lebesguea. Prostor $L_2((a, b))$ je Hilbertův prostor, tj. úplný normovaný lineární prostor se skalárním součinem

$$(f|g)_{L_2} = \int_a^b f(x)g(x) dx < \infty \quad (2.2)$$

a normou

$$\|f\|_{L_2} = \int_a^b |f(x)|^2 dx, \quad \forall f \in L_2((a, b)) \quad (2.3)$$

Funkce f , g jsou ortogonální (kolmé) v prostoru $L_2((a, b))$, jestliže

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$$

Definice 2.0.6 Posloupnost funkcí $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi_n \in L_2((a, b))$ se nazývá ortogonální systém, právě když

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx > 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

a

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x) dx = 0 \quad \forall n \neq m$$

Systém je ortonormální, jestliže navíc

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx = 1 \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Věta 2.0.12 *Nechť $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost lineárně nezávislých prvků v $L_2((a, b))$. Pak existuje takový ortonormální systém $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ v $L_2((a, b))$ tak, že platí*

$$\text{Lin}\{g_1, g_2, \dots, g_n\} = \text{Lin}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Množina funkcí

$$\left\{ 1, \cos \frac{\pi}{l}x, \sin \frac{\pi}{l}x, \dots, \cos \frac{n\pi}{l}x, \sin \frac{n\pi}{l}x, \dots \right\}$$

tvoří na intervalu $[a, a + 2l]$, $a \in \mathbb{R}$ ortogonální systém funkcí. Existují samozřejmě i jiné ortogonální systémy funkcí.

Množina funkcí

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1), \dots \right\}$$

tvoří na intervalu $(-1, 1)$ ortonormální systém funkcí v $L_2((-1, 1))$ a tento systém se nazývá posloupnost *Legendreových polynomů*.

Existují samozřejmě i jiné ortogonální (ortonormální) systémy funkcí.

2.1 Fourierovy řady (J.B. Fourier 1768-1830)

Symbolem $\mathcal{P}_{2l}(\mathbb{R})$ označme množinu všech periodických funkcí s periodou $2l$.

Definice 2.1.1 Trigonometrická řada je funkční řada tvaru

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right), \quad (2.4)$$

kde $x \in \mathbb{R}$ a a_n, b_n jsou reálné konstanty.

Věta 2.1.1 *Předpokládejme, že trigonometrická řada (2.4) konverguje stejnoměrně na intervalu $[a, a + 2l]$ k funkci f . Pak platí*

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx \quad (2.5)$$

pro $n = 0, 1, 2, \dots$

Definice 2.1.2 Nechť $f \in \mathcal{P}_{2l}(\mathbb{R})$. Trigonometrická řada jejíž koeficienty jsou dány vzorci (2.5) se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f a trigonometrická řada (2.4) s těmito koeficienty se nazývá Fourierova řada pro funkci f a píšeme

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right).$$

Poznámka 2.1.1 Řada napravo nemusí, ale může konvergovat k funkci f . Řada je funkci f přiřazena formálně. Otázkou je zda-li existuje množina funkcí jejíž Fourierova řada konverguje k této funkci.

Věta 2.1.2 Necht' $f \in L_1((a, a+2l))$ a a_n, b_n jsou její Fourierovy koeficienty. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ konverguje.

Řekneme, že funkce \tilde{f} je periodickým prodloužením funkce $f \in PC((a, a+2l))$ jestliže platí

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a, a+2l), \\ f(x-2(n-1)l) & x \in (a+2(n-1)l, a+2nl) \end{cases}$$

a platí $f(a+2nl) = c$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{R}$ libovolné.

Řekneme, že funkce \tilde{f} je standardizovaným periodickým prodloužením funkce $f \in PC((a, a+2l))$ jestliže platí

$$f(a+2nl) = \frac{1}{2} [f(a+) + f(a+2l-)]$$

pro každé $n \in \mathbb{Z}$.

Poznámka 2.1.2

(a) Necht' $f \in PC((-l, l))$ je lichá. Pak

$$a_n = 0 \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

(b) Necht' $f \in PC((-l, l))$ je sudá. Pak

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad b_n = 0$$

Kosinová a sinová Fourierova řada.

Fourierovu řadu funkce, která je definovaná pouze na $[0, l]$ můžeme dodefinovat na $[-l, 0]$ tak, že výsledná funkce bude sudá respektive lichá.

Necht' funkce f je integrovatelná na $(0, l)$.

(a) Sudé prodloužení.

$$f_S(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0, l), \\ f(-x) & x \in (-l, 0) \end{cases}$$

Hodnota $f_S(0)$ může být libovolná.

(b) Liché prodloužení.

$$f_L(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0, l), \\ 0 & x = 0, \\ -f(-x) & x \in (-l, 0) \end{cases}$$

Poznámka 2.1.3

(a) Když bude funkce f sudá dostaneme kosinovou řadu.

(b) Když bude funkce f lichá dostaneme sinovou řadu.

Otázky konvergence trigonometrických a Fourierových řad.

Definujme

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)]$$

Definice 2.1.3 Jestliže na intervalu $[a, b]$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\lambda, \quad \forall x, y \in [a, b]$$

kde $0 < \lambda \leq 1$, $C \geq 0$, pak řekneme, že funkce f je *Hölderovsky spojitá* na intervalu $[a, b]$ s koeficientem λ a prostor všech Hölderovsky spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ značíme $C^{0,\lambda}([a, b])$.

Věta 2.1.3 Necht' $\{a_n\}_{n=0}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel a necht' konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

Pak trigonometrická řada

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right)$$

konverguje absolutně a stejnoměrně na \mathbb{R} ke spojitě funkci f a je Fourierovou řadou funkce f .

Věta 2.1.4 (Lipschitzovo kritérium, str.489, [7]) Jestliže $f \in C^{0,\lambda}([a, b])$, $0 < \lambda \leq 1$, pak Fourierova řada příslušná k funkci f konverguje stejnoměrně k f na libovolném intervalu $[c, d] \subset [a, b]$ ($a < c < d < b$).

Věta 2.1.5 Mějme Fourierovu řadu příslušnou k funkci f . Necht' $f \in C^{0,\lambda}([a, a + 2l])$, $0 < \lambda \leq 1$ a $f(a) = f(a + 2l)$, pak její Fourierova řada konverguje stejnoměrně k funkci f na $[a, a + 2l]$.

Věta 2.1.6 Necht' $f \in \mathcal{P}_{2l}(\mathbb{R})$, $f, f' \in PC([a, a + 2l])$. Pak Fourierova řada pro funkci f konverguje k $f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, kde je funkce f spojitá a v bodech, kde není spojitá platí

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right) = \bar{f}(x)$$

Kapitola 3

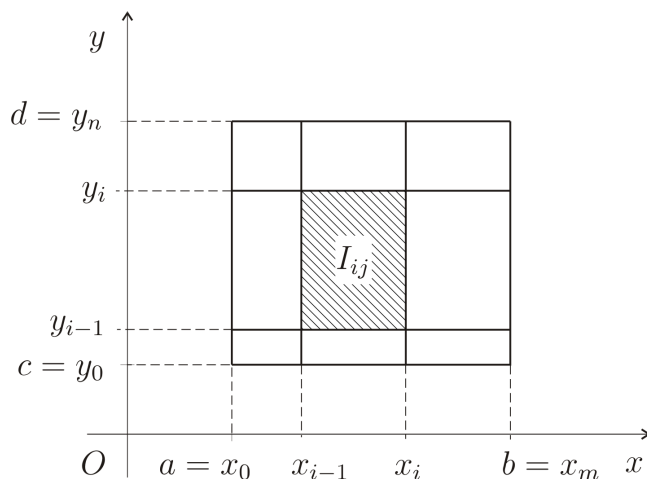
INTEGRÁLNÍ POČET VÍCE PROMĚNNÝCH

3.1 Dvojný integrál

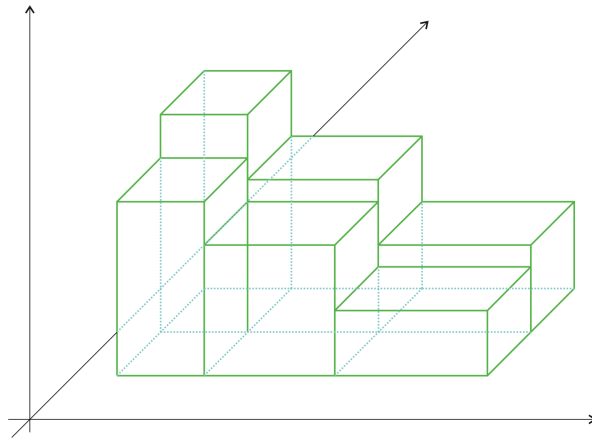
3.1.1 Dvojný integrál na dvojrozměrném intervalu

Uvažujme interval $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ a necht' D_m^x , resp. D_n^y je dělení $[a, b]$, resp. $[c, d]$ s dělicími body $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ a $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$. Uspořádanou dvojici (D_m^x, D_n^y) (pro stručnost budeme značit tuto dvojici D_{mn}) nazýváme *dělením intervalu I* (viz Obr.3.1). Každý interval $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ nazýváme *částečným intervalem* dělení D_{mn} . Říkáme, že systém intervalů I_{ij} pokrývá interval I . Množinu všech dělení intervalu I budeme značit $\mathcal{D}(I)$. Zjemnění dělení.

Obsah (míru) intervalu I_{ij} definujeme $\mu(I_{ij}) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) = \Delta x_i \Delta y_j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Výraz $\nu(D_{MN}) = \max \{\nu(D_M^x), \nu(D_N^y)\}$ nazýváme *normou dělení*. Nulovou posloupností dělení nazýváme posloupnost dělení $\{D_k\}$ takovou, že $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu(D_k) = 0$.



Obrázek 3.1: Dělení intervalu.



Obrázek 3.2: Integrální součet.

Definice 3.1.1 Nechtě f je ohraničená funkce na I , D_{mn} dělení I s dělicími body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$. Přičadíme dělení D_{mn} a funkci f *dolní Riemannův integrální součet* definovaný vztahem

$$s(f, D_{mn}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} \mu(I_{ij}), \quad m_{ij} = \inf_{[x,y] \in I_{ij}} f(x, y) \quad (3.1)$$

a *horní Riemannův integrální součet* definovaný vztahem

$$S(f, D_{mn}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \mu(I_{ij}), \quad M_{ij} = \sup_{[x,y] \in I_{ij}} f(x, y) \quad (3.2)$$

Definice 3.1.2 Nechtě f je ohraničená funkce na I . Definujme *dolní Riemannův integrál* pro funkci f definovaný vztahem

$$\iint_I f(x, y) dx dy = I^-(f) = \sup_D s(f, D) \quad (3.3)$$

a *horní Riemannův integrál* pro funkci f definovaný vztahem

$$\overline{\iint}_I f(x) dx = I^+(f) = \inf_D S(f, D) \quad (3.4)$$

Definice 3.1.3 Řekneme, že funkce f je *Riemannovsky integrabilní* na I tehdy a jen tehdy jestliže je ohraničená na I a

$$I^-(f) = I^+(f) \quad (3.5)$$

V tomto případě se tato společná hodnota nazývá *Riemannův integrál* funkce f na I a značíme

$$\iint_I f(x, y) \, dx dy = I^-(f) = I^+(f) \quad (3.6)$$

Jestliže integrál existuje, řekneme, že funkce f je *integrabilní (integrovatelná)* na intervalu I , a píšeme $f \in \mathcal{R}(I)$.

Věta 3.1.1 (*test integrability*) *Nechť f je omezená funkce na intervalu I . Funkce f je Riemannovsky integrabilní na I tehdy a jen tehdy když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D tak, že*

$$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon \quad (3.7)$$

Poznámka 3.1.1 *Nechť f je omezená funkce na intervalu I a D je ekvidistantní dělení, tj. $x_i = a + (b - a)i/2^n$, $y_j = c + (d - c)j/2^n$, $i, j = 0, 1, \dots, 2^n$. Definujme*

$$m_{ij} = \inf_{[x,y] \in I_{ij}} f(x, y), \quad M_{ij} = \sup_{[x,y] \in I_{ij}} f(x, y)$$

Definujme

$$J^-(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)(d-c)}{2^{2n}} \sum_{i,j=1}^{2^n} m_{ij}, \quad J^+(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)(d-c)}{2^{2n}} \sum_{i,j=1}^{2^n} M_{ij}$$

Pak f je Riemannovsky integrabilní na I tehdy a jen tehdy když $J^-(f) = J^+(f)$.

Poznámka 3.1.2 Všimněte si, že při konstrukci Riemannova integrálu jsme předpokládali, že jak funkce f tak i interval $[a, b]$ jsou ohraničené.

Následující věta nám zaručuje existenci integrálu:

Věta 3.1.2 *Každá funkce spojitá na intervalu $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ je integrovatelná.*

Věta 3.1.3 (*Fubiniova věta*) *Nechť f je integrovatelná na $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Pak platí*

$$\iint_I f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \quad (3.8)$$

Poznámka 3.1.3 Integrály v koncových členech řetězce rovností (3.8) se nazývají *dvojnásobné*.

3.1.2 Dvojný integrál na oblastech prvního a druhého druhu v \mathbb{R}^2 .

Zavedeme pojem elementární oblasti v rovině:

Elementární oblast I. druhu v rovině je množina

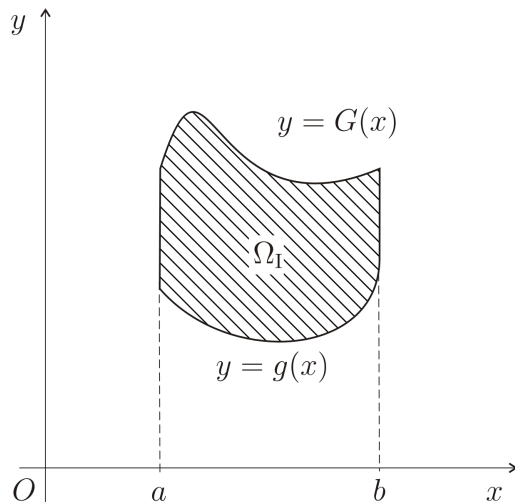
$$\Omega_I = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, g(x) < y < G(x)\},$$

kde g a G jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$ a $g(x) \leq G(x)$ pro každé $x \in [a, b]$.

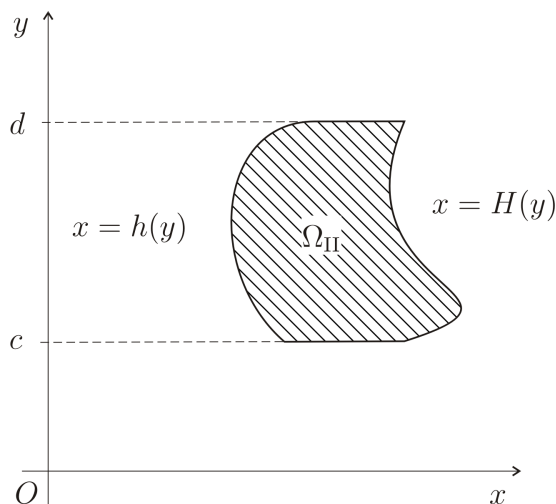
Elementární oblast II. druhu v rovině je množina

$$\Omega_{II} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, h(y) < x < H(y)\},$$

kde h a H jsou spojité funkce na intervalu $[c, d]$ a $h(y) \leq H(y)$ pro každé $y \in [c, d]$.



Obrázek 3.3: Oblast I. druhu.



Obrázek 3.4: Oblast II. druhu.

Obrázek 3.5: Elementární oblasti I. a II. druhu v rovině.

Věta 3.1.4 (Fubiniova věta)

(a) Nechť existuje $\iint_{\Omega_I} f(x, y) dx dy$ a pro každé $x \in [a, b]$ nechť existuje integrál

$$J(x) = \int_{g(x)}^{G(x)} f(x, y) dy.$$

Pak existuje také dvojnásobný integrál

$$\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{G(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

a platí rovnosti

$$\iint_{\Omega_I} f(x, y) dx dy = \int_a^b J(x) dx = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{G(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

(b) Nechť existuje $\iint_{\Omega_{II}} f(x, y) dx dy$ a pro každé $y \in [c, d]$ existuje integrál

$$K(y) = \int_{h(y)}^{H(y)} f(x, y) dx.$$

Pak existuje také dvojnásobný integrál

$$\int_c^d \left(\int_{h(y)}^{H(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

a platí rovnosti

$$\iint_{\Omega_{II}} f(x, y) dx dy = \int_c^d K(y) dy = \int_c^d \left(\int_{h(y)}^{H(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Věta 3.1.5 Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je elementární oblast prvního nebo druhého druhu a nechť funkce f je na Ω spojitá a ohraničená. Pak je funkce f na Ω integrovatelná.

Poznámka 3.1.4 Integrovatelnost a hodnota dvojnásobného integrálu nezávisí na chování funkce v konečném počtu bodů integračního oboru, nebo na sjednocení konečného počtu křivek konečné délky. Je tedy v předešlých větách nepodstatné, jestli integrujeme přes otevřený integrační obor, nebo jestli přidáme k tomuto oboru jakoukoliv část hranice oboru.

Věta 3.1.6 (Základní vlastnosti dvojnásobného integrálu.) Nechť $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ jsou oblasti prvního nebo druhého druhu a nechť $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$ (tzn. f a g jsou funkce integrovatelné na Ω). Pak platí:

(a)

$$\iint_{\Omega} (f(x, y) + g(x, y)) \, dx dy = \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy + \iint_{\Omega} g(x, y) \, dx dy.$$

(b)

$$\iint_{\Omega} k f(x, y) \, dx dy = k \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy,$$

kde $k \in \mathbb{R}$.

(c) Jestliže pro každé $[x, y] \in \Omega$ platí $f(x, y) \leq g(x, y)$, pak

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy \leq \iint_{\Omega} g(x, y) \, dx dy.$$

(d) $|f| \in \mathcal{R}(\Omega)$ a platí

$$\left| \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_{\Omega} |f(x, y)| \, dx dy.$$

(e) Jestliže pro každé $[x, y] \in \Omega$ platí že $|f(x, y)| \leq M$, pak

$$\left| \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_{\Omega} |f(x, y)| \, dx dy \leq M \mu(\Omega).$$

(f) Jestliže $\text{int}\Omega_1 \cap \text{int}\Omega_2 = \emptyset$, $f \in \mathcal{R}(\Omega_1)$ a $f \in \mathcal{R}(\Omega_2)$, pak je funkce f integrovatelná na $\Omega_1 \cup \Omega_2$ a platí

$$\iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Omega_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{\Omega_2} f(x, y) \, dx dy.$$

(g) $f \cdot g \in \mathcal{R}(\Omega)$.

(h) Jestliže je funkce f spojitá na $\bar{\Omega}$, pak existuje bod $[\xi, \eta] \in \bar{\Omega}$ tak, že

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = f(\xi, \eta) \mu(\Omega).$$

Poznámka 3.1.5 Symbolem $\mu(\Omega)$ budeme v této kapitole rozumět míru (obsah) elementární oblasti Ω .

Symbolem $\bar{\Omega}$ značíme tzv. *uzávěr množiny* Ω . Je to zjednodušeně řečeno „množina Ω uvažovaná spolu se svou hranicí“.

Ukažte, že z tvrzení (h) Věty 3.1.6 plyne následující jednoduchý důsledek:

$$\mu(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy.$$

3.1.3 Transformace dvojného integrálu

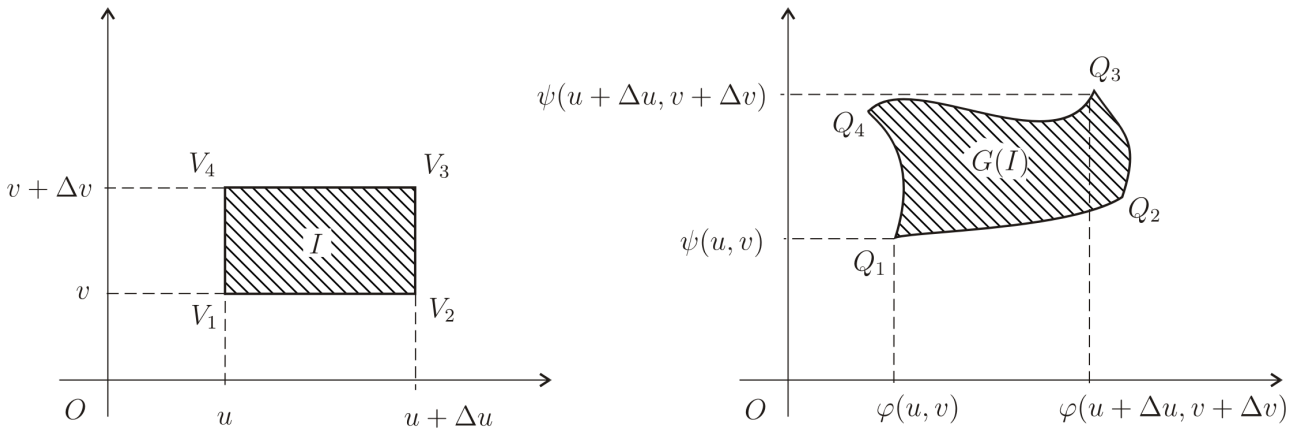
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Uvažujme funkce $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G = (\varphi, \psi)$ takové, že:

- a) $\varphi, \psi \in C^1(\Omega)$, tj. φ, ψ jsou *spojitě diferencovatelné* na Ω ;
- b) $G = (\varphi, \psi)$ je *prosté* zobrazení, tj. pro všechna $[u_0, v_0], [u_1, v_1] \in \Omega$ platí:

Jestliže $[u_0, v_0] \neq [u_1, v_1]$, pak $G(u_0, v_0) \neq G(u_1, v_1)$.

Uvažujme libovolný dvojrozměrný interval (tj. obdélník) $I \subset \Omega$ o vrcholech V_1, V_2, V_3 a V_4 a stranách délky $\Delta u, \Delta v$. Transformací $G = (\varphi, \psi)$ se zobrazí obdélník I na „křivočarý obdélník“ $I^* = G(I)$ o vrcholech Q_1, Q_2, Q_3 a Q_4 :

$$\begin{aligned} V_1 = [u, v] &\mapsto Q_1 = [\varphi(u, v), \psi(u, v)], \\ V_2 = [u + \Delta u, v] &\mapsto Q_2 = [\varphi(u + \Delta u, v), \psi(u + \Delta u, v)], \\ V_3 = [u + \Delta u, v + \Delta v] &\mapsto Q_3 = [\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), \psi(u + \Delta u, v + \Delta v)], \\ V_4 = [u, v + \Delta v] &\mapsto Q_4 = [\varphi(u, v + \Delta v), \psi(u, v + \Delta v)]. \end{aligned}$$



V dalším se pokusíme alespoň přibližně spočítat obsah obrazce $G(I)$.

S použitím Taylorovy věty máme:

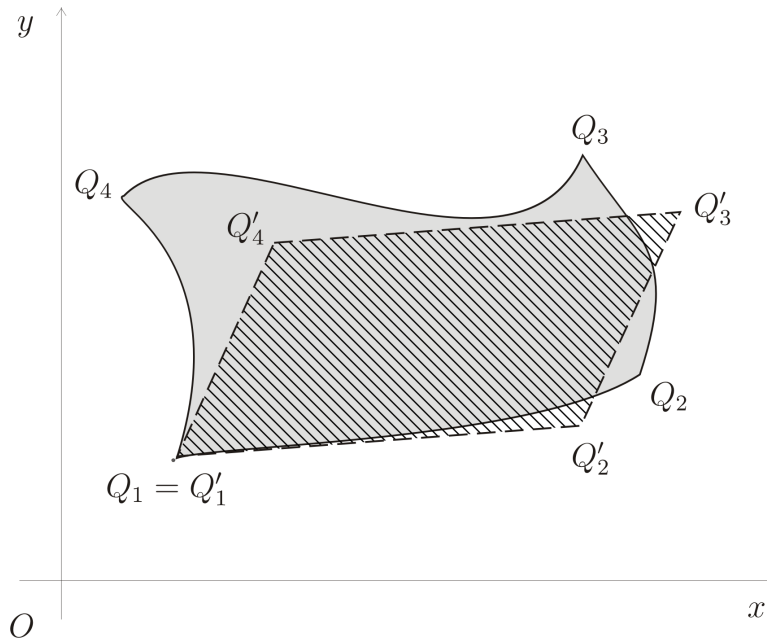
$$\begin{aligned} \varphi(u + \Delta u, v) &= \varphi(u, v) + \varphi'_u(u, v)\Delta u + R, \\ \varphi(u, v + \Delta v) &= \varphi(u, v) + \varphi'_v(u, v)\Delta v + R, \\ \psi(u + \Delta u, v) &= \psi(u, v) + \psi'_u(u, v)\Delta u + R, \\ \psi(u, v + \Delta v) &= \psi(u, v) + \psi'_v(u, v)\Delta v + R, \\ \varphi(u + \Delta u, v + \Delta v) &= \varphi(u, v) + \varphi'_u(u, v)\Delta u + \varphi'_v(u, v)\Delta v + R, \\ \psi(u + \Delta u, v + \Delta v) &= \psi(u, v) + \psi'_u(u, v)\Delta u + \psi'_v(u, v)\Delta v + R, \end{aligned}$$

kde $R = R((\Delta u)^2, (\Delta v)^2, \Delta u\Delta v)$ jsou zbytky v Taylorově vzorci, které označíme ve všech předešlých výrazech stejně.

Všechny zbytky v naší úvaze zanedbáme a budeme uvažovat pouze body

$$\begin{aligned} Q'_1 &= Q_1, \\ Q'_2 &= Q_1 + [\varphi'_u(u, v)\Delta u, \psi'_u(u, v)\Delta u], \\ Q'_3 &= Q_1 + [\varphi'_u(u, v)\Delta u + \varphi'_v(u, v)\Delta v, \psi'_u\Delta u + \psi'_v(u, v)\Delta v], \\ Q'_4 &= Q_1 + [\varphi'_v(u, v)\Delta v, \psi'_v(u, v)\Delta v]. \end{aligned}$$

Obsah křivočarého lichoběžníka $G(I)$ je přibližně roven obsahu rovnoběžníka $Q'_1Q'_2Q'_3Q'_4$ o stranách $Q'_1Q'_2$ a $Q'_1Q'_4$.



Obsah tohoto rovnoběžníka je roven dvojnásobku obsahu $\Delta Q'_1 Q'_2 Q'_4$, což z analytické geometrie je absolutní hodnota z determinantu

$$\left| \det \begin{pmatrix} x'_2 - x'_1 & y'_2 - y'_1 \\ x'_4 - x'_1 & y'_4 - y'_1 \end{pmatrix} \right|,$$

kde $Q'_1 = [x'_1, y'_1]$, $Q'_2 = [x'_2, y'_2]$, $Q'_4 = [x'_4, y'_4]$. Po dosazení máme

$$\begin{aligned} & \left| \det \begin{pmatrix} \varphi'_u(u, v) \Delta u & \psi'_u(u, v) \Delta u \\ \varphi'_v(u, v) \Delta v & \psi'_v(u, v) \Delta v \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \varphi'_u(u, v) \Delta u & \varphi'_v(u, v) \Delta v \\ \psi'_u(u, v) \Delta u & \psi'_v(u, v) \Delta v \end{pmatrix} \right| \\ & = \left| \det \left(\begin{pmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u & 0 \\ 0 & \Delta v \end{pmatrix} \right) \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \Delta u & 0 \\ 0 & \Delta v \end{pmatrix} \right| \\ & = \left| \det \begin{pmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{pmatrix} \right| |\Delta u| |\Delta v|. \end{aligned}$$

Matrice

$$\mathcal{J}(u, v) = \begin{pmatrix} \varphi'_u(u, v) & \varphi'_v(u, v) \\ \psi'_u(u, v) & \psi'_v(u, v) \end{pmatrix}$$

se nazývá *Jacobiho matice* transformace $G = (\varphi, \psi)$. Determinant

$$J(u, v) = \det \mathcal{J}(u, v)$$

z této matice se nazývá *jakobián* této transformace.

Můžeme tedy psát

$$\mu(G(I)) \approx |J(u, v)| |\Delta u| |\Delta v| = |J(u, v)| \mu(I)$$

Dospěli jsme k jedné z nejdůležitějších vět:

Věta 3.1.7 Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $G = (\varphi, \psi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ je prosté zobrazení takové, že $\varphi, \psi \in C^1(\Omega)$ a jakobián $J(u, v) \neq 0$ v každém bodě $[u, v] \in \Omega$. Necht' $K \subset \Omega$ je uzavřená množina, která je sjednocením konečného počtu elementárních oblastí prvního nebo druhého druhu, a funkce f je spojitá na $G(K)$. Pak platí

$$\iint_{G(K)} f(x, y) \, dx dy = \iint_K f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| \, dudv.$$

Poznámka 3.1.6 Věta zůstane v platnosti, pokud zobrazení G nebude prosté, nebo jakobián bude roven nule na podmnožinách množiny K uvedených v Poznámce 3.1.4, budou-li jejich obrazy při zobrazení G opět množiny uvedených typů v $G(K)$. Pokud funkce f bude ohraničená na $G(K)$, pak také stačí, aby f byla spojitá na $G(K)$ s výjimkou množin uvedených v Poznámce 3.1.4.

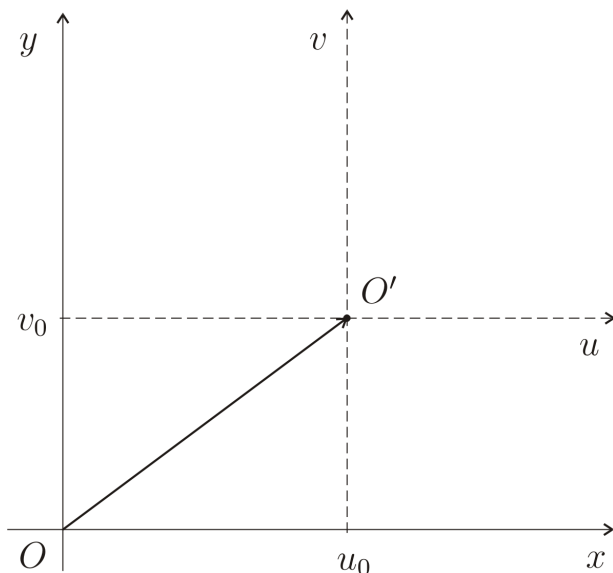
Poznámka 3.1.7 Účelem transformace je zjednodušit integrační obor nebo integrovanou funkci. Nejlepší alternativou je, když se podaří zlepšit obojí.

Nejdůležitější typy transformací:

Posunutí. Je dán bod $[u_0, v_0]$. Transformace $G = (\varphi, \psi)$ daná vztahy

$$\begin{aligned} x &= u_0 + u \equiv \varphi(u, v), \\ y &= v_0 + v \equiv \psi(u, v) \end{aligned}$$

posouvá bod $[x, y]$ o orientovanou vzdálenost u_0 ve směru souřadnicové osy x a o orientovanou vzdálenost v_0 ve směru souřadnicové osy y .



Obrázek 3.6: Transformace posunutí.

Řešení:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Lineární transformace. Je dána regulární matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Transformace $G = (\varphi, \psi)$ daná vztahy

$$\begin{aligned} x &= a_{11}u + a_{12}v \equiv \varphi(u, v), \\ y &= a_{21}u + a_{22}v \equiv \psi(u, v) \end{aligned}$$

Zobrazuje přímku na přímku, v případě, že A je ortogonální pak zachovává úhly.

Řešení:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |A|.$$

Zobecněné polární souřadnice. Jsou dány konstanty $a, b > 0$.

Transformace do zobecněných polárních souřadnic je dána vztahy:

$$\begin{aligned} x &= ar \cos t \equiv \varphi(r, t), \\ y &= br \sin t \equiv \psi(r, t). \end{aligned}$$

$$J(r, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial r} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} & \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos t & -ar \sin t \\ b \sin t & br \cos t \end{vmatrix} = abr.$$

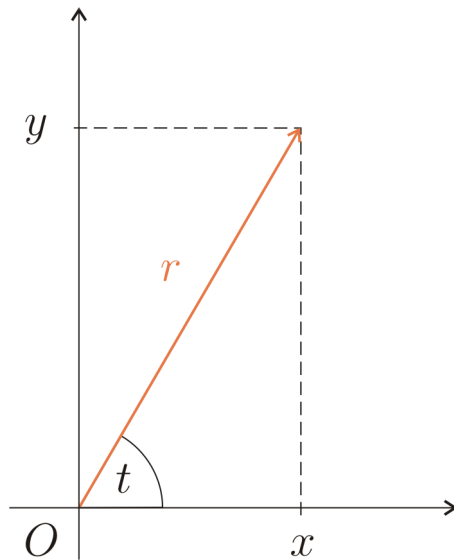
Tato transformace $G = (\varphi, \psi)$ zobrazuje množinu $(0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ vzájemně jednoznačně na množinu $\mathbb{R}^2 \setminus \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y = 0\}$.

Inverzní zobrazení $G^{-1} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ je dáno vztahy

$$r = \tilde{\varphi}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$t = \tilde{\psi}(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) & x \leq 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) & x \leq 0, y < 0 \end{cases}$$

Poznámka 3.1.8 Speciální případ nastává pro volbu parametrů $a = b = 1$. V takovém případě mluvíme o polárních souřadnicích (vypouštíme přívlástek zobecněné). Geometrický význam polárních souřadnic je popsán na Obrázku 3.7.



Obrázek 3.7: Polární souřadnice.

3.1.4 Geometrické a fyzikální aplikace dvojného integrálu

V dalším budeme předpokládat, že Ω může být sjednocením konečného počtu elementárních oblastí prvního nebo druhého druhu.

Obsah rovinného obrazce

Obsah rovinného obrazce $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se spočte s použitím vzorce:

$$\mu(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy.$$

Objem válcového tělesa $K \subset \mathbb{R}^3$.

Mějme dáno těleso

$$K = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in \Omega, g(x, y) < z < f(x, y)\},$$

kde $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^2$, f, g jsou spojitě a ohraničené na Ω . Pak objem tohoto tělesa je dán vzorcem

$$V(K) = \iint_{\Omega} [f(x, y) - g(x, y)] dx dy.$$

Obsah plochy

Obsah části plochy

$$S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), [x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2\},$$

kde $f \in C^1(\overline{\Omega})$ je dán vzorcem

$$P(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy.$$

Hmotnost tenké rovinné desky $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Hmotnost tenké rovinné desky Ω o plošné hustotě $\sigma(x, y)$ je dána vztahem

$$m(\Omega) = \iint_{\Omega} \sigma(x, y) \, dx dy, \quad [kg].$$

Statický moment tenké rovinné desky

Statický moment tenké rovinné desky $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s plošnou hustotou $\sigma(x, y)$ vzhledem k přímce p je

$$S_p = \iint_{\Omega} \text{dist}([x, y], p) \cdot \sigma(x, y) \, dx dy \, kg \cdot m,$$

kde $\text{dist}([x, y], p)$ je orientovaná vzdálenost bodu $[x, y]$ od přímky p .

Speciální případ vzhledem k souřadnicovým osám x a y .

$$S_x = \iint_{\Omega} y\sigma(x, y) \, dx dy, \quad S_y = \iint_{\Omega} x\sigma(x, y) \, dx dy.$$

Těžiště tenké rovinné desky $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$$T = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m} \right].$$

Moment setrvačnosti tenké rovinné desky

Moment setrvačnosti tenké rovinné desky $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s plošnou hustotou $\sigma(x, y)$ vzhledem k přímce p je

$$I_p = \iint_{\Omega} \text{dist}^2([x, y], p) \cdot \sigma(x, y) \, dx dy, \quad kg \, m^2,$$

kde $\text{dist}([x, y], p)$ je vzdálenost bodu $[x, y]$ od přímky p .

Speciální případ vzhledem k souřadnicovým osám x a y .

$$I_x = \iint_{\Omega} y^2\sigma(x, y) \, dx dy, \quad I_y = \iint_{\Omega} x^2\sigma(x, y) \, dx dy.$$

3.2 Křivkové integrály

3.2.1 Pojem křivky v \mathbb{R}^n .

Definice 3.2.1 Množinu $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ nazveme *křivkou v \mathbb{R}^n* , jestliže existuje spojitě zobrazení $\Phi = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ intervalu I na množinu γ takové, že platí:

- 1) Zobrazení Φ je prosté s výjimkou konečně mnoha bodů.
- 2) Zobrazení Φ je po částech třídy C^1 na I , tj. Φ' je spojitá s výjimkou konečně mnoha bodů, v nichž existují jednostranné derivace, které mohou být různé.
- 3) Φ' má až na konečně mnoho bodů nenulovou hodnotu v každém bodě intervalu I .

Zobrazení pak Φ nazýváme *parametrizací křivky γ* .

Nechť $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že bod C je *k-násobným* bodem křivky γ , jestliže existuje právě k různých hodnot parametru $t_1, \dots, t_k \in [a, b]$ takových, že $C = \Phi(t_i)$ pro $i = 1, 2, \dots, k$. Křivka γ se nazývá *jednoduchá*, když nemá vícenásobné body.

Křivka γ se nazývá *uzavřená*, jestliže $\Phi(a) = \Phi(b)$. Uzavřenou křivku nazveme *jednoduchou*, jestliže nemá žádný vícenásobný bod kromě dvojnásobného bodu $\Phi(a)$.

Je-li I_1, I_2, \dots, I_n dělení intervalu $[a, b]$, pak obrazy dělicích intervalů $\Phi(I_1), \Phi(I_2), \dots, \Phi(I_n)$ jsou opět křivky. Posloupnost těchto křivek nazveme *dělením křivky γ* .

Definice 3.2.2 Je-li parametrizace Φ křivky γ prosté zobrazení a třídy C^1 na celém intervalu $[a, b]$ a má přitom nenulovou derivaci (v bodech a, b uvažujeme jednostranné derivace) v každém bodě intervalu $[a, b]$, nazýváme γ *obloukem* a zobrazení Φ jeho parametrizací.

Oblouk γ je *sjednocením* podoblouků $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, jestliže $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$ a oblouky $\gamma_i, \gamma_j, i \neq j$, mají společné nejvýše krajní body.

Definice 3.2.3 Nechť je daná křivka γ s parametrizací $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\Phi \in C^1$ na I . Pro $t \in I$ nazveme

$$\Phi'(t) := D\Phi(t)$$

tečným vektorem ke křivce γ v bodě t .

Transformace parametru. Nechť je dán oblouk γ s parametrizací $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nechť funkce g zobrazuje interval J na interval I a $g \in C^1(I)$, $g' \neq 0$ na J . Zobrazení

$$\Psi = \Phi \circ g : J \rightarrow \mathbb{R}^n$$

je rovněž parametrizací oblouku γ .

Je-li funkce g rostoucí říkáme, že parametrizace Φ a Ψ jsou *souhlasné parametrizace*.

Orientace oblouku. Necht' je dán oblouk γ s parametrizací $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Na oblouku γ zavedeme relaci \prec

$$M_1, M_2 \in \gamma : M_1 \prec M_2 \Leftrightarrow t_1 = \Phi^{-1}(M_1) < t_2 = \Phi^{-1}(M_2)$$

která je relací uspořádání na γ .

O tomto uspořádání řekneme, že určuje *orientaci* oblouku γ a oblouk s tímto uspořádáním nazveme *orientovaným obloukem*. O parametrizaci Φ řekneme, že *souhlasí s orientací* γ .

Příklady křivek.

- Graf spojitě funkce

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi(t) = (t, f(t)), \quad t \in I$$

- Přímka

$$ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, |a| + |b| \neq 0$$

$$\Phi(t) = (x_0 + s_1 t, y_0 + s_2 t), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

- Elipsa

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$

$$\Phi(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + b \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

- Hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Phi(t) = (\pm a \cosh t, b \sinh t), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

- Polokubická parabola

$$y^2 - ax^3 = 0, \quad x \in [0, \infty), \quad a > 0$$

$$\Phi(t) = \left(\frac{t^2}{\sqrt[3]{a}}, t^3 \right), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

- Asteroida

$$x^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3} = 0, \quad a > 0$$

$$\Phi(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

- Steinerova hypocykloida

$$(x^2 + y^2)^2 + 8ax(3y^2 - x^2) + 18a^2(x^2 + y^2) - 27a^4 = 0, \quad a > 0$$

$$\Phi(t) = (a(2 \cos t + \cos 2t), a(2 \sin t - \sin 2t)), \quad t \in [0, 2]$$

- Cykloida

$$x = a \arccos a - ya - \sqrt{2ay - y^2}, \quad y \in [0, 2a], \quad a > 0$$

$$\Phi(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

- Kardioida (srdcovka)

$$(x^2 + y^2)^2 - 6a^2(x^2 + y^2) + 8a^3x - 3a^4 = 0, \quad a > 0$$

$$\Phi(t) = (a(2 \cos t - \cos 2t), a(2 \sin t - \sin 2t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

- Descartův list

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a > 0$$

$$\Phi(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad t \neq -1$$

- Bernoulliova lemniskáta

$$(x^2 + y^2)^2 + a^2(y^2 - x^2) = 0, \quad a \neq 0$$

$$\Phi(t) = \left(\frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{a \cos t \sin t}{1 + \sin^2 t} \right), \quad t \in [-\pi, \pi]$$

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$$

- Dioklova kisoida

$$y^2 - \frac{x^3}{a-x} = 0, \quad a > 0, \quad x \neq a$$

$$\Phi(t) = \left(\frac{at^2}{1+t^2}, \frac{at^3}{1+t^2} \right), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

- Logaritmická spirála

$$\Phi(t) = b(e^{at} \cos t, e^{at} \sin t), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad a, b > 0$$

$$r = ae^{b\varphi}, \quad \varphi \in [0, \infty)$$

- Archimédova spirála

$$\Phi(t) = (at \sin t, -at \cos t), \quad t \in [0, \infty), \quad a > 0$$

$$r = a\varphi, \quad \varphi \in [0, \infty)$$

- Šroubovice

$$\Phi(t) = (a \cos t, b \sin t, ct), \quad t \in [0, 2\pi], \quad a, b > 0, \quad c \neq 0.$$

3.2.2 Křivkový integrál ve skalárním poli

Délka křivky

Nechť je dán oblouk $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, který má parametrické rovnice

$$x = \Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)), \quad t \in [a, b].$$

My nepotřebujeme žádnou teorii míry k definici délky křivky v \mathbb{R}^n . Definujme dělení D_N intervalu $I = [a, b]$ s dělicími body $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$ a počítejme

$$\sum_{i=1}^N \|\Phi(t_{i-1}) - \Phi(t_i)\| = \sum_{i=1}^N \|[\varphi_1(t_{i-1}), \varphi_2(t_{i-1}), \dots, \varphi_n(t_{i-1})] - [\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i), \dots, \varphi_n(t_i)]\|$$

a definujme *délku křivky* jako

$$L(\gamma) = \sup_{D_N} \sum_{i=1}^N \|[\varphi_1(t_{i-1}), \varphi_2(t_{i-1}), \dots, \varphi_n(t_{i-1})] - [\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i), \dots, \varphi_n(t_i)]\| < \infty$$

Pak řekneme, že křivka γ je *rektifikovatelná*.

Nechť je nyní dán oblouk $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ parametrickými rovnicemi

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [a, b]$$

Pro $i = 1, 2, \dots, N$ máme z Lagrangeovy věty

$$\begin{aligned} \|(\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i), \psi(t_{i-1}) - \psi(t_i))\| &= \sqrt{(\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i-1}) - \psi(t_i))^2} \\ &= \sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\eta_i))^2} \Delta t_i \end{aligned} \quad (3.9)$$

kde $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Protože funkce φ a ψ mají spojité derivace existuje $K > 0$ tak, že $|\varphi'(t)|, |\psi'(t)| \leq K$ pro každé $t \in [a, b]$.

$$L(\gamma, D_N) \leq \sum_{i=1}^N \sqrt{K^2 + K^2} \Delta t_i \leq \sqrt{2}K(b-a)$$

Dělení D_N bylo libovolné a proto existuje $\sup_D L(\gamma, D)$.

Věta 3.2.1 Číslo $L(\gamma)$ je délkou oblouku γ , právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu I tak, že pro každé zjemnění \tilde{D} dělení D platí

$$|L(\gamma, \tilde{D}) - L(\gamma)| < \varepsilon$$

Věta 3.2.2 V případě parametrických rovnic $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [a, b]$, je tedy délka oblouku γ dána vztahem

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

Křivkový integrál ve skalárním poli (neorientovaný křivkový integrál)

V každém bodě M oblouku γ známe hustotu $\varrho(M)$. Chceme znát hmotnost celé křivky. Na oblouku $\widehat{A_{i-1}A_i}$ definujeme

$$m_i = \min_{[x,y] \in \widehat{A_{i-1}A_i}} \varrho(x, y) \quad M_i = \max_{[x,y] \in \widehat{A_{i-1}A_i}} \varrho(x, y), \quad \forall i = 1, 1, \dots, N$$

Označme Δs_i délku podoblouku $\widehat{A_{i-1}A_i}$. Označme Δh_i hmotnost podoblouku $\widehat{A_{i-1}A_i}$. Pro hmotnost tohoto podoblouku platí

$$m_i \Delta s_i \leq \Delta h_i \leq M_i \Delta s_i, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Hmotnost h celého oblouku bude tedy

$$h = \sum_{i=1}^N \Delta h_i$$

a

$$s(\varrho, D_N) = \sum_{i=1}^N m_i \Delta s_i \leq h \leq \sum_{i=1}^N M_i \Delta s_i = S(\varrho, D_N)$$

Výrazy

$$s(\varrho, D_N) = \sum_{i=1}^N m_i \Delta s_i, \quad S(\varrho, D_N) = \sum_{i=1}^N M_i \Delta s_i$$

jsou dolní a horní Riemannův integrální součet pro funkci ϱ a dělení D_N .

V naší úvaze, ale můžeme místo hustoty ϱ uvažovat libovolnou spojitou funkci f na oblouku γ .

Definice 3.2.4 Jestliže platí

$$\sup_{D_N} s(f, D_N) = \inf_{D_N} S(f, D_N)$$

pak tuto hodnotu značíme

$$\int_{\gamma} f(M) ds = \int_{\gamma} f(x, y) ds.$$

a nazveme ji *křivkovým integrálem* funkce f přes křivku γ .

Věta 3.2.3 *Nechť oblouk γ je dán parametrickými rovnicemi*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [a, b]$$

a funkce $f(x, y)$ je spojitá na oblouku γ . Pak platí

$$\int_{\gamma} f(M) ds = \int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Poznámka 3.2.1 Je-li dána křivka předpisem $y = g(x)$, $x \in [a, b]$ a derivace g' je spojitá na $[a, b]$, pak platí

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx.$$

Je-li dána křivka předpisem $x = h(y)$, $y \in [c, d]$ a derivace h' je spojitá na $[c, d]$, pak platí

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_c^d f(h(y), y) \sqrt{1 + (h'(y))^2} dy.$$

Věta 3.2.4 (Nezávislost na parametrizaci) *Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je oblouk, Φ, Ψ jeho dvě parametrizace a f je funkce spojitá na γ . Pak platí*

$$\int_{\gamma_{\Phi}} f(M) ds = \int_{\gamma_{\Psi}} f(M) ds$$

Věta 3.2.5 (Základní vlastnosti křivkového integrálu ve skalárním poli)

(a) *Linearita.* *Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je oblouk a funkce f a g jsou spojitě na oblouku γ . Pak platí*

$$\int_{\gamma} (c_1 f + c_2 g)(M) ds = c_1 \int_{\gamma} f(M) ds + c_2 \int_{\gamma} g(M) ds,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné reálné konstanty.

(b) *Aditivita.* *Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je křivka, která je sjednocením dvou oblouků γ_1, γ_2 a funkce f je spojitá na křivce γ . Pak platí*

$$\int_{\gamma} f(M) ds = \int_{\gamma_1} f(M) ds + \int_{\gamma_2} f(M) ds.$$

3.2.3 Geometrické a fyzikální aplikace křivkového integrálu ve skalární poli

(a) *Délka křivky*

$$L = \int_{\gamma} ds.$$

(b) *Obsah části válcové plochy Φ s řídicí křivkou $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ v rovině $z = 0$ a tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezenými plochami $z = g(x, y)$, $z = f(x, y)$, $g(x, y) \leq f(x, y)$ pro každé $[x, y] \in \gamma$.*

$$P = \int_{\gamma} [f(x, y) - g(x, y)] ds.$$

3.2.4 Křivkový integrál ve vektorovém poli

Zavedení pojmu, základní vlastnosti křivkového integrálu ve vektorovém poli

Ve fyzice a v technických aplikacích se často setkáváme s různými druhy rovinných nebo prostorových vektorových polí – *silové pole*, *pole rychlostí částic proudící nestlačitelné kapaliny*, *pole magnetické a elektrické intenzity*.

Z matematického hlediska jde vlastně o zobrazení, které bodům přiřazuje vektory.

Vektorové pole je zobrazení

$$\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. V technické praxi je nejčastější použití pro $n = 2, 3$. V tomto případě budeme jednoduše psát

$$\vec{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)), \quad \vec{f}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

kde P, Q, R jsou složky (komponenty) vektorové funkce \vec{f} .

Říkáme, že vektorové pole \vec{f} je spojitě vektorové pole, nebo stručněji je třídy C na Ω , když všechny složky jsou spojité na Ω . Říkáme, že vektorové pole \vec{f} je třídy C^1 na Ω , když všechny složky tohoto pole mají spojité všechny první parciální derivace na množině Ω .

Uvažujeme-li orientovaný oblouk $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (resp. \mathbb{R}^3), pak můžeme v každém bodě $C = \Phi(t)$, $t \in (a, b)$ oblouku γ určit jednotkový tečný vektor vztahem

$$\vec{t}(C) = \frac{\Phi'(t)}{\|\Phi'(t)\|}.$$

Definice 3.2.5 Nechť \vec{f} je spojitě vektorové pole na orientovaném oblouku γ . *Křivkovým integrálem* ve vektorovém poli \vec{f} (křivkovým integrálem druhého druhu) přes křivku γ nazýváme integrál tvaru

$$\int_{\gamma} (\vec{f} | d\vec{s}) = \int_{\gamma} (\vec{f}(M) | \vec{t}(M)) ds$$

Jeli $\Phi: [a, b] \rightarrow \gamma$, parametrizace orientovaného oblouku γ (tj. parametrizace oblouku souhlasí s jeho orientací), pak platí

$$\int_{\gamma} (\vec{f}(M) | \vec{t}(M)) ds = \int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \chi'(t)] dt$$

Mnohdy se používá označení

$$\int_{\gamma} (\vec{f} | \vec{t}) ds = \int_{\gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

které se po dosazení z parametrických rovnic oblouku γ převede na výše uvedený tvar.

Poznámka 3.2.2 Je-li dána křivka předpisem $y = g(x)$, $x \in [a, b]$ a g je spojitá na $[a, b]$, pak platí

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx = \int_a^b P(t, g(t)) dt$$

Je-li dána křivka předpisem $x = h(y)$, $y \in [c, d]$ a h je spojitá na $[c, d]$, pak platí

$$\int_{\gamma} Q(x, y) dy = \int_c^d Q(h(t), t) dt$$

Věta 3.2.6 (Základní vlastnosti křivkového integrálu ve vektorovém poli)

(a) *Linearita.* Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je orientovaný oblouk a \vec{f} a \vec{g} jsou spojitá vektorová pole na oblouku γ . Pak platí

$$\int_{\gamma} \left((c_1 \vec{f} + c_2 \vec{g}) |d\vec{s}| \right) = c_1 \int_{\gamma} (\vec{f} |d\vec{s}|) + c_2 \int_{\gamma} (\vec{g} |d\vec{s}|)$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné reálné konstanty.

(b) *Aditivita.* Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je křivka, která je sjednocením dvou orientovaných oblouků γ_1, γ_2 a \vec{f} je spojitá vektorové pole na křivce γ . Pak platí

$$\int_{\gamma} (\vec{f} |d\vec{s}|) = \int_{\gamma_1} (\vec{f} |d\vec{s}|) + \int_{\gamma_2} (\vec{f} |d\vec{s}|)$$

Greenova věta

Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se nazývá *jednoduše souvislá* v \mathbb{R}^2 , jestliže s každou kružnicí, která je obsažena v Ω je také vnitřek kružnice obsažen v Ω . Mezikruží není jednoduše souvislá množina v \mathbb{R}^2 .

Věta 3.2.7 (Greenova věta) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, ohraničená jednoduše souvislá množina, jejíž hranicí je jediná kladně orientovaná jednoduchá uzavřená křivka γ . Dále nechť $\vec{f} = (P, Q)$ je spojitě vektorové pole na $\overline{\Omega}$ a $\partial P/\partial y, \partial Q/\partial x$ jsou spojitě funkce na $\overline{\Omega}$. Pak platí

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Aplikace Greenovy věty. Obsah rovinné oblasti splňující předpoklady Greenovy věty.

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx.$$

3.2.5 Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě

V tomto odstavci budeme *oblastí* v \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) rozumět otevřenou podmnožinu v \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$), ve které můžeme každé dva různé body ležící v této množině spojit jednoduchou křivkou, ležící v této množině.

Řekneme, že spojitě vektorové pole \vec{f} v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) *nezávisí na integrační cestě*, jestliže pro libovolné orientované křivky γ_1, γ_2 ležící v Ω se stejným počátečním bodem A a koncovým bodem B , platí

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Pak také píšeme

$$\int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Nechť $\vec{f} = (P, Q)$ ($\vec{f} = (P, Q, R)$) je spojitě vektorové pole na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$). Řekneme, že vektorové pole je *potenciální* na Ω , jestliže existuje funkce $V \in C^1(\Omega)$ tak, že

$$\nabla V = \vec{f}$$

pro každé $[x, y] \in \Omega$ ($[x, y, z] \in \Omega$). Každou takovou funkci V nazýváme *potenciálem* vektorového pole \vec{f} na Ω .

Věta 3.2.8 *Nechť vektorové pole $\vec{f} = (P, Q)$ je třídy C^2 na jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Pak toto pole je potenciální tehdy a jen tehdy, když*

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0 \quad \forall [x, y] \in \Omega$$

Rotaci vektorového pole $\vec{f}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ definujeme takto:

$$\text{rot } \vec{f}(x, y, z) = \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right), + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right), + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right).$$

Mů si definici zapamatovat pomocí formálního determinantu

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{f}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y, z) & Q(x, y, z) & R(x, y, z) \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá *jednoduše souvislá* v \mathbb{R}^3 , jestliže s každou kulovou plochou, která je obsažena v Ω je také vnitřek kulové plochy obsažen v Ω . Koule, trojrozměrný interval jsou jednoduše souvislé množiny, ale meziféra není jednoduše souvislá množina v \mathbb{R}^3 .

Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá *plošně jednoduše souvislá* v \mathbb{R}^3 , jestliže ke každé jednoduché uzavřené křivce, která je obsažena v Ω existuje hladká plocha, která sama sebe neprotíná taková, že $S \subset \Omega$ a jejíž okraj je tato křivka.

Množina $\mathbb{R}^3 \setminus \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ je jednoduše souvislá, ale není plošně jednoduše souvislá.

Věta 3.2.9 *Nechť vektorové pole $\vec{f} = (P, Q, R)$ je třídy C^1 na plošně jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Pak toto pole je potenciální tehdy a jen tehdy, když*

$$\text{rot } \vec{f}(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

pro každé $[x, y, z] \in \Omega$.

Věta 3.2.10 *Nechť $\vec{f} = (P, Q)$ je třídy C^1 v jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Křivkový integrál*

$$\int_{\gamma} \vec{f}(x, y) \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

kde $\gamma \subset \Omega$ nezávisí na integrační cestě AB v oblasti Ω tehdy a jen tehdy, když vektorové pole \vec{f} je na Ω potenciální. Je-li V jeho potenciál na Ω , pak platí

$$\int_A^B P(x, y) dx + Q(x, y) dy = V(B) - V(A).$$

Věta 3.2.11 Necht $\vec{f} = (P, Q, R)$ je třídy C^1 v plošně jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Křivkový integrál

$$\int_{\gamma} \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

kde $\gamma \subset \Omega$ nezávisí na integrační cestě AB na oblasti Ω tehdy a jen tehdy, když vektorové pole \vec{f} je potenciální na Ω . Je-li V jeho potenciál na Ω , pak platí

$$\int_A^B P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = V(B) - V(A).$$

Literatura

- [1] Brabec, J., Martán, F., Rozenský, Z.: *Matematická analýza I*. SNTL, Praha 1985.
- [2] Brabec, J., Hruza, B.: *Matematická analýza II*. SNTL, Praha 1986.
- [3] Eliáš J., Horváth J., Kajan J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky II*. Alfa, Bratislava (1986).
- [4] Eliáš J., Horváth J., Kajan J., Šulka R.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky IV*. Alfa, Bratislava (1979).
- [5] Fichtengolc, G. M.: *Kurz diferencialnovo i integralnovo iscislenija I*. Nauka, 7.vyd., Moskva 1970.
- [6] Fichtengolc, G. M.: *Kurz diferencialnovo i integralnovo iscislenija II*. Nauka, 4.vyd., Moskva 1959.
- [7] Fichtengolc, G. M.: *Kurz diferencialnovo i integralnovo iscislenija III*. Nauka, 4.vyd., Moskva 1966.
- [8] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. Function of One Variable*. Birkhäuser, Boston (2003).
- [9] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. Approximation and Discrete Processes*. Birkhäuser, Boston (2004).
- [10] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. Linear and Metric Structures and Continuity*. Birkhäuser, Boston (2007).
- [11] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. An Introduction to Function of Several Variables*. Birkhäuser, Boston (2009).
- [12] Holenda J.: *Řady*. SNTL Praha (1990).
- [13] Jarník V.: *Diferenciální počet I*. ČAV Praha (1963).
- [14] Jarník V.: *Integrální počet I*. ČAV Praha (1963).
- [15] Jarník V.: *Diferenciální počet II*. ČAV Praha (1963).
- [16] Jarník V.: *Integrální počet II*. ČAV Praha (1963).
- [17] Kalas J., Kuben J.: *Integrální počet funkcí více proměnných*. MU Brno (2009).
- [18] Kufner A., Kadlec J.: *Fourierovy řady*. Academia Praha (1969).
- [19] Nagy J., Nováková E., Vacek M.: *Integrální počet*. SNTL Praha (1984).

- [20] Nagy J., Nováková E., Vacek M.: *Vektorová analýza*. SNTL Praha (1984).
- [21] Ráb M.: *Zobrazení a Riemannův integrál v \mathbb{E}^n* . SPN Praha (1988).
- [22] Škrášek, J., Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky II*. SNTL, Praha 1986.

PŘÍKLADY

Číselné řady

Rozhodněte o konvergenci řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \quad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad [\text{divergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n+1} \quad [\text{divergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2} \quad [\text{divergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \quad [\text{divergentní}]$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \quad [\text{divergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{n^n} \quad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)} \quad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \quad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \quad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt[k]{n}}, \quad k \in \mathbb{N}, 0 < a < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2} \right)^2 \quad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \quad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n} \quad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \quad [\text{divergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n} \quad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{1}{n} \right) \quad [\text{divergentní}]$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \quad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \quad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \quad [\text{divergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)!} \quad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \quad [\text{divergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right) \quad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} \quad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{e} \right)^n \frac{1}{n!} \quad [\text{divergentní}]$$

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3} .

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-2} .

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-1} . [$n > e^{10}$]

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-2} .

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3} .

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{7n} \right)^n$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3} . [$n = 9$]

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n} \right)^n$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-2} . [$n = 9$]

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3} . []

Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

aby chyba byla menší než 10^{-2} . []

Příklad . Určete Cauchyův součin řad

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j}{j!}$$

Výsledek

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}$$

Příklad . Určete Cauchyův součin řad

$$\sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j-1} j q^{j-1}$$

Výsledek

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^{2n-2}$$

Funkční řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}$$

Výsledek: $x \in (-1, 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{x}{2^{n+1}}$$

Výsledek: $x \in (-\infty, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^n$$

Výsledek: $x \in (-\infty, 0)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^n$$

Výsledek: $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} \right)^n$$

Výsledek: $x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$$

Výsledek: $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$$

Výsledek $x \in (-2, 2)$

Dokžte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n^2}$$

konverguje stejnoměrně na $[0, \infty)$.

Dokžte, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

konverguje stejnoměrně na $[-b, b]$, $\forall 0 < b < 1$.

Dokžte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \left(\frac{x}{2^{n+1}} \right)$$

konverguje stejnoměrně na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.

Dokažte, že řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}$$

konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$.

Dokažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{3/2}}$$

konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$.

Dokažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$ za předpokladu, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Dokažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$ za předpokladu, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Určete obor konvergence a obor stejnoměrné konvergence řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$$

Výsledek: konverguje na $(0, \infty)$, konverguje stejnoměrně na $[a, \infty)$, $\forall a > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$$

Výsledek: konverguje na $(\frac{1}{e}, e)$, konverguje stejnoměrně na $[a, b]$, $\forall \frac{1}{e} < a < b < e$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}}$$

Výsledek: konverguje na $[0, \infty)$, konverguje stejnoměrně na $[a, \infty)$, $\forall a > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^4 + n^2}$$

Výsledek: konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}$$

Výsledek: konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$$

Výsledek: konverguje na $[0, \infty)$, konverguje stejnoměrně na $[a, \infty)$, $\forall a > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

Výsledek:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$$

Výsledek: konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$

Určete obor stejnoměrné konvergence řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^3}$$

Výsledek: $(-\infty, \infty)$

Určete obor stejnoměrné konvergence řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}$$

Výsledek: $(-\infty, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$$

Výsledek: konverguje na $(0, \infty)$, konverguje stejnoměrně na $[a, \infty)$, $\forall a > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$$

Výsledek: konverguje na $(\frac{1}{e}, e)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}}$$

Výsledek: konverguje na $(0, \infty)$, konverguje stejnoměrně na $[a, \infty)$, $\forall a > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^n}$$

Výsledek: $(-\infty, \infty)$

Určete poloměr konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^n x^n}$$

Výsledek: $\rho = e$

Určete poloměr konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Výsledek: $\rho = \infty$

Určete poloměr a obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} (x-1)^n$$

Výsledek: $\rho = 1$, obor konvergence $[0, 2)$

Určete poloměr a obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}} x^n$$

Výsledek: $\rho = 1$, obor konvergence $[-1, 1)$

Určete poloměr a obor konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n}$$

Výsledek: $\rho = 1/2$, obor konvergence $(-1/2, 1/2)$

Určete poloměr a obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{1}{n}$$

Výsledek: $\rho = 1$, obor konvergence $[-1, 1)$

Určete poloměr a obor konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x+3)^n$$

Výsledek: $\rho = 2$, obor konvergence $(-5, -1)$

Určete poloměr a obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x-1)^n$$

Výsledek: $\rho = 1$, obor konvergence $[0, 2)$

Určete součet řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1}$$

Výsledek $\frac{x}{2(1-x)} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2x} \ln(1-x)$.

Určete součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}$$

Výsledek $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$.

Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

Výsledek $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.

Je dána řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

(a) Určete obor konvergence řady.

(b) Určete součet řady.

Výsledek:

(a) $[-1, 1)$

(b) $-\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}$

Je dána řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

(a) Určete obor konvergence řady.

(b) Určete součet řady.

Výsledek:

(a) $(-1, 1)$

(b) $-\frac{x}{(1-x)^2}$

Rozviňte do Taylorovy řady o středu $c = 0$ funkci $f(x) = \operatorname{arctg} x$ a určete obor konvergence této řady.

Výsledek: $x \in [-1, 1]$

Rozviňte do Taylorovy řady o středu $c = 0$ funkci $f(x) = \ln(4 - x^2)$ a určete obor konvergence této řady.

Výsledek: $f(x) = 2 \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n2^{2n}}$, $x \in (-2, 2)$.

Rozviňte do Taylorovy řady o středu $c = 0$ funkci $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1+2x)}$ a určete obor konvergence této řady.

Výsledek: $f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (1 + 4(-1)^n) x^n$, $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Rozviňte do Taylorovy řady o středu $c = 0$ funkci $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1+3x)}$ a určete obor konvergence této řady.

Výsledek: $f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (3^n - 1) x^n$, $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

Odvoďte rozvoj funkce $f(x) = \ln(1+x)$ v nekonečnou řadu na základě vztahu $f'(x) = \frac{1}{1+x}$.

Výsledek: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, $x \in (-1, 1]$

Fourierovy řady

Příklad . Napište Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1/2], \\ 0 & x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

a nakreslete standartizované periodické prodloužení a vyšetřete konvergenci této řady na \mathbb{R} .
Výsledek:

$$a_0 = 2 \int_0^{1/2} x dx = \frac{1}{4}$$

$$a_k = 2 \int_0^{1/2} x \cos(2k\pi x) dx = \frac{\cos k\pi - 1}{2k^2\pi^2} = \frac{(-1)^k - 1}{2k^2\pi^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$b_k = 2 \int_0^{1/2} x \sin 2k\pi x dx = -\frac{\cos k\pi}{2k\pi} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k\pi}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$f(x) \sim \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{(-1)^k - 1}{k\pi} \cos(2k\pi x) + (-1)^{k+1} \sin(2k\pi x) \right]$$

Příklad . Určete v intervalu $[-\pi, \pi]$ Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}$$

nakreslete standartizované periodické prodloužení a vyšetřete konvergenci této řady na \mathbb{R} .
Výsledek:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi} \cos(kx) + \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) \right]$$

Příklad . Určete v intervalu $[-1, 1]$ Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \in [-1, 0), \\ x - 1 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

nakreslete standartizované periodické prodloužení a vyšetřete konvergenci této řady na \mathbb{R} .
Výsledek: $a_n = 0$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$

$$f(x) \sim -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi x)$$

Příklad . Určete v intervalu $[-\pi, \pi]$ Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, 0], \\ 1 & x \in (0, \pi] \end{cases}$$

nakreslete standartizované periodické prodloužení a vyšetřete konvergenci této řady na \mathbb{R} .

Výsledek: $a_0 = 1$, $a_n = 0$ pro $n = 1, 2, \dots$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin(nx) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)x$$

Příklad . Určete v intervalu $[-\pi, \pi]$ Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = |x|$$

nakreslete standartizované periodické prodloužení a vyšetřete konvergenci této řady na \mathbb{R} .

Výsledek: $b_n = 0$ pro $n = 1, 2, \dots$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$$

Příklad . Je dána funkce

$$f(x) = x - 1, \quad x \in (0, 1]$$

Určete kosinovou Fourierovu řadu této funkce, nakreslete standartizované periodické prodloužení a vyšetřete konvergenci této řady na \mathbb{R} .

Výsledek: $b_n = 0$ pro $n = 1, 2, \dots$

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(n\pi x) = -\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x$$

Dvojné integrály

Příklad . Vypočtete integrál

$$\iint_M xy \cos(x+y) \, dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]\}$.

Řešení. \square

Příklad . Vypočtete integrál

$$\iint_M e^{xy} \, dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \pi)\}$.

Řešení. \square

Příklad . Vypočtete integrál

$$\iint_M x^3 y \cos(xy^2) \, dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : [0, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]\}$.

Řešení. \square

Příklad . Vypočtete integrál

$$\iint_M xy^2 e^{xy} \, dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : [0, 2] \times [0, 1]\}$.

Řešení. 2

Příklad . Vypočtete integrál

$$\iint_M x^2 e^{xy} \, dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y < -x + 1\}$.

Řešení.

Příklad . Vypočtete integrál

$$\iint_M e^{\frac{x}{y}} \, dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 1, y < 2, y > \sqrt{x}\}$.

Řešení. $e^2 - \frac{3}{2}$

Příklad . Vypočtete integrál

$$\iint_M x(y + \sin(\pi y)) \, dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y < -x + 1\}$.

Řešení.

Příklad . Vypočtete integrál

$$\iint_M \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} \, dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$.

Řešení. $\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint_M x(1-y) \, dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y > 0, y < x\}$.

Řešení. $\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{16}$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint_M (x^2 + y) \, dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y > x^2, y < 1\}$.

Řešení.

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint_M xy \, dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y < \ln \frac{1}{x}, y < 1, y > 0, 0 < x < 1\}$.

Řešení.

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint_M |xy| \, dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y < 1, y > |x|\}$.

Řešení.

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint_M e^{\frac{x}{y}} \, dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 1, y < 2, y > \sqrt{x}\}$.

Řešení. $e^2 - \frac{3}{2}$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint_M (x^2 + y^2) \, dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < a^2\}$.

Řešení. $\frac{1}{2}\pi a^4$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint_M (x^2 + y^2)e^{x^2+y^2} \, dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x < y < \sqrt{3}x, 0 < x^2 + y^2 < 1\}$.

Řešení. $\frac{\pi}{24}$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint_M \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \, dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > x, x^2 + y^2 < 1\}$.

Řešení. $\frac{1}{4}\pi(2 - \sqrt{3})$

Příklad . Vypočtete integrál

$$\iint_M \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < ax\}, a > 0$.

Řešení. $\frac{a^3}{3}(\pi - \frac{4}{3})$

Příklad . Vypočtete integrál

$$\iint_M |x| dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y, 4x^2 + y^2 < 12\}$.

Řešení. $4\sqrt{3} - \frac{10}{3}$

Příklad . Vypočtete integrál

$$\iint_M \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < y, y^2 < 2x\}$.

Řešení. $\frac{1}{2}(5 \ln 2 - 3 \ln 3)$

Příklad . Vypočtete integrál

$$\iint_M \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x < y < \sqrt{3}x, 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

Řešení. $\frac{1}{12}\pi \ln^2 2$

Příklad . Vypočtete integrál

$$\iint_M \frac{x^2}{y^2} dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y > \frac{1}{x}, y < 4x, x < 3\}$.

Řešení. $\frac{1225}{64}$.

Příklad . Vypočtete integrál

$$\iint_M |xy| dx dy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < a^2\}$.

Řešení. $\frac{1}{2}a^4$

Příklad . Vypočtete integrál

$$\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy$$

je-li $D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 16, x > 0, y > 0\}$.

Řešení. $\frac{\pi}{4}(17 \ln 17 - 16)$

Příklad . Vypočtete integrál

$$\iint_D \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

je-li $D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < rx\}, r > 0$.

Řešení.

Příklad . Vypočtete integrál

$$\iint_D \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) dx dy$$

je-li $D = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 9, \frac{\sqrt{3}}{3}x < y < \sqrt{3}x \right\}, r > 0$.

Řešení. $\frac{\pi^2}{6}$

Příklad . Vypočtete integrál

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$$

je-li $D = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}$, kde $a > 0, b > 0$;

Řešení. $\frac{2}{3}\pi ab$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete obsah části roviny ohraničené křivkami $(x-a)^2 + y^2 = a^2, x^2 + (y-a)^2 = a^2$.

Řešení.

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete obsah části roviny ohraničené křivkou $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

Řešení. $\frac{\pi a^4 \sqrt{2}}{2} m^2$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete obsah části roviny ohraničené křivkou $x^2 + y^2 = 5$, tečnou k této křivce v bodě $A = [1, 2]$ a přímkou $y = 0$.

Řešení.

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete obsah části roviny $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y > x^3, y < 2, x > 0, y < x + 1\}$

Řešení.

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete obsah části roviny ohraničené křivkami $y = 4, y = 2^x, y = 2^{-2x}$.

Řešení. $12 - \frac{9}{\ln 4} m^2$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete obsah množiny

$$\Omega = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 6y < 0, x^2 + y^2 - 2y > 0, x < y < \sqrt{3}x \right\}.$$

Řešení. $\frac{2}{3}\pi - 2\sqrt{3} + 4 m^2$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete obsah množiny

$$A = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : xy < a^2, x^2 > ay, y < 2a, x > 0 \right\}, \quad a > 0.$$

Řešení. $\mu(A) = a^2 \left(\frac{2}{3} + \ln 2 \right) m^2$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete obsah množiny

$$A = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^3 < y < x^2 + 1, 0 < x < 3 - y \right\}$$

Řešení.

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete objem tělesa ohraničeného plochami $z = 4 - y^2, y = \frac{1}{2}x^2, z = 0$.

Řešení. $\frac{256}{21} m^3$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete objem tělesa ohraničeného plochami $y = x^2, x = y^2, z = 12 + y - x^2, z = 0$.

Řešení. $\frac{541}{140} m^3$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete objem tělesa

$$\Omega = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z > 2(x^2 + y^2), z < 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

Řešení. $\frac{5}{48}\pi m^3$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete objem tělesa

$$K = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in \Omega, 0 < z < x^2 + y^2 \right\}$$

kde $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < \sqrt{x}\}$.

Řešení. $\frac{6}{35} m^3$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete objem tělesa

$$\Omega = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z > 0, z < x^2 + y^2, x^2 + y^2 > x, x^2 + y^2 < 2x \right\}$$

Řešení. $\frac{45}{32}\pi m^3$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete objem tělesa

$$\Omega = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z > 2(x^2 + y^2), z < 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

Řešení. $\frac{5}{48}\pi m^3$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete objem tělesa

$$\Omega = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 4 - y^2, y > \frac{1}{2}x^2 \right\}$$

Řešení. $\frac{256}{21} m^3$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete obsah části plochy $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ vyřáté plochami $x - y = 1$, $x - y = -1$, $x + y = 1$, $x + y = -1$.

Řešení.

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete obsah části plochy $z = x^2 + y^2$, kde $0 < z < a$, $a > 0$.

Řešení. $\frac{\pi}{6} [(1 + 4a)\sqrt{1 + 4a} - 1] m^2$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete obsah části plochy $x^2 + z^2 = 1$ ohraničené plochami $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$.

Řešení. $2\pi m^2$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete obsah části plochy

$$S = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \frac{x^2}{4} + y^2 < 1, -1 < x < 1 \right\}.$$

Řešení. $\frac{4}{3}\pi m^2$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete obsah části plochy

$$S = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 6x + 3y + 2z = 12, x > 0, y > 0, z > 0 \right\}$$

Řešení.

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtete obsah části plochy

$$S = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2z, x^2 + y^2 < 1 \right\}$$

Řešení.

Křivkové integrály

Příklad 3.2.1 Vypočtěte

$$\int_{\gamma} xy^2 ds,$$

kde je křivka $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ dána rovnicí $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$.

Řešení. $\frac{\pi a^4}{16}$

Příklad 3.2.2 Vypočtěte

$$\int_{\gamma} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ds,$$

kde je křivka $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ dána parametrickými rovnicemi $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$, $b > 0$.

Řešení. $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b} (\sqrt{a^2 + 4\pi^2 b^2} - a)$

Příklad 3.2.3 Vypočtěte

$$\int_{\gamma} xy ds,$$

kde křivka $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ je průsečík ploch $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, $x^2 + y^2 - ay = 0$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $a > 0$.

Řešení. $\frac{2(1+\sqrt{2})}{15} a^3$

Vypočítejte křivkové integrály po dané křivce γ :

1.

$$\int_{\gamma} \frac{1}{x-y} ds$$

kde γ je usečka AB , $A = [0, -2]$, $B = [4, 0]$;

$$\left[\sqrt{5} \ln 2 \right]$$

2.

$$\int_{\gamma} x^2 ds$$

kde γ je oblouk AB křivky dané rovnicí $y = \ln x$ pro $A = [2, \ln 2]$, $B = [1, 0]$; $\left[\frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) \right]$

3.

$$\int_{\gamma} (x-y) ds$$

kde γ je kružnice $x^2 + y^2 - ax = 0$, $a > 0$;

$$\left[\frac{1}{2} \pi a^2 \right]$$

4.

$$\int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds$$

kde γ je oblouk šroubovice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = at$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$; $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3} \pi a^3 (4\pi^2 + 3) \right]$

5.

$$\int_{\gamma} z ds$$

kde γ je křivka $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, $t \in [0, \sqrt{2}]$. $\left[\frac{2}{3} (4 - \sqrt{2}) \right]$

Příklad 3.2.4 Vypočtěte délku křivky určené průsečnicí ploch o rovnicích

$$y = 2 \arcsin \frac{x}{2}, \quad z = \frac{1}{2} \ln \frac{2-x}{2+x}$$

od bodu $A = [0, 0, 0]$ do bodu $B = [1, \pi/3, -\ln 3/2]$.

Řešení. $1 + \frac{1}{2} \ln 3 \text{ m}$

Příklad 3.2.5 Vypočtěte obsah části válcové plochy Φ s řídicí křivkou $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ danou rovnicí $y = \ln x$, $x \in [1, \sqrt{e}]$ v rovině $z = 0$ a tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezenými plochami: $z = 0$, $z = x^2$.

Řešení. $\frac{1}{3} ((1+e)^{3/2} - 2^{3/2}) \text{ m}^2$

Příklad 3.2.6 Vypočtěte

$$I = \int_{\gamma} y^2 dx + x(1+y^2) dy,$$

kde γ je část elipsy $4x^2 + y^2 = 16$, ležící v prvním kvadrantu a orientovaná od bodu $A = [2, 0]$ do bodu $B = [0, 4]$.

Řešení. $10\pi - \frac{64}{3}$

Příklad 3.2.7 Vypočtěte

$$I = \int_{\gamma} \frac{y}{x+z^2} dx - (x+2z) dy + \frac{y}{z} dz,$$

kde γ je úsečka s počátečním bodem $A = [3, 2, 1]$ a s koncovým bodem $B = [1, 1, 2]$.

Řešení. $4 - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \ln 10$

Příklad 3.2.8 Vypočítejte práci silového pole při pohybu hmotného bodu po průnikové křivce $\gamma = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 1 + y^2\}$ od bodu $A = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$ přes bod $B = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}]$ do bodu $C = [0, 1, 2]$. Silové pole působí v každém bodě silou, která směřuje kolmo k rovině xz a velikost této síly je rovna převrácené hodnotě vzdálenosti bodu od roviny xy .

Řešení. $-\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

Vypočítejte křivkové integrály po dané křivce γ (uvažujeme pravotočivý souřadnicový systém):

- $\int_{\gamma} y dx + x dy$, kde γ je orientovaná čtvrtkružnice $\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j}$,
 $0 \leq t \leq \pi/2$ a kde bod $A = [a, 0]$ je daný jako počáteční bod, $a > 0$ konstanta; [0]
- $\int_{\gamma} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$, kde γ je orientovaná úsečka AB , s počátečním bodem $A = [1, 1, 1]$ a
koncovým bodem $B = [4, 4, 4]$; [3\sqrt{3}]
- $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, kde γ je orientovaná křivka $y = 1 - |1 - x|$ pro $0 \leq x \leq 2$, počáteční
bod $A = [2, 0]$; [-\frac{4}{3}]
- $\int_{\gamma} yz dx + xz dy + xy dz$, kde γ je oblouk AB šroubovice

$$\vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + bt/2\pi \vec{k}$$

(orientovaný) od bodu $A = [a, 0, 0]$ do $B = [a, 0, b]$, $a, b > 0$ konstanty. [0]

V každém bodě silového pole v \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^3) působí síla $\vec{F}(\vec{r})$. Vypočítejte práci A tohoto pole při pohybu hmotného bodu po orientované křivce γ :

- $\vec{F} = xy \cdot \vec{i} + (x + y) \cdot \vec{j}$, γ je oblouk AB křivky γ dané rovnicí $y = \operatorname{arctg} x$ od bodu $A = [1, ?]$
do bodu $B = [0, ?]$; [\frac{1}{32} (16 - 8\pi - \pi^2) - \ln 2]
- $\vec{F}(\vec{r}) = y\vec{i} + z\vec{j} + yz\vec{k}$, $\gamma : \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, ct)$ orientované souhlasně s daným parametrickým
vyjádřením pro $t \in [0, \pi]$, $c > 0$. [\frac{\pi}{2} (2c^2 - 4c - 1)]

Příklad 3.2.9 Užitím Greenovy věty vypočítejte

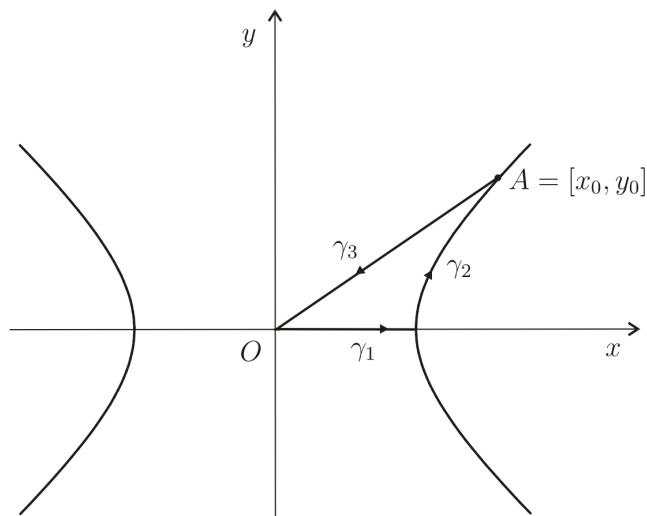
$$I = \int_{\gamma} (x^2 y - x) dx - (xy^2 + y) dy,$$

kde γ je křivka o rovnici $x^2 + y^2 = 2y$, orientovaná ve směru pohybu hodinových ručiček.

Řešení. $\frac{3}{2}\pi$

Příklad 3.2.10 Vypočítejte obsah elipsy.

Řešení. $\pi ab m^2$



Obrázek 3.8: K Příkladu 3.2.10

Příklad 3.2.11 Užitím Greenovy věty vypočtete obsah množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde Ω je ohraničená obloukem hyperboly o parametrických rovnicích

$$x = a \cosh t, \quad y = b \sinh t, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad a, b > 0,$$

osou x a spojnicí počátku souřadné soustavy s bodem $A = [x_0, y_0]$ hyperboly, kde $x_0 > 0, y_0 > 0$.

Řešení. $\frac{ab}{2} \ln \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right) m^2$

Ověřte, že jsou splněny podmínky pro užití Greenovy věty, a užitě ji k výpočtu následujících integrálů:

1. $\int_{\gamma} (x + y)^2 dx - (x + y)^2 dy$, kde γ je kladně orientovaný obvod trojúhelníka OAB s vrcholy $O = [0, 0], A = [1, 0], B = [0, 1]$; [−4/3]
2. $\int_{\gamma} (x + y) dx + (x - y) dy$, kde γ je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ orientovaná kladně. [−2πab]

Aplikací Greenovy věty vypočtete obsah rovinného obrazce

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x\}.$$

[1/6]