Kapitola 1

POSLOUPNOSTI REÁLNÝCH ČÍSEL

1.1 Základní pojmy

Definice 1. Zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se nazývá posloupností prvků z $\mathbb{R}$, nebo-li posloupností reálných čísel, $f(n)$ značíme a_n nebo y_n, posloupnost zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka. Okolím bodu $+\infty$ $(-\infty)$ rozumíme libovolný interval (k, ∞) $((-\infty, l))$, kde k, $l \in \mathbb{R}$.

Definice 2. O posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ řekneme, že má limitu $L \in \overline{\mathbb{R}}$ jestliže ke každému okolí $U_\varepsilon(L)$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí, že $a_n \in U_\varepsilon(L)$. Limitu značíme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{nebo} \quad a_n \to L \text{ jakmile } n \to \infty$$

Poznámka. Jestliže $L \in \mathbb{R}$ říkáme, že existuje vlastní limita (posloupnost *konverguje*), jestliže $L = \pm\infty$ říkáme, že existuje nevlastní limita (posloupnost *diverguje*). Jestliže $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *neklesající* (jestliže $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *rostoucí*), jestliže $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *nerostoucí* (jestliže $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *klesající*). Takové posloupnosti nazýváme souhrně *monotonní*.

1.2 Vlastnosti posloupností

Věta 1.2.1

(a) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

(b) Každá konvergentní posloupnost je omezená.

(c) Každá monotonní posloupnost má limitu.

1) Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající (rostoucí) posloupnost, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n\{a_n\}$,

2) Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí (klesající) posloupnost, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_n\{a_n\}$.

(d) Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu L.

1) Jestliže $L > 0$ $(L < 0)$ pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n > 0$ $(a_n < 0)$ pro každé $n \geq n_0$

2) *Jestliže existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že* $a_n \geq 0$ $(a_n \leq 0)$ *pro každé* $n \geq n_0$ *pak* $L \geq 0$ $(L \leq 0)$.

Důsledek 1.2.1 *Monotonní posloupnost je konvergentní tehdy a jen tehdy, když je omezená.*

Poznámka. Počítání se symboly $\pm\infty$. Definujeme

- $a + (+\infty) = +\infty$, $a + (-\infty) = -\infty$, $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$,
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$,
- Jestliže $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ pak $a(+\infty) = +\infty$, $a(-\infty) = -\infty$,
- Jestliže $a < 0$, $a \in \mathbb{R}$ pak $a(+\infty) = -\infty$, $a(-\infty) = +\infty$,
- Jestliže $a \in \mathbb{R}$ pak $a/(+\infty) = 0$, $a/(-\infty) = 0$.

Věta 1.2.2 *(Pravidla pro počítání s limitami) Nechť pro posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *platí, že* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, A, $B \in \overline{\mathbb{R}}$. *Označme* $\odot$ *jeden ze symbolů* $+, -, \cdot, /$. *Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \odot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \odot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = A \odot B,$$

pokud má pravá strana smysl.

Věta 1.2.3 *(Věta o sevření) Nechť jsou dány posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Předpokládejme, že existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *takové, že* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *pro každé* $n \geq n_0$. *Jestliže* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$ *pak* $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.

Důsledek 1.2.2 *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou dvě posloupnosti a* $L \in \mathbb{R}$. *Jestliže existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *takové, že*

$$|a_n - L| \leq b_n, \quad \forall\, n \geq n_0 \quad a \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Věta 1.2.4

(a) *Jestliže* $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$ *pak* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L| \in \overline{\mathbb{R}}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *tehdy a jen tehdy když* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

(c) *Nechť* $a_n \geq 0$, *pro* $n \in \mathbb{N}$ *a* $b > 0$ *je libovolné reálné číslo. Jestliže* $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ *pak* $\lim_{n\to\infty} a_n^b = L^b$.

(d) *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, $b > 0$ *pak* $\lim_{n\to\infty} b^{a_n} = b^L$.

(e) *Jestliže* $|a| < 1$ *pak* $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

(f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ *pro každé* $a > 0$.

(g) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Věta 1.2.5 *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a posloupnost* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je omezená. Pak* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Věta 1.2.6 *(Bolzano-Cachyova podmínka) Posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentní tehdy a jen tehdy, když pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *tak, že pro každé* n, $m \geq n_0$ *platí*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

1.3 Podposloupnosti, liminf a limsup

Definice 3. Říkáme, že $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *podposloupnost* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jestliže existuje funkce $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ která je rostoucí, tj. $k_1 < k_2 < \dots$, taková, že

$$p_n = a_{k_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Věta 1.3.1 *Jestliže $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $L \in \overline{\mathbb{R}}$, pak jakákoliv podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má tutéž limitu L.*

Poznámka.

- Poznamenejme, že $k_n \geq n$ protože $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je rostoucí.
- Jestliže $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má dvě různé podposloupnosti s různými limitami, pak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá žádnou limitu.

Definice 4. Uvažujme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Posloupnosti definované

$$l_n = \inf_{k \geq n}\{a_k\} \qquad L_n = \sup_{k \geq n}\{a_k\}$$

jsou neklesající resp. nerostoucí posloupnost. Tedy existují limity

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \sup_k l_k, \qquad \lim_{n\to\infty} L_n = \inf_k L_k$$

s hodnotami v $\overline{\mathbb{R}}$. Označme

$$\begin{aligned}\mathrm{liminf}_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n}\{a_k\} \\ \mathrm{limsup}_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}\{a_k\}\end{aligned}$$

Tyto limity nazýváme *limesinferior* (*dolní limita*) *limessuperior* (*horní limita*).

Věta 1.3.2 *Uvažujme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

(a) Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má liminf *a* limsup *v $\overline{\mathbb{R}}$.*

(b)

$$\begin{aligned}\mathrm{liminf}_{n\to\infty} a_n &\leq \mathrm{limsup}_{n\to\infty} a_n \\ \mathrm{liminf}_{n\to\infty} a_n &= -\mathrm{limsup}_{n\to\infty}(-a_n)\end{aligned}$$

(c) Platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{liminf}_{n\to\infty} a_n = \mathrm{limsup}_{n\to\infty} a_n = L$$

(d) $\mathrm{limsup}_{n\to\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$ *tehdy a jen tehdy*

(i) ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$a_n < L + \varepsilon,$$

(ii) existuje podposloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která konverguje k číslu L.

Kapitola 2

NEKONEČNÉ ŘADY

2.1 ČÍSELNÉ ŘADY

2.1.1 Úvod

Definice 2.1.1 Nechť je daná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel. Rekurence

$$\begin{cases} s_1 &= a_1 \\ s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} \end{cases}$$

definuje indukcí jedinou posloupnost

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *posloupností částečných součtů řady* tvořenou posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pro limitu posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ (jestliže existuje!) užíváme symbol

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{2.1}$$

a nazýváme *nekonečnou řadou* tvořenou posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice 2.1.2 Jestliže posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje k reálnému číslu L, říkáme že nekonečná řada (2.1) *konverguje* a číslo L nazýváme součetem této řady.

Řadu $r_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j$ nazýváme zbytkem řady $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ po n-tém členu.

Věta 2.1.1 *Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Věta 2.1.2 *(Bolzano-Cachyova podmínka) Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a každé $m \in \mathbb{N}$ platí*

$$|a_{n+1} + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon \tag{2.2}$$

Věta 2.1.3

(a) Řada konverguje tehdy a jen tehdy, když konverguje zbytek řady.

(b) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní pak je konvergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ *a platí* $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *pro každé* $c \in \mathbb{R}$.

(c) *Jsou-li řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní pak je konvergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *a platí* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Definice 2.1.3

(a) Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje *absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(b) Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje *relativně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje.

Věta 2.1.4 *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, pak daná řada konverguje a platí*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

2.1.2 Kritéria konvergence řad

Věta 2.1.5

(a) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy. Jestliže existuje* $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *tak, že pro každé* $n \ge n_0$ *platí* $a_n \le b_n$ *pak:*

   (1) *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje pak je konvergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

   (2) *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje pak je divergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(b) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady s kladnými členy a předpokládejme, že*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}$$

pak

   (1) *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje pak je konvergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

   (2) *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje pak je divergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 2.1.6

(a) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy.*

   (1) *Předpokládejme, že existuje* $0 \le K < 1$ *a* $p \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $n \ge p$

$$\sqrt[n]{a_n} \le K < 1$$

   Pak daná řada konverguje a

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \le \frac{K^p}{1-K}$$

   (2) *Předpokládejme, že existuje* $p \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $n \ge p$

$$\sqrt[n]{a_n} \ge 1$$

   Pak daná řada diverguje.

(b) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

(1) *Předpokládejme, že existuje* $0 \leq K < 1$ *a* $p \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $n \geq p$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K < 1$$

Pak daná řada konverguje a

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \leq \frac{a_p}{1-K}$$

(2) *Předpokládejme, že existuje* $p \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $n \geq p$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

Pak daná řada diverguje.

Věta 2.1.7

(a) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy taková, že*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$$

(1) *Je-li* $0 \leq K < 1$ *pak daná řada konverguje.*

(2) *Je-li* $K > 1$ *pak daná řada diverguje.*

(3) *Je-li* $K = 1$ *pak nelze o konvergenci řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *rozhodnout.*

(b) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy taková, že*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = K$$

(1) *Je-li* $0 \leq K < 1$ *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(2) *Je-li* $K > 1$ *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

(3) *Je-li* $K = 1$ *pak nelze o konvergenci řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *rozhodnout.*

2.1.3 Další důležitá kritéria konvergence řad

Věta 2.1.8 *(Integrální kritérium) Nechť* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *je daná řada s nezápornými členy a nechť existuje funkce* f *taková, že*

(1) *funkce* f *je spojitá, nezáporná a nerostoucí na* $[n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$,

(2) *platí* $f(k) = a_k$ *pro každé* $k \geq n$, $k \in \mathbb{N}$.

Pak daná řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje právě když konverguje integrál* $\int\limits_n^{\infty} f(x)\,dx$.

Odhad pro případ $n = 1$

$$\int\limits_1^{k+1} f(x)\,dx - s_1 \leq s_k - s_1 \leq \int\limits_1^{k} f(x)\,dx, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Věta 2.1.9 *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je daná řada s nezápornými členy.*

(1) Existuje-li $k \in \mathbb{N}$ a $\alpha > 1$ tak, že platí

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq \alpha > 1, \quad \forall\, n \geq k$$

pak daná řada konverguje.

(2) Je-li

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1, \quad \forall\, n \geq k$$

pak daná řada diverguje.

Věta 2.1.10 *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je daná řada s nezápornými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = K$$

(1) Je-li $K > 1$ pak daná řada konverguje.

(2) Je-li $K < 1$ pak daná řada diverguje.

2.1.4 Řady s libovolnými členy

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{pro } a_n > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} -a_n & \text{pro } a_n < 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Věta 2.1.11 *(1) Jestliže řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergují, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

(2) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ diverguje k ∞ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konverguje, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k ∞.

(3) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ diverguje k ∞, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $-\infty$.

Definice 2.1.4 Alternující řada je tvaru $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost s nezápornými členy.

Věta 2.1.12 *(Leibnitzovo kritérium) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost s kladnými členy a platí*

(1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(2) posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ konverguje.
Máme odhad

$$a_k - a_{k+1} \leq \left|\sum_{n=k+1}^{\infty}(-1)^n a_n\right| \leq a_k + a_m \quad \forall\, m, k,\ m > k$$

Předešlé nerovnice jsou ostré v případě, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ostře klesající.

Poznámka. Všechna kritéria pro konvergenci řad můžeme použít pro určení absolutní konvergence řad.

2.1.5 Další kritéria konvergence řad

Věta 2.1.13 *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*,* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou dvě posloupnosti reálných čísel a* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$*, Jestliže zároveň platí:*

(1) řada $\sum_{k=1}^{\infty} s_k (b_k - b_{k+1})$ *konverguje,*

(2) existuje konečná limita $\lim_{n\to\infty} s_n b_{n+1}$*,*

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Důsledekem předešlé Věty jsou následující dvě kritéria pro řady, které nemusí konvergovat absolutně.

Tvrzení 2.1.1 *(Abel-Leibnitzovo kritérium) Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a posloupnost* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je monotonní a ohraničená. Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Tvrzení 2.1.2 *(Dirichletovo kritérium) Nechť poslopnost částečných součtů řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je ohraničená. Dále nechť posloupnost* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerostoucí a* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$*. Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Poznámka. Položíme-li $a_n = (-1)^{n+1}$ a uvážíme-li, že nerostoucí nulová posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zároveň nezáporná, vidíme, že Dirichletovo kritérium je zobecněním Abel-Leibnitzova kritéria.

PŘÍKLADY

Číselné řady

Rozhodněte o konvergenci řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n+1} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{n^n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt[k]{n}}, \qquad k \in \mathbb{N}, 0 < a < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2 \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{3^n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{1}{n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln\, n)^{\ln\, n}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n}{(n+1)!} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!} \qquad \text{[divergentní]}$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p$$

v závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$.

Výsledek

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n}}{1 + \sin\frac{2}{n} - \cos\frac{2}{n}} \frac{1}{n} \sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}$$

Výsledek

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Výsledek: konverguje podle odmocninivého kritéria
Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3}. $[n >]$
Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-2}.
Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-1}. $[n > \mathrm{e}^{10}]$
Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-2}.
Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3}.
Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{7n}\right)^n$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3}. $[n = 9]$
Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-2}. $[n = 9]$
Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \ln(1+2^n)$$

$[\ln(1+2^n) \le \ln 2^{n+1} = (n+1)\ln 2]$ pak podilovym a srovnavacim, konverguje
Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right) \sin 2^n \tag{2.3}$$

$\left[|\sin 2^n| \le 1, \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right) \le \pi \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$ pak srovnavacim, konverguje

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^{n^2}}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3}. []
Určte sdoučet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

aby chyba byla menší než 10^{-2}. []

.

Kapitola 3

NEURČITÝ INTEGRÁL

3.1 Základní pojmy.

Definice 3.1.1 Řekneme, že funkce F je *zobecněná primitivní funkce* k funkci f v intervalu (a, b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$, jestliže platí

(a) F je spojitá na (a, b),

(b) $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$ s výjimkou nejvýše spočetné podmnožiny M intervalu (a, b).

Poznámka 3.1.1 Funkce f přitom nemusí být definovaná na $L \subseteq M$. Každá konečná množina je nejvýše spočetná. Množina všech přirozených, celých resp. racionlálních čísel je nejvýše spočetná. Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je nejvýše spočetná.

Poznámka 3.1.2 V dalším budeme místo zobecněné primitivní funkce užívat stručnější označení – primitivní funkce.

Poznámka 3.1.3

(a) Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na otevřeném intervalu I. Potom funkce $F_c(x) = F(x)+c$, $x \in I$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je také primitivní funkcí k funkci f na intervalu I.

(b) Pro libovolný bod $x_0 \in I$ a každé $y_0 \in \mathbb{R}$ existuje jedna primitivní funkce F k funkci f na I, pro kterou platí $F(x_0) = y_0$ (graf funkce F prochází bodem $[x_0, y_0]$).

(c) Funkce F je spojitá na intervalu I.

Poznámka 3.1.4 Jsou-li F, G primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I, pak existuje takové číslo $c \in \mathbb{R}$, že platí $G(x) = F(x) + c$ na I. Množinu všech těchto primitivních funkcí obvykle nazýváme neurčitým integrálem funkce f na I a značíme jej $\int f(x)\,dx$.

Poznámka 3.1.5 V literatuře je možné se také setkat s definicí primitivních funkcí na obecnějších množinách, nežli jsou intervaly (např. sjednocení intervalů). Tato obecnější definice však má některé nevýhody (např. primitivní funkce se nemusí lišit o konstantu).

Věta 3.1.1 *Každá funkce spojitá na otevřeném intervalu I má na tomto intervalu primitivní funkci.*

Poznámka 3.1.6 Existují však i nespojité funkce, k nimž je možno nalézt primitivní funkce.

Věta 3.1.2 *Jestliže existují primitivní funkce k funkcím f a g na otevřeném intervalu I, pak platí*

$$\begin{aligned} \int cf(x)\,dx &= c\int f(x)\,dx, \\ \int \left(f(x)+g(x)\right)\,dx &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx, \end{aligned}$$

kde $c \neq 0$ je libovolná reálná konstanta.

Tabulkové integrály.

Z tabulky derivací dostáváme okamžitě tabulku primitivních funkcí. V následujících vzorcích je $c \in \mathbb{R}$ libovolná konstanta:

$$\begin{aligned}
\int x^n\,dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\
\int x^\alpha\,dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad x \in (0,\infty),\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1, \\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x| + c, \quad x \in (0,\infty) \text{ nebo } x \in (-\infty,0), \\
\int a^x\,dx &= \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1 \text{ je konstanta}, \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\int \cos x\,dx &= \sin x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx &= -\mathrm{cotg}\,x + c, \quad x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}, \\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \mathrm{tg}\,x + c, \quad x \in ((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2),\ k \in \mathbb{Z}, \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin x + c, \quad x \in (-1,1), \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \mathrm{arctg}\,x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\int \sinh x\,dx &= \cosh x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\int \cosh x\,dx &= \sinh x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx &= \mathrm{tgh} x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx &= -\mathrm{cotgh} x + c, \quad x \in (0,\infty) \text{ nebo } x \in (-\infty,0).
\end{aligned}$$

Poznámka 3.1.7 (k druhému vzorci v předešlé tabulce - možnost rozšíření integračních oborů) Je-li $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, $\alpha \neq -1$, p, q nesoudělná, pak

(a)

$$\text{je-li } \alpha > 0 \text{ a } \begin{cases} q \text{ sudé, pak } x \in (0, \infty), \\ q \text{ liché, pak } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

(b)

$$\text{je-li } \alpha < 0 \text{ a } \begin{cases} q \text{ sudé, pak } x \in (0, \infty), \\ q \text{ liché, pak } x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, \infty), \end{cases}$$

3.2 Základní integrační metody.

Věta 3.2.1 *(První substituční metoda.) Nechť funkce f má primitivní funkci F na otevřeném intervalu J. Nechť funkce φ zobrazuje otevřený interval I do J a má na intervalu I konečnou derivaci. Potom $F \circ \varphi$ je primitivní funkcí k funkci $(f \circ \varphi)\,\varphi'$ na intervalu I a platí*

$$\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt = F\left(\varphi(t)\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Věta 3.2.2 *(Druhá substituční metoda.) Nechť funkce φ zobrazuje otevřený interval I na interval J a nechť má konečnou derivaci $\varphi' \neq 0$ na I. Je-li G primitivní funkcí k funkci $(f \circ \varphi)\,\varphi'$ na I, pak funkce $G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní k f na J a platí*

$$\int f(x)\,dx = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt = G(t) + c = G\left(\varphi^{-1}(x)\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Věta 3.2.3 *(Metoda per partes.) Nechť funkce u, v mají spojité derivace na otevřeném intervalu I. Potom na I platí*

$$\int u(x)v'(x)\,dx + \int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

3.3 Integrace racionálních funkcí.

Jak již víme z teorie racionálních funkcí, můžeme zadanou ryzí racionální funkci rozložit na parciální zlomky tvaru

$$(I)\quad \frac{A}{(ax+b)^l} \qquad\qquad (II)\quad \frac{Bx+C}{(px^2+qx+r)^k}$$

kde k, $l \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, $p \neq 0$, $q^2 - 4pr < 0$, $A \neq 0$ a $B^2 + C^2 \neq 0$. Je zřejmé, že pro integraci parciálních zlomků typu (I) můžeme použít substituci $ax + b = t$, která převede tento typ na tabulkový integrál $\int t^{-l}\,dt$.

Integrace parciálních zlomků tvaru (*II*) je již trošku náročnější. Nejprve se budeme zabývat případem, kdy $k = 1$. Pak je vhodné upravit integrand na tvar

$$K\frac{f'(x)}{f(x)} + L\frac{1}{f(x)},$$

který již snadno integrujeme pomocí první substituční metody.

Zbývá nám integrace parciálních zlomků tvaru

$$\frac{Bx+C}{(px^2+qx+r)^k}, \qquad k > 1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Nejdříve upravíme integrand na tvar

$$K\frac{f'(x)}{\left(f(x)\right)^k}+L\frac{1}{\left(f(x)\right)^k}.$$

První sčítanec integrujeme podle první substituční metody, ve druhém sčítanci upravíme výraz $1/\left(f(x)\right)^k$ na tvar $1/\left(t^2+a^2\right)^k$ a primitivní funkci určíme užitím rekurentního vztahu

$$\int\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{k+1}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2ka^2}\left(\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^k}+(2k-1)\int\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^k}\,\mathrm{d}t\right).$$

3.4 Integrace goniometrických funkcí.

Zavedeme nejprve pojem polynomu n proměnných:

$$P(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\sum_{k_1=0}^{m_1}\sum_{k_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{k_n=0}^{m_n}a_{k_1k_2\ldots k_n}u_1^{k_1}u_2^{k_2}\ldots u_n^{k_n},$$

kde $n\in\mathbb{N}$, $a_{k_1k_2\ldots k_n}\in\mathbb{R}$, k_i, m_i jsou celá nezáporná čísla.

$$R(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\frac{P(u_1,u_2,\ldots,u_n)}{Q(u_1,u_2,\ldots,u_n)}$$

je racionální funkce n proměnných.

Rozlišíme tři základní typy integrálů.

3.4.1 Typ $\int R(\sin\,x,\cos\,x)\;\mathrm{d}x$.

Nechť

$$R(u,v)=\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$$

je racionální funkce dvou proměnných $u=\sin x$ a $v=\cos x$.

Integraci funkcí tohoto typu lze převést na integraci funkcí racionálních v proměnné t zavedením následujících substitucí:

1) Platí-li $R(-u,v)=-R(u,v)$, položíme $\cos\,x=t$.

2) Platí-li $R(u,-v)=-R(u,v)$, položíme $\sin\,x=t$.

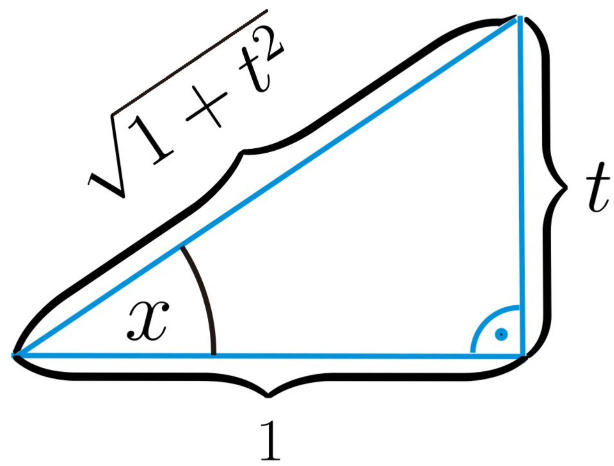
3) Platí-li $R(-u,-v)=R(u,v)$, položíme $\mathrm{tg}\,x=t$.

4) V ostatních případech položíme $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=t$.

Při zavedení substituce tg $x=t$ využijeme tyto vztahy (pro lehké zapamatování je můžeme získat z následujícího obrázku:)

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\qquad \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Při substituci tg $\frac{x}{2}=t$ dostaneme:



Obrázek 3.1: Goniometrická substituce $\operatorname{tg} x = t$.

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\
\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}.
\end{aligned}
$$

3.4.2 Typ $\int \sin\alpha x \sin\beta x \, \mathrm{d}x$.

Nechť α, $\beta \in \mathbb{R}$. K výpočtu integrálů

$$\int \sin\alpha x \sin\beta x \, dx, \quad \int \sin\alpha x \cos\beta x \, dx, \quad \int \cos\alpha x \cos\beta x \, dx.$$

použijeme vzorce

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha x \sin\beta x &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right], \\
\cos\alpha x \cos\beta x &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right], \\
\sin\alpha x \cos\beta x &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right].
\end{aligned}
$$

3.4.3 Typ $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$.

Nechť m, n jsou celá nezáporná a sudá čísla. Pro výpočet integrálu

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

použijeme vzorce

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x.$$

3.5 Integrace iracionálních funkcí.

Opět odlišíme dva základní typy integrálů iracionálních funkcí.

3.5.1 Typ $\int R\left(x, \sqrt[q_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[q_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[q_m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \, \mathrm{d}x$.

Nechť R je racionální funkce $m+1$ proměnných. Uvažujme funkci

$$R\left(x, \sqrt[q_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[q_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[q_m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right),$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, přičemž $ad - bc \neq 0$.

Integraci funkcí tohoto typu lze převést na integraci funkcí racionálních v proměnné t. Vyjdeme-li ze vztahu

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,$$

kde s je nejmenší společný násobek čísel q_1, q_2,...,q_m, dostaneme

$$x = \frac{dt^s - b}{a - ct^s}.$$

3.5.2 Typ $\int R(x, \sqrt{px^2 + qx + r}) \, \mathrm{d}x$.

Nechť

$$R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$$

je racionální funkce dvou proměnných u, v a p, q, $r \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$. Uvažujme integrál

$$\int R(x, \sqrt{px^2 + qx + r}) \, \mathrm{d}x$$

Pokud má polynom $px^2 + qx + r$

- dvojnásobný reálný kořen, pak jde o integraci racionální funkce;
- dva různé reálné kořeny, pak můžeme převést integrál na integrál typu

$$\int R\left(x, \sqrt[q_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[q_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[q_m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x;$$

- komplexní kořeny, pak tento případ snadno převedeme jednoduchými úpravami a lineární substitucí na následující tvar:

$$\int R(x, \sqrt{1 + x^2}) \, dx,$$

který dále můžeme počítat s použitím:

(a) Eulerovy substituce

$$x = \varphi(t) = \frac{t^2 - 1}{2t}, \qquad dx = \varphi'(t)dt = \frac{t^2 + 1}{2t^2}dt,$$

$$\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi'(t) \neq 0 \text{ na } (0, \infty)$$

$$t = \varphi^{-1}(x) = x + \sqrt{1 + x^2}, \qquad \varphi^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \infty),$$

která převede daný integrál na integrál z racionální funkce (substituce se někdy píše ve tvaru $\sqrt{1 + x^2} = t - x$);

(b) goniometrické substituce

$$x = \varphi(t) = \operatorname{tg} t, \qquad dx = \varphi'(t)dt = \frac{1}{\cos^2 t}dt,$$

$$\varphi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi'(t) \neq 0 \text{ na } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t = \varphi^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x, \qquad \varphi^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

která převede daný integrál na integrál z funkce $R(\cos t, \sin t)$;

(c) hyperbolické substituce

$$x = \varphi(t) = \sinh t, \qquad dx = \varphi'(t)dt = \cosh\, t\, dt,$$

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi'(t) \neq 0 \text{ na } \mathbb{R}$$

$$t = \varphi^{-1}(x) = \operatorname{arcsinh} x, \qquad \varphi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

nebo analogicky

$$x = \varphi(t) = \cosh t, \qquad dx = \varphi'(t)dt = \sinh\, t\, dt,$$

$$\varphi : (0, \infty) \to (1, \infty), \qquad \varphi'(t) \neq 0 \text{ na } (0, \infty)$$

$$t = \varphi^{-1}(x) = \operatorname{arccosh} t, \qquad \varphi^{-1} : (1, \infty) \to (0, \infty),$$

která převede daný integrál na integrál z funkce $R(\cosh t, \sinh t)$. Ve všech výše uvedených případech používáme Větu 3.2.2 (*Druhá substituční metoda*).

Integrály typu

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{px^2 + qx + r}}\, dx,$$

kde A, B, p, q, $r \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, $p \neq 0$, lze řešit výhodně tak, že je převedeme na součet integrálů

$$K \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\, \mathrm{d}x + L \int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\, \mathrm{d}x,$$

které již snadno vypočteme.

3.6 Integrace racionálních funkcí.

Jak již víme z teorie racionálních funkcí, můžeme zadanou ryzí racionální funkci rozložit na parciální zlomky tvaru

$$(I) \quad \frac{A}{(ax + b)^l} \qquad (II) \quad \frac{Bx + C}{(px^2 + qx + r)^k}$$

kde k, $l \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, $p \neq 0$, $q^2 - 4pr < 0$, $A \neq 0$ a $B^2 + C^2 \neq 0$. Je zřejmé, že pro integraci parciálních zlomků typu (I) můžeme použít substituci $ax + b = t$, která převede tento typ na tabulkový integrál $\int t^{-l}\, dt$.

Integrace parciálních zlomků tvaru (*II*) je již trošku náročnější. Nejprve se budeme zabývat případem, kdy $k = 1$. Pak je vhodné upravit integrand na tvar

$$K\frac{f'(x)}{f(x)} + L\frac{1}{f(x)},$$

který již snadno integrujeme pomocí první substituční metody.

Zbývá nám integrace parciálních zlomků tvaru

$$\frac{Bx + C}{(px^2 + qx + r)^k}, \qquad k > 1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Nejdříve upravíme integrand na tvar

$$K\frac{f'(x)}{(f(x))^k} + L\frac{1}{(f(x))^k}.$$

První sčítanec integrujeme podle první substituční metody, ve druhém sčítanci upravíme výraz $1/\left(f(x)\right)^k$ na tvar $1/\left(t^2 + a^2\right)^k$ a primitivní funkci určíme užitím rekurentního vztahu

$$\int \frac{1}{(t^2 + a^2)^{k+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2ka^2}\left(\frac{t}{(t^2 + a^2)^k} + (2k-1)\int \frac{1}{(t^2 + a^2)^k}\,\mathrm{d}t\right).$$

Nyní si tento rekurentní vztah odvodíme užitím metody per partes. Označme

$$\boxed{J_k = \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^k}\,\mathrm{d}t.}$$

$$\begin{aligned}
J_k &= \left|\begin{array}{rclrcl} u(x) &=& \dfrac{1}{(t^2+a^2)^k} & v'(t) &=& 1 \\ u'(x) &=& -\dfrac{2kt}{(t^2+a^2)^{k+1}} & v(t) &=& t \end{array}\right| \\
&= \frac{t}{(t^2 + a^2)^k} + 2k\int \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^{k+1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{t}{(t^2 + a^2)^k} + 2k\int \frac{(t^2 + a^2) - a^2}{(t^2 + a^2)^{k+1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{t}{(t^2 + a^2)^k} + 2k\int \frac{1}{(t^2 + a^2)^k}\,\mathrm{d}t - 2ka^2\int \frac{1}{(t^2 + a^2)^{k+1}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

a odtud dostáváme rovnici

$$\boxed{J_k = \frac{t}{(t^2 + a^2)^k} + 2kJ_k - 2ka^2 J_{k+1}.}$$

3.7 Integrace goniometrických funkcí.

Zavedeme nejprve pojem polynomu n proměnných:

$$P(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n},$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_{k_1 k_2 \dots k_n} \in \mathbb{R}$, k_i, m_i jsou celá nezáporná čísla.

$$R(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{P(u_1, u_2, \dots, u_n)}{Q(u_1, u_2, \dots, u_n)}$$

je racionální funkce n proměnných.

Rozlišíme tři základní typy integrálů.

3.7.1 Typ $\int R(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x$.

Nechť

$$R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$$

je racionální funkce dvou proměnných $u = \sin x$ a $v = \cos x$.

Integraci funkcí tohoto typu lze převést na integraci funkcí racionálních v proměnné t zavedením následujících substitucí:

1) Platí-li $R(-u, v) = -R(u, v)$, položíme $\cos x = t$.

2) Platí-li $R(u, -v) = -R(u, v)$, položíme $\sin x = t$.

3) Platí-li $R(-u, -v) = R(u, v)$, položíme $\mathrm{tg}\ x = t$.

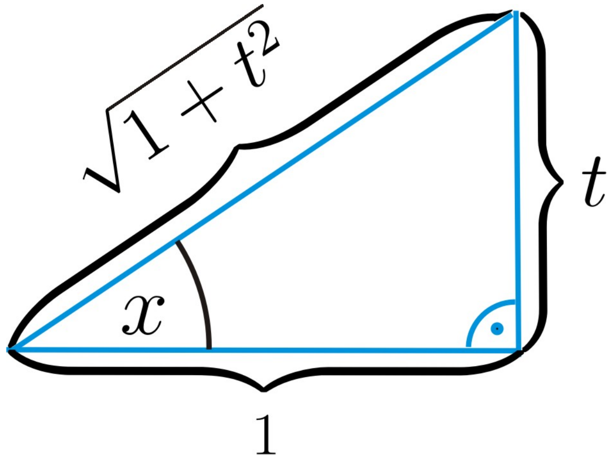
4) V ostatních případech položíme $\mathrm{tg}\ \frac{x}{2} = t$.

Při zavedení substituce $\mathrm{tg}\ x = t$ využijeme tyto vztahy (pro lehké zapamatování je můžeme získat z následujícího obrázku:)

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Při substituci $\mathrm{tg}\ \frac{x}{2} = t$ dostaneme:

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}. \end{aligned}$$



Obrázek 3.2: Goniometrická substituce $\operatorname{tg} x = t$.

3.7.2 Typ $\int \sin \alpha x \sin \beta x \; \mathrm{d}x$.

Nechť α, $\beta \in \mathbb{R}$. K výpočtu integrálů

$$\int \sin \alpha x \sin \beta x \, dx, \qquad \int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx, \qquad \int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx.$$

použijeme vzorce

$$\begin{aligned} \sin \alpha x \sin \beta x &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right], \\ \cos \alpha x \cos \beta x &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right], \\ \sin \alpha x \cos \beta x &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right]. \end{aligned}$$

3.7.3 Typ $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$.

Nechť m, n jsou celá nezáporná a sudá čísla. Pro výpočet integrálu

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

použijeme vzorce

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right), \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

3.8 Integrace iracionálních funkcí.

Opět odlišíme dva základní typy integrálů iracionálních funkcí.

3.8.1 Typ $\int R\left(x, \sqrt[q_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[q_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[q_m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$.

Nechť R je racionální funkce $m+1$ proměnných. Uvažujme funkci

$$R\left(x, \sqrt[q_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[q_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[q_m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right),$$

kde a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, přičemž $ad - bc \neq 0$.

Integraci funkcí tohoto typu lze převést na integraci funkcí racionálních v proměnné t. Vyjdeme-li ze vztahu

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,$$

kde s je nejmenší společný násobek čísel q_1, q_2,...,q_m, dostaneme

$$x = \frac{dt^s - b}{a - ct^s}.$$

3.8.2 Typ $\int R(x, \sqrt{px^2+qx+r})\,\mathrm{d}x$.

Nechť

$$R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$$

je racionální funkce dvou proměnných u, v a p, q, $r \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$. Uvažujme integrál

$$\int R(x, \sqrt{px^2+qx+r})\,\mathrm{d}x$$

Pokud má polynom $px^2 + qx + r$

- dvojnásobný reálný kořen, pak jde o integraci racionální funkce;
- dva různé reálné kořeny, pak můžeme převést integrál na integrál typu

$$\int R\left(x, \sqrt[q_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[q_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[q_m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x;$$

- komplexní kořeny, pak tento případ snadno převedeme jednoduchými úpravami a lineární substitucí na následující tvar:

$$\int R(x, \sqrt{1+x^2})\,dx,$$

  který dále můžeme počítat s použitím:

  (a) Eulerovy substituce

$$x = \varphi(t) = \frac{t^2-1}{2t}, \qquad dx = \varphi'(t)dt = \frac{t^2+1}{2t^2}dt,$$

$$\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi'(t) \neq 0 \text{ na } (0,\infty)$$

$$t = \varphi^{-1}(x) = x + \sqrt{1+x^2}, \qquad \varphi^{-1} : \mathbb{R} \to (0,\infty),$$

  která převede daný integrál na integrál z racionální funkce (substituce se někdy píše ve tvaru $\sqrt{1+x^2} = t - x$);

(b) goniometrické substituce

$$x = \varphi(t) = \operatorname{tg} t, \qquad dx = \varphi'(t)dt = \frac{1}{\cos^2 t}dt,$$

$$\varphi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi'(t) \neq 0 \text{ na } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t = \varphi^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x, \qquad \varphi^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

která převede daný integrál na integrál z funkce $R(\cos t, \sin t)$;

(c) hyperbolické substituce

$$x = \varphi(t) = \sinh t, \qquad dx = \varphi'(t)dt = \cosh\ t\, dt,$$

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi'(t) \neq 0 \text{ na } \mathbb{R}$$

$$t = \varphi^{-1}(x) = \operatorname{arcsinh} x, \qquad \varphi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

nebo analogicky

$$x = \varphi(t) = \cosh t, \qquad dx = \varphi'(t)dt = \sinh\ t\, dt,$$

$$\varphi : (0, \infty) \to (1, \infty), \qquad \varphi'(t) \neq 0 \text{ na } (0, \infty)$$

$$t = \varphi^{-1}(x) = \operatorname{arccosh} t, \qquad \varphi^{-1} : (1, \infty) \to (0, \infty),$$

která převede daný integrál na integrál z funkce $R(\cosh t, \sinh t)$. Ve všech výše uvedených případech používáme Větu 3.2.2 (*Druhá substituční metoda*).

Integrály typu

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{px^2 + qx + r}}\, dx,$$

kde A, B, p, q, $r \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, $p \neq 0$, lze řešit výhodně tak, že je převedeme na součet integrálů

$$K \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\, dx + L \int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\, dx,$$

které již snadno vypočteme.

Kapitola 4

URČITÝ INTEGRÁL

4.1 Newtonův integrál.

Historicky nejstarší je definice Newtonova integrálu, která je založena na pojmu primitivní funkce.

Definice 4.1.1 Je-li funkce F primitivní funkcí k funkci f v (a,b), kde $-\infty \le a < b \le \infty$, a existují-li vlastní (konečné) limity $\lim_{x\to a+} F(x)$, $\lim_{x\to b-} F(x)$, pak číslo

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$$

nazýváme *Newtonovým integrálem funkce f na intervalu* (a,b).
Množinu všech funkcí, které mají Newtonův integrál na intervalu (a,b), značíme $\mathcal{N}(a,b)$.

Poznámka 4.1.1

(a) Je-li funkce F spojitá v $[a,b]$, pak

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(b) Pokud známe primitivní funkci, Newtonův integrál podle předešlé definice snadno spočítáme. Dále si všimněme, že v předešlé definici nepožadujeme omezenost intervalu I ani ohraničenost integrované funkce.

4.2 Základní vlastnosti určitého Newtonova integrálu.

Základní vlastnosti určitého Newtonova integrálu jsou shrnuty v následující větě.

Věta 4.2.1 *Nechť $-\infty \le a < b \le \infty$.*

(a) Nechť funkce f a g mají Newtonův integrál na intervalu (a,b) (tj. $f,\ g \in \mathcal{N}(a,b)$). Pak platí

$$\int_a^b \Big(kf(x) + lg(x)\Big)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + l\int_a^b g(x)\,dx,$$

kde k, l jsou libovolná reálná čísla.

(b) *Nechť $a < c < b$. Pak $f \in \mathcal{N}(a,b)$ právě tehdy, když $f \in \mathcal{N}(a,c)$ a $f \in \mathcal{N}(c,b)$. Navíc platí*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

(c) *Nechť f, $g \in \mathcal{N}(a,b)$. Pak platí*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

je-li $0 \le f(x) \le g(x)$ všude, kde funkce f a g jsou spojité.

(d) *Jestliže $|f| \in \mathcal{N}(a,b)$, pak platí*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

(e) *Jestliže $|f(x)| \le M$ všude, kde funkce f je spojitá, $|f| \in \mathcal{N}(a,b)$ a čísla a, b jsou konečná, pak*

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \le M(b-a).$$

(f) *Jestliže je funkce f spojitá na $[a,b]$ a čísla a, b jsou konečná, pak existuje bod $\xi \in [a,b]$ tak, že*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

(g) *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a,b)$, pak platí*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

Poznámka 4.2.1 Newtonův integrál není absolutně integrovatelný!

Věta 4.2.2 *(Metoda per partes.) Nechť u, $v \in \mathcal{N}(a,b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$. Jsou-li funkce u a v spojité na (a,b) a mají zde derivaci s výjimkou nejvýše spočetné množiny bodů, pak platí*

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx,$$

mají-li alespoň dva ze tří výrazů konečnou hodnotu.

Poznámka 4.2.2 *Výrazem $[u(x)v(x)]_a^b$ rozumíme*

$$\lim_{x\to b-} u(x)v(x) - \lim_{x\to a+} u(x)v(x)$$

Věta 4.2.3 *(Věta o substituci.) Nechť* $-\infty \leq a < b \leq \infty$*, funkce* φ *je ryze monotonní, spojitá a má konečnou nenulovou derivaci na* (a, b) *s výjimkou nejvýše spočetné množiny bodů a funkce* f *je spojitá na intervalu* J *takovém, že* $\varphi((a, b)) \subseteq J$*. Pak platí*

$$\int\limits_{\varphi(a+)}^{\varphi(b-)} f(x)\, dx = \int\limits_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt,$$

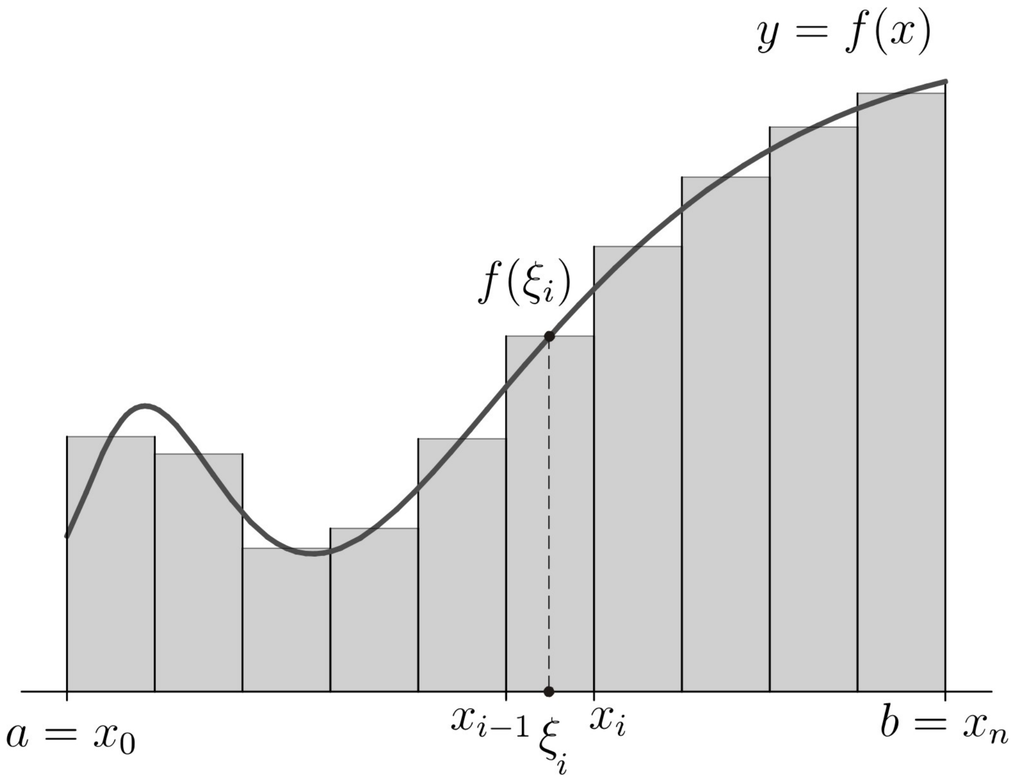
existuje-li jeden z integrálů. Zde $\varphi(a+) = \lim_{t\to a+} \varphi(t)$*,* $\varphi(b-) = \lim_{t\to b-} \varphi(t)$*.*

4.3 Riemannův integrál.

4.3.1 Definice Riemannova integrálu.

Nyní si zavedeme definici Riemannova integrálu, která je geometricky velmi názorná a lze ji využít jako základ pro přibližný (numerický) výpočet určitého integrálu a při odvozování fyzikálních veličin.

Uvažujme interval $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$ jsou konečná, reálná čísla a nechť $D_N = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\}$ je dělení intervalu $[a, b]$ s dělicími body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$. Každý interval $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$ nazýváme *částečným intervalem* dělení D_N.



Obrázek 4.1: Riemannův integralní součet.

Délku (míru) intervalu I_i definujeme $\mu(I_i) = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. Výraz $\nu(D_N) = \max_{i=1,2,\dots,N}\{\Delta x_i\}$ nazýváme normou dělení D_N.
Řekneme, že dělení D_M je zjemněním dělení D_N jestliže $D_N \subset D_M$.

Definice 4.3.1 Nechť f je ohraničená funkce na I, D_N dělení I s dělicími body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$. Přiřadíme dělení D_N a funkci f *dolní Riemannův integrální součet* definovaný vztahem

$$s(f, D_N) = \sum_{i=1}^{N} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{N} m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x \in I_i} f(x) \tag{4.1}$$

a *horní Riemannův integrální součet* definovaný vztahem

$$S(f, D_N) = \sum_{i=1}^{N} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{N} M_i \Delta x_i, \quad M_i = \sup_{x \in I_i} f(x) \tag{4.2}$$

Definice 4.3.2 Nechť f je ohraničená funkce na I. Definujme *dolní Riemannův integrál* pro funkci f definovaný vztahem

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = I^-(f) = \sup_D s(f,D) \tag{4.3}$$

a *horní Riemannův integrál* pro funkci f definovaný vztahem

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = I^+(f) = \inf_D S(f,D) \tag{4.4}$$

Definice 4.3.3 Řekneme, že funkce f je *Riemannovsky integrabilní* na I tehdy a jen tehdy jestliže je ohraničená na I a

$$I^-(f) = I^+(f) \tag{4.5}$$

V tomto případě se tato společná hodnota nazývá *Riemannův integrál* funkce f na I a značíme

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = I^-(f) = I^+(f) \tag{4.6}$$

Věta 4.3.1 *(test integrability) Nechť f je omezená funkce na intervalu I. Funkce f je Riemannovsky integrabilní na I tehdy a jen tehdy když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D tak, že*

$$S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon \tag{4.7}$$

Věta 4.3.2 *Nechť f je omezená funkce na intervalu $I = (a,b)$. Funkce f je Riemannovsky integrabilní na I tehdy a jen tehdy když pro každé $\varepsilon > 0$ existují spojité funkce u, v na I takové, že $v(x) \le f(x) \le u(x)$, $\forall\, x \in I$ a*

$$\int\limits_a^b (u(x) - v(x))\; dx \le \varepsilon \tag{4.8}$$

Poznámka 4.3.1 Nechť f je omezená funkce na intervalu I a D_N je ekvidistantní dělení, tj. $x_i = a + (b-a)i/2^N$, $i = 0, 1, \dots, 2^N$. Definujme

$$m_i = \inf_{x\in I_i} f(x), \qquad M_i = \sup_{x\in I_i} f(x)$$

Definujme

$$J^-(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{2^N} \sum_{i=1}^{2^N} m_i, \qquad J^+(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{2^N} \sum_{i=1}^{2^N} M_i$$

Pak f je Riemannovsky integrabilní na I tehdy a jen tehdy když $J^-(f) = J^+(f)$.

Poznámka 4.3.2 Počítat Riemannův integrál přímo z definice by bylo ovšem velice pracné. Je tedy zřejmé, že počítáme Riemannův integrál pomocí Newtonova.

Poznámka 4.3.3 Všimněte si, že při konstrukci Riemannova integrálu jsme předpokládali, že jak funkce f tak i interval $[a,b]$ jsou ohraničené.

4.3.2 Základní vlastnosti Riemannova integrálu.

Poznámka 4.3.4 Množinu všech Riemannovsky integrovatelných funkcí na $[a,b]$ značíme $\mathcal{R}(a,b)$.

Základní vlastnosti Riemannova integrálu jsou shrnuty v následující větě.

Věta 4.3.3 *Nechť f, $g \in \mathcal{R}(a,b)$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak*

(a) $f+g \in \mathcal{R}(a,b)$ *a* $\lambda f \in \mathcal{R}(a,b)$ *pro každé* $\lambda \in \mathbb{R}$

(b) $fg \in \mathcal{R}(a,b)$

(c) jestliže $1/g$ *je omezená na* $[a,b]$*, pak* $f/g \in \mathcal{R}(a,b)$

(d) $|f| \in \mathcal{R}(a,b)$,

(e) $\min_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}$, $\max_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\} \in \mathcal{R}(a,b)$,

(f) Nechť $a<c<b$*. Pak* $f \in \mathcal{R}(a,b)$ *právě tehdy, když* $f \in \mathcal{R}(a,c)$ *a* $f \in \mathcal{R}(c,b)$*. Navíc platí*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

(g) jestliže $f(x) \le g(x)$ *pro kažé* $x \in [a,b]$ *pak*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

(h) platí

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx,$$

(k) jestliže $f(x) \ge 0$ *pro kažé* $x \in [a,b]$ *a* $a \le c \le d \le b$ *pak*

$$\int\limits_c^d f(x)\,dx \le \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

4.3.3 Třídy Riemannovsky integrovatelných funkcí.

Definice 4.3.4 Řekneme, že funkce f je *stejnoměrně spojitá* na I, jestliže pro každé $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ tak, že pro každé x, $y \in I$, $|x-y|<\delta$ platí

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Tvrzení 4.3.1 *Každá spojitá funkce na* $[a,b]$ *je stejnoměrně spojitá na* $[a,b]$.

Věta 4.3.4 *(Riemann) Každá spojitá funkce na* $[a,b]$ *patří do* $\mathcal{R}(a,b)$.

Věta 4.3.5 *(Riemann) Nechť* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *je omezená a spojitá s výjimkou nejvýše konečného počtu bodů z* (a,b)*. Pak* $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

Věta 4.3.6 *Každá monotonní funkce na* $[a,b]$ *patří do* $\mathcal{R}(a,b)$.

Věta 4.3.7 *Nechť* $f \in C([a,b])$*. Pak Riemannův i Newtonův integrál existují a jsou si rovny.*

4.3.4 Fundamentální věta integrálního počtu.

Definice 4.3.5 Řekneme, že funkce f je na inervalu I *Lipšicovsky spojitá*, jestliže existuje konstanta $K \geq 0$ tak, že platí

$$|f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|\,, \quad \forall\, x, y \in I \tag{4.9}$$

Definice 4.3.6 Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Pro každé $x \in [a,b]$ definujeme novou funkci

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \forall\, x \in [a,b] \tag{4.10}$$

Tvrzení 4.3.2 *Nechť F je funkce z Definice 4.3.5. Pak $F \in C^{0,1}\left([a,b]\right)$.*

Věta 4.3.8 *Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b)$ a F je definovaná vztahem (4.10).*

(i) Jestliže je funkce f spojitá v bodě $x_0 \in [a,b]$, pak F je diferencovatelná v x_0 a $F'(x_0) = f(x_0)$.

(ii) Jestliže je funkce f spojitá a $G(x)$, $x \in [a,b]$ je jakákoliv jiná diferencovatelná funkce na $[a,b]$ taková, že $G'(x) = f(x)$ pro každé $x \in [a,b]$, pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

Důsledek 4.3.1 *Jestliže $f \in C^1\left([a,b]\right)$ pak*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$$

Jestliže funkce $g \in C\left([a,b]\right)$, pak je funkce $x \mapsto \int_a^x g(t)\,dt$, $x \in [a,b]$ diferencovatelná na $[a,b]$ a

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt = g(x), \quad \forall\, x \in [a,b]$$

Věta 4.3.9 *(Věta o střední hodnotě) Nechť f je spojitá na $[a,b]$, pak existuje $\xi \in [a,b]$ tak, že*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Příklad 4.3.1 Definujme $\ln x$, $x > 0$ předpisem

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

Kapitola 5

APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

5.1 Geometrické aplikace určitého integrálu.

5.1.1 Plošný obsah rovinného obrazce.

- Plošný obsah části roviny
$$A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \, : \, a < x < b, f_1(x) < y < f_2(x)\},$$
kde f_1, f_2 jsou spojité funkce takové, že $f_1(x) \leq f_2(x)$, pro každé $x \in (a,b)$, se spočte podle vzorce
$$P(A) = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)] \; dx$$
Podobně, plošný obsah části roviny
$$B = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \, : \, c < y < d, g_1(y) < x < g_2(y)\},$$
kde g_1, g_2 jsou spojité funkce takové, že $g_1(y) \leq g_2(y)$ pro každé $y \in (c,d)$, se spočte podle vzorce
$$P(B) = \int\limits_c^d [g_2(y) - g_1(y)] \; dy.$$

5.1.2 Objem rotačního tělesa.

Nechť $-\infty < a < b < \infty$ a nechť f je spojitá na $[a,b]$. Uvažujme těleso vzniklé rotací plochy
$$P = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, 0 < y < |f(x)|\right\}$$
kolem osy x.
Platí
$$V_x = \pi \int\limits_a^b f^2(x) \, dx$$

Podobně lze odvodit vzorec pro výpočet objemu V_y tělesa vzniklého rotací plochy $P = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, 0 < x < |g(y)|\}$ kolem osy y, kde g je spojitá na (c,d). Platí
$$V_y = \pi \int\limits_c^d g^2(y) \, dy$$

5.1.3 Obsah rotační plochy.

(a) Rotací plochy $P = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, 0 < y < |f(x)|\}$ (f' konečná na (a,b)) kolem osy x, resp. rotací plochy $P = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, 0 < x < |g(y)|\}$ (g' konečná na (c,d)) kolem osy y.

Platí

$$P_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \quad P_y = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy,$$

5.1.4 Délka křivky.

Nechť je dán oblouk $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, $[x,y] \in \gamma$, který má parametrické rovnice

$$[x,y] = \Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t)), \quad t \in [a,b].$$

My nepotřebujeme žádnou teorii míry k definici délky křivky v $\mathbb{R}$. Definujme dělení D_N intervalu $I = [a,b]$ s dělicími body $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = b$ a počítejme

$$\sum_{i=1}^{N} \|\Phi(t_{i-1}) - \Phi(t_i)\| = \sum_{i=1}^{N} \|[\varphi(t_{i-1}), \psi(t_{i-1})] - [\varphi(t_i), \psi(t_i)]\|$$

a definujme *délku křivky* jako

$$L(\gamma) = \sup_{D_N} \sum_{i=1}^{N} \|[\varphi(t_{i-1}), \psi(t_{i-1})] - [\varphi(t_i), \psi(t_i)]\| < \infty$$

Pak řekneme, že křivka γ je *rektifikovatelná*.

Nechť je nyní dán oblouk $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ parametrickými rovnicemi

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [a,b]$$

Pro $i = 1, 2, \ldots, N$ máme z Lagrangeovy věty

$$\begin{aligned} \|(\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i), \psi(t_{i-1}) - \psi(t_i))\| &= \sqrt{(\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i-1}) - \psi(t_i))^2} \\ &= \sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\eta_i))^2}\Delta t_i \end{aligned} \tag{5.1}$$

kde ξ_i, $\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Protože funkce φ a ψ mají spojité derivace existuje $K > 0$ tak, že $|\varphi'(t)|$, $|\psi'(t)| \leq K$ pro každé $t \in [a,b]$.

$$L(\gamma, D_N) \leq \sum_{1}^{N} \sqrt{K^2 + K^2}\Delta t_i \leq \sqrt{2}K(b-a)$$

Dělení D_N bylo libovolné a proto existuje $\sup_D L(\gamma, D)$.

V případě parametrických rovnic $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a,b]$, je tedy délka křivky dána vztahem

$$L = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt,$$

a ve speciálních případech, je-li dána křivka předpisem $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ a derivace f' je konečná na (a, b), pak platí

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

nebo je-li dána křivka předpisem $x = g(y)$, $y \in [c, d]$ a derivace g' je konečná na (c, d), pak platí

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$

5.2 Pojem křivky v rovině.

Definice 5.2.1 Množinu $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ nazveme *křivkou v rovině*, jestliže existuje spojité zobrazení Φ intervalu $[a, b]$ na množinu γ takové, že platí:

1) Zobrazení Φ je prosté s výjimkou konečně mnoha bodů.
2) Zobrazení Φ je po částech třídy C^1 na $[a, b]$, tj. Φ' je spojitá s výjimkou konečně mnoha bodů, v nichž existují jednostranné derivace, které mohou být různé.
3) Φ' má až na konečně mnoho bodů nenulovou hodnotu v každém bodě intervalu $[a, b]$.

Zobrazení pak Φ nazýváme *parametrizací* křivky γ.

Nechť $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že bod C je *k-násobným* bodem křivky γ, jestliže existuje právě k různých hodnot parametru $t_1, \ldots, t_k \in [a, b]$ takových, že $C = \Phi(t_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$. Křivka γ se nazývá *jednoduchá*, když nemá vícenásobné body.

Křivka γ se nazývá *uzavřená*, jestliže $\Phi(a) = \Phi(b)$. Uzavřenou křivku nazveme *jednoduchou*, jestliže nemá žádný vícenásobný bod kromě dvojnásobného bodu $\Phi(a)$.

Je-li $I_1, I_2, \ldots, I_n$ dělení intervalu $[a, b]$, pak obrazy dělicích intervalů $\Phi(I_1), \Phi(I_2), \ldots, \Phi(I_n)$ jsou opět křivky. Posloupnost těchto křivek nazveme *dělením křivky* γ.

Definice 5.2.2 Je-li parametrizace Φ křivky γ prosté zobrazení a třídy C^1 na celém intervalu $[a, b]$ a má přitom nenulovou derivaci (v bodech a, b uvažujeme jednostranné derivace) v každém bodě intervalu $[a, b]$, nazýváme γ *obloukem* a zobrazení Φ jeho parametrizací.

Oblouk γ je *sjednocením* podoblouků $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, jestliže $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_n$ a oblouky γ_i, γ_j, $i \neq j$, mají společné nejvýše krajní body.

Poznámka 5.2.1 V technických aplikacích se často křivka γ popisuje buď vektorovou rovnicí

$$\gamma : \vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b],$$

nebo parametrickými rovnicemi

$$\gamma : x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \quad t \in [a, b]$$

Transformace parametru. Nechť je dán oblouk γ s parametrizací $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$. Nechť funkce g zobrazuje interval J na interval I a $g \in C^1$, $g' \neq 0$ na J. Zobrazení

$$\Psi = \Phi \circ g : \; J \to \mathbb{R}^n$$

je rovněž parametrizací oblouku γ.

Je-li funkce g rostoucí říkáme, že parametrizace Φ a Ψ jsou *souhlasné parametrizace.*

Orientace oblouku. Nechť je dán oblouk γ s parametrizací $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$. Na oblouku γ zavedeme relaci $\prec$

$$M_1, M_2 \in \gamma : M_1 \prec M_2 \;\Leftrightarrow\; t_1 = \Phi^{-1}(M_1) < t_2 = \Phi^{-1}(M_2)$$

která je relací uspořádání na γ.

O tomto uspořádání řekneme, že určuje *orientaci* oblouku γ a oblouk s tímto uspořádáním nazveme *orientovaným obloukem.* O parametrizaci Φ řekneme, že *souhlasí s orientací* γ.

Příklady křivek.

Elipsa

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, \quad a,b>0$$
$$\Phi(t)=(x_0+a\cos\, t, y_0+b\sin\, t), \quad t\in[0,2\pi]$$

Asteroida

$$x^{2/3}+y^{2/3}-a^{2/3}=0, \quad a>0$$
$$\Phi(t)=(a\cos^3\, t, a\sin^3\, t), \quad t\in[0,2\pi]$$

Cykloida

$$x=a\arccos\frac{a-y}{a}-\sqrt{2ay-y^2}, \quad y\in[0,2a],\ a>0$$
$$\Phi(t)=(a(t-\sin\, t), a(1-\cos\, t)), \quad t\in[0,2\pi]$$

Kapitola 6

DIFERENCIÁLNÍ POČET VÍCE PROMĚNNÝCH

6.1 Základní pojmy

Metrika, metrický prostor, pojmy topologie

Definice 6.1.1 Nechť $M \neq \emptyset$. Zobrazení $\varrho : M \times M \to [0, \infty)$ se nazývá metrika (vzdálenost) na M, jestliže pro každé x, y, $z \in M$ platí:

- $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
- $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, x)$. Množina M spolu s metrikou ϱ se nazývá metrický prostor a značí se (M, ϱ).

Příklad 6.1.1

- *Množina $\mathbb{E}_1$ je metrický prostor.*
$$d(x, y) = |x - y|$$
,
- *Množina $\mathbb{E}_n$ je metrický prostor. Zobrazení $d : \mathbb{E}_n \times \mathbb{E}_n \to [0, \infty)$ definované předpisem*
$$d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$
kde $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{E}_n$ se nazývá Euklidovská metrika.
- *Jiné metriky jsou*
$$d(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|,$$
$$d(X, Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\}.$$

Euklidovskou metrikou je definovaná norma na $\mathbb{E}_n$ vztahem

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Definice 6.1.2

- *Otevřenou koulí* o středu v bodě $A \in \mathbb{E}_n$ a poloměru $\delta > 0$ nazýváme množinu

$$O_\delta(A) = \{X \in \mathbb{E}_n : \|X - A\| < \delta\}$$

- *Okolím bodu* $A \in \mathbb{E}_n$ nazýváme libovolnou množinu U takovou, že existuje $O_\delta(A) \subset U$.
- Bod $A \in \Omega \subset \mathbb{E}_n$ nazveme *vnitřním bodem* množiny Ω jestliže existuje okolí $O_\delta(A)$ tak, že $O_\delta(A) \subset \Omega$.
- Množinu $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ nazveme *otevřenou* jestliže každý bod $x \in \Omega$ je vnitřním bodem množiny Ω.
- *Vnitřkem* množiny $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny Ω a značíme $\mathrm{Int}\Omega$.
- Množinu $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ nazveme *uzavřenou* jestliže je doplňkem otevřené množiny v $\mathbb{E}_n$.
- Bod A nazveme *hraničním bodem* množiny $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ jestliže pro každé $O_\delta(A)$ platí $O_\delta(A) \cap \Omega \neq \emptyset$ a $O_\delta(A) \cap (\mathbb{E}_n \setminus \Omega) \neq \emptyset$. Hranici množiny Ω značíme $\partial\Omega$.
- Množinu $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ nazveme *ohraničenou* jestliže existuje $O_\delta(A)$ tak, že platí $\Omega \subset O_\delta(A)$.
- Množinu $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ nazveme *konvexní* jestliže pro každou dvojici bodů $X, Y \in \Omega$ platí $\lambda X + (1-\lambda)Y \in \Omega$ pro každé $\lambda \in [0, 1]$.
- Množinu $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ nazveme *segmentově souvislou* jestliže každou dvojici bodů z Ω můžeme spojit lomenou čarou, která celá leží v Ω.
- Množinu $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ nazveme *oblastí* jestliže je otevřená a segmentově souvislá.

Tvrzení 6.1.1 *Nechť P je metrický prostor. Pak*

(i) $\emptyset$ a P jsou otevřené,

(ii) nechť $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je systém otevřených množin, pak $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ je otevřená.

Tvrzení 6.1.2 *Množina Ω je otevřená tehdy a jen tehdy jestliže je prázdná, nebo je sjednocením otevřených koulí.*

Důsledek 6.1.1 *Otevřené koule jsou otevřené množiny.*

Definice 6.1.3 Nechť $\Omega \subset \mathbb{E}_n$, $\Omega \notin \emptyset$. Zobrazení $f : \Omega \to \mathbb{E}$ se nazývá *funkce n - proměnných* na Ω.

Definice 6.1.4 Nechť $\Omega \subset \mathbb{E}_n$, $\Omega \notin \emptyset$. *Vektorovou funkcí n* - proměnných nazýváme zobrazení $f : \Omega \to \mathbb{E}_m$, tj. $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$.

Posloupnost bodů $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ v $\mathbb{E}_n$.

Definice 6.1.5 Řekneme, že posloupnost $\{X_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{E}_n$ má limitu $X \in \mathbb{E}_n$, jestliže platí

$$\lim_{k\to\infty} \|X_k - X\| = 0$$

Poznámka $X_k = [x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k]$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$

$$\lim_{k\to\infty} \|X_k - X\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{k\to\infty} \left|x_j^k - x_j\right| = 0 \quad \forall\, j = 1, 2, \dots, n$$

Zavedeme nejprve pojem polynomu n proměnných v $\mathbb{E}_n$:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_{k_1 k_2 \dots k_n} \in \mathbb{R}$, k_i, m_i jsou celá nezáporná čísla.

Racionální funkce n proměnných je podíl dvou polynomů

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{P(x_1, x_2, \dots, x_n)}{Q(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

6.2 Spojitost a limita

6.2.1 Spojitost

Definice 6.2.1 (Heineho definice spojitosti) Nechť $M \subset \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{E}_n$. O funkci f řekneme, že je *spojitá* v bodě $A \in M$ vzhledem k M, jestliže pro každou posloupnost $\{X_k\}_{k=1}^{\infty} \subset M$ platí

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} f(X_k) = f(A)$$

Někdy se stručně píše $X_k \to A \Longrightarrow f(X_k) \to f(A)$. Řekneme, že funkce f je je spojitá na množině M, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in M$ vzhledem k M.

Definice 2. Nechť $M \subset \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{E}_n$. O vektorové funkci $f : M \to \mathbb{E}_m$ řekneme, že je *spojitá na množině* M, jestliže je každá složka f_i, $i = 1, 2, \dots, m$ spojitá na M.

Věta 6.2.1 *Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $A \in \Omega \subset \mathbb{E}_n$. Pak také funkce $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g (za předpokladu, že $g(A) \neq 0$) a $|f|$ jsou spojité v bodě A.*

Poznámka Spojitost $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g a $|f|$ na množině.

Věta 6.2.2 *Nechť funkce g je spojitá v bodě $A \in M \subset \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{E}_n$ vzhledem k M, $g(M) \subset N \subset \mathbb{E}_m$ a funkce $f : N \to \mathbb{E}$ je spojitá v bodě $B = g(A)$ vzhledem k N. Pak složená funkce $h = f \circ g$ je spojitá v bodě A vzhledem k M.*

6.2.2 Limita

Definujme $\overline{\mathbb{E}} = \mathbb{E} \cup \{\pm\infty\}$.

Definice 3. Nechť $\Omega \subset \mathbb{E}_n$. Říkáme, že bod $A \in \mathbb{E}_n$ je *bodem dotyku* (*bodem akumulace*) množiny Ω, jestliže pro každou kouli $B_\delta(A)$ platí

$$B_\delta(A) \cap (\Omega \setminus \{A\}) \neq \emptyset$$

Definice 4. Nechť $\Omega \subset \mathbb{E}_n$, $X_0 \in \mathbb{E}_n$ je bodem dotyku množiny Ω a $f : \Omega \setminus \{X_0\} \to \mathbb{E}$ je daná funkce. Říkáme, že $L \in \overline{\mathbb{E}}$ je *limita funkce* f v bodě X_0, jestliže pro každou posloupnost $\{X_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \Omega \setminus \{X_0\}$, platí

$$\lim_{k\to\infty} X_k = X_0 \;\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty} f(X_k) = L$$

Zapisujeme

$$\lim_{X\in\Omega, X\to X_0} f(X) = L.$$

Věta 6.2.3 *Nechť $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ a bod $X_0 \in \mathbb{E}_n$ je bodem dotyku množiny Ω a f, $g : \Omega \to \mathbb{E}$ jsou dané funkce. Předpokládejme, že existují limity*

$$\lim_{X\in\Omega, X\to X_0} f(X) \quad a \quad \lim_{X\in\Omega, X\to X_0} g(X).$$

Pak existují také limity

$$\begin{aligned} \lim_{X\in\Omega, X\to X_0} (f(X) \pm g(X)) &= \lim_{X\in\Omega, X\to X_0} f(X) \pm \lim_{X\in\Omega, X\to X_0} g(X) \\ \lim_{X\in\Omega, X\to X_0} (f(X) g(X)) &= \lim_{X\in\Omega, X\to X_0} f(X) \lim_{X\in\Omega, X\to X_0} g(X) \\ \lim_{X\in\Omega, X\to X_0} \frac{f(X)}{g(X)} &= \frac{\lim_{X\in\Omega, X\to X_0} f(X)}{\lim_{X\in\Omega, X\to X_0} g(X)} \end{aligned}$$

pokud mají předešlé výrazy smysl.

Věta 6.2.4 *Nechť $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ a bod $X_0 \in \mathbb{E}_n$ je bodem dotyku množiny Ω a f, $g : \Omega \to \mathbb{E}$, $f : g(\Omega) \to \mathbb{E}$, jsou dané funkce. Nechť $g(X_0)$ je bodem dotyku množiny $g(\Omega)$.*

- $\lim_{Y\in g(\Omega), Y\to Y_0} f(Y) = L$
- $\lim_{X\in\Omega, X\to X_0} g(X) = Y_0$
- $g(X_0) = Y_0$ *nebo* $g(X) \neq Y_0, \quad \forall\, X \in \Omega, X \neq X_0$

pak

$$\lim_{X\in\Omega, X\to X_0} f\,(g(X)) = L$$

Definice 5. Nechť $\Omega \subset \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{E}_n$ O vektorové funkci $f : \Omega \to \mathbb{E}_m$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ řekneme, že má limitu v bodě $X_0 \in \mathbb{E}_n$, jestliže každá složka f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ má limitu $L_i \in \mathbb{E}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ v bodě X_0 ve smyslu Definice 4.

6.3 Derivace ve směru, parciální derivace, diferenciál funkce

6.3.1 Derivace ve směru

Označme

$$\varphi_u(t) = f(A + tu)$$

pro $A = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathbb{E}_n$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ a $t \in \mathbb{R}$.

Definice 1. Nechť f je definovaná na nějakém okolí $U_\delta(A)$ bodu $A \in \mathbb{E}_n$, $u \in \mathbb{R}^n$. Jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(A + tu) - f(A)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_u(t) - \varphi_u(0)}{t} \tag{6.1}$$

pak říkáme, že funkce f má v bodě A *derivaci ve směru vektoru* u tj. φ_u je diferencovatelná v 0. Číslo $\varphi_u'(0)$ se nazývá derivací funkce f v bodě A ve směru u a označuje se

$$\frac{\partial f}{\partial u}(A), \qquad D_u f(A), \qquad f_u(A).$$

6.3.2 Parciální derivace

Definice 2. Nechť f je definovaná na nějakém okolí $U_\delta(A)$ bodu $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{E}_2$. Jestliže existují derivace ve směru vektoru $e_1 = (1, 0)$ ($e_2 = (0, 1)$)

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \tag{6.2}$$

$$\left(\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} \right)$$

pak říkáme, že funkce f je v bodě A diferencovatelná a limitu nazveme *první parciální derivací* funkce f podle proměnné x (podle proměnné y) v bodě A a značíme $f_x'(A)$ ($f_y'(A)$).

Poznámka Jiné značení parciálních derivací

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f(A)}{\partial y}.$$

Věta 6.3.1 *Nechť f a g jsou dané funkce proměnné $X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{E}_n$. Pak platí*

$$(f(X) \pm g(X))_{x_i}' = f_{x_i}'(X) \pm g_{x_i}'(X),$$

$$(f(X) \cdot g(X))_{x_i}' = f_{x_i}'(X) g(X) + f(X) g_{x_i}'(X),$$

$$\left(\frac{f(X)}{g(X)} \right)_{x_i}' = \frac{f_{x_i}'(X) g(X) - f(X) g_{x_i}'(X)}{g^2(X)},$$

$i = 1, 2, \dots, n$ v každém bodě pro který má pravá strana smysl.

Nechť f je funkce jedné proměnné a g je funkce proměnných $X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{E}_n$. Pak platí

$$(f(g(X)))_{x_i}' = f'(g(X))\, g_{x_i}'(X), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

v každém bodě pro který má pravá strana smysl.

Poznámka Množinu všech funkcí na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{E}_2$ takových, že f_x', $f_y' \in C(\Omega)$ značíme $C^1(\Omega)$.

Parciální derivace vyššího řádu

Poznámka Parciální derivace druhého řádu značíme

$$f''_{xx}(A), \quad f''_{xy}(A), \quad f''_{yy}(A)$$

Jiné značení parciální derivací druhého řádu

$$\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2}.$$

Poznámka Množinu všech funkcí na otevřené množineně $\Omega \subset \mathbb{E}_2$ takových, že f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, $f''_{yy} \in C(\Omega)$ značíme $C^2(\Omega)$.

Věta 6.3.2 *(Schwartz) Nechť $\Omega \subset \mathbb{E}_2$ je otevřená a $A = [x_0, y_0] \in \Omega$. Jestliže existují*

$$f''_{xy} \quad f''_{yx}$$

v jistém okolí bodu A a jsou spojité v bodě A, pak

$$f''_{xy}(A) = f''_{yx}(A)$$

6.3.3 Diferenciál funkce

Věta 6.3.3 *(Rieszova věta) Nechť V_n je prostor se skalárním součinem. Ke každému $L \in V'_n$ existuje jediný vektor x_L tak, že*

$$L(h) = (h|x_L), \quad \forall\, h \in V_n$$

Definice 3. Nechť f je funkce na $\Omega \subset \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{E}_n$ a $A \in \Omega$ je vnitřní bod množiny Ω. Říkáme, že funkce f je v bodě A *diferencovatelná* jestliže existuje lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (závislé na A) takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(A+h) - f(A) - L(h)}{\|h\|} = 0 \tag{6.3}$$

Lineární zobrazení L nazýváme *diferenciál* (*tečné zobrazení*) funkce f v bodě A. Řekneme, že funkce f je diferencovatelná na Ω jestliže je diferencovatelná v každém bodě množiny Ω.

Poznámka Značíme

$$df_A, \qquad df(A).$$

Gradient

K diferenciálu funkce f v bodě A můžeme asociovat jediný vektor z $\mathbb{R}^n$ (v důsledku Rieszovy věty - Věta 6.3.3), který nazýváme *gradientem* funkce f v bodě A a označuje se $\nabla f(A)$ (někdy $\mathrm{grad} f(A)$).

Můžeme tedy psát

$$df_A(h) = (\nabla f(A)|h)$$

Poznámka

$$\ker df_A = (\nabla f(A))^{\perp}$$

Poznámka Funkce z předešlého příkladu nemá derivaci ve směru v případě, že pro vektor $h = (h_1 h_2)$ platí $h_1 \neq 0 \ \wedge \ h_2 \neq 0$.

Věta **6.3.4** *Nechť funkce $f : \Omega \to \mathbb{E}$, $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ a A je vnitřní bod Ω. Jestliže f je v bodě A diferencovatelná, pak*

(i) f je v bodě A spojitá,

(ii) f má derivaci v bodě A v každém směru a platí

$$\frac{\partial f}{\partial v}(A) = df_A(v), \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^n$$

Důsledek **6.3.1** *Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty, pak*

(i) $df_A : v \to \frac{\partial f}{\partial v}(A)$ je lineární,

(ii) jestliže diferenciál existuje, je jediný.

Věta **6.3.5** *Nechť funkce $f : B_\delta(A) \to \mathbb{E}$, $B_\delta(A) \subset \mathbb{E}_n$. Předpokládejme že všechny parciální derivace prvního řádu existují v každém bodě $B_\delta(A)$ a jsou spojité v bodě A. Pak f je v bodě A diferencovatelná.*

Cauchyova nerovnost

$$\left|\frac{\partial f}{\partial h}(A)\right| = |(\nabla f(A)|h)| \leq \|h\| \, \|\nabla f(A)\||$$

a jestliže $\nabla f(A) \neq o$ rovnost v předešlém platí tehdy a jen tehdy, když $h = c\nabla f(A)$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

Tvrzení **6.3.1** *Nechť funkce $f : \Omega \to \mathbb{E}$, $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ a A je vnitřní bod Ω. Předpokládejme, že funkce f je v bodě A diferencovatelná a $\nabla f(A) \neq o$. Pak směr největšího spádu v bodě A mezi všemi směry h takovými, že $\|h\| = 1$ je ve směru $\nabla f(A)/\|\nabla f(A)\|$.*

Jacobiho matice

Jestliže je f v bodě A difererencovatelná definujme matici

$$Df(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(A) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \end{pmatrix}$$

kterou nazýváme *Jacobiho maticí* funkce f v bodě A.

Jelikož $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$, pak vzhledem k linearitě df_A máme

$$df_A(h) = \sum_{i=1}^n df_A(e_i)h_i = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = Df(A)h^T$$

Věta **6.3.6** *Nechť $f, g : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}$ jsou dvě diferencovatelná zobrazení ve vnitřním bodě A množiny $\Omega \subset \mathbb{E}_n$. Pak platí*

$$D(f \pm g)(A) = Df(A) \pm Dg(A),$$

$$D(f \cdot g)(A) = Df(A)g(A) + f(A)Dg(A),$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(A) = \frac{Df(A)g(A) - f(A)Dg(A)}{g^2(A)}, \quad g(A) \neq 0$$

Tečná rovina

Graf funkce $f : \Omega \to \mathbb{E}$, $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ je podmnožina $\mathbb{E}_{n+1}$ definovaná

$$Gr_f = \{[X, y] \in \mathbb{E}_n \times \mathbb{E} : X \in \Omega, y = f(X)\}$$

Tečná rovina

$$\{[X, y] \in \mathbb{E}_n \times \mathbb{E} : y = f(A) + (\nabla f(A)|(X - A))\}$$

Pro $n = 1$, $A = a$ máme rovnici tečné přímky

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Pro $n = 2$, $A = [a, b]$ máme rovnici tečné roviny

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) = f(a, b) + df_A\left((x - a, y - b)\right)$$

6.3.4 Základní věty diferenciálního počtu

Věta 6.3.7 *(věta o střední hodnotě) Nechť funkce $f : \Omega \to \mathbb{E}$, $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ otevřená a funkce f má derivace v libovolném směru a v každém bodě množiny Ω. Předpokládejme, že A, $X \in \Omega$ jsou takové, že $\overline{AX} \in \Omega$ a $h = X - A$. Pak funkce $g(t) = f(A + th)$, $t \in [0, 1]$ je definovaná a diferencovatelná v $[0, 1]$ a*

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial h}(A + th), \quad t \in [0, 1]$$

Navíc platí:

(i) Exituje $\xi \in (0, 1)$ tak, že

$$f(A + h) - f(A) = g(1) - g(0) = \frac{\partial f}{\partial h}(A + \xi h)$$

(ii) Jestliže g' je spojitá na $[0, 1]$ pak

$$f(A + h) - f(A) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial h}(A + th)\, dt$$

Věta 6.3.8 *(Weierstrassova věta) Funkce spojitá na kompaktní množině $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ nabývá na této množině svého maxima a minima.*

Poznámka Existují tedy body M, $N \in \Omega$ tak, že $f(M) = \min_{x\in\Omega} f(x)$, $f(N) = \max_{x\in\Omega} f(x)$.

6.4 Taylorova věta

Taylorův vzorec pro funkci $F \in C^{k+1}\left((t_0 - \delta, t_0 + \delta)\right)$, $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} F(t) &= T_k(t) + R_k(t) \\ &= F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!}F''(t_0)(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}F^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k + \frac{1}{(k+1)!}F^{(k+1)}(\xi)(t - t_0)^{k+1}, \end{aligned}$$

pro každé $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ a ξ je mezi t a t_0.

Věta 6.4.1 *(Taylorova formule s Lagrangeovým zbytkem) Nechť funkce $f \in C^2(\Omega)$ resp. $f \in C^3(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ na nějakém okolí $U_\delta(A) \subset \Omega$ bodu $A = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in \Omega$. Pak pro každý vektor $u = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ takový, že $A + u \in U_\delta(A)$ platí*

$$f(A+u) = T_1(u) + R_1(u) = f(A) + (\nabla f(A)|u) + \frac{1}{2!}\left(Hf(A+\xi u)u^T|u\right) \tag{6.4}$$

pro nějaké $\xi \in (0,1)$, resp.

$$f(A+u) = T_2(u) + R_2(u) = f(A) + (\nabla f(A)|u) + \frac{1}{2!}\left(Hf(A)u^T|u\right) + R_2(u) \tag{6.5}$$

kde R_1 resp. R_2 jsou zbytky a $\lim_{\|u\|\to 0} \frac{R_1(u)}{\|u\|} = 0$ resp. $\lim_{\|u\|\to 0} \frac{R_2(u)}{\|u\|^2} = 0$.

6.5 Extrémy funkce

6.5.1 Úvod

Definice 6.5.1 *Kvadratickou formou* na prostoru $\mathbb{E}_n$ nazýváme funkci

$$K(x) = K(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Kvadratickou formu K nazveme

- pozitivně definitní, jestliže $K(x) > 0$ pro $\forall\, x \in \mathbb{E}_n$, $x \neq o$,
- pozitivně semidefinitní, jestliže $K(x) \geq 0$ pro $\forall\, x \in \mathbb{E}_n$,
- negativně definitní, jestliže $K(x) < 0$ pro $\forall\, x \in \mathbb{E}_n$, $x \neq o$,
- negativně semidefinitní, jestliže $K(x) \leq 0$ pro $\forall\, x \in \mathbb{E}_n$,
- indefinitní, jestliže existují x, $y \in \mathbb{E}_n$ tak, že $K(x) > 0$ a $K(y) < 0$.

Poznámka Označme

$$D_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

pro $k = 1, \dots, n$.

Věta 6.5.1 *(Sylvestrovo kritérium) Kvadratická forma K je*

(a) pozitivně definitní $\iff$ když $\det D_k > 0$ pro $k = 1, \dots, n$,

(b) negativně definitní $\iff$ když $(-1)^k \det D_k > 0$ pro $k = 1, \dots, n$,

(c) jestliže $\det D_n \neq 0$ a forma K není definitní pak K je indefinitní.

6.5.2 Lokální extrémy

Nechť $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ a $f : \Omega \to \mathbb{E}$ je daná funkce. Bod $A \in \Omega$ takový, že

$$f(A) \leq f(X) \quad \forall X \in \Omega$$

nazveme *bodem minima* (*absolutním minimem*) funkce f na množině Ω.

Definice 6.5.2 Řekneme, že funkce $f(X)$ má v bodě $A \in \Omega \subset \mathcal{D}(f)$ lokální minimum (lokální maximum) vzhledem k Ω, jestliže existuje okolí $U_\delta(A)$ tak, že $f(X) \leq f(A)$ ($f(X) \geq f(A)$) pro každé, $X \in U_\delta(A) \cap \Omega$.

Lokální minima (lokální maxima) se nazývají *extrémální body* a hodnoty v těchto bodech *extrémální hodnoty.*

Tvrzení 6.5.1 *Jestliže aspoň pro jednu hodnotu $1 \leq j \leq n$ derivace funkce $\partial f(A)/\partial x_i$ existuje a je různá od nuly, nemá funkce f v bodě A lokální extrém.*

Důkaz. Viz [14], str.504.

Tvrzení 6.5.2 *Ostrý lokální extrém nastává v nejvýše spočetné množině.*

Důkaz. Viz [14], str.505.

Věta 6.5.2 *Nechť funkce $f : \Omega \to \mathbb{E}$ je diferencovatelná ve vnitřním bodě $A \in \Omega$. Jestliže A je extrémální bod funkce f, pak*

$$df_A = 0 \quad (\textit{ekvivalentně } \nabla f(A) = o)$$

Definice 6.5.3 Nechť Ω je otevřená podmnožina v $\mathbb{E}_n$ a nechť $f : \Omega \to \mathbb{E}$ je diferencovatelná v Ω. Body $A \in \Omega$ takové, že $df_A = 0$ (ekvivalentně $\nabla f(A) = o$) nazýváme *kritickými* (*stacionárními*) body funkce f v množině Ω.

Věta 6.5.3 *Nechť funkce $f \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{E}_n$ otevřená v $\mathbb{E}_n$ a nechť $A \in \Omega$ je kritický bod funkce f. Pak*

(i) jestliže v bodě A je lokální minimum, pak

$$\big(Hf(A)u^T|u\big) \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

(ii) jestliže

$$\big(Hf(A)u^T|u\big) > 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq o$$

pak v bodě A je isolované lokální minimum.

(iii) jestliže $\big(Hf(A)u^T|u\big)$ je indefintní pak v bodě A není lokální extrém.

6.5.3 Globální extrémy

Často hledáme největší (nejmenší) hodnotu funkce na množině Ω. Je-li množina Ω kompaktní plyne z Weierstrassovy věty, že existuje $\min f(\Omega)$ a $\max f(\Omega)$. Globální (absolutní) extrémy na množině Ω dostaneme vyšetřením bodů:

(1) hraniční body množiny Ω,

(2) stacionární body v množině $\operatorname{int} \Omega$,

(3) body, kde některá z derivací f'_{x_i} v $\operatorname{int} \Omega$ neexistuje.

PŘÍKLADY

Určité integrály

Vypočtěte integrál

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx \qquad \left[\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\ln 2\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx \qquad \left[\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx \qquad \left[1 + \frac{1}{2}\pi\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^{2/3}}\,dx \qquad [6]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx \qquad \left[\frac{1}{12}\pi^3\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx \qquad [1 - \ln 2]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,dx \qquad [2]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\mathrm{e}} |\ln x|\,dx \qquad [2]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^2}dx \qquad \left[\frac{1}{2}\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x\,(x+1)}\,dx \qquad [\ln 2]$$

Vypočtěte integrál

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx \qquad [\text{diverguje}]$$

Vypočtěte integrál

$$\int\limits_{-2}^{2} |x^3 - x|\,dx \qquad [5]$$

Vypočtěte integrál

$$\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\,dx \qquad [\mathrm{e}-1]$$

Vypočtěte integrál

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx \qquad \left[2(\sqrt{2}-1)\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad [1]$$

Vypočtěte integrál

$$\int\limits_0^1 x\ln x\,dx \qquad \left[-\frac{1}{4}\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx \qquad [3]$$

Vypočtěte integrál

$$\int\limits_{-3}^{1} \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx \qquad [-4\pi]$$

Vypočtěte integrál

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int\limits_{2/\pi}^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx \qquad [1]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx \qquad [\text{diverguje}]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_{\mathrm{e}}^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}dx \qquad [1]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \ln x dx \qquad [-1]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx \qquad [\text{diverguje}]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x dx \qquad [1]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+4)^2}dx \qquad \left[\frac{1}{4}\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx \qquad [4]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \cos^2(\ln x)\,dx \qquad \left[\frac{3}{5}\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x-1}}{1+\sqrt{x-1}}\,dx \qquad \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{9}{5} - 2\ln\,2\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^\pi x\sin^2 x\,dx \qquad \left[\frac{1}{4}\pi^2\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \arcsin\,x\,dx \qquad \left[\frac{1}{2}\pi - 1\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_{1/2}^{1} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx \qquad \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\, dx \qquad [diverguje]$$

Aplikace určitého integrálů

ypočtěte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami: $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{1}{2}x^2$.
$\left[\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rovinného obrazce danného nerovnostmi: $y < 3x^3$, $y < \frac{1}{x}$, $x - y < 2$, $x > 0$.
$\left[\frac{9}{4} + 6 \cdot 3^{3/4} + \frac{1}{4}\ln 3 + \ln 2\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami: $y^2 = x + 1$, $y = x - 1$.
$\left[\frac{9}{2}\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = \mathrm{e}^{2x}$.
$\left[\frac{1}{2}((e)^2 - 1)\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami: $y = \operatorname{arctg} x$, $y = 0$, $x = 1$.
$\left[\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\ln\ 2\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami: $x^2 + y^2 = 8$, $y^2 = 2x$, $x > 0$.
$\left[\frac{4}{3} - 2\pi\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rovinného obrazce $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 < x < 1, 0 < y < \frac{\ln(x^2+x+1)}{(x+1)^2}\}$.
$\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \ln\ 2\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami: $x^2 + y^2 = 8$, $y^2 = 2x$, $x > 0$.
$\left[\frac{4}{3} - 2\pi\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rovinné oblasti, která je ohraničená osou y, křivkou $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$ a tečnou k této křivce v bodě $T = \left[1, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.
$\left[1 + \frac{1}{2\mathrm{e}}\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rovinné oblasti, která je ohraničená osou x, křivkou $x^2 + y^2 = 4$ a tečnou k této křivce v bodě $T = \left[1, \sqrt{3}\right]$.

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce daného křivkami $y = \frac{R-r}{h}x + r$, $y = 0$, $x = 0$, $x = h$, $R \geq r > 0$, $h > 0$ kolem osy x.
$\left[\frac{\pi h}{3}\left(R^2 + rR + r^2\right)\ m^3\right]$

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce daného křivkami $3x - 4y + 5 = 0$, $y = 2x$, $x = 0$ kolem osy x.
$\left[\frac{65}{48}\pi\ m^3\right]$

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce daného křivkami $y = x^2$, $y^2 = x$ kolem osy x.
$\left[\frac{3}{10}\pi\ m^3\right]$

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce daného křivkami $x = k$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = 0$, $k > a > 0$, $b > 0$ kolem osy x.
$\left[\frac{b\pi}{2a}\left[k\sqrt{k^2 - a^2} - a^2\ln(k + \sqrt{k^2 - a^2}) + a^2\ln a\right]\ m^3\right]$

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce daného křivkami $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{2}|x|$ kolem osy y.
$\left[\frac{1}{12}\pi\ m^3\right]$

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = x^2 + 2$, $y = 2x^2 + 1$ kolem osy x.
$\left[\frac{24}{5}\pi\ m^3\right]$

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, 0 < y < \mathrm{e}^{-x}\sqrt{\sin x}\}$ kolem osy x.
$\left[\frac{1}{5}\pi\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^{2\pi}}\right)\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotací rovinného obrazce $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi/4, 0 < y < \mathrm{tg}x\}$ kolem osy x.
$\left[\pi\left(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln\frac{2(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{5}}\right)\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah povrchu koule o poloměru r.
$[4\pi r^2\ m^2]$

Vypočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = \sqrt{4 + x}$, $x = -3$, $x = 2$, $y = 0$ kolem osy x.
$\left[\frac{5\pi}{6}\left(25 - \sqrt{5}\right)\ m^2\right]$

Vypočtěte délku křivky $x = \varphi(t) = a(t - \sin t)$, $y = \psi(t) = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$.
$[8a\ m]$

Vypočtěte délku křivky $y = 1 - \ln(\cos x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
$\left[\ln\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\ m\right]$

Vypočtěte délku křivky $y = \ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$, $x \in [\ln 2, \ln 5]$.
$\left[\ln\frac{16}{5}\ m\right]$

Vypočtěte délku křivky $y = \ln x$, $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$.
$\left[1 + \mathrm{argtanh}\frac{1}{2} - \mathrm{argtanh}\frac{1}{3}\ m\right]$

Vypočtěte délku křivky $x = \varphi(t) = a(t\sin t + \cos t)$, $y = \psi(t) = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0, \pi/2]$, $a > 0$.
$[\pi a^2/2\ m]$

Vypočtěte délku křivky $y = e^x$, $x \in (0, 1)$.
$\left[\sqrt{1+\mathrm{e}^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^2}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^2}+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{1+\mathrm{e}^2} + 1 + \ln\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{1+\mathrm{e}^2}}\ m\right]$

Vypočtěte délku křivky $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$, $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.
$\left[\sqrt{2} - 1\ m\right]$

Vypočtěte délku křivky $x = \varphi(t) = a\cos^3 t$, $y = \psi(t) = a\sin^3 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $a > 0$.
$\left[\frac{3}{2}a\ m\right]$

Vypočtěte délku křivky $y = \cosh x$, $x \in [0, \cosh b]$, $b > 0$.
$[\sinh b\ m]$

Vypočtěte délku křivky $x = \varphi(t) = a\cos^4 t$, $y = \psi(t) = a\sin^4 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $a > 0$.
$\left[a\left(\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right)\ m\right]$

Parciální derivace

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy} funkce

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{x+y}$$

Řešení.

$$f'_x = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad f'_y = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$f''_{xx} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{yy} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$ funkce

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

Řešení.

$$f'_x = \frac{2y}{(x+y)^2}, \quad f'_y = -\frac{2x}{(x+y)^2}$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$ funkce

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$$

Řešení.

$$f'_x = \frac{-2y}{(x-y)^2}, \quad f'_y = \frac{2x}{(x-y)^2}$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$ funkce

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$$

Řešení.

$$f'_x = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad f'_y = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$ funkce

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Řešení.

$$f'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad f'_y = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f), f'_x, f'_y, \mathcal{D}(f'_x), \mathcal{D}(f'_y)$ funkce

$$f(x,y) = \frac{x-2xy^2}{1-x}$$

Řešení.

$$f'_x = \frac{1-2y^2}{(x-1)^2}, \quad f'_y = -\frac{4xy}{x-1}$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f), f'_x, f'_y, \mathcal{D}(f'_x), \mathcal{D}(f'_y), f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}$ funkce

$$f(x,y) = x^2 \mathrm{e}^{xy}$$

v bodě $A = [1, 0$

Řešení.

$$f'_x = x(2+xy)e^{xy}, \quad f'_x(A) = 2, \quad f'_y = x^3 e^{xy}, \quad f'_y(A) = 1$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f), f'_x, f'_y, \mathcal{D}(f'_x), \mathcal{D}(f'_y)$ funkce

$$f(x,y) = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$$

v bodě $A = [1, 1]$.

Řešení.

$$f'_x = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad f'_x(A) = 1, \quad f'_y = \frac{1}{\sqrt{y}}, \quad f'_y(A) = 1$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy} funkce

$$f(x,y) = x^y$$

v bodě $A = [1, 1]$.

Řešení.

$$f'_x = yx^{y-1}, \ f'_x(A) = 1, \ f'_y = x^y \ln x, \ f'_y(A) = 0,$$

$$f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \ f''_{xx}(A) = 0, \ f''_{yy} = x^y \ln^2 x, \ f''_{yy} = 0, \ f''_{xy} = x^{y-1}(1 + y\ln x), \ f''_{xy}(A) = 1,$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f), f'_x, f'_y, \mathcal{D}(f'_x), \mathcal{D}(f'_y), f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}$ funkce

$$f(x,y) = y^x$$

v bodě $A = [1, 1]$.

Řešení.

$$f'_x = y^x \ln y, \ f'_x(A) = 0, \ f'_y = xy^{x-1}, \ f'_y(A) = 1,$$

$$f''_{xx} = y^x \ln^2 y, \quad f''_{yy} = x(x-1)y^{x-2}, \quad f''_{xy} = (1 + x\ln y)y^{x-1}.$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$ funkce

$$f(x,y) = \ln(x + \ln y)$$

a vypočtěte hodnoty prvních parciálních derivací v bodě $A = [1, 1]$.

Řešení.

$$f'_x = \frac{1}{x + \ln y}, \quad f'_x(A) = 1, \quad f'_y = \frac{1}{y(x + \ln y)}, \quad f'_y(A) = 1$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$ funkce

$$f(x,y) = \ln(x \ln y)$$

a vypočtěte hodnoty prvních parciálních derivací v bodě $A=[1,\mathrm{e}]$.

Řešení.

$$f'_x=\frac{1}{x},\quad f'_x(A)=1,\quad f'_y=\frac{1}{y\ln y},\quad f'_y(A)=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy} funkce

$$f(x,y)=x\sin(x+y)$$

a vypočtěte hodnoty prvních parciálních derivací v bodě $A=[\pi,0]$.

Řešení.

$$f'_x=\sin(x+y)+x\cos(x+y),\quad f'_x(A)=-\pi,\quad f'_y=x\cos(x+y),\quad f'_y(A)=-\pi,$$

$$f''_{xx}=2\cos(x+y)-x\sin(x+y),\quad f''_{xx}(A)=-2,\quad f''_{yy}=-x\sin(x+y),\quad f''_{yy}(A)=0,$$

$$f''_{xy}=\cos(x+y)-x\sin(x+y),\quad f''_{xy}(A)=-1.$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f'_{xx})$, $\mathcal{D}(f'_{yy})$, $\mathcal{D}(f'_{xy})$ funkce

$$f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

Řešení.

$$f''_{xy}=\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f), f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, \mathcal{D}(f''_{xx}), \mathcal{D}(f''_{yy}), \mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x,y)=y^{\ln x}$$

Řešení.

$$f'_x=\frac{y^{\ln x}\ln y}{x},\quad f'_y=y^{\ln x-1}\ln x,$$

$$f''_{xx}=\left(\frac{y^{\ln x}}{x}\right)^2(\ln y-1),\quad f''_{yy}=y^{\ln x-2}(\ln x-1)\ln x,\quad f''_{xy}=\frac{y^{\ln x}(1+\ln x\ln y)}{xy}.$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f''_{xx})$, $\mathcal{D}(f''_{yy})$, $\mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

Řešení.

$$f'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f''_{xx}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},\quad f''_{yy}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},\quad f''_{xy}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x,y)=\sqrt{2xy+y^2}$$

Řešení.

$$f'_x = \frac{y}{\sqrt{2xy+y^2}}, \quad f'_y = \frac{x+y}{\sqrt{2xy+y^2}}$$

$$f''_{xy} = \frac{xy\sqrt{2xy+y^2}}{(2xy+y^2)^2}$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f''_{xx})$, $\mathcal{D}(f''_{yy})$, $\mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x,y) = \ln\frac{x^2+1}{y^2-1}$$

Řešení.

$$f'_x = \frac{2x}{x^2+1}, \quad f'_y = -\frac{2y}{y^2-1}$$

$$f''_{xx} = 2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, \quad f''_{yy} =, \quad f''_{xy} =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f''_{xx})$, $\mathcal{D}(f''_{yy})$, $\mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$$

Řešení. $\mathcal{D}(f) = (\{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : y \geq |x|\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : y \leq -|x|\}) \setminus \{[0,0]\}$

$$f'_x = \frac{\operatorname{sgn}(y)}{\sqrt{y^2-x^2}}, \quad f'_y = -\frac{x\operatorname{sgn}(y)}{y\sqrt{y^2-x^2}}$$

$$f''_{xx} =, \quad f''_{yy} =, \quad f''_{xy} =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f''_{xx})$, $\mathcal{D}(f''_{yy})$, $\mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$

Řešení.

$$f'_x =, \quad f'_y =$$

$$f''_{xx} =, \quad f''_{yy} =, \quad f''_{xy} =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f''_{xx})$, $\mathcal{D}(f''_{yy})$, $\mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x,y) = x^2 \ln y$$

Řešení.

$$f''_{xx} =, \quad f''_{yy} =, \quad f''_{xy} =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, funkce

$$f(x,y) = \sqrt{\left|\frac{x}{y}\right|}$$

Řešení. $\mathcal{D}(f) = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 :\}$

$$f'_x = \quad f'_y =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, funkce

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

Řešení. $\mathcal{D}(f) = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 :\}$

$$f'_x = \quad f'_y =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, funkce

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$$

Řešení. $\mathcal{D}(f) = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 :\}$

$$f'_x = \quad f'_y =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f''_{xx})$, $\mathcal{D}(f''_{yy})$, $\mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x, y) = \ln(y + \ln\, x)$$

Řešení.

$$f''_{xx} =, \quad f''_{yy} =, \quad f''_{xy} =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f''_{xx})$, $\mathcal{D}(f''_{yy})$, $\mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{xy} \ln\, y$$

Řešení.

$$f''_{xx} =, \quad f''_{yy} =, \quad f''_{xy} =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, funkce

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{|y|}{x+y}}$$

Řešení. $\mathcal{D}(f) = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 :\}$

$$f'_x = \quad f'_y =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f''_{xx})$, $\mathcal{D}(f''_{yy})$, $\mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{xy} \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

Řešení.

$$f''_{xx} =, \quad f''_{yy} =, \quad f''_{xy} =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, f'_z, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, $\mathcal{D}(f'_z)$, funkce

$$f(x, y, z) = \ln(xyz)$$

Řešení.

$$f'_x =, \quad f'_y =, \quad f'_z =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, f'_z, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, $\mathcal{D}(f'_z)$, funkce

$$f(x,y,z) = \ln(xyz)$$

v bodě $A = [1,1,1]$.

Řešení.

$$f'_x =, \quad f'_y =, \quad f'_z =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, f'_z, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, $\mathcal{D}(f'_z)$, funkce

$$f(x,y,z) = zx^{1/y}$$

v bodě $A = [1,1,1]$.

Řešení.

$$f'_x =, \quad f'_y =, \quad f'_z =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, f'_z, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, $\mathcal{D}(f'_z)$, funkce

$$f(x,y,z) = \left(\frac{y}{z}\right)^x$$

Řešení.

$$f'_x =, \quad f'_y =, \quad f'_z =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, f'_z, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, $\mathcal{D}(f'_z)$, funkce

$$f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{yz}{x}\right)$$

Řešení.

$$f'_x =, \quad f'_y =, \quad f'_z =$$

Derivace ve směru

Příklad . Vypočetěte derivaci v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{E}_2$ ve směru vektoru $u = (h,k) \in \mathbb{R}^2$ (pokud existuje) funkce

$$f(x,y) = xy$$

z definice derivace ve směru.

Příklad . Vypočetěte derivaci v bodě $A = [0,0] \in \mathbb{E}_2$ ve směru vektoru $u = (h,k) \in \mathbb{R}^2$ (pokud existuje) funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

z definice derivace ve směru.

Příklad . Vypočetěte derivaci v bodě $A = [0,0] \in \mathbb{E}_2$ ve směru vektoru $u = (h,k) \in \mathbb{R}^2$ (pokud existuje) funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

z definice derivace ve směru.

Diferenciál funkce

Příklad . Vypočtěte diferenciál funkce

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

v bodě $A=[1,1]$. Ověřte existenci diferenciálu v daném bodě.

Řešení.

$$f'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f'_x(A)=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad f'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f'_y(A)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$df_A=\frac{\sqrt{2}}{2}(h+k)$$

Příklad . Vypočtěte totální diferenciál 2. řádu funkce

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

v bodě $A=[1,1]$.

Řešení.

$$f''_{xx}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},\quad f''_{xx}(A)=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad f''_{yy}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},\quad f''_{yy}(A)=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$f''_{xy}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}},\quad f''_{xy}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$d^2f(A)=\frac{\sqrt{2}}{4}h^2-\frac{\sqrt{2}}{2}hk+\frac{\sqrt{2}}{4}k^2.$$

Příklad . Vypočtěte diferenciál funkce $f(x,y,z)=\operatorname{arctg}(yz/x)$ v bodě $A=[1,1,1]$. Ověřte existenci diferenciálu v daném bodě.

Řešení.

$$f'_x=\frac{-2xyz}{x^4+y^2z^2},\quad f'_y=-\frac{x^2z}{x^4+y^2z^2},\quad f'_z=-\frac{x^2y}{x^4+y^2z^2},$$

$$df(A)=-h_1+\frac{1}{2}h_2+\frac{1}{2}h_3$$

Příklad . Vypočtěte diferenciál funkce $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$ v bodě $A=[1,0]$. Ověřte existenci diferenciálu v daném bodě.

Řešení.

$$f'_x=\frac{1}{1+x^2},\quad f'_y=\frac{1}{1+y^2}$$

$$df_A\left((h,k)\right)=\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}k$$

Příklad . Vypočtěte diferenciál funkce $f(x,y)=x^y$ v bodě $A=[1,1]$. Ověřte existenci diferenciálu v daném bodě.

Řešení.

$$df_A\left((h,k)\right)=$$

Příklad . Vypočtěte diferenciál funkce $f(x,y)=y^x$ v bodě $A=[1,1]$.

Řešení.

$$df_A\left((h,k)\right) =$$

Příklad . Vypočtěte totální diferenciál 1. řádu funkce $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{yz}{x}\right)$ v bodě $A = [1, 1, 1.$

Řešení.

$$f'_x = \frac{-2xyz}{x^4 + y^2z^2}, \quad f'_y = -\frac{x^2z}{x^4 + y^2z^2}, \quad f'_z = -\frac{x^2y}{x^4 + y^2z^2},$$

$$df(A) = -h_1 + \frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{2}h_3.$$

Taylorova věta

Příklad . Určete Taylorův polynom prvního stupně funkce $f(x,y)=\ln\frac{xy}{x^2+y^2}$ v bodě $M=[1,2]$.

Příklad . Určete Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y)=y^x$ v bodě $N=[1,1]$.

Řešení.

$$f'_x=y^x\ln y,\ f'_x(N)=0,\ f'_y=xy^{x-1},\ f'_y(N)=1$$

$$f''_{xx}=y^x\ln^2 y,\ f''_{xx}(N)=0,\ f''_{yy}=x(x-1)y^{x-2},\ f''_{yy}(N)=0,\ f''_{xy}=y^{x-1}(x\ln y+1), f''_{xy}(N)=1,$$

$$T_2(x,y)=1+(y-1)+(x-1)(y-1)$$

Příklad . Určete Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$ v bodě $A=[1,1]$.

Řešení.

$$f'_x=\frac{1}{1+x^2},\ f'_x(A)=\frac{1}{2},\ f'_y=-\frac{1}{1+y^2},\ f'_y(A)=-\frac{1}{2}$$

$$f''_{xx}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\ f''_{xx}(A)=\frac{1}{2},\ f''_{yy}=\frac{2y}{(1+y^2)^2},\ f''_{yy}(A)=\frac{1}{2},\ f''_{xy}=0,\ f''_{xy}(A)=0$$

$$f'''_{xxx}=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3},\ f'''_{yyy}=\frac{2(1-3y^2)}{(1+y^2)^3},\ f'''_{xxy}=0,\ f'_{xyy}=0$$

$$f(1+h,1+k)=\frac{1}{2}h-\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}h^2+\frac{1}{4}k^2+R_2$$

$$R_2=\frac{1}{3}\left[\frac{3(1+th)^2-1}{[1+(1+th)^2]^3}h^3+\frac{1-3(1+tk)^2}{\left[1+(1+tk)^2\right]^3}\right],\ 0<t<1.$$

Příklad . Určete Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2+y^2}$ v bodě $A=[1,1]$.

Řešení.

$$f'_x=2x\mathrm{e}^{x^2+y^2},\ f'_x(A)=2e^2,\ f'_y=2ye^{x^2+y^2},\ f'_y(A)=2\mathrm{e}^2$$

$$f''_{xx}=2(2x^2+1)\mathrm{e}^{x^2+y^2},\ f''_{xx}(A)=6\mathrm{e}^2,\ f''_{yy}=2(2y^2+1)\mathrm{e}^{x^2+y^2},\ f''_{yy}(A)=6\mathrm{e}^2,$$

$$f''_{xy}=4xy\mathrm{e}^{x^2+y^2},\ f''_{xy}(A)=4e^2$$

$$f'''_{xxx}=4x(2x^2+3)\mathrm{e}^{x^2+y^2},\ f'''_{yyy}=4y(2y^2+3)\mathrm{e}^{x^2+y^2},$$

$$f'''_{xxy}=4y(2x^2+1)\mathrm{e}^{x^2+y^2},\ f'''_{xyy}=4x(2y^2+1)\mathrm{e}^{x^2+y^2},$$

$$f(1+h,1+k)=\mathrm{e}^2(1+2h+2k+3h^2+4hk+3k^2)+R_2$$

Příklad . Určete Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$ v bodě $A=[1,1]$.

Řešení.

$$\mathcal{D}(f)=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2 : 1+xy\neq 0\}$$

$$f'_x=\frac{1}{1+x^2},\quad f'_y=-\frac{1}{1+y^2}$$

$$f''_{xx}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\quad f''_{yy}=\frac{2y}{(1+y^2)^2},\quad f''_{xy}=0$$

$$f'''_{xxx}=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3},\ f'''_{yyy}=\frac{2(1-3y^2)}{(1+y^2)^3},\ f'''_{xxy}=0,\ f'_{xyy}=0$$

$$f(1+h,1+k) = \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}k - \frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{3}\left[\frac{3\,(1+th)^2-1}{\left[1+(1+th)^2\right]^3}h^3 + \frac{1-3\,(1+tk)^2}{\left[1+(1+tk)^2\right]^3}\right],\ 0<t<1.$$

$$T_2(x,y) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) - (x-1)^2 + (y-1)^2$$

Extrémy funkce více proměnných

Lokální extrémy

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [0,0]$, $S_2 = [1,1]$. V bodě $[1,1,-1]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y}, \quad x>0, y>0$$

Řešení. Stacionární bod je $S = [\frac{5}{2}, \frac{4}{5}]$. V bodě $[\frac{5}{2}, \frac{4}{5}, 30]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = (x^2+2y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [0,0]$, $S_2 = [0,1]$, $S_3 = [0,-1]$, $S_4 = [1,0]$, $S_5 = [-1,0]$. V bodě $[0,0,0]$ je ostré lokální minimum. V bodech $[0,1,\frac{2}{\mathrm{e}}]$ a $[0,-1,\frac{2}{\mathrm{e}}]$ jsou ostrá lokální maxima.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$$

Řešení.

$$f'_x = 3x^2 - 6y = 0 \tag{6.6}$$
$$f'_y = 24y^2 - 6x = 0 \tag{6.7}$$

Stacionární body jsou $S_1 = [0,0]$, $S_2 = \left[1, \frac{1}{2}\right]$.

$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{yy} = 48y, \quad f''_{xy} = -6,$$

$$Hf(S_1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$D_1 = 0,\ D_2 \neq 0 \ \Rightarrow$ kvadratická forma je indefinitní a v bodě S_1 není extrém.

$$Hf(S_2) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{pmatrix}$$

$D_1 = 6 > 0,\ D_2 = 144 - 36 > 0 \ \Rightarrow$ kvadratická forma je pozitivně definitní a v bodě S_2 je ostré lokální minimum, $f(S_2) = 4$.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{2}x^2+y\right)\mathrm{e}^{x+y}$$

Řešení.

$$f'_x=\left(\frac{1}{2}x^2+x+y\right)\mathrm{e}^{x+y},\qquad f'_y=\left(\frac{1}{2}x^2+y+1\right)\mathrm{e}^{x+y}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2+x+y&=0\\ \frac{1}{2}x^2+y+1&=0\end{aligned}$$

Stacionární bod je $S=\left[1,-\frac{3}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}f''_{xx}&=\left(\frac{1}{2}x^2+2x+y+1\right)\mathrm{e}^{x+y}\\ f''_{xy}&=\left(\frac{1}{2}x^2+x+y+1\right)\mathrm{e}^{x+y}\\ f''_{yy}&=\left(\frac{1}{2}x^2+y+2\right)\mathrm{e}^{x+y}\end{aligned}$$

$$Hf(S)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\mathrm{e}} & \frac{1}{\mathrm{e}}\\ \frac{1}{\mathrm{e}} & \frac{1}{\mathrm{e}}\end{pmatrix}$$

$D_1(S)>0$, $D_2(S)=\frac{1}{\mathrm{e}^2}>0 \;\Rightarrow\;$ v bodě S je ostré lokální minimum, $f(S)=-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$$

Řešení. Stacionární bod je $S=[\frac{1}{2},-1]$. V bodě $\left[\frac{1}{2},-1,-2e\right]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y)=e^{\frac{1}{2}x}(x+y^2)$$

Řešení. Stacionární bod je $S=[-2,0]$. V bodě $[-2,0,-\frac{2}{\mathrm{e}}]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y)=x^3+y^3-3axy$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1=[0,0]$, $S_2=[a,a]$. V bodě $[a,a]$ je pro $a>0$ je ostré lokální minimum a pro $a<0$ je ostré lokální maximum, $f(A)=-a^3$.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1=[1,0]$, $S_2=[-1,0]$, $S_3=[0,-1]$, $S_4=[0,1]$, $S_5=[\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}]$, $S_6=[\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},-\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}]$, $S_7=[-\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},-\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}]$, $S_8=[-\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}]$. V bodech $[\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},-\frac{1}{2\mathrm{e}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},-\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},-\frac{1}{2\mathrm{e}}]$ jsou ostrá lokální minima a v bodech $[\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},-\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{1}{2\mathrm{e}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{1}{2\mathrm{e}}]$ jsou ostrá lokální maxima.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2y^3(12-x-y)$$

Řešení. Stacionární body jsou $M_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$, $M_2 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. V bodě $[4, 6, 6912]$ je ostré lokální maximum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 + y^2 + z^2$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [23, -145, -2], S_2 = [-1, -1, -2]$.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x\mathrm{e}^{y^2-x^2}$$

Řešení.

$$f'_x = (1-2x^2)\mathrm{e}^{y^2-x^2}, \quad f'_y = 2xy\mathrm{e}^{y^2-x^2}$$

$$f''_{xx} = 2x(2x^3-3)\mathrm{e}^{y^2-x^2}, \quad f''_{xy} = 2y(1-2x^2)\mathrm{e}^{y^2-x^2}, \quad f''_{yy} = 2x(1+2y^2)\mathrm{e}^{y^2-x^2}$$

Stacionární body jsou $S_1 = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$, $S_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$. Funkce nemá extrémy.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [0,0], S_2 = [-\frac{5}{3}, 0], S_3 = [1,4], S_4 = [1,-4]$ V bodě $[0,0,0]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [0,0], S_2 = [\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}]$ V bodě $[\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, 0]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - xy - x$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [\frac{2}{3}, \frac{1}{3}], S_2 = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]$. V bodě $[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{15}{27}]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = xy(3-x-y)$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [0,0], S_2 = [3,0], S_3 = [0,3] S_4 = [1,1]$. V bodě $[1,1,1]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{2}x^2 + y\right)\mathrm{e}^{x+y}$$

Řešení. Stacionární bod je $S = [1, -\frac{3}{2}]$. V bodě $\left[1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = -x^2 - y^2 - xy + 6y + 1$$

Řešení. Stacionární bod je $S = \left[1, -\frac{3}{2}\right]$. V bodě $\left[1, -\frac{3}{2}\right]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2$$

Řešení. Stacionární bod je $S = \left[\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right]$. V bodě $\left[\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, f(S)\right]$

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 9y$$

Řešení. Stacionární bod je $S = [1,4]$. V bodě $[1,4,-21]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = 2x^2 + 5y^2 - 6xy - x - 3y + 2$$

Řešení. Stacionární bod je $S = \left[-2, -\frac{3}{2}\right]$. V bodě $\left[-2, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 3x + 5y - 1$$

Řešení. Stacionární bod je $S = \left[\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right]$. V bodě $\left[\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{35}{8}\right]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x - 2y$$

Řešení. Stacionární bod je $S = [1,-1]$. Nemá lokální extrémy.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = 27x^2y + 14y^3 - 54x - 69y$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [1,1], S_2 = [-1,-1], S_3 = [\frac{\sqrt{14}}{3}, 3\frac{\sqrt{14}}{14}], S_4 = [-\frac{\sqrt{14}}{3}, -3\frac{\sqrt{14}}{14}]$. V bodě S_1 je ostré lokální minimum, v bodě S_2 je ostré lokální maximum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}\left(2x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy - 5x - \frac{5}{3}y + \frac{10}{3}\right)$$

Řešení.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 + yz - 2x + y - z$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [0,0]$, $S_2 = [3,0]$, $S_3 = [0,3]$ $S_4 = [1,1]$. V bodě $[1,1,1]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + y + 1$$

Řešení.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = y \ln\left(x^2 + y\right)$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = \left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$, $S_2 = [1,0], S_3 = [-1,0]$. V bodě $[0,\mathrm{e},-\mathrm{e}]$ je ostré lokální minimum.

Nájděte stacionární body následujúcích funkcí dvou proměnných a klasifikujte je pomocí Hessovy matice:

(a) $f_1(x,y) = x^3 - 3y^2 + 3xy - 3y$,

(b) $f_2(x,y) = -\frac{2}{3}x^3 + y^2 + 4xy + 3y$,

(c) $g(x,y) = xy$,

(d) $h_1(x,y) = x^2y^2(x-y+1)$,

(e) $h_2(x,y) = x^2(y+1) + 2y^3 + 5y^2$,

(f) $h_3(x,y) = x^2(y+1) + y^2(x-1)$,

(g) $h_4(x,y) = x^2(y+1) + y^2(y-1)$,

(h) $h_5(x,y) = (x^2+y^2)(y+1)$

Nájděte stacionární body následujúcích funkcí třech proměnných a klasifikujte je pomocí Hessovy matice:

(a) $f(x,y,z) = 3x^2 + x^3 + y^2 + xy^2 + z^3 - 3z$

(b) $g(x,y,z) = (x+y+z)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}$

(c) $h(x,y,z) = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}$

Globální extrémy

Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = 2x^2 - y^2 - xy + 2y + 1$$

na $M = [0,1] \times [0,1]$.

Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$$

na $M = [0,1] \times [0,2]$.

Řešení.

Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x\mathrm{e}^{y^2-x^2}$$

na $M = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\}$.

Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

na $M = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2$$

na množině

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

na množině

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\right\}$$

Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = xy^2(4 - x - y)$$

na množině

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : y \le -x + 6, x \ge 0, y \ge 0\}$$

Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

na množině

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2x^2\right\}$$

Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{2}x^2 + y\right) \mathrm{e}^{x+y}$$

na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x \geq 0, y \leq 0, y \geq x - 2\}$.

Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 y$$

na množině

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : y \leq -x^2 + x + 2, y \geq 0\right\}$$

Příklad . Najděte absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x\mathrm{e}^{y^2 - x^2}$$

na množině

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\right\}$$

Příklad . Najděte absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x\mathrm{e}^{y^2 - x^2}$$

na množině

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

Příklad . Najděte absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x + y$$

na množině

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Příklad . Najděte absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = 2x^2 - y^2 - xy + 2y + 1$$

na množině $M = [-1, 1] \times [0, 2]$.

Literatura

[1] Atkins, P.W.: *Physical chemistry.* Oxford University Press, 5.vyd., Oxford 1995.

[2] Bourbaki, N.: *Funkcii dejstvitelnovo peremennovo.* Moskva 1965.

[3] Brabec, J., Hrůza, B.: *Matematická analýza I.* SNTL, Praha 1985.

[4] Brabec, J., Hrůza, B.: *Matematická analýza II.* SNTL, Praha 1986.

[5] Daněček, J., Dlouhý, O.: *Integrální počet I.* Akad. nakl. CERM Brno, VUT FAST Brno, 2003.

[6] Daněček, J., Dlouhý, O., Koutková, H., Prudilová, K., Sekaninová, J., Slatinský, E.: *Sbírka příkladů z matematiky I.* VUT FAST Cerm, 9.vyd., Brno 2009.

[7] Eliáš J., Horváth J., Kajan J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky II.* Alfa, Bratislava (1986).

[8] Eliáš J., Horváth J., Kajan J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky III.* Alfa, Bratislava (1980).

[9] Fichtengolc, G. M.: *Kurz diferencialnovo i integralnovo iscislenija II.* Nauka, 4.vyd., Moskva 1959.

[10] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. Function of One Variable.* Birkhäuser, Boston (2003).

[11] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. Approximation and Discrete Processes.* Birkhäuser, Boston (2004).

[12] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. An Introduction to Functions of Several Variables.* Birkhäuser, Boston (2009).

[13] Jarník V.: *Diferenciální počet I.* ČAV Praha (1963).

[14] Jarník V.: *Diferenciální počet II.* ČAV Praha (1963).

[15] Jarník V.: *Integrální počet I.* ČAV Praha (1963).

[16] Lukeš J., Malý, J.: *Míra a integrál.* Univerzita Karlova, Praha (1993).

[17] Milota, J.: *Matematická analýza I–II.* SPN Praha, 1978.

[18] Nagy J., Nováková E., Vacek M.: *Integrální počet.* SNTL Praha (1984).

[19] Prudnikov, A. P., Bryčkov, J. A., Maričev, O. I.: *Integrály i rjady.* Nauka, Moskva 1981.

[20] Rektorys, K. a kol.: *Přehled užité matematiky I.* Prometheus, Praha 1995.

[21] Schwabik, Š.: *Integrace v* $\mathbb{R}$. *Kurzweilova teorie.* Karolinum, UK Praha 1999.

[22] Schwabik, Š., Šarmanová: *Integrace v* $\mathbb{R}$. *Historie integrálu.*

[23] Škrášek, J., Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky II.* SNTL, Praha 1986.

[24] Ungermann Z.: *Matematika a řešení fyzikálních úloh.* SPN, Praha 1990.