Kapitola 1

POSLOUPNOSTI REÁLNÝCH ČÍSEL

1.1 Základní pojmy

Definice 1. Zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se nazývá posloupností prvků z $\mathbb{R}$, nebo-li posloupností reálných čísel, $f(n)$ značíme a_n nebo y_n, posloupnost zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka. Okolím bodu $+\infty$ ($-\infty$) rozumíme libovolný interval (k, ∞) ($(-\infty, l)$), kde k, $l \in \mathbb{R}$.

Definice 2. O posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ řekneme, že má limitu $L \in \overline{\mathbb{R}}$ jestliže ke každému okolí $U_\varepsilon(L)$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí, že $a_n \in U_\varepsilon(L)$. Limitu značíme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{nebo} \quad a_n \to L \text{ jakmile } n \to \infty$$

Poznámka. Jestliže $L \in \mathbb{R}$ říkáme, že existuje vlastní limita (posloupnost *konverguje*), jestliže $L = \pm\infty$ říkáme, že existuje nevlastní limita (posloupnost *diverguje*). Jestliže $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *neklesající* (jestliže $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *rostoucí*), jestliže $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *nerostoucí* (jestliže $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *klesající*). Takové posloupnosti nazýváme souhrně *monotonní*.

1.2 Vlastnosti posloupností

Věta 1.2.1

(a) *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

(b) *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

(c) *Každá monotonní posloupnost má limitu.*

  1) *Je-li* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *neklesající (rostoucí) posloupnost, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n\{a_n\}$,
  2) *Je-li* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nerostoucí (klesající) posloupnost, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_n\{a_n\}$.

(d) *Předpokládejme, že posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu* L.

  1) *Jestliže* $L > 0$ $(L < 0)$ *pak existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že* $a_n > 0$ $(a_n < 0)$ *pro každé* $n \geq n_0$

2) Jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \geq 0$ ($a_n \leq 0$) pro každé $n \geq n_0$ pak $L \geq 0$ ($L \leq 0$).

Důsledek 1.2.1 *Monotonní posloupnost je konvergentní tehdy a jen tehdy, když je omezená.*

Poznámka. Počítání se symboly $\pm\infty$. Definujeme

- $a + (+\infty) = +\infty,\ a + (-\infty) = -\infty,\ -(+\infty) = -\infty,\ -(-\infty) = +\infty,\ \forall\, a \in \mathbb{R}$,
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty,\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty$,
- Jestliže $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ pak $a(+\infty) = +\infty$, $a(-\infty) = -\infty$,
- Jestliže $a < 0$, $a \in \mathbb{R}$ pak $a(+\infty) = -\infty$, $a(-\infty) = +\infty$,
- Jestliže $a \in \mathbb{R}$ pak $a/(+\infty) = 0$, $a/(-\infty) = 0$.

Věta 1.2.2 *(Pravidla pro počítání s limitami) Nechť pro posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí, že $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, A, $B \in \overline{\mathbb{R}}$. Označme $\odot$ jeden ze symbolů $+, -, \cdot, /$. Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \odot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \odot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = A \odot B,$$

pokud má pravá strana smysl.

Věta 1.2.3 *(Věta o sevření) Nechť jsou dány posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Předpokládejme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, takové, že $a_n \leq c_n \leq b_n$ pro každé $n \geq n_0$. Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$ pak $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.*

Důsledek 1.2.2 *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti a $L \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, takové, že*

$$|a_n - L| \leq b_n, \quad \forall\, n \geq n_0 \quad a \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Věta 1.2.4

(a) Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$ pak $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L| \in \overline{\mathbb{R}}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ tehdy a jen tehdy když $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

(c) Nechť $a_n \geq 0$, pro $n \in \mathbb{N}$ a $b > 0$ je libovolné reálné číslo. Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ pak $\lim_{n\to\infty} a_n^b = L^b$.

(d) Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, $b > 0$ pak $\lim_{n\to\infty} b^{a_n} = b^L$.

(e) Jestliže $|a| < 1$ pak $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

(f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro každé $a > 0$.

Věta 1.2.5 *Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.*

Věta 1.2.6 *(Bolzano-Cachyova podmínka) Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní tehdy a jen tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, tak, že pro každé n, $m \geq n_0$ platí*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

1.3 Podposloupnosti, liminf a limsup

Definice 3. Říkáme, že $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *podposloupnost* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jestliže existuje funkce $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ která je rostoucí, tj. $k_1 < k_2 < \dots$, taková, že

$$p_n = a_{k_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Věta 1.3.1 *Jestliže $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $L \in \overline{\mathbb{R}}$, pak jakákoliv podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má tutéž limitu L.*

Poznámka.

- Poznamenejme, že $k_n \geq n$ protože $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je rostoucí.
- Jestliže $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má dvě různé podposloupnosti s různými limitami, pak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá žádnou limitu.

Definice 4. Uvažujme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Posloupnosti definované

$$l_n = \inf_{k \geq n}\{a_k\} \qquad L_n = \sup_{k \geq n}\{a_k\}$$

jsou neklesající resp. nerostoucí posloupnost. Tedy existují limity

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \sup_k l_k, \qquad \lim_{n\to\infty} L_n = \inf_k L_k$$

s hodnotami v $\overline{\mathbb{R}}$. Označme

$$\operatorname{liminf}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n}\{a_k\}$$
$$\operatorname{limsup}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}\{a_k\}$$

Tyto limity nazýváme *limesinferior* (*dolní limita*) *limessuperior* (*horní limita*).

Věta 1.3.2 *Uvažujme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

(a) Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má liminf *a* limsup *v $\overline{\mathbb{R}}$.*

(b)

$$\operatorname{liminf}_{n\to\infty} a_n \leq \operatorname{limsup}_{n\to\infty} a_n$$
$$\operatorname{liminf}_{n\to\infty} a_n = -\operatorname{limsup}_{n\to\infty}(-a_n)$$

(c) Platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{liminf}_{n\to\infty} a_n = \operatorname{limsup}_{n\to\infty} a_n = L$$

(d) $\operatorname{limsup}_{n\to\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$ *tehdy a jen tehdy*

(i) ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$a_n < L + \varepsilon,$$

(ii) existuje podposloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která konverguje k číslu L.

Kapitola 2

NEKONEČNÉ ŘADY

2.1 ČÍSELNÉ ŘADY

2.1.1 Úvod

Definice 2.1.1 Nechť je daná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel. Rekurence

$$\begin{cases} s_1 &= a_1 \\ s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} \end{cases}$$

definuje indukcí jedinou posloupnost

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *posloupností částečných součtů řady* tvořenou posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pro limitu posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ (jestliže existuje!) užíváme symbol

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{2.1}$$

a nazýváme *nekonečnou řadou* tvořenou posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice 2.1.2 Jestliže posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje k reálnému číslu L, říkáme že nekonečná řada (2.1) *konverguje* a číslo L nazýváme součetem této řady.

Řadu $r_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j$ nazýváme zbytkem řady $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ po n-tém členu.

Věta 2.1.1 *Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Věta 2.1.2 *(Bolzano-Cachyova podmínka) Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a každé $m \in \mathbb{N}$ platí*

$$|a_{n+1} + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon \tag{2.2}$$

Věta 2.1.3

(a) Řada konverguje tehdy a jen tehdy, když konverguje zbytek řady.

(b) *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pro každé $c \in \mathbb{R}$.*

(c) *Jsou-li řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Definice 2.1.3

(a) Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje *absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(b) Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje *relativně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje.

Věta 2.1.4 *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak daná řada konverguje a platí*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

2.1.2 Kritéria konvergence řad

Věta 2.1.5

(a) *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy. Jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$ pak:*

  (1) *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

  (2) *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje pak je divergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

(b) *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady s kladnými členy a předpokládejme, že*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}$$

pak

  (1) *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

  (2) *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje pak je divergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Věta 2.1.6

(a) *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.*

  (1) *Předpokládejme, že existuje $0 < K < 1$ a $p \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq p$*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq K < 1$$

  Pak daná řada konverguje a

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \leq \frac{K^p}{1-K}$$

  (2) *Předpokládejme, že existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq p$*

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$$

  Pak daná řada diverguje.

(b) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

(1) Předpokládejme, že existuje $0 < K < 1$ a $p \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq p$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K < 1$$

Pak daná řada konverguje a

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \leq \frac{a_p}{1-K}$$

(2) Předpokládejme, že existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq p$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

Pak daná řada diverguje.

Věta 2.1.7

(a) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$$

(1) Je-li $K < 1$ pak daná řada konverguje.

(2) Je-li $K > 1$ pak daná řada diverguje.

(3) Je-li $K = 1$ pak nelze o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozhodnout.

(b) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = K$$

(1) Je-li $K < 1$ pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(2) Je-li $K > 1$ pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(3) Je-li $K = 1$ pak nelze o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozhodnout.

Věta 2.1.8 *(Integrální kritérium) Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je daná řada s nezápornými členy a nechť existuje funkce f taková, že*

(1) funkce f je spojitá, nezáporná a nerostoucí na $[n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$,

(2) platí $f(k) = a_k$ pro každé $k \geq n$, $k \in \mathbb{N}$.

Pak daná řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje právě když konverguje integrál $\int_n^{\infty} f(x)\,dx$.

Odhad pro případ $n = 1$

$$\int_1^{k+1} f(x)\,dx - s_1 \leq s_k - s_1 \leq \int_1^{k} f(x)\,dx, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Věta 2.1.9 *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je daná řada s nezápornými členy.*

(1) Existuje-li $k \in \mathbb{N}$ a $\alpha > 1$ tak, že platí

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq \alpha > 1, \quad \forall\, n \geq k$$

pak daná řada konverguje.

(2) Je-li

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1, \quad \forall\, n \geq k$$

pak daná řada diverguje.

Věta 2.1.10 *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je daná řada s nezápornými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = K$$

(1) Je-li $K > 1$ pak daná řada konverguje.

(2) Je-li $K < 1$ pak daná řada diverguje.

2.1.3 Řady s libovolnými členy

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{pro } a_n > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} -a_n & \text{pro } a_n < 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Věta 2.1.11 *(1) Jestliže řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergují, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

(2) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ diverguje k ∞ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konverguje, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k ∞.

(3) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ diverguje k ∞, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $-\infty$.

Definice 2.1.4 Alternující řada je tvaru $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost s nezápornými členy.

Věta 2.1.12 *(Leibnitzovo kritérium) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost s kladnými členy a platí*

(1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(2) posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konverguje.
Máme odhad

$$a_k - a_{k+1} \leq \left|\sum_{n=k+1}^{\infty}(-1)^n a_n\right| \leq a_k + a_m \quad \forall\, m, k,\ m > k$$

Předešlé nerovnice jsou ostré v případě, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ostře klesající.

Poznámka. Všechna kritéria pro konvergenci řad můžeme použít pro určení absolutní konvergence řad.

Násobení řad.
Mějme dvě řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. *Cauchyovým součinem* těchto dvou řad rozumíme řadu

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

kde

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Věta 2.1.13 *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou dvě absolutně konvergentní řady se součty a, b. Pak jejich Cauchyův součin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ je absolutně konvergentní řada se součtem ab.*

2.1.4 Další kritéria konvergence řad

Věta 2.1.14 *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel a $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, Jestliže zároveň platí:*

(1) řada $\sum_{k=1}^{\infty} s_k (b_k - b_{k+1})$ konverguje,

(2) existuje konečná limita $\lim_{n\to\infty} s_n b_{n+1}$,

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Důsledekem předešlé Věty jsou následující dvě kritéria pro řady, které nemusí konvergovat absolutně.

Věta 2.1.15 *(Abel-Leibnitzovo kritérium) Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotonní a ohraničená. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.*

Věta 2.1.16 *(Dirichletovo kritérium) Nechť poslopnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je ohraničená. Dále nechť posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.*

2.2 POSLOUPNOSTI FUNKCÍ A FUNKČNÍ ŘADY

2.2.1 Posloupnosti funkcí

Definice 2.2.1 Zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny funkcí nazýváme *posloupností funkcí* a značíme $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Definičním oborem posloupnosti rozumíme množinu $\mathcal{D} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(f_n)$.

Definice 2.2.2 Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaná na množině $\mathcal{D}$ a $M \subset \mathcal{D}$. Jestliže pro každé $x \in M$ číselná posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, říkáme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje bodově* k funkci f na množině M.

Definice 2.2.3 Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině $M \subset \mathcal{D}$ *stejnoměrně k funkci* f jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a pro každé $x \in M$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Věta 2.2.1 *Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f na množině $M \subset \mathcal{D}$ právě tehdy, když*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Věta 2.2.2 *Konverguje-li posloupnost spojitých funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ k funkci f stejnoměrně na množině $M \subset \mathcal{D}$, pak funkce f je na M spojitá.*

2.2.2 Obecné funkční řady

Definice 2.2.4 Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Rekurence

$$\begin{cases} s_1(x) &= f_1(x) \\ s_{n+1}(x) &= s_n(x) + f_{n+1}(x) \end{cases}$$

definuje indukcí jedinou posloupnost

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

Posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *posloupností částečných součtů řady* tvořenou posloupností $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Pro limitu posloupnosti $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (jestliže existuje!) užíváme symbol

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \tag{2.3}$$

a nazýváme *nekonečnou funkční řadou* tvořenou posloupností funkcí $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Definice 2.2.5 Nechť je dána funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ definovaná na množině $\mathcal{D}$ a $M \subset \mathcal{D}$. Jestliže pro každé $x \in M$ posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje bodově (konverguje stejnoměrně) k funkci f, říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *konverguje bodově* (*konverguje stejnoměrně*) na množině M k funkci f.

Věta 2.2.3 *(Weierstrassovo kritérium) Nechť je dána funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ definovaná na množině $M \subset \mathcal{D}$. Jestliže existuje číselná konvegentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy taková, že platí*

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad \forall\, x \in M, \forall\, n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}$$

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M.

2.2.3 Mocninné řady

Definice 2.2.6 Řadu funkcí tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

kde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je daná posloupnost a $c \in \mathbb{R}$ nazýváme *mocninnou řadou* o středu v bodě c. Čísla a_n nazýváme *koeficienty* mocninné řady.

Věta 2.2.4 *(Abelova) Konverguje-li řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *v bodě* $r \neq 0$*, pak řada konverguje absolutně pre každé je* $x \in (-r, r)$.

Definice 2.2.7 Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninná řada. Číslo

$$\varrho = \frac{1}{\operatorname{limsup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

nazýváme *poloměr konvergence* mocninné řady.

Věta 2.2.5 *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $\varrho \geq 0$*. Pak*

(a) jestliže $\varrho > 0$ *pak řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *konverguje absolutně pro každé* $|x| < \varrho$,

(b) Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *nekonverguje jestliže* $|x| > \varrho$.

Tvrzení 2.2.1 *Nechť existuje* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$*, pak poloměr konvergence je*

$$\varrho = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

Věta 2.2.6 *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $\varrho > 0$.

- *Pak mocninná řada konverguje stejnoměrně na intervalu* $[c-r, c+r]$ *pro každé* $0 < r < \varrho$.
- *Konverguje-li mocninná řada v bodě* $c+\varrho$*, pak konverguje stejnoměrně na intervalu* $[c-r, c+\varrho]$ *pro každé* $0 < r < \varrho$.
- *Konverguje-li mocninná řada v bodě* $c-\varrho$*, pak konverguje stejnoměrně na intervalu* $[c-\varrho, c+r]$ *pro každé* $0 < r < \varrho$.

Věta 2.2.7 *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $\varrho > 0$*. Pak součet mocninné řady je spojitá funkce na intervalu, kde daná řada konverguje stejnoměrně.*

Věta 2.2.8 *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $\varrho > 0$*. Pak odpovídající mocninná řada derivací má stejný poloměr konvergence a součet řady má derivaci na intervalu* $(c-\varrho, c+\varrho)$ *a platí*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n (x-c)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$$

Věta 2.2.9 *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $\varrho > 0$*. Pak odpovídající mocninná řada derivací má stejný poloměr konvergence a součet řady má derivaci na intervalu* $(c-\varrho, c+\varrho)$ *a platí*

$$\int_c^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-c)^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_c^x a_n (t-c)^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1}$$

Vyjádření funkcí mocninnou řadou - Taylorova řada

Věta 2.2.10 *Nechť $\varrho > 0$ je poloměr konvergence mocninné řady*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

se součtem f na $(c-\varrho, c+\varrho)$. Pak funkce f má na tomto intervalu derivace všech řádů a platí

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \qquad k \in \mathbb{N}_0 \tag{2.4}$$

Definice 2.2.8 Je-li f funkce, která má v bodě $c \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů, pak mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce f se středem v bodě c.

Věta 2.2.11 *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Má-li funkce f v bodě $c \in I$ (c je střed intervalu I) derivace všech řádů, pak pro $x \in I$ platí*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

tehdy a jen tehdy, platí-li pro zbytek $R_{n+1}(x)$ v Taylorově vzorci $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ pro všechna $x \in I$.

Věta 2.2.12 *Nechť funkce f má tyto vlastnosti:*

(a) $f \in C^{\infty}(I)$,

(b) existují čísla c, M a interval I takový, že pro každé $x \in I$ a každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq c\,M^k$.

Pak Taylorova řada funkce f konverguje na intervalu I k funkci f, tj. platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \qquad \forall\, x \in I$$

kde c je střed intervalu I.

Příklad .

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Příklad .

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}, \qquad \forall\, x \in (-1, 1]$$

Příklad .

$$\mathrm{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \qquad \forall\, x \in [-1, 1]$$

Příklad . Binomická řada $m \in \mathbb{R} \setminus \{\{0\} \cup \mathbb{N}\}$, $x > -1$

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}$$

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$$

konverguje v intervalu $(-1, 1)$.

Příklad .

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Příklad .

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Kapitola 3

FOURIEROVY ŘADY

3.1 Prostory funkcí

3.1.1 Ortogonální systémy

Řekneme, že funkce f je z prostoru $L_2((a,b))$, jestliže

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx < \infty \tag{3.1}$$

ve smyslu Lebesguea. Prostor $L_2((a,b))$ je Hilbertův prostor, tj. úplný normovaný lineární prostor se skalárním součinem

$$(f|g)_{L_2} = \int_a^b f(x)g(x)\, dx < \infty \tag{3.2}$$

a normou

$$\|f\|_{L_2} = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx, \qquad \forall\, f \in L_2((a,b)) \tag{3.3}$$

Funkce f, g jsou ortogonální (kolmé) v prostoru $L_2((a,b))$, jestliže

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = 0$$

Definice 3.1.1 Posloupnost funkcí $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi_n \in L_2((a,b))$ se nazývá ortogonální systém, právě když

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 \, dx > 0 \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

a

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\, dx = 0 \quad \forall n \neq m$$

Systém je ortonormální, jestliže navíc

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 \, dx = 1 \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Množina funkcí

$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{\pi}{l}x, \dots, \cos\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x, \dots\right\}$$

tvoří na intervalu $[a, a+2l]$, $a \in \mathbb{R}$ ortogonální systém funkcí.

3.2 Fourierovy řady (J.B. Fourier 1768-1830)

Symbolem $\mathcal{P}_{2l}(\mathbb{R})$ označme množinu všech periodických funkcí s periodou $2l$.

Definice 3.2.1 Trigonometrická řada je funkční řada tvaru

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right), \tag{3.4}$$

kde $x \in \mathbb{R}$ a a_n, b_n jsou reálné konstanty.

Věta 3.2.1 *Předpokládejme, že trigonometrická řada (3.4) konverguje stejnoměrně na intervalu* $[a, a+2l]$ *k funkci* f. *Pak platí*

$$a_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{3.5}$$

pro $n = 0, 1, 2, \dots$.

Definice 3.2.2 Nechť $f \in \mathcal{P}_{2l}(\mathbb{R})$. Trigonometrická řada jejíž koeficienty jsou dány vzorci (3.5) se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f a trigonometrická řada (3.4) s těmito koeficienty se nazývá Fourierova řada pro funkci f a píšeme

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Poznámka 3.2.1 Řada napravo nemusí, ale může konvergovat k funkci f. Řada je funkci f přiřazena formálně. Otázkou je zda-li existuje množina funkcí jejíž Fourierova řada konverguje k této funkci.

Příklad. Jestliže $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost taková, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pak řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx) \tag{3.6}$$

konvergují na $\mathbb{R}$.
Řešení. Plyne z Věty 2.1.16 (Dirichletovo kritérium).

Poznámka 3.2.2 *(viz [?], str.93-94)* (Fatou) Trigonometrická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$$

konverguje pro $0 < \alpha \leq 1/2$ na $\mathbb{R}$, avšak není Fourierovou řadou žádné Riemanovsky integrovatelné funkce, tedy ani svého součtu.

Řekneme, že funkce $\tilde{f}$ je periodickým prodloužením funkce $f \in PC\left((a, a+2l)\right)$ jestliže platí

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a, a+2l), \\ f\left(x - 2(n-1)l\right) & x \in (a + 2(n-1)l, a + 2nl) \end{cases}$$

a platí $f(a + 2nl) = c$ pro každé $n \in \mathcal{Z}$, $c \in \mathbb{R}$ libovolné.
Řekneme, že funkce $\tilde{f}$ je standardizovaným periodickým prodloužením funkce $f \in PC((a, a+2l))$ jestliže platí

$$f(a + 2nl) = \frac{1}{2}\left[f(a+) + f(a + 2l-)\right]$$

pro každé $n \in \mathbb{Z}$.

Poznámka 3.2.3

(a) Nechť $f \in PC((-l, l))$ je lichá. Pak

$$a_n = 0 \qquad b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x) \sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

(b) Nechť $f \in PC((-l, l))$ je sudá. Pak

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x) \cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad b_n = 0$$

Kosinová a sinová Fourierova řada.

Fourierovu řadu funkce, která je definovaná pouze na $[0, l]$ můžeme dodefinovat na $[-l, 0]$ tak, že výsledná funkce bude sudá respektive lichá.

Nechť funkce f je integrovatelná na $(0, l)$.

(a) Sudé prodloužení.

$$f_S(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0, l), \\ f(-x) & x \in (-l, 0) \end{cases}$$

Hodnota $f_S(0)$ může být libovolná.

(b) Liché prodloužení.

$$f_L(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0, l), \\ 0 & x = 0, \\ -f(-x) & x \in (-l, 0) \end{cases}$$

Poznámka 3.2.4

(a) Když bude funkce f sudá dostaneme kosinovou řadu.

(b) Když bude funkce f lichá dostaneme sinovou řadu.

Otázky konvergence trigonometrických a Fourierových řad.

Definujme

$$\overline{f}(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-)\right]$$

Definice 3.2.3 Jestliže na intervalu $[a, b]$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\lambda}, \qquad \forall\, x, y \in [a, b]$$

kde $0 < \lambda \leq 1$, $C \geq 0$, pak řekneme, že funkce f je *Hölderovsky spojitá* na intervalu $[a, b]$ s koeficientem λ a prostor všech Hölderovsky spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ značíme $C^{0,\lambda}([a, b])$.

Věta 3.2.2 *Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti rálných čísel a nechť konverguje řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

Pak trigonometrická řada

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

konverguje absolutně a stejnoměrně na $\mathbb{R}$ ke spojité funkci f a je Fourierovou řadou funkce f.

Věta 3.2.3 *(Lipschitzovo kritérium, str.489, [**?**]) Jestliže $f \in C^{0,\lambda}([a, b])$, $0 < \lambda \leq 1$, pak Fourierova řada příslušná k funkci f konverguje stejnoměrně k f na libovolném intervalu $[c, d] \subset [a, b]$ ($a < c < d < b$).*

Věta 3.2.4 *Mějme Fourierovu řadu příslušnou k funkci f. Nechť $f \in C^{0,\lambda}([a, a+2l])$, $0 < \lambda \leq 1$ a $f(a) = f(a+2l)$, pak její Fourierova řada konverguje stejnoměrně k funkci f na $[a, a+2l]$.*

Věta 3.2.5 *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2l}(\mathbb{R})$, f, $f' \in PC([a, a+2l])$. Pak Fourierova řada pro funkci f konverguje k $f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, kde je funkce f spojitá a v bodech, kde není spojitá platí*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right) = \overline{f}(x)$$

Kapitola 4

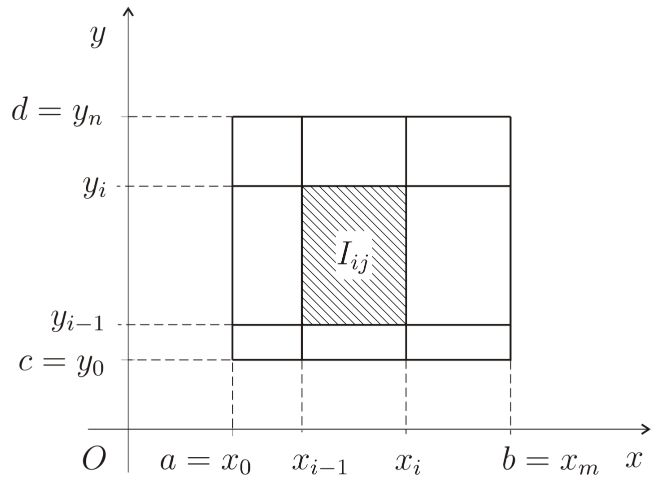
INTEGRÁLNÍ POČET VÍCE PROMĚNNÝCH

4.1 Dvojný integrál

4.1.1 Úvod

4.1.2 Dvojný integrál na dvojrozměrném intervalu

Uvažujme interval $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ a nechť D_m^x, resp. D_n^y je dělení $[a, b]$, resp. $[c, d]$ s dělicími body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ a $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$. Uspořádanou dvojici (D_m^x, D_n^y) (pro stručnost budeme značit tuto dvojici D_{mn}) nazýváme *dělením intervalu* I (viz Obr.4.1). Každý interval $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ nazýváme *částečným intervalem* dělení D_{mn}. Říkáme, že systém intervalů I_{ij} pokrývá interval I. Množinu všech dělení intervalu I budeme značit $\mathcal{D}(I)$. Zjemnění dělení.
Obsah (míru) intervalu I_{ij} definujeme $\mu(I_{ij}) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) = \Delta\, x_i \Delta\, y_j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Výraz $\nu(D_{MN}) = \max\{\nu(D_M^x), \nu(D_N^y)\}$ nazýváme *normou dělení*. Nulovou posloupností dělení nazýváme posloupnost dělení $\{D_k\}$ takovou, že $\lim_{k\to\infty} \nu(D_k) = 0$.



Obrázek 4.1: Dělení intervalu.

Definice 4.1.1 Nechť f je ohraničená funkce na I, D_{mn} dělení I s dělicími body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$. Přiřadíme dělení D_{mn} a funkci f *dolní Riemannův integrální součet* definovaný vztahem

$$s(f, D_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\mu(I_{ij}), \quad m_{ij} = \inf_{[x,y]\in I_{ij}} f(x, y) \tag{4.1}$$

a *horní Riemannův integrální součet* definovaný vztahem

$$S(f, D_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\mu(I_{ij}), \quad M_{ij} = \sup_{[x,y]\in I_{ij}} f(x, y) \tag{4.2}$$

Definice 4.1.2 Nechť f je ohraničená funkce na I. Definujme *dolní Riemannův integrál* pro funkci f definovaný vztahem

$$\underline{\iint}_I f(x,y)\,dxdy = I^-(f) = \sup_D s(f,D) \tag{4.3}$$

a *horní Riemannův integrál* pro funkci f definovaný vztahem

$$\overline{\iint}_I f(x)\,dx = I^+(f) = \inf_D S(f,D) \tag{4.4}$$

Poznámka 4.1.1 Nechť f je omezená funkce na intervalu I

Definice 4.1.3 Řekneme, že funkce f je *Riemannovsky integrabilní* na I tehdy a jen tehdy jestliže je ohraničená na I a

$$I^-(f) = I^+(f) \tag{4.5}$$

V tomto případě se tato společná hodnota nazývá *Riemannův integrál* funkce f na I a značíme

$$\iint_I f(x,y)\,dxdy = I^-(f) = I^+(f) \tag{4.6}$$

Jestliže integrál existuje, řekneme, že funkce f je *integrabilní* (*integrovatelná*) na intervalu I, a píšeme $f \in \mathcal{R}(I)$.

Věta 4.1.1 *(test integrability) Nechť f je omezená funkce na intervalu I. Funkce f je Riemannovsky integrabilní na I tehdy a jen tehdy když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D tak, že*

$$S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon \tag{4.7}$$

Poznámka 4.1.2 Nechť f je omezená funkce na intervalu I a D je ekvidistantní dělení, tj. $x_i = a + (b-a)i/2^n$, $y_j = c + (d-c)j/2^n$, i, $j = 0, 1, \ldots, 2^n$. Definujme

$$m_{ij} = \inf_{[x,y]\in I_{ij}} f(x,y), \quad M_{ij} = \sup_{[x,y]\in I_{ij}} f(x,y)$$

Definujme

$$J^-(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)(d-c)}{2^{2n}} \sum_{i,j=1}^{2^n} m_{ij}, \quad J^+(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)(d-c)}{2^{2n}} \sum_{i,j=1}^{2^n} M_{ij}$$

Pak f je Riemannovsky integrabilní na I tehdy a jen tehdy když $J^-(f) = J^+(f)$.

Poznámka 4.1.3 Všimněte si, že při konstrukci Riemannova integrálu jsme předpokládali, že jak funkce f tak i interval $[a,b]$ jsou ohraničené.

Následující věta nám zaručuje existenci integrálu:

Věta 4.1.2 *Každá funkce spojitá na intervalu* $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ *je integrovatelná.*

Věta 4.1.3 (Fubiniova věta) *Nechť* f *je spojitá na* $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. *Pak platí*

$$\iint\limits_I f(x, y)\, dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right) dx \tag{4.8}$$

Poznámka 4.1.4 Integrály v koncových členech řetězce rovností (4.8) se nazývají *dvojnásobné.*

Symbolem $\operatorname{int} \Omega$ značíme tzv. *vnitřek množiny* Ω. Je to zjednodušeně řečeno ,,množina Ω uvažovaná bez své hranice".

Věta 4.1.4 *Nechť* f *je ohraničená na* $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ *a* $f(x, y) = 0$ *na* $\operatorname{int} I = (a, b) \times (c, d)$. *Pak je funkce na* I *integrovatelná a platí*

$$\iint\limits_I f(x, y)\, dxdy = 0$$

4.1.3 Dvojný integrál na oblastech prvního a druhého druhu v $\mathbb{R}^2$.

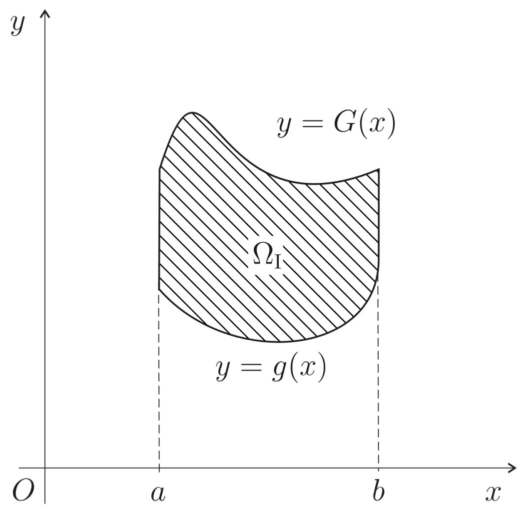
Zavedeme pojem elementární oblasti v rovině:
Elementární oblast I. druhu v rovině je množina

$$\Omega_I = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, g(x) < y < G(x)\right\},$$

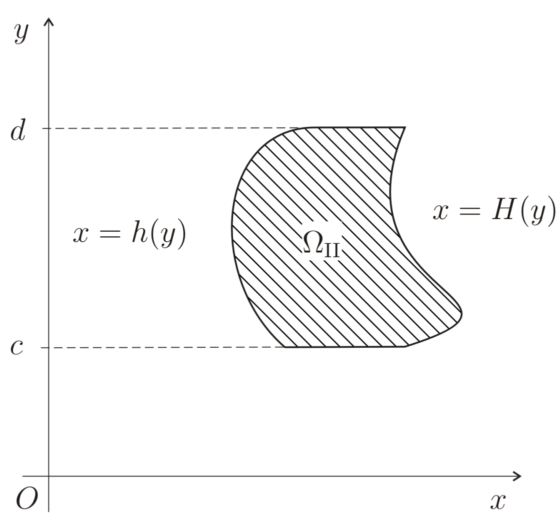
kde g a G jsou spojité funkce na intervalu $[a,b]$ a $g(x) \leq G(x)$ pro každé $x \in [a,b]$.
Elementární oblast II. druhu v rovině je množina

$$\Omega_{II} = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, h(y) < x < H(y)\right\},$$

kde h a H jsou spojité funkce na intervalu $[c,d]$ a $h(y) \leq H(y)$ pro každé $y \in [c,d]$.



Obrázek 4.2: Oblast I. druhu.



Obrázek 4.3: Oblast II. druhu.

Obrázek 4.4: Elementární oblasti I. a II. druhu v rovině.

Cvičení 4.1.1 *Zakreslete dané množiny:*

1. $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le y, \ y \le 1\}$;
2. $B = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \le y \le x\}$;
3. $\Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 2x\}$;
4. $C = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ 1/x < y < 2/x, \ 2y < x < 3y, \ x > 0, \ y > 0\}$;
5. $D = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < x^2 + y^2 < 4, \ x > 0, \ y > 0\}$.

Poznámka 4.1.5 *Všude v dalším textu této kapitoly budeme místo elementární oblast I. nebo II. druhu v rovině zkráceně mluvit o oblasti I. nebo II. druhu.*

Věta 4.1.5 (Fubiniova věta)

(a) *Nechť existuje* $\iint\limits_{\Omega_I} f(x,y)\,dxdy$ *a pro každé* $x \in [a,b]$ *nechť existuje integrál*

$$J(x) = \int\limits_{g(x)}^{G(x)} f(x,y)\,dy.$$

Pak existuje také dvojnásobný integrál

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{G(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

a platí rovnosti

$$\iint\limits_{\Omega_I} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b J(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{G(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

(b) *Nechť existuje* $\iint\limits_{\Omega_{II}} f(x,y)\,dxdy$ *a pro každé* $y \in [c,d]$ *existuje integrál*

$$K(y) = \int\limits_{h(y)}^{H(y)} f(x,y)\,dx.$$

Pak existuje také dvojnásobný integrál

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_{h(y)}^{H(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

a platí rovnosti

$$\iint\limits_{\Omega_{II}} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d K(y)\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{h(y)}^{H(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Věta 4.1.6 *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je elementární oblast prvního nebo druhého druhu a nechť funkce f je na Ω spojitá a ohraničená. Pak je funkce f na Ω integrabilní.*

Poznámka 4.1.6 Integrovatelnost a hodnota dvojného integrálu nezávisí na chování funkce v konečném počtu bodů integračního oboru, nebo na sjednocení konečného počtu křivek konečné délky. Je tedy v předešlých větách nepodstatné, jestli integrujeme přes otevřený integrační obor, nebo jestli přidáme k tomuto oboru jakoukoliv část hranice oboru.

Věta 4.1.7 *(Základní vlastnosti dvojného integrálu.) Nechť Ω, Ω_1, Ω_2 jsou oblasti prvního nebo druhého druhu a nechť $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$ (tzn. f a g jsou funkce integrovatelné na Ω). Pak platí:*

(a)
$$\iint\limits_{\Omega} (f(x,y) + g(x,y))\,dxdy = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,dxdy.$$

(b)
$$\iint\limits_{\Omega} kf(x,y)\,dxdy = k\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy,$$

kde $k \in \mathbb{R}$.

(c) Jestliže pro každé $[x,y] \in \Omega$ platí $f(x,y) \le g(x,y)\,dxdy$, pak
$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy \le \iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,dxdy.$$

(d) $|f| \in \mathcal{R}(\Omega)$ a platí
$$\left|\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint\limits_{\Omega} |f(x,y)|\,dxdy.$$

(e) Jestliže pro každé $[x,y] \in \Omega$ platí že $|f(x,y)| \le M$, pak
$$\left|\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint\limits_{\Omega} |f(x,y)|\,dxdy \le M\mu(\Omega).$$

(f) Jestliže $int\Omega_1 \cap int\Omega_2 = \emptyset$, $f \in \mathcal{R}(\Omega_1)$ a $f \in \mathcal{R}(\Omega_2)$, pak je funkce f integrovatelná na $\Omega_1 \cup \Omega_2$ a platí
$$\iint\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\Omega_2} f(x,y)\,dxdy.$$

(g) $f \cdot g \in \mathcal{R}(\Omega)$.

(h) Jestliže je funkce f spojitá na $\overline{\Omega}$, pak existuje bod $[\xi,\eta] \in \overline{\Omega}$ tak, že
$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = f(\xi,\eta)\mu(\Omega).$$

Poznámka 4.1.7 Symbolem $\mu(\Omega)$ budeme v této kapitole rozumět míru (obsah) elementární oblasti Ω.
Symbolem $\overline{\Omega}$ značíme tzv. *uzávěr množiny* Ω. Je to zjednodušeně řečeno ,,množina Ω uvažovaná spolu se svou hranicí".

Ukažte, že z tvrzení (h) Věty 4.1.7 plyne následující jednoduchý důsledek:

$$\mu(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} dxdy.$$

4.1.4 Transformace dvojného integrálu

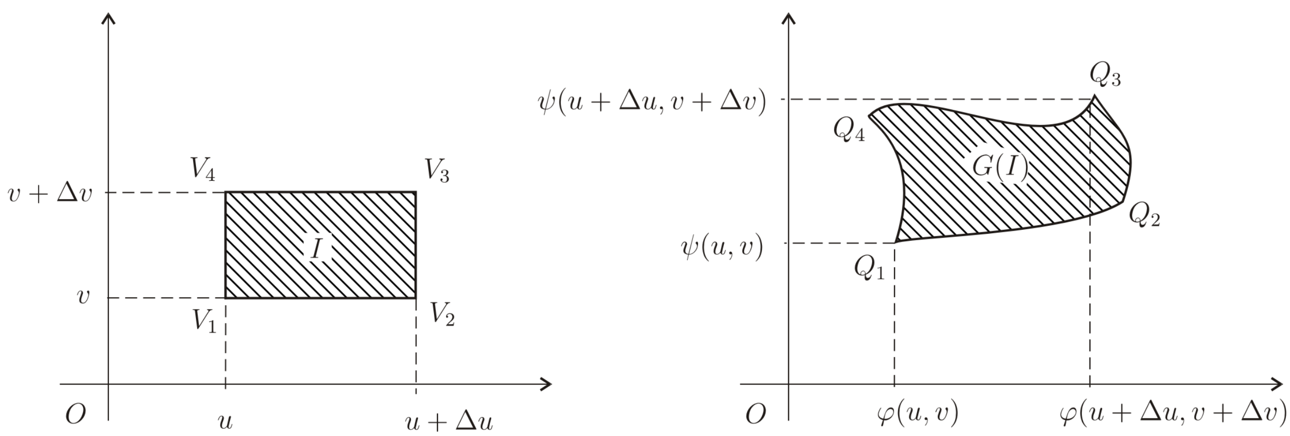
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Uvažujme funkce $\varphi, \psi: \ \Omega \to \mathbb{R}$ a $G: \ \Omega \to \mathbb{R}^2$, $G = (\varphi, \psi)$ takové, že:

a) $\varphi,\ \psi \in C^1(\Omega)$, tj. φ, ψ jsou *spojitě diferencovatelné* na Ω;

b) $G = (\varphi, \psi)$ je *prosté* zobrazení, tj. pro všechna $[u_0, v_0]$, $[u_1, v_1] \in \Omega$ platí:
Jestliže $[u_0, v_0] \neq [u_1, v_1]$, pak $G(u_0, v_0) \neq G(u_1, v_1)$.

Uvažujme libovolný dvojrozměrný interval (tj. obdélník) $I \subset \Omega$ o vrcholech V_1, V_2, V_3 a V_4 a stranách délky Δu, Δv. Transformací $G = (\varphi, \psi)$ se zobrazí obdélník I na ,,křivočarý obdélník" $I^* = G(I)$ o vrcholech Q_1, Q_2, Q_3 a Q_4:

$$\begin{array}{lll}
V_1 = [u, v] & \mapsto & Q_1 = [\varphi(u, v), \psi(u, v)], \\
V_2 = [u + \Delta u, v] & \mapsto & Q_2 = [\varphi(u + \Delta u, v), \psi(u + \Delta u, v)], \\
V_3 = [u + \Delta u, v + \Delta v] & \mapsto & Q_3 = [\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), \psi(u + \Delta u, v + \Delta v)], \\
V_4 = [u, v + \Delta v] & \mapsto & Q_4 = [\varphi(u, v + \Delta v), \psi(u, v + \Delta v)].
\end{array}$$



V dalším se pokusíme alespoň přibližně spočítat obsah obrazce $G(I)$.

S použitím Taylorovy věty máme:

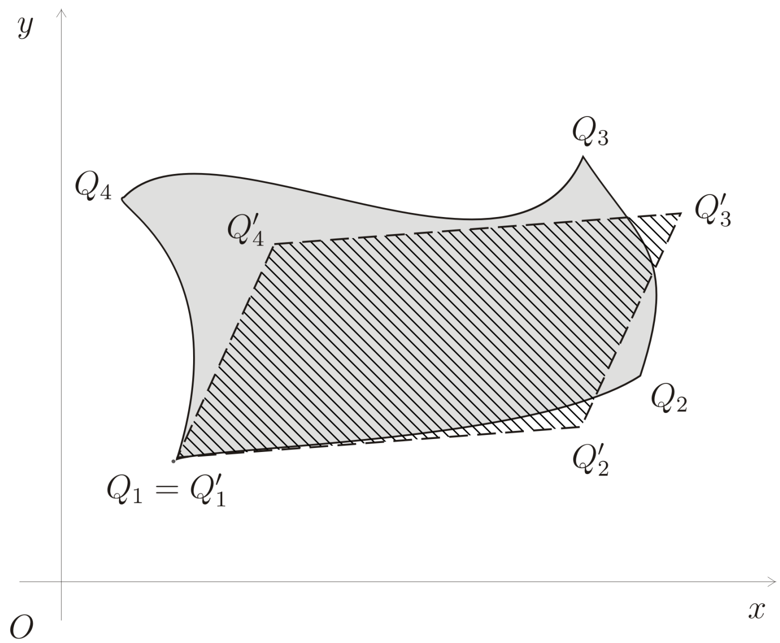
$$\begin{array}{rcl}
\varphi(u + \Delta u, v) & = & \varphi(u, v) + \varphi'_u(u, v)\Delta u + R, \\
\varphi(u, v + \Delta v) & = & \varphi(u, v) + \varphi'_v(u, v)\Delta v + R, \\
\psi(u + \Delta u, v) & = & \psi(u, v) + \psi'_u(u, v)\Delta u + R, \\
\psi(u, v + \Delta v) & = & \psi(u, v) + \psi'_v(u, v)\Delta v + R, \\
\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v) & = & \varphi(u, v) + \varphi'_u(u, v)\Delta u + \varphi'_v(u, v)\Delta v + R, \\
\psi(u + \Delta u, v + \Delta v) & = & \psi(u, v) + \psi'_u(u, v)\Delta u + \psi'_v(u, v)\Delta v + R,
\end{array}$$

kde $R = R((\Delta u)^2, (\Delta v)^2, \Delta u \Delta v)$ jsou zbytky v Taylorově vzorci, které označíme ve všech předešlých výrazech stejně.

Všechny zbytky v naší úvaze zanedbáme a budeme uvažovat pouze body

$$\begin{aligned}
Q_1' &= Q_1, \\
Q_2' &= Q_1 + [\varphi_u'(u,v)\Delta u,\ \psi_u'(u,v)\Delta u]\,, \\
Q_3' &= Q_1 + [\varphi_u'(u,v)\Delta u + \varphi_v'(u,v)\Delta v,\ \psi_u'\Delta u + \psi_v'(u,v)\Delta v]\,, \\
Q_4' &= Q_1 + [\varphi_v'(u,v)\Delta v,\ \psi_v'(u,v)\Delta v]\,.
\end{aligned}$$

Obsah křivočarého lichoběžníka $G(I)$ je přibližně roven obsahu rovnoběžníka $Q_1'Q_2'Q_3'Q_4'$ o stranách $Q_1'Q_2'$ a $Q_1'Q_4'$.



Obsah tohoto rovnoběžníka je roven dvojnásobku obsahu $\Delta Q_1'Q_2'Q_4'$, což z analytické geometrie je absolutní hodnota z determinantu

$$\left|\det\begin{pmatrix} x_2' - x_1' & y_2' - y_1' \\ x_4' - x_1' & y_4' - y_1' \end{pmatrix}\right|,$$

kde $Q_1' = [x_1', y_1']$, $Q_2' = [x_2', y_2']$, $Q_4' = [x_4', y_4']$. Po dosazení máme

$$\left|\det\begin{pmatrix} \varphi'_u(u,v)\Delta u & \psi'_u(u,v)\Delta u \\ \varphi'_v(u,v)\Delta v & \psi'_v(u,v)\Delta v \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \varphi'_u(u,v)\Delta u & \varphi'_v(u,v)\Delta v \\ \psi'_u(u,v)\Delta u & \psi'_v(u,v)\Delta v \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\det\left(\begin{pmatrix} \varphi_u' & \varphi_v' \\ \psi_u' & \psi_v' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta u & 0 \\ 0 & \Delta v \end{pmatrix}\right)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \varphi_u' & \varphi_v' \\ \psi_u' & \psi_v' \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} \Delta u & 0 \\ 0 & \Delta v \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\det\begin{pmatrix} \varphi_u' & \varphi_v' \\ \psi_u' & \psi_v' \end{pmatrix}\right| |\Delta u|\,|\Delta v|\,.$$

Matice

$$\mathcal{J}(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi_u'(u,v) & \varphi_v'(u,v) \\ \psi_u'(u,v) & \psi_v'(u,v) \end{pmatrix}$$

se nazývá *Jacobiho matice* transformace $G = (\varphi, \psi)$. Determinant

$$J(u,v) = det\,\mathcal{J}(u,v)$$

z této matice se nazývá *jakobián* této transformace.

Můžeme tedy psát

$$\mu\left(G(I)\right) \approx |J(u,v)|\, |\Delta u\,|\,|\,\Delta v| = |J(u,v)|\, \mu(I)$$

Věta 4.1.8 *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $G = (\varphi, \psi) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je prosté zobrazení takové, že φ, $\psi \in C^1(\Omega)$ a jakobián $J(u,v) \neq 0$ v každém bodě $[u,v] \in \Omega$. Nechť $K \subset \Omega$ je uzavřená množina, která je sjednocením konečného počtu elementárních oblastí prvního nebo druhého druhu, a funkce f je spojitá na $G(\Omega)$. Pak platí*

$$\iint\limits_{G(K)} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{K} f\left(\varphi(u,v), \psi(u,v)\right) |J(u,v)|\; dudv.$$

Poznámka 4.1.8 Věta zůstane v platnosti, pokud zobrazení G nebude prosté, nebo jakobián bude roven nule na podmnožinách množiny K uvedených v Poznámce 4.1.6, budou-li jejich obrazy při zobrazení G opět množiny uvedených typů v $G(K)$. Pokud funkce f bude ohraničená na $G(K)$, pak také stačí, aby f byla spojitá na $G(K)$ s výjimkou množin uvedených v Poznámce 4.1.6.

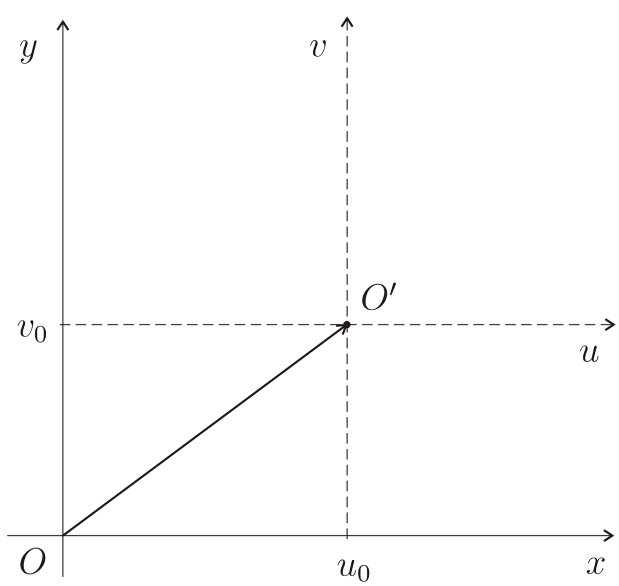
Poznámka 4.1.9 Účelem transformace je zjednodušit integrační obor nebo integrovanou funkci. Nejlepší alternativou je, když se podaří zlepšit obojí.

Nejdůležitější typy transformací:

Posunutí. *Je dán bod $[u_0, v_0]$. Transformace $G = (\varphi, \psi)$ daná vztahy*

$$\begin{aligned} x &= u_0 + u \equiv \varphi(u,v), \\ y &= v_0 + v \equiv \psi(u,v) \end{aligned}$$

posouvá bod $[x,y]$ o orientovanou vzdálenost u_0 ve směru souřadnicové osy x a o orientovanou vzdálenost ve směru souřadnicové osy y.



Obrázek 4.5: Transformace posunutí.

Řešení:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Lineární transformace. *Je dána regulární matice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Transformace $G = (\varphi, \psi)$ *daná vztahy*

$$\begin{aligned} x &= a_{11}u + a_{12}v \equiv \varphi(u,v), \\ y &= a_{21}u + a_{22}v \equiv \psi(u,v) \end{aligned}$$

Zobrazuje přímku na přímku, v případě, že A *je ortogonální pak zachovává úhly.*

Řešení:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |A|\,.$$

Zobecněné polární souřadnice. *Jsou dány konstanty* a, $b > 0$.
Transformace do zobecněných polárních souřadnic je dána vztahy:

$$\begin{aligned} x &= ar\cos t \equiv \varphi(r,t), \\ y &= br\sin t \equiv \psi(r,t). \end{aligned}$$

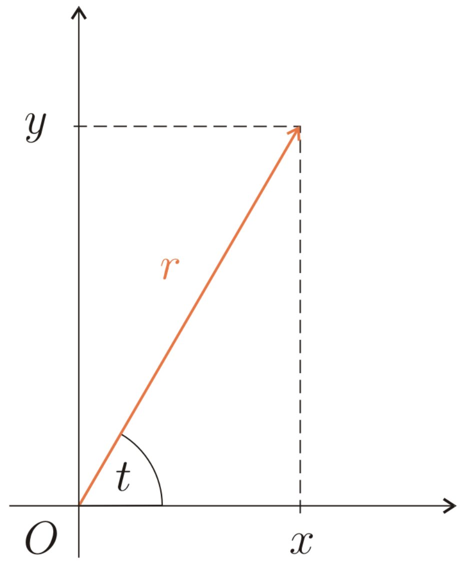
$$J(r,t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial r} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial\psi}{\partial r} & \frac{\partial\psi}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos t & -ar\sin t \\ b\sin t & br\cos t \end{vmatrix} = abr.$$

Tato transformace $G = (\varphi, \psi)$ *zobrazuje množinu* $(0,\infty) \times (-\pi,\pi)$ *vzájemně jednoznačně na množinu* $\mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \le 0, y = 0\}$.
Inverzní zobrazení $G^{-1} = \left(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}\right)$ *je dáno vztahy*

$$r = \widetilde{\varphi}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$t = \widetilde{\psi}(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & x \le 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & x \le 0, y < 0 \end{cases}$$

Poznámka 4.1.10 Speciální případ nastává pro volbu parametrů $a = b = 1$. V takovém případě mluvíme o polárních souřadnicích (vypouštíme přívlastek zobecněné).
Geometrický význam polárních souřadnic je popsán na Obrázku 4.6.



Obrázek 4.6: Polární souřadnice.

4.1.5 Geometrické a fyzikální aplikace dvojného integrálu

V dalším budeme předpokládat, že Ω může být sjednocením konečného počtu elementárních oblastí prvního nebo druhého druhu.

Obsah rovinného obrazce

Obsah rovinného obrazce $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se spočte s použitím vzorce:

$$\mu(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} dxdy.$$

Objem válcového tělesa** $K \subset \mathbb{R}^3$**.

Mějme dáno těleso

$$K = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in \Omega, g(x, y) < z < f(x, y)\right\},$$

kde $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$, f, g jsou spojité a ohraničené na Ω. Pak objem tohoto tělesa je dán vzorcem

$$V(K) = \iint\limits_{\Omega} [f(x, y) - g(x, y)]\, dxdy.$$

Obsah plochy

Obsah části plochy

$$S = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y),\ [x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2\right\},$$

kde $f \in C^1(\overline{\Omega})$ je dán vzorcem

$$P(S) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + \left(f'_y(x, y)\right)^2} dxdy.$$

4.2 Křivkové integrály

4.2.1 Pojem křivky v $\mathbb{R}^n$.

Definice 4.2.1 Množinu $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ nazveme *křivkou v* $\mathbb{R}^n$, jestliže existuje spojité zobrazení $\Phi = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ intervalu I na množinu γ takové, že platí:

1) Zobrazení Φ je prosté s výjimkou konečně mnoha bodů.

2) Zobrazení Φ je po částech třídy C^1 na I, tj. Φ' je spojitá s výjimkou konečně mnoha bodů, v nichž existují jednostranné derivace, které mohou být různé.

3) Φ' má až na konečně mnoho bodů nenulovou hodnotu v každém bodě intervalu I.

Zobrazení pak Φ nazýváme *parametrizací* křivky γ.

Nechť $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že bod C je *k-násobným* bodem křivky γ, jestliže existuje právě k různých hodnot parametru $t_1, \ldots, t_k \in [a, b]$ takových, že $C = \Phi(t_i)$ pro $i = 1,\ 2, \ldots, k$. Křivka γ se nazývá *jednoduchá*, když nemá vícenásobné body.

Křivka γ se nazývá *uzavřená*, jestliže $\Phi(a) = \Phi(b)$. Uzavřenou křivku nazveme *jednoduchou*, jestliže nemá žádný vícenásobný bod kromě dvojnásobného bodu $\Phi(a)$.

Je-li I_1, I_2, …, I_n dělení intervalu $[a, b]$, pak obrazy dělicích intervalů $\Phi(I_1)$, $\Phi(I_2)$, …, $\Phi(I_n)$ jsou opět křivky. Posloupnost těchto křivek nazveme *dělením křivky* γ.

Definice 4.2.2 Je-li parametrizace Φ křivky γ prosté zobrazení a třídy C^1 na celém intervalu $[a, b]$ a má přitom nenulovou derivaci (v bodech a, b uvažujeme jednostranné derivace) v každém bodě intervalu $[a, b]$, nazýváme γ *obloukem* a zobrazení Φ jeho parametrizací.

Oblouk γ je *sjednocením* podoblouků $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, jestliže $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_n$ a oblouky γ_i, γ_j, $i \neq j$, mají společné nejvýše krajní body.

Poznámka 4.2.1 V technických aplikacích se často křivka γ popisuje buď vektorovou rovnicí

$$\gamma : \vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b],$$

nebo parametrickými rovnicemi

$$\gamma : x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \quad t \in [a, b]$$

Poznámka 4.2.2 Některé křivky je výhodné vyjádřit v polárních souřadnicích. Je-li křivka zadána v kartézských souřadnicích rovnicí $F(x, y) = 0$, pak dosazením za

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$$

dostaneme rovnici $\Phi(r, \varphi) = 0$ v polárních souřadnicích. Pokud je možné zapsat tuto rovnici ve tvaru $r = g(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta]$, pak říkáme, že jde o explicitní tvar rovnice křivky v polárních souřadnicích.

Definice 4.2.3 Nechť je daná křivka γ s parametrizací $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$ a $\Phi \in C^1$ na I. Pro $t \in I$ nazveme

$$\Phi'(t) := D\Phi(t)$$

tečným vektorem ke křivce γ v bodě t.

Transformace parametru. Nechť je dán oblouk γ s parametrizací $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$. Nechť funkce g zobrazuje interval J na interval I a $g \in C^1(I)$, $g' \neq 0$ na J. Zobrazení

$$\Psi = \Phi \circ g : \ J \to \mathbb{R}^n$$

je rovněž parametrizací oblouku γ.

Je-li funkce g rostoucí říkáme, že parametrizace Φ a Ψ jsou *souhlasné parametrizace*.

Orientace oblouku. Nechť je dán oblouk γ s parametrizací $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$. Na oblouku γ zavedeme relaci $\prec$

$$M_1, M_2 \in \gamma : M_1 \prec M_2 \ \Leftrightarrow \ t_1 = \Phi^{-1}(M_1) < t_2 = \Phi^{-1}(M_2)$$

která je relací uspořádání na γ.

O tomto uspořádání řekneme, že určuje *orientaci* oblouku γ a oblouk s tímto uspořádáním nazveme *orientovaným obloukem*. O parametrizaci Φ řekneme, že *souhlasí s orientací* γ.

Příklad 4.2.1

$$\Phi(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

$P = \Phi(0) = [1, 0]$, $K = \Phi(\pi) = [-1, 0]$

Příklady křivek.

- Graf spojité funkce

$$\begin{aligned} f : I &\to \mathbb{R} \\ \Phi(t) &= (t, f(t)), \quad t \in I \end{aligned}$$

- Přímka

$$\begin{aligned} &ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, |a| + |b| \neq 0 \\ &\Phi(t) = (x_0 + s_1 t, y_0 + s_2 t), \quad t \in (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

- Elipsa

$$\begin{aligned} &\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0 \\ &\Phi(t) = (x_0 + a \cos\, t, y_0 + b \sin\, t), \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

- Hyperbola

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ &\Phi(t) = (\pm a \cosh\, t, b \sinh\, t), \quad t \in (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

- Polokubická parabola

$$\begin{aligned} y^2 - ax^3 &= 0, \quad x \in [0, \infty),\ a > 0 \\ \Phi(t) &= \left(\frac{t^2}{\sqrt[3]{a}}, t^3\right), \quad t \in (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

- Asteroida

$$\begin{aligned} &x^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3} = 0, \quad a > 0 \\ &\Phi(t) = (a \cos^3\, t, a \sin^3\, t), \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

- Steinerova hypocykloida

$$\begin{aligned} &\left(x^2 + y^2\right)^2 + 8ax\left(3y^2 - x^2\right) + 18a^2\left(x^2 + y^2\right) - 27a^4 = 0, \quad a > 0 \\ &\Phi(t) = \left(a\left(2\cos\, t + \cos\, 2t\right), a\left(2\sin\, t - \sin\, 2t\right)\right), \quad t \in [0, 2] \end{aligned}$$

- Cykloida

$$\begin{aligned} &x = a \arccos a - ya - \sqrt{2ay - y^2}, \quad y \in [0, 2a],\ a > 0 \\ &\Phi(t) = (a(t - \sin\, t), a(1 - \cos\, t)), \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

- Kardioida (srdcovka)

$$\begin{aligned} &\left(x^2 + y^2\right)^2 - 6a^2\left(x^2 + y^2\right) + 8a^3 x - 3a^4 = 0, \quad a > 0 \\ &\Phi(t) = \left(a\left(2\cos\, t - \cos\, 2t\right), a\left(2\sin\, t - \sin\, 2t\right)\right), \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

- Descartův list

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a > 0$$
$$\Phi(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right), \quad t \in (-\infty, \infty),\ t \neq -1$$

- Bernoulliova lemniskáta

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + a^2 \left(y^2 - x^2\right) = 0, \quad a \neq 0$$
$$\Phi(t) = \left(\frac{a \cos\, t}{1 + \sin^2\, t}, \frac{a \cos\, t \sin\, t}{1 + \sin^2\, t} \right), \quad t \in [-\pi, \pi]$$
$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \qquad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$$

- Dioklova kisoida

$$y^2 - \frac{x^3}{a - x} = 0, \quad a > 0,\ x \neq a$$
$$\Phi(t) = \left(\frac{at^2}{1+t^2}, \frac{at^3}{1+t^2} \right), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

- Logaritmická spirála

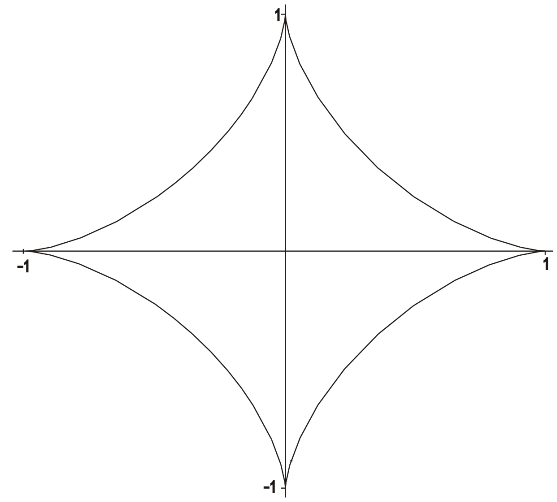
$$\Phi(t) = b\left(\mathrm{e}^{at} \cos\, t, \mathrm{e}^{at} \sin\, t\right), \quad t \in (-\infty, \infty),\ a, b > 0$$
$$r = a\mathrm{e}^{b\varphi}, \qquad \varphi \in [0, \infty)$$

- Archimédova spirála

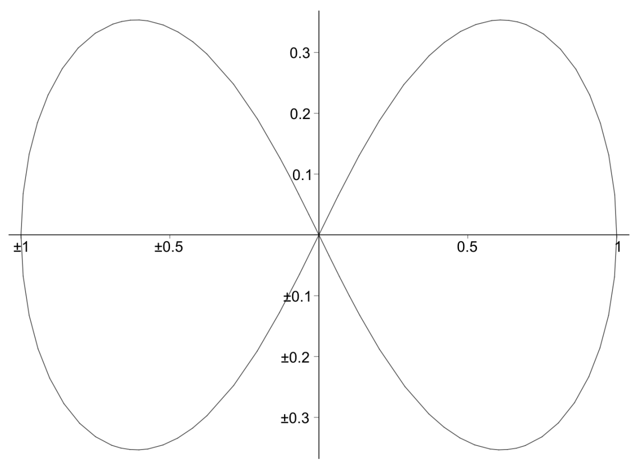
$$\Phi(t) = (at \sin t, -at \cos t), \quad t \in [0, \infty),\ a > 0$$
$$r = a\varphi, \qquad \varphi \in [0, \infty)$$

- Šroubovice

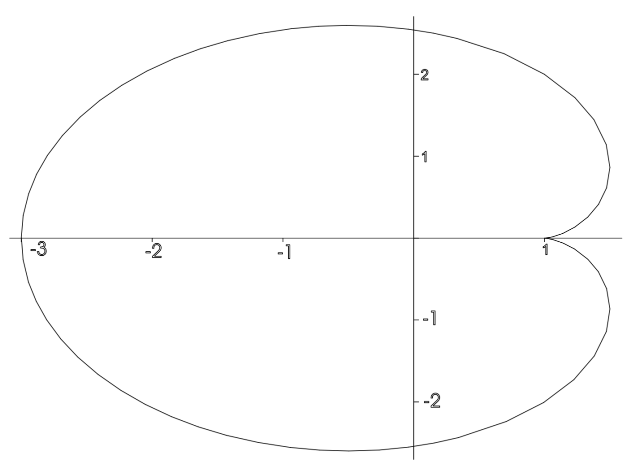
$$\Phi(t) = (a \cos\, t, b \sin\, t, ct), \quad t \in [0, 2\pi],\ a, b > 0, c \neq 0.$$



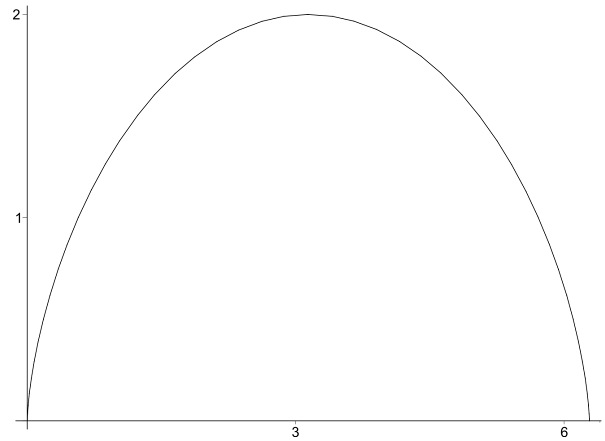
Obrázek 4.7: Asteroida pro $a = 1$.



Obrázek 4.8: Bernoulliova lemniskáta pro $a = 1$.



Obrázek 4.9: Kardioida pro $a = 1$.



Obrázek 4.10: Cykloida pro $a = 1$.

4.2.2 Křivkový integrál ve skalárním poli

Délka křivky

Nechť je dán oblouk $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, který má parametrické rovnice

$$x = \Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)), \quad t \in [a, b].$$

Definujme dělení D_N intervalu $I = [a, b]$ s dělicími body $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = b$ a počítejme

$$\sum_{i=1}^{N} \|\Phi(t_{i-1}) - \Phi(t_i)\| = \sum_{i=1}^{N} \|[\varphi_1(t_{i-1}), \varphi_2(t)(t_{i-1}), \ldots, \varphi_n(t_{i-1})] - [\varphi_1(t_i), \varphi_2(t)(t_i), \ldots, \varphi_n(t_i)]\|$$

a definujme *délku křivky* jako

$$L(\gamma) = \sup_{D_N} \sum_{i=1}^{N} \|[\varphi_1(t_{i-1}), \varphi_2(t)(t_{i-1}), \ldots, \varphi_n(t_{i-1})] - [\varphi_1(t_i), \varphi_2(t)(t_i), \ldots, \varphi_n(t_i)]\| < \infty$$

Pak řekneme, že křivka γ je *rektifikovatelná.*

Věta 4.2.1 *Číslo $L(\gamma)$ je délkou oblouku γ, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu I tak, že pro každé zjemnění $\widetilde{D}$ dělení D platí*

$$\left| L(\gamma, \widetilde{D}) - L(\gamma) \right| < \varepsilon$$

Věta 4.2.2 *V případě parametrických rovnic $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a, b]$, je tedy délka oblouku γ dána vztahem*

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt,$$

Křivkový integrál ve skalárním poli (neorientovaný křivkový integrál)

Definice 4.2.4 Jestliže platí

$$\sup_{D_N} s(f, D_N) = \inf_{D_N} S(f, D_N)$$

pak tuto hodnotu značíme

$$\int\limits_{\gamma} f(M)\, ds = \int\limits_{\gamma} f(x,y)\, ds.$$

a nazveme ji *křivkovým integrálem* funkce f přes křivku γ.

Věta 4.2.3 *Nechť oblouk γ je dán parametrickými rovnicemi*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [a,b]$$

a funkce $f(x,y)$ je spojitá na oblouku γ. Pak platí

$$\int\limits_{\gamma} f(M)\, ds = \int\limits_{\gamma} f(x,y)\, ds = \int\limits_{a}^{b} f\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt.$$

Poznámka 4.2.3 Je-li dána křivka předpisem $y = g(x)$, $x \in [a,b]$ a derivace g' je spojitá na $[a,b]$, pak platí

$$\int\limits_{\gamma} f(x,y)\, ds = \int\limits_{a}^{b} f\left(x, g(x)\right) \sqrt{1 + \left(g'(x)\right)^2}\, dx.$$

Je-li dána křivka předpisem $x = h(y)$, $y \in [c,d]$ a derivace h' je spojitá na $[c,d]$, pak platí

$$\int\limits_{\gamma} f(x,y)\, ds = \int\limits_{c}^{d} f\left(h(y), y\right) \sqrt{1 + \left(h'(y)\right)^2}\, dy.$$

Věta 4.2.4 *(Nezávislost na parametrizaci) Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je oblouk, Φ, Ψ jeho dvě parametrizace a f je funkce spojitá na γ. Pak platí*

$$\int\limits_{\gamma_\Phi} f(M)\, ds = \int\limits_{\gamma_\Psi} f(M)\, ds$$

Věta 4.2.5 *(Základní vlastnosti křivkového integrálu ve skalárním poli)*

(a) Linearita. Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je oblouk a funkce f a g jsou spojité na oblouku γ. Pak platí

$$\int\limits_{\gamma} (c_1 f + c_2 g)(M)\, ds = c_1 \int\limits_{\gamma} f(M)\, ds + c_2 \int\limits_{\gamma} g(M)\, ds,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné reálné konstanty.

(b) Aditivita. Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je křivka, která je sjednocením dvou oblouků γ_1, γ_2 a funkce f je spojitá na křivce γ. Pak platí

$$\int\limits_{\gamma} f(M)\, ds = \int\limits_{\gamma_1} f(M)\, ds + \int\limits_{\gamma_2} f(M)\, ds.$$

4.2.3 Geometrické a fyzikální aplikace křivkového integrálu ve skalární poli

(a) *Délka* křivky

$$L = \int_\gamma ds.$$

(b) *Obsah* části válcové plochy Φ s řídící křivkou $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ v rovině $z = 0$ a tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezenými plochami $z = g(x,y)$, $z = f(x,y)$, $g(x,y) \leq f(x,y)$ pro každé $[x,y] \in \gamma$.

$$P = \int_\gamma [f(x,y) - g(x,y)]\, ds.$$

(c) *Hmotnost* drátu ve tvaru křivky.

$$m = \int_\gamma \varrho(x,y,z)\, ds$$

s lineární hustotou $\varrho(x,y,z)$ $kg\, m^{-1}$.

4.2.4 Křivkový integrál ve vektorovém poli

Zavedení pojmu, základní vlastnosti křivkového integrálu ve vektorovém poli

Ve fyzice a v technických aplikacích se často setkáváme s různými druhy rovinných nebo prostorových vektorových polí – *silové pole, pole rychlostí částic proudící nestlačitelné kapaliny, pole magnetické a elektrické intenzity.*

Z matematického hlediska jde vlastně o zobrazení, které bodům přiřazuje vektory.

Vektorové pole je zobrazení

$$\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n,$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. V technické praxi je nejčastější použití pro $n = 2, 3$. V tomto případě budeme jednoduše psát

$$\vec{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))\,, \qquad \vec{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))\,,$$

kde P, Q, R jsou složky (komponenty) vektorové funkce $\vec{f}$.

Říkáme, že vektorové pole $\vec{f}$ je spojité vektorové pole, nebo stručněji je třídy C na Ω, když všechny složky jsou spojité na Ω. Říkáme, že vektorové pole $\vec{f}$ je třídy C^1 na Ω, když všechny složky tohoto pole mají spojité všechny první parciální derivace na množině Ω.

Uvažujeme-li orientovaný oblouk $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), pak můžeme v každém bodě $C = \Phi(t)$, $t \in (a,b)$ oblouku γ určit jednotkový tečný vektor vztahem

$$\vec{t}(C) = \frac{\Phi'(t)}{\|\Phi'(t)\|}.$$

Definice 4.2.5 Nechť $\vec{f}$ je spojité vektorové pole na orientovaném oblouku γ. *Křivkovým integrálem* ve vektorovém poli $\vec{f}$ (křivkovým integrálem druhého druhu) přes křivku γ nazýváme integrál tvaru

$$\int_\gamma \left(\vec{f} | d\vec{s}\right) = \int_\gamma \left(\vec{f}(M) | \vec{t}(M)\right) ds$$

Jeli $\Phi : [a,b] \to \gamma$, parametrizace orientovaného oblouku γ (tj. parametrizace oblouku souhlasí s jeho orientací), pak platí

$$\int\limits_{\gamma} \left(\vec{f}(M)|\vec{t}(M)\right)\, ds$$

$$= \int\limits_{a}^{b} \left[P\left(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right)\varphi'(t) + Q\left(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right)\psi'(t) + R\left(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right)\chi'(t)\right]\, dt$$

Mnohdy se používá označení

$$\int\limits_{\gamma} \left(\vec{f}|\vec{t}\right)\, ds = \int\limits_{\gamma} P(x,y,z)\, dx + Q(x,y,z)\, dy + R(x,y,z)\, dz$$

které se po dosazení z parametrických rovnic oblouku γ převede na výše uvedený tvar.

Poznámka 4.2.4 Je-li dána křivka předpisem $y = g(x)$, $x \in [a,b]$ a g je spojitá na $[a,b]$, pak platí

$$\int\limits_{\gamma} P(x,y)\, dx = \int\limits_{a}^{b} P\left(t, g(t)\right)\, dt$$

Je-li dána křivka předpisem $x = h(y)$, $y \in [c,d]$ a h je spojitá na $[c,d]$, pak platí

$$\int\limits_{\gamma} Q(x,y)\, dy = \int\limits_{c}^{d} Q\left(h(t), t\right)\, dt$$

Greenova věta

Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se nazývá *jednoduše souvislá* v $\mathbb{R}^2$, jestliže s každou kružnicí, která je obsažena v Ω je také vnitřek kružnice obsažen v Ω. Mezikruží není jednoduše souvislá množina v $\mathbb{R}^2$.

Věta 4.2.6 *(Greenova věta) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, ohraničená jednoduše souvislá množina, jejíž hranicí je jediná kladně orientovaná jednoduchá uzavřená křivka γ. Dále nechť $\vec{f} = (P,Q)$ je spojité vektorové pole na $\overline{\Omega}$ a $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ jsou spojité funkce na $\overline{\Omega}$. Pak platí*

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\, dxdy = \int\limits_{\gamma} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy.$$

Aplikace Greenovy věty. *Obsah* rovinné oblasti splňující předpoklady Greenovy věty.

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma} x\, dy - y\, dx.$$

4.2.5 Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě

Řekneme, že spojité vektorové pole $\vec{f}$ v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ *nezávisí na integrační cestě*, jestliže pro libovolné orientované křivky γ_1, γ_2 ležící v Ω se stejným počátečním bodem A a koncovým bodem B, platí

$$\int\limits_{\gamma_1} \vec{f} \cdot \vec{s} = \int\limits_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Pak také píšeme

$$\int\limits_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Nechť $\vec{f} = (P, Q)$ $(\vec{f} = (P, Q, R))$ je spojité vektorové pole na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^3)$. Řekneme, že vektorové pole je *potenciální* na Ω, jestliže existuje funkce $V \in C^1(\Omega)$ tak, že

$$\nabla V = \vec{f}$$

pro každé $[x, y] \in \Omega$ $([x, y, z] \in \Omega)$. Každou takovou funkci V nazýváme *potenciálem* vektorového pole $\vec{f}$ na Ω.
Rotaci vektorového pole $\vec{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ definujeme

$$\operatorname{rot} \vec{f}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$$

Věta 4.2.7 *Nechť vektorové pole $\vec{f} = (P, Q)$ je třídy C^1 na jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Pak toto pole je potenciální tehdy a jen tehdy, když*

$$\operatorname{rot} \vec{f}(x, y) = 0 \quad \forall\, [x, y] \in \Omega$$

Věta 4.2.8 *Nechť $\vec{f} = (P, Q)$ je třídy C^1 v jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Křivkový integrál*

$$\int\limits_{\gamma} \vec{f}(x, y) \cdot d\vec{s} = \int\limits_{\gamma} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy,$$

kde $\gamma \subset \Omega$ nezávisí na integrační cestě AB v oblasti Ω tehdy a jen tehdy, když vektorové pole $\vec{f}$ je na Ω potenciální. Je-li V jeho potenciál na Ω, pak platí

$$\int\limits_A^B P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = V(B) - V(A).$$

Literatura

[1] Bouchala J.: *Matematická analýza 3 - Diferenciální a integrální počet vektorových funkcí.* VŠB TU Ostrava (2001).

[2] Daněček J., Dlouhý O., Přibyl O.: *Matematika II - Dvojný a trojný integrál.* FAST VUT Brno, (2004).

[3] Daněček J., Dlouhý O., Přibyl O.: *Matematika II - Křivkové integrály* FAST VUT Brno (2004).

[4] Drábek P., Míka S.: *Matematická analýza II.* FAV ZU Plzeň (1997).

[5] Eliáš J., Horváth J., Kajan J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky III.* Alfa, Bratislava (1980).

[6] Eliáš J., Horváth J., Kajan J., Šulka R.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky IV.* Alfa, Bratislava (1979).

[7] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. An Introduction to Functions of Several Variables.* Birkhäuser, Boston (2009).

[8] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. Linear and Metric Structures and Continuity.* Birkhäuser, Boston (2007).

[9] Jarník V.: *Diferenciální počet II.* ČAV Praha (1963).

[10] Jarník V.: *Integrální počet II.* ČAV Praha (1963).

[11] Kalas J., Kuben J.: *Integrální počet funkcí více proměnných.* MU Brno (2009).

[12] Lukeš J., Malý, J.: *Míra a integrál.* Univerzita Karlova, Praha (1993).

[13] Nagy J., Nováková E., Vacek M.: *Vektorová analýza.* SNTL Praha (1984).

[14] Ráb M.: *Zobrazení a Riemannův integrál v $\mathbb{E}^n$.* SPN Praha (1988).