Kapitola 1

POSLOUPNOSTI REÁLNÝCH ČÍEL

1.1 Základní pojmy

Definice 1. Zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se nazývá posloupností prvků z $\mathbb{R}$, nebo-li posloupností reálných čísel, $f(n)$ značíme a_n nebo y_n, posloupnost zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka. Okolím bodu $+\infty$ ($-\infty$) rozumíme libovolný interval (k, ∞) ($(-\infty, l)$), kde $k, l \in \mathbb{R}$.

Definice 2. O posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ řekneme, že má limitu $L \in \overline{\mathbb{R}}$ jestliže ke každému okolí $U_\varepsilon(L)$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí, že $a_n \in U_\varepsilon(L)$. Limitu značíme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{nebo} \quad a_n \to L \text{ jakmile } n \to \infty$$

Příklad.

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{q^n\}_{n=1}^{\infty}, \ |q| < 1, q \in \mathbb{R}$$

Poznámka. Jestliže $L \in \mathbb{R}$ říkáme, že existuje vlastní limita (posloupnost *konverguje*), jestliže $L = \pm\infty$ říkáme, že existuje nevlastní limita (posloupnost *diverguje*). Jestliže $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *neklesající* (jestliže $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *rostoucí*), jestliže $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *nerostoucí* (jestliže $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *klesající*). Takové posloupnosti nazýváme souhrně *monotonní*.

1.2 Vlastnosti posloupností

Věta 1.2.1

(a) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

(b) *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

(c) *Každá monotonní posloupnost má limitu.*

1) *Je-li* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *neklesající (rostoucí) posloupnost, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n\{a_n\}$,

2) *Je-li* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nerostoucí (klesající) posloupnost, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_n\{a_n\}$.

(d) *Předpokládejme, že posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu* L.

1) *Jestliže* $L > 0$ ($L < 0$) *pak existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že* $a_n > 0$ ($a_n < 0$) *pro každé* $n \geq n_0$

2) *Jestliže existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že* $a_n \geq 0$ ($a_n \leq 0$) *pro každé* $n \geq n_0$ *pak* $L \geq 0$ ($L \leq 0$).

Důkaz (b). Nechť tedy posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní tj. $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$. Dále nechť $U_\varepsilon(L) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ je libovolné. Pak podle definice existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí, že $a_n \in U_\varepsilon(L)$. Položíme-li $m = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, L-\varepsilon\} \in \mathbb{R}$, $M = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, L+\varepsilon\} \in \mathbb{R}$ pak platí $m \leq a_n \leq M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka. Počítání se symboly $\pm\infty$. Definujeme

- $a + (+\infty) = +\infty$, $a + (-\infty) = -\infty$, $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$,
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$,
- Jestliže $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ pak $a(+\infty) = +\infty$, $a(-\infty) = -\infty$,
- Jestliže $a < 0$, $a \in \mathbb{R}$ pak $a(+\infty) = -\infty$, $a(-\infty) = +\infty$,
- Jestliže $a \in \mathbb{R}$ pak $a/(+\infty) = 0$, $a/(-\infty) = 0$.

Věta 1.2.2 *Posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentní tehdy a jen tehdy, když pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *tak, že pro každé* $n, m \geq n_0$ *platí*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

Věta 1.2.3 *(Pravidla pro počítání s limitami) Nechť pro posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *platí, že* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. *Označme* $\odot$ *jeden ze symbolů* $+, -, \cdot, /$. *Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \odot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \odot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = A \odot B,$$

pokud má pravá strana smysl.

Věta 1.2.4 *(Věta o sevření) Nechť jsou dány posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Předpokládejme, že existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *takové, že* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *pro každé* $n \geq n_0$. *Jestliže* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$ *pak* $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.

Důsledek 1.2.1 *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti a $L \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, takové, že*

$$|a_n - L| \leq b_n, \quad \forall\, n \geq n_0 \quad a \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Věta 1.2.5

(a) *Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$ pak $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L| \in \overline{\mathbb{R}}$.*

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *tehdy a jen tehdy když* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

(c) *Nechť $a_n \geq 0$, pro $n \in \mathbb{N}$ a $b > 0$ je libovolné reálné číslo. Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ pak $\lim_{n\to\infty} a_n^b = L^b$.*

(d) *Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, $b > 0$ pak $\lim_{n\to\infty} b^{a_n} = b^L$.*

(e) *Jestliže $|a| < 1$ pak $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.*

(f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ *pro každé $a > 0$.*

Důkaz (f). Dokážeme pro $a > 1$. Označme $a = 1 + h$. Pak $1 < a^{1/n} = (1+h)^{1/n} \leq 1 + h/n$ (Bernoulliova nerovnost) a $a^{1/n} > 1$. Dále

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{h}{n}\right) = 1 + 0 = 1$$

a použijeme-li Větu 1.2.4 máme

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$$

Věta 1.2.6 *Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.*

Příklad.

(1) Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$$

Důkaz. Z Věty 1.2.6.

Příklad.

(1) Nechť $k \in \mathbb{N}$ libovolné, pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0,$$

Důkaz. (matematickou indukcí)

(2) Vypočtčtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+3}{4n^3+2n+10} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{4+\frac{2}{n}+\frac{10}{n^3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\lim \frac{2}{n}+\lim \frac{3}{n^2}+\lim \frac{3}{n^3}}{\lim 4+\lim \frac{2}{n}+\lim \frac{10}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{0+0+0}{4+0+0} = \frac{0}{4} = 0,$$

(3) Platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

1.3 Podposloupnosti, liminf a limsup

Definice 3. Říkáme, že $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *podposloupnost* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jestliže existuje funkce $k:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ která je rostoucí, tj. $k_1 < k_2 < \ldots$, taková, že

$$p_n = a_{k_n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Příklad.

Věta 1.3.1 *Jestliže $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $L \in \overline{\mathbb{R}}$, pak jakákoliv podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má tutéž limitu L.*

Poznámka.

- Poznamenejme, že $k_n \geq n$ protože $k:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ je rostoucí.
- Jestliže $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má dvě různé podposloupnosti s různými limitami, pak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá žádnou limitu.

Definice 4. Uvažujme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Posloupnosti definované

$$l_n = \inf_{k\geq n}\{a_k\} \qquad L_n = \sup_{k\geq n}\{a_k\}$$

jsou neklesající resp. nerostoucí posloupnost. Tedy existují limity

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \sup_k l_k, \qquad \lim_{n\to\infty} L_n = \inf_k L_k$$

s hodnotami v $\overline{\mathbb{R}}$. Označme

$$\mathrm{liminf}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n}\{a_k\}$$

$$\mathrm{limsup}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}\{a_k\}$$

Tyto limity nazýváme *limesinferior* (*dolní limita*) *limessuperior* (*horní limita*).

Věta 1.3.2 *Uvažujme posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(a) *Posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má* liminf *a* limsup *v* $\overline{\mathbb{R}}$.

(b)

$$\begin{aligned} \mathrm{liminf}_{n\to\infty} a_n &\le \mathrm{limsup}_{n\to\infty} a_n \\ \mathrm{liminf}_{n\to\infty} a_n &= -\mathrm{limsup}_{n\to\infty} (-a_n) \end{aligned}$$

(c) *Platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{liminf}_{n\to\infty} a_n = \mathrm{limsup}_{n\to\infty} a_n = L$$

(d) $\mathrm{limsup}_{n\to\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$ *tehdy a jen tehdy*

(i) *ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že pro každé* $n \ge n_0$ *platí*

$$a_n < L + \varepsilon,$$

(ii) *existuje podposloupnost* $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *která konverguje k číslu* L.

Kapitola 2

NEKONEČNÉ ŘADY

2.1 ČÍSELNÉ ŘADY

2.1.1 Úvod

Definice 2.1.1 Nechť je daná posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ reálných čísel. Rekurence

$$\begin{cases} s_0 & = & a_0 \\ s_{n+1} & = & s_n + a_{n+1} \end{cases}$$

definuje indukcí jedinou posloupnost

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$$

Posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *posloupností částečných součtů řady* tvořenou posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Užíváme symbol

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j$$

Definice 2.1.2 Jestliže posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje k reálnému číslu L, říkáme že řada konverguje a číslo L nazýváme součetem této řady.

Řadu $r_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j$ nazýváme zbytkem řady $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ po n-tém členu.

Věta 2.1.1 *Je-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentní pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Věta 2.1.2

(a) Řada konverguje tehdy a jen tehdy, když konverguje zbytek řady.

(b) Je-li $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentní pak je konvergentní i řada $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n$ a platí $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ pro každé $c \in \mathbb{R}$.

(c) *Jsou-li řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konvergentní pak je konvergentní i řada* $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ *a platí* $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Definice 2.1.3

(a) Řekneme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje *absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

(b) Řekneme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje *relativně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverguje.

Věta 2.1.3 *Nechť řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, pak daná řada konverguje a platí*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

Věta 2.1.4 *(Bolzano-Cauchyova podmínka) Řada* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konverguje právě když pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že pro každé* $n \geq n_0$ *a každé* $m \in \mathbb{N}$ *platí*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

2.1.2 Kritéria konvergence řad

Věta 2.1.5

(a) *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy. Jestliže existuje* $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *tak, že pro každé* $n \geq n_0$ *platí* $a_n \leq b_n$ *pak:*

   (1) *Jestliže řada* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konverguje pak je konvergentní i řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

   (2) *Jestliže řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverguje pak je divergentní i řada* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

(b) *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady s kladnými členy a předpokládejme, že*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}$$

pak

   (1) *Jestliže řada* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konverguje pak je konvergentní i řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

   (2) *Jestliže řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverguje pak je divergentní i řada* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Věta 2.1.6

(a) *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy.*

   (1) *Předpokládejme, že existuje* $0 < K < 1$ *a* $p \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $n \geq p$

$$\sqrt[n]{a_n} \leq K < 1$$

   Pak daná řada konverguje a

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \leq \frac{K^p}{1-K}$$

(2) *Předpokládejme, že existuje* $K > 1$ *a* $p \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $n \geq p$

$$\sqrt[n]{a_n} \geq K > 1$$

Pak daná řada diverguje.

(b) *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy.*

(1) *Předpokládejme, že existuje* $0 < K < 1$ *a* $p \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $n \geq p$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K < 1$$

Pak daná řada konverguje a

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \leq \frac{a_p}{1-K}$$

(2) *Předpokládejme, že existuje* $K > 1$ *a* $p \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $n \geq p$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq K > 1$$

Pak daná řada diverguje.

Věta 2.1.7

(a) *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy taková, že*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$$

(1) *Je-li* $K < 1$ *pak daná řada konverguje.*

(2) *Je-li* $K > 1$ *pak daná řada diverguje.*

(3) *Je-li* $K = 1$ *pak nelze o konvergenci řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *rozhodnout.*

(b) *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy taková, že*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = K$$

(1) *Je-li* $K < 1$ *pak řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(2) *Je-li* $K > 1$ *pak řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

(3) *Je-li* $K = 1$ *pak nelze o konvergenci řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *rozhodnout.*

2.1.3 Další důležitá kritéria konvergence řad

Věta 2.1.8 *(Integrální kritérium) Nechť $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ je daná řada s nezápornými členy a nechť existuje funkce f taková, že*

(1) funkce f je spojitá, nezáporná a nerostoucí na $[n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

(2) Platí $f(j) = a_j$ pro každé $j \geq n$.

Pak daná řada $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konverguje právě když konverguje integrál $\int\limits_n^{\infty} f(x)\,dx$.

Odhad pro případ $n = 0$

$$\int\limits_0^{k+1} f(x)\,dx - a_0 \leq s_k - a_0 \leq \int\limits_0^{k} f(x)\,dx, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

2.1.4 Řady s libovolnými členy

$$a_j^+ = \begin{cases} a_j & \text{pro } a_j > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad a_j^- = \begin{cases} -a_j & \text{pro } a_j < 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Věta 2.1.9 *(1) Jestliže řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ konvergují, pak konverguje i řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*

(2) Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ diverguje k ∞ a řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ konverguje, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje k ∞.

(3) Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ konverguje a řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ diverguje k ∞, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje k ∞.

Definice 2.1.4 Alternující řada je tvaru $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, kde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost s nezápornými členy.

Věta 2.1.10 *(Abel-Leibnitzovo kritérium) Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost s kladnými členy a platí*

(1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(2) posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je nerostoucí.

Pak řada $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ konverguje.
Máme odhad

$$a_n - a_{n+1} \leq \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} (-1)^j a_j \right| \leq a_n + a_m \quad \forall\, m, n,\ m > n$$

Předešlé nerovnice jsou ostré v případě, že posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ostře klesající.

Poznámka. Všechna kritéria pro konvergenci řad můžeme použít pro určení absolutní konvergence řad.

Násobení řad.

Mějme dvě řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. *Cauchyovým součinem* těchto dvou řad rozumíme řadu

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

kde

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Věta 2.1.11 *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou dvě absolutně konvergentní řady se součty a, b. Pak jejich Cauchyův součin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ je absolutně konvergentní řada se součtem ab.*

2.2 FUNKČNÍ ŘADY

2.2.1 Posloupnosti funkcí

Definice 2.2.1 Zobrazení množiny $\mathbb{N}_0$ do množiny funkcí nazýváme *posloupností funkcí* a značíme $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Definičním oborem posloupnosti rozumíme množinu $\mathcal{D} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(f_n)$.

Definice 2.2.2 Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovaná na množině $\mathcal{D}$ a $M \subset \mathcal{D}$. Jestliže pro každé $x \in M$ číselná posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje, říkáme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *konverguje bodově* k funkci f na množině M.

Definice 2.2.3 Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje na množině $M \subset \mathcal{D}$ *stejnoměrně k funkci* f jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a pro každé $x \in M$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Věta 2.2.1 *Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f na množině $M \subset \mathcal{D}$ právě tehdy, když*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Věta 2.2.2 *Konverguje-li posloupnost spojitých funkcí $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ k funkci f stejnoměrně na množině $M \subset \mathcal{D}$, pak funkce f je na M spojitá.*

Věta 2.2.3 *(limitní přechod při derivování) Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovaná na intervalu (a, b) s vlatnostmi:*

(a) funkce f_n mají konečné derivace na (a, b),

(b) alespoň pro jedno číslo $c \in (a, b)$ posloupnost $\{f_n(c)\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje,

(c) posloupnost derivací $\{f_n'\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje na (a, b) stejnoměrně k nějaké funkci $\widetilde{f}$.

Pak platí

(a) posloupnost funkcí f_n konverguje na intervalu (a, b) stejnoměrně k nějaké funkci f,

(b) pro každé $x \in (a, b)$ existuje derivace funkce f a platí

$$f'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \widetilde{f}(x)$$

Věta 2.2.4 *(limitní přechod při integrování) Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovaná na intervalu $[a, b]$ s vlatnostmi:*

(a) funkce f_n jsou spojité na intervalu $[a, b]$,

(b) posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje na (a, b) stejnoměrně k nějaké funkci f.

Pak pro všechna $a \leq c \leq d \leq b$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^d f_n(x)\,dx = \int_c^d \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_c^d f(x)\,dx$$

2.2.2 Obecné funkční řady

Definice 2.2.4 Nechť je dána funkční řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Rekurence

$$\begin{cases} s_0(x) &= f_0(x) \\ s_{n+1}(x) &= s_n(x) + f_{n+1}(x) \end{cases}$$

definuje indukcí jedinou posloupnost

$$s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j(x)$$

Posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *posloupností částečných součtů řady* tvořenou posloupností $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Užíváme symbol

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$$

Definice 2.2.5 Nechť je dána funkční řada $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$ definovaná na množině $\mathcal{D}$ a $M \subset \mathcal{D}$. Jestliže pro každé $x \in M$ posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje bodově (konverguje stejnoměrně) k funkci f, říkáme, že řada $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$ konverguje bodově (konverguje stejnoměrně) na množině M k funkci f.

Věta 2.2.5 *(Weierstrassovo kritérium) Nechť je dána funkční řada $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$ definovaná na množině $M \subset \mathcal{D}$. Jestliže existuje číselná konvegentní řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy taková, že platí*

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad \forall\, x \in M, \forall\, n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}$$

Pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M.

Věta 2.2.6 *(limitní přechod při derivování) Nechť pro funkce $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ platí:*

(a) funkce f_n mají konečné derivace v omezeném intervalu (a, b),

(b) řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(c)$ konverguje alespoň pro jedno číslo $c \in (a, b)$,

(c) řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ konverguje na (a, b) stejnoměrně.

Pak platí

(a) řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ konverguje na (a, b) stejnoměrně k funkci f

(b) pro každé $x \in (a, b)$ existuje derivace funkce f a platí

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$$

Věta 2.2.7 *(limitní přechod při integrování) Nechť* *(a) funkce f_n mají v intervalu (a, b) primitivní funkce F_n,*

(b) funkce F_n jsou vybrány tak, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$ konverguje aspoň v jednom bodě $c \in (a, b)$

(c) řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na (a, b) stejnoměrně.

Pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$ konverguje na (a, b) stejnoměrně a její součet je v intervalu (a, b) primitivní funkcí k součtu řady $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

2.2.3 Mocninné řady

Definice 2.2.6 Řadu funkcí tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

kde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je daná posloupnost a $c \in \mathbb{R}$ nazýváme *mocninnou řadou* o středu v bodě c. Čísla a_n nazýváme *koeficienty* mocninné řady.

Definice 2.2.7 Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninná řada. Číslo

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

nazýváme *poloměr konvergence* mocninné řady.

Věta 2.2.8 *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $\varrho \geq 0$. Pak*

(a) jestliže $\varrho > 0$ pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje absolutně pro každé $|x| < \varrho$,

(b) Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nekonverguje jestliže $|x| > \varrho$.

Věta 2.2.9 *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $\varrho > 0$. Pak mocninná řada konverguje stejnoměrně na intervalu $[-r, r]$ pro každé $0 < r < \varrho$.*

Vyjádření funkcí mocninnou řadou - Taylorova řada

Věta 2.2.10 *Nechť $\varrho > 0$ je poloměr konvergence mocninné řady*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$$

se součtem f na $(c-\varrho, c+\varrho)$. Pak funkce f má na tomto intervalu derivace všech řádů a platí

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

Definice 2.2.8 Je-li f funkce, která má v bodě $c \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů, pak mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce f se středem v bodě c.

Věta 2.2.11 *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Má-li funkce f v bodě $c \in I$ (c je střed intervalu I) derivace všech řádů, pak pro $x \in I$ platí*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

tehdy a jen tehdy, platí-li pro zbytek $R_{n+1}(x)$ v Taylorově vzorci $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ pro všechna $x \in I$.

Věta 2.2.12 *Nechť funkce f má tyto vlastnosti:*

(a) $f \in C^{\infty}(I)$,

(b) existují čísla c, M a interval I takový, že pro každé $x \in I$ a každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq c\,M^k$.

Pak Taylorova řada funkce f konverguje na intervalu I k funkci f, tj. platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \qquad \forall\, x \in I$$

kde c je střed intervalu I.

Kapitola 3

FOURIEROVY ŘADY

3.1 Prostory funkcí

Uvažujme interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ($(a, b) \subset \mathbb{R}$). Množinu všech funkcí spojitých na $[a, b]$ resp. na (a, b) označme $C([a, b])$ resp. $C((a, b))$. Symbolem $C^1([a, b])$, $C^1((a, b))$ ($C^2([a, b])$, $C^2((a, b))$) označme množinu všech funkcí jejichž první (druhá) derivace je spojitá na $[a, b]$ resp. na (a, b) .

3.1.1 Ortogonální systémy

Funkce f, g jsou ortogonální (kolmé) v prostoru $L_2((a, b))$, jestliže

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

Definice 3.1.1 Posloupnost funkcí $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $g_n \in L_2((a, b))$ se nazývá ortogonální systém, právě když

$$\int_a^b |g_n(x)|^2\,dx > 0 \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

a

$$\int_a^b g_n(x)g_m(x)\,dx = 0 \quad \forall n \neq m$$

Systém je ortonormální, jestliže navíc

$$\int_a^b \left|g_n(x)^2\right|\,dx = 1 \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Věta 3.1.1 *Nechť $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost lineárně nezávislých prvků v $L_2((a, b))$. Pak existuje takový ortonormální systém $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $L_2((a, b))$ tak, že platí*

$$Lin\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} = Lin\{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Množina funkcí
$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{\pi}{l}x, \dots, \cos\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x, \dots\right\}$$
tvoří na intervalu $[a, a+2l]$, $a \in \mathbb{R}$ ortogonální systém funkcí. Existují samozřejmě i jiné ortogonální systémy funkcí.

3.2 Fourierovy řady

Symbolem $\mathcal{P}_{2l}(\mathbb{R})$ označme množinu všech periodických funkcí s periodou $2l$.

Definice 3.2.1 Trigonometrická řada je funkční řada tvaru
$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right), \tag{3.1}$$
kde $x \in \mathbb{R}$ a a_n, b_n jsou reálné konstanty.

Věta 3.2.1 *Předpokládejme, že trigonometrická řada (3.1) konverguje stejnoměrně na intervalu $[a, a+2l]$ k funkci f. Pak platí*
$$a_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{3.2}$$
pro $n = 0, 1, 2, \dots$.

Definice 3.2.2 Nechť $f \in \mathcal{P}_{2l}(\mathbb{R})$. Trigonometrická řada jejíž koeficienty jsou dány vzorci (3.2) se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f a trigonometrická řada (3.1) s těmito koeficienty se nazývá Fourierova řada pro funkci f a píšeme
$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Poznámka 3.2.1 Řada napravo nemusí, ale může konvergovat k funkci f. Řada je funkci f přiřazena formálně. Otázkou je zda-li existuje množina funkcí jejíž Fourierova řada konverguje k této funkci.

Řekneme, že funkce $\tilde{f}$ je periodickým prodloužením funkce $f \in PC\left((a, a+2l)\right)$ jestliže platí
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a, a+2l), \\ f\left(x - 2(n-1)l\right) & x \in (a + 2(n-1)l, a + 2nl) \end{cases}$$
a platí $f(a + 2nl) = c$ pro každé $n \in \mathcal{Z}$, $c \in \mathbb{R}$ libovolné.
Řekneme, že funkce $\tilde{f}$ je standardizovaným periodickým prodloužením funkce $f \in PC((a, a+2l))$ jestliže platí
$$f(a + 2nl) = \frac{1}{2}\left[f(a+) + f(a + 2l-)\right]$$
pro každé $n \in \mathbb{Z}$.

Poznámka 3.2.2

(a) Nechť $f \in PC((-l,l))$ je lichá. Pak

$$a_n = 0 \qquad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

(b) Nechť $f \in PC((-l,l))$ je sudá. Pak

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad b_n = 0$$

Kosinová a sinová Fourierova řada.

Fourierovu řadu funkce, která je definovaná pouze na $[0,l]$ můžeme dodefinovat na $[-l,0]$ tak, že výsledná funkce bude sudá respektive lichá.

Nechť funkce f je integrovatelná na $(0,l)$.

(a) Sudé prodloužení.

$$f_S(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0,l), \\ f(-x) & x \in (-l,0) \end{cases}$$

Hodnota $f_S(0)$ může být libovolná.

(b) Liché prodloužení.

$$f_L(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0,l), \\ 0 & x = 0, \\ -f(-x) & x \in (-l,0) \end{cases}$$

Poznámka 3.2.3

(a) Když bude funkce f sudá dostaneme kosinovou řadu.

(b) Když bude funkce f lichá dostaneme sinovou řadu.

Otázky konvergence trigonometrických a Fourierových řad.

Definujme

$$\overline{f}(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-)\right]$$

Věta 3.2.2 *Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti rálných čísel a nechť konverguje řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$$

Pak trigonometrická řada

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

konverguje absolutně a stejnoměrně na $\mathbb{R}$ *ke spojité funkci* f *a je Fourierovou řadou funkce* f*.*

Věta 3.2.3 *Nechť* $f \in \mathcal{P}_{2l}(\mathbb{R})$, $f,\ f' \in PC\left([a, a+2l]\right)$*. Pak Fourierova řada pro funkci* f *konverguje k* $f(x)$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}$*, kde je funkce* f *spojitá a v bodech, kde není spojitá platí*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right) = \overline{f}(x)$$

Věta 3.2.4 *Mějme Fourierovu řadu příslušnou k funkci* f*. Nechť* $f \in C\left([a, a+2l]\right)$, $f(a) = f(a+2l)$ *a* $f' \in PC\left([a, a+2l]\right)$*, pak její Fourierova řada konverguje stejnoměrně k funkci* f *na* $[a, a+2l]$*.*

Kapitola 4

Dvojný integrál

4.1 Dvojný integrál na dvojrozměrném intervalu

Uvažujme interval $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ a nechť D_m^x, resp. D_n^y je dělení $[a, b]$, resp. $[c, d]$ s dělicími body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ a $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$. Uspořádanou dvojici (D_m^x, D_n^y) (pro stručnost budeme značit tuto dvojici D_{mn}) nazýváme *dělením intervalu* I (viz Obr.**??**). Každý interval $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ nazýváme *částečným intervalem* dělení D_{mn}. Říkáme, že systém intervalů I_{ij} pokrývá interval I. Množinu všech dělení intervalu I budeme značit $\mathcal{D}(I)$. Zjemnění dělení.

Obsah (míru) intervalu I_{ij} definujeme $\mu(I_{ij}) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) = \Delta\, x_i \Delta\, y_j$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Výraz $\nu(D_{MN}) = \max\{\nu(D_M^x), \nu(D_N^y)\}$ nazýváme *normou dělení*. Nulovou posloupností dělení nazýváme posloupnost dělení $\{D_k\}$ takovou, že $\lim_{k\to\infty} \nu(D_k) = 0$.

Definice 4.1.1 Nechť f je ohraničená funkce na I, D_{mn} dělení I s dělicími body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$. Přiřadíme dělení D_{mn} a funkci f *dolní Riemannův integrální součet* definovaný vztahem

$$s(f, D_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \mu(I_{ij}), \quad m_{ij} = \inf_{[x,y] \in I_{ij}} f(x, y) \tag{4.1}$$

a *horní Riemannův integrální součet* definovaný vztahem

$$S(f, D_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} \mu(I_{ij}), \quad M_{ij} = \sup_{[x,y] \in I_{ij}} f(x, y) \tag{4.2}$$

Definice 4.1.2 Nechť f je ohraničená funkce na I. Definujme *dolní Riemannův integrál* pro funkci f definovaný vztahem

$$\underline{\iint_I} f(x,y)\,dxdy = I^-(f) = \sup_D s(f,D) \tag{4.3}$$

a *horní Riemannův integrál* pro funkci f definovaný vztahem

$$\overline{\iint_I} f(x)\,dx = I^+(f) = \inf_D S(f,D) \tag{4.4}$$

Poznámka 4.1.1 Nechť f je omezená funkce na intervalu I

Definice 4.1.3 Řekneme, že funkce f je *Riemannovsky integrabilní* na I tehdy a jen tehdy jestliže je ohraničená na I a

$$I^-(f) = I^+(f) \tag{4.5}$$

V tomto případě se tato společná hodnota nazývá *Riemannův integrál* funkce f na I a značíme

$$\iint_I f(x,y)\,dxdy = I^-(f) = I^+(f) \tag{4.6}$$

Jestliže integrál existuje, řekneme, že funkce f je *integrabilní* (*integrovatelná*) na intervalu I, a píšeme $f \in \mathcal{R}(I)$.

Věta 4.1.1 *(test integrability) Nechť f je omezená funkce na intervalu I. Funkce f je Riemannovsky integrabilní na I tehdy a jen tehdy když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D tak, že*

$$S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon \tag{4.7}$$

Poznámka 4.1.2 Nechť f je omezená funkce na intervalu I a D je ekvidistantní dělení, tj. $x_i = a + (b-a)i/2^n$, $y_j = c + (d-c)j/2^n$, i, $j = 0, 1, \ldots, 2^n$. Definujme

$$m_{ij} = \inf_{[x,y]\in I_{ij}} f(x,y), \quad M_{ij} = \sup_{[x,y]\in I_{ij}} f(x,y)$$

Definujme

$$J^-(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)(d-c)}{2^{2n}} \sum_{i,j=1}^{2^n} m_{ij}, \quad J^+(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)(d-c)}{2^{2n}} \sum_{i,j=1}^{2^n} M_{ij}$$

Pak f je Riemannovsky integrabilní na I tehdy a jen tehdy když $J^-(f) = J^+(f)$.

Poznámka 4.1.3 Všimněte si, že při konstrukci Riemannova integrálu jsme předpokládali, že jak funkce f tak i interval $[a, b]$ jsou ohraničené.

Následující věta nám zaručuje existenci integrálu:

Věta 4.1.2 *Každá funkce spojitá na intervalu $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ je integrovatelná.*

Věta 4.1.3 *(Fubiniova věta) Nechť f je spojitá na $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Pak platí*

$$\iint\limits_I f(x, y)\, dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right) dx \tag{4.8}$$

Poznámka 4.1.4 Integrály v koncových členech řetězce rovností (4.8) se nazývají *dvojnásobné*.

Poznámka 4.1.5 Dá se jednoduše ukázat, že pokud f je integrovatelná funkce typu

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y) \quad \text{pro } [x, y] \in [a, b] \times [c, d],$$

můžeme v řetězci rovností (4.8) dále psát:

$$\iint\limits_I f(x, y)\, dxdy = \int\limits_c^d K(y)\, dy = \int\limits_c^d f_2(y) \left(\int\limits_a^b f_1(x)\, dx \right) dy = \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2$$

a

$$\iint\limits_I f(x, y)\, dxdy = \int\limits_a^b J(x)\, dx = \int\limits_a^b f_1(x) \left(\int\limits_c^d f_2(y)\, dy \right) dx = \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2,$$

kde

$$\mathcal{J}_1 = \int\limits_a^b f_1(x)\, dx, \quad \mathcal{J}_2 = \int\limits_c^d f_2(y)\, dy$$

Symbolem $\operatorname{int} \Omega$ značíme tzv. *vnitřek množiny* Ω. Je to zjednodušeně řečeno „množina Ω uvažovaná bez své hranice".

Věta 4.1.4 *Nechť f je ohraničená na $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ a $f(x, y) = 0$ na $\operatorname{int} I = (a, b) \times (c, d)$. Pak je funkce na I integrovatelná a platí*

$$\iint\limits_I f(x, y)\, dxdy = 0$$

4.2 Dvojný integrál na oblastech prvního a druhého druhu v $\mathbb{R}^2$.

Zavedeme pojem elementární oblasti v rovině:
Elementární oblast I. druhu v rovině je množina

$$\Omega_I = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, g(x) < y < G(x)\right\},$$

kde g a G jsou spojité funkce na intervalu $[a,b]$ a $g(x) \leq G(x)$ pro každé $x \in [a,b]$.
Elementární oblast II. druhu v rovině je množina

$$\Omega_{II} = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, h(y) < x < H(y)\right\},$$

kde h a H jsou spojité funkce na intervalu $[c,d]$ a $h(y) \leq H(y)$ pro každé $y \in [c,d]$.

Poznámka 4.2.1 *Všude v dalším textu této kapitoly budeme místo elementární oblast I. nebo II. druhu v rovině zkráceně mluvit o oblasti I. nebo II. druhu.*

Věta 4.2.1 (Fubiniova věta)

(a) Nechť existuje $\iint\limits_{\Omega_I} f(x,y)\,dxdy$ *a pro každé* $x \in [a,b]$ *nechť existuje integrál*

$$J(x) = \int\limits_{g(x)}^{G(x)} f(x,y)\,dy.$$

Pak existuje také dvojnásobný integrál

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{G(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

a platí rovnosti

$$\iint\limits_{\Omega_I} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b J(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{G(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

(b) Nechť existuje $\iint\limits_{\Omega_{II}} f(x,y)\,dxdy$ *a pro každé* $y \in [c,d]$ *existuje integrál*

$$K(y) = \int\limits_{h(y)}^{H(y)} f(x,y)\,dx.$$

Pak existuje také dvojnásobný integrál

$$\int_c^d \left(\int_{h(y)}^{H(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

a platí rovnosti

$$\iint_{\Omega_{II}} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d K(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_{h(y)}^{H(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Věta 4.2.2 *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je elementární oblast prvního nebo druhého druhu a nechť funkce f je na Ω spojitá a ohraničená. Pak je funkce f na Ω integrabilní.*

Poznámka 4.2.2 Integrovatelnost a hodnota dvojného integrálu nezávisí na chování funkce v konečném počtu bodů integračního oboru, nebo na sjednocení konečného počtu křivek konečné délky. Je tedy v předešlých větách nepodstatné, jestli integrujeme přes otevřený integrační obor, nebo jestli přidáme k tomuto oboru jakoukoliv část hranice oboru.

Věta 4.2.3 (*Základní vlastnosti dvojného integrálu.*) *Nechť Ω, Ω_1, Ω_2 jsou oblasti prvního nebo druhého druhu a nechť f, $g \in \mathcal{R}(\Omega)$ (tzn. f a g jsou funkce integrovatelné na Ω). Pak platí:*

(a)

$$\iint_{\Omega} (f(x,y) + g(x,y))\,dxdy = \iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy + \iint_{\Omega} g(x,y)\,dxdy.$$

(b)

$$\iint_{\Omega} kf(x,y)\,dxdy = k \iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy,$$

kde $k \in \mathbb{R}$.

(c) Jestliže pro každé $[x,y] \in \Omega$ platí $f(x,y) \leq g(x,y)\,dxdy$, pak

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy \leq \iint_{\Omega} g(x,y)\,dxdy.$$

(d) $|f| \in \mathcal{R}(\Omega)$ a platí

$$\left| \iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy \right| \leq \iint_{\Omega} |f(x,y)|\,dxdy.$$

(e) Jestliže pro každé $[x,y] \in \Omega$ platí že $|f(x,y)| \leq M$, pak

$$\left| \iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy \right| \leq \iint_{\Omega} |f(x,y)|\,dxdy \leq M\mu(\Omega).$$

(f) *Jestliže* $int\Omega_1 \cap int\Omega_2 = \emptyset$, $f \in \mathcal{R}(\Omega_1)$ *a* $f \in \mathcal{R}(\Omega_2)$, *pak je funkce* f *integrovatelná na* $\Omega_1 \cup \Omega_2$ *a platí*

$$\iint\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\Omega_2} f(x,y)\,dxdy.$$

(g) $f \cdot g \in \mathcal{R}(\Omega)$.

(h) *Jestliže je funkce* f *spojitá na* $\overline{\Omega}$, *pak existuje bod* $[\xi, \eta] \in \overline{\Omega}$ *tak, že*

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = f(\xi,\eta)\mu(\Omega).$$

Poznámka 4.2.3 Symbolem $\mu(\Omega)$ budeme v této kapitole rozumět míru (obsah) elementární oblasti Ω.
Symbolem $\overline{\Omega}$ značíme tzv. *uzávěr množiny* Ω. Je to zjednodušeně řečeno ,,množina Ω uvažovaná spolu se svou hranicí".

4.3 Transformace dvojného integrálu

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Uvažujme funkce $\varphi, \psi: \Omega \to \mathbb{R}$ a $G: \Omega \to \mathbb{R}^2$, $G = (\varphi, \psi)$ takové, že:

a) $\varphi,\ \psi \in C^1(\Omega)$, tj. φ, ψ jsou *spojitě diferencovatelné* na Ω;

b) $G = (\varphi, \psi)$ je *prosté* zobrazení, tj. pro všechna $[u_0, v_0]$, $[u_1, v_1] \in \Omega$ platí:
Jestliže $[u_0, v_0] \neq [u_1, v_1]$, pak $G(u_0, v_0) \neq G(u_1, v_1)$.

Uvažujme libovolný dvojrozměrný interval (tj. obdélník) $I \subset \Omega$ o vrcholech V_1, V_2, V_3 a V_4 a stranách délky Δu, Δv. Transformací $G = (\varphi, \psi)$ se zobrazí obdélník I na ,,křivočarý obdélník" $I^* = G(I)$ o vrcholech Q_1, Q_2, Q_3 a Q_4:

$$\begin{array}{lcl}
V_1 = [u, v] & \mapsto & Q_1 = [\varphi(u, v), \psi(u, v)], \\
V_2 = [u + \Delta u, v] & \mapsto & Q_2 = [\varphi(u + \Delta u, v), \psi(u + \Delta u, v)], \\
V_3 = [u + \Delta u, v + \Delta v] & \mapsto & Q_3 = [\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), \psi(u + \Delta u, v + \Delta v)], \\
V_4 = [u, v + \Delta v] & \mapsto & Q_4 = [\varphi(u, v + \Delta v), \psi(u, v + \Delta v)].
\end{array}$$

V dalším se pokusíme alespoň přibližně spočítat obsah obrazce $G(I)$.

S použitím Taylorovy věty máme:

$$\begin{aligned}
\varphi\,(u + \Delta u, v) &= \varphi\,(u, v) + \varphi'_u(u, v) \cdot \Delta u + R, \\
\varphi\,(u, v + \Delta v) &= \varphi\,(u, v) + \varphi'_v(u, v) \cdot \Delta v + R, \\
\psi\,(u + \Delta u, v) &= \psi\,(u, v) + \psi'_u(u, v) \cdot \Delta u + R, \\
\psi\,(u, v + \Delta v) &= \psi\,(u, v) + \psi'_v(u, v) \cdot \Delta v + R, \\
\varphi\,(u + \Delta u, v + \Delta v) &= \varphi\,(u, v) + \varphi'_u(u, v) \cdot \Delta u + \varphi'_v(u, v) \cdot \Delta v + R, \\
\psi\,(u + \Delta u, v + \Delta v) &= \psi\,(u, v) + \psi'_u(u, v) \cdot \Delta u + \psi'_v(u, v) \cdot \Delta v + R,
\end{aligned}$$

kde $R = R((\Delta u)^2, (\Delta v)^2, \Delta u \Delta v)$ jsou zbytky v Taylorově vzorci, které označíme ve všech předešlých výrazech stejně.

Všechny zbytky v naší úvaze zanedbáme a budeme uvažovat pouze body

$$\begin{array}{l}
Q'_1 = Q_1, \\
Q'_2 = Q_1 + \left[\varphi'_u(u, v) \cdot \Delta u,\ \psi'_u(u, v) \cdot \Delta u\right], \\
Q'_3 = Q_1 + \left[\varphi'_u(u, v) \cdot \Delta u + \varphi'_v(u, v) \cdot \Delta v,\ \psi'_u \Delta u + \psi'_v(u, v) \cdot \Delta v\right], \\
Q'_4 = Q_1 + \left[\varphi'_v(u, v) \cdot \Delta v,\ \psi'_v(u, v) \cdot \Delta v\right].
\end{array}$$

Obsah křivočarého lichoběžníka $G(I)$ je přibližně roven obsahu rovnoběžníka $Q'_1Q'_2Q'_3Q'_4$ o stranách $Q'_1Q'_2$ a $Q'_1Q'_4$.

Obsah tohoto rovnoběžníka je roven dvojnásobku obsahu $\Delta Q'_1Q'_2Q'_4$, což z analytické geometrie je absolutní hodnota z determinantu

$$\left| det \begin{pmatrix} x'_2 - x'_1 & y'_2 - y'_1 \\ x'_4 - x'_1 & y'_4 - y'_1 \end{pmatrix} \right|,$$

kde $Q_1' = [x_1', y_1']$, $Q_2' = [x_2', y_2']$, $Q_4' = [x_4', y_4']$. Po dosazení máme

$$\left|\det\begin{pmatrix} {\varphi'}_u(u,v)\Delta u & {\psi'}_u(u,v)\Delta u \\ {\varphi'}_v(u,v)\Delta v & {\psi'}_v(u,v)\Delta v \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} {\varphi'}_u(u,v)\Delta u & {\varphi'}_v(u,v)\Delta v \\ {\psi'}_u(u,v)\Delta u & {\psi'}_v(u,v)\Delta v \end{pmatrix}\right|$$
$$= \left|\det\left(\begin{pmatrix} {\varphi'}_u & {\varphi'}_v \\ {\psi'}_u & {\psi'}_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta u & 0 \\ 0 & \Delta v \end{pmatrix}\right)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} {\varphi'}_u & {\varphi'}_v \\ {\psi'}_u & {\psi'}_v \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} \Delta u & 0 \\ 0 & \Delta v \end{pmatrix}\right|$$
$$= \left|\det\begin{pmatrix} {\varphi'}_u & {\varphi'}_v \\ {\psi'}_u & {\psi'}_v \end{pmatrix}\right| |\Delta u|\,|\Delta v|\,.$$

Matice

$$\mathcal{J}(u,v) = \begin{pmatrix} {\varphi'}_u(u,v) & {\varphi'}_v(u,v) \\ {\psi'}_u(u,v) & {\psi'}_v(u,v) \end{pmatrix}$$

se nazývá *Jacobiho matice* transformace $G = (\varphi, \psi)$. Determinant

$$J(u,v) = det\,\mathcal{J}(u,v)$$

z této matice se nazývá *jakobián* této transformace.

Můžeme tedy psát

$$\mu\,(G(I)) \approx |J(u,v)|\,|\Delta u|\,|\Delta v| = |J(u,v)|\,\mu(I)$$

Dospěli jsme k jedné z nejdůležitějších vět:

Věta 4.3.1 *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $G = (\varphi, \psi) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je prosté zobrazení takové, že φ, $\psi \in C^1(\Omega)$ a jakobián $J(u,v) \neq 0$ v každém bodě $[u,v] \in \Omega$. Nechť $K \subset \Omega$ je uzavřená množina, která je sjednocením konečného počtu elementárních oblastí prvního nebo druhého druhu, a funkce f je spojitá na $G(\Omega)$. Pak platí*

$$\iint\limits_{G(K)} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{K} f\left(\varphi(u,v), \psi(u,v)\right)|J(u,v)|\;dudv.$$

Poznámka 4.3.1 Věta zůstane v platnosti, pokud zobrazení G nebude prosté, nebo jakobián bude roven nule na podmnožinách množiny K uvedených v Poznámce 4.2.2, budou-li jejich obrazy při zobrazení G opět množiny uvedených typů v $G(K)$. Pokud funkce f bude ohraničená na $G(K)$, pak také stačí, aby f byla spojitá na $G(K)$ s výjimkou množin uvedených v Poznámce 4.2.2.

Nejdůležitější typy transformací:

Posunutí. *Je dán bod $[u_0, v_0]$. Transformace $G = (\varphi, \psi)$ daná vztahy*

$$x = u_0 + u \equiv \varphi\,(u,v)\,,$$
$$y = v_0 + v \equiv \psi\,(u,v)$$

posouvá bod $[x,y]$ o orientovanou vzdálenost u_0 ve směru souřadnicové osy x a o orientovanou vzdálenost ve směru souřadnicové osy y.

$$J(u,v) = 1.$$

Zobecněné polární souřadnice. *Jsou dány konstanty a, $b > 0$.*

Transformace do zobecněných polárních souřadnic je dána vztahy:

$$\begin{aligned} x &= ar\cos t \equiv \varphi\left(r,t\right), \\ y &= br\sin t \equiv \psi\left(r,t\right). \end{aligned}$$

$$J(r,t) = abr.$$

Tato transformace $G = (\varphi, \psi)$ zobrazuje množinu $(0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ vzájemně jednoznačně na množinu $\mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y = 0\}$.

Inverzní zobrazení $G^{-1} = \left(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}\right)$ je dáno vztahy

$$r = \widetilde{\varphi}(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$t = \widetilde{\psi}(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & x \leq 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & x \leq 0, y < 0 \end{cases}$$

Poznámka 4.3.2 Speciální případ nastává pro volbu parametrů $a = b = 1$. V takovém případě mluvíme o polárních souřadnicích (vypouštíme přívlastek zobecněné).

4.3.1 Pojem křivky v $\mathbb{R}^n$.

Definice 4.3.1 Množinu $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ nazveme *křivkou v* $\mathbb{R}^n$, jestliže existuje spojité zobrazení $\Phi = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ intervalu I na množinu γ takové, že platí:

1) Zobrazení Φ je prosté s výjimkou konečně mnoha bodů.

2) Zobrazení Φ je po částech třídy C^1 na I, tj. Φ' je spojitá s výjimkou konečně mnoha bodů, v nichž existují jednostranné derivace, které mohou být různé.

3) Φ' má až na konečně mnoho bodů nenulovou hodnotu v každém bodě intervalu I.

Zobrazení pak Φ nazýváme *parametrizací* křivky γ.

Nechť $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že bod C je *k-násobným* bodem křivky γ, jestliže existuje právě k různých hodnot parametru $t_1, \dots, t_k \in [a, b]$ takových, že $C = \Phi(t_i)$ pro $i = 1,\ 2, \dots, k$. Křivka γ se nazývá *jednoduchá*, když nemá vícenásobné body.

Křivka γ se nazývá *uzavřená*, jestliže $\Phi(a) = \Phi(b)$. Uzavřenou křivku nazveme *jednoduchou*, jestliže nemá žádný vícenásobný bod kromě dvojnásobného bodu $\Phi(a)$.

Je-li I_1, I_2, …, I_n dělení intervalu $[a, b]$, pak obrazy dělicích intervalů $\Phi(I_1)$, $\Phi(I_2)$, …, $\Phi(I_n)$ jsou opět křivky. Posloupnost těchto křivek nazveme *dělením křivky* γ.

Definice 4.3.2 Je-li parametrizace Φ křivky γ prosté zobrazení a třídy C^1 na celém intervalu $[a, b]$ a má přitom nenulovou derivaci (v bodech a, b uvažujeme jednostranné derivace) v každém bodě intervalu $[a, b]$, nazýváme γ *obloukem* a zobrazení Φ jeho parametrizací.

Oblouk γ je *sjednocením* podoblouků $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, jestliže $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$ a oblouky γ_i, γ_j, $i \neq j$, mají společné nejvýše krajní body.

Definice 4.3.3 Nechť je daná křivka γ s parametrizací $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$ a $\Phi \in C^1$ na I. Pro $t \in I$ nazveme

$$\Phi'(t) := D\Phi(t)$$

tečným vektorem ke křivce γ v bodě t.

Příklady křivek.

- Graf spojité funkce

$$\begin{aligned} &f : I \to \mathbb{R} \\ &\Phi(t) = (t, f(t)), \quad t \in I \end{aligned}$$

- Přímka

$$\begin{aligned} &ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, |a| + |b| \neq 0 \\ &\Phi(t) = (x_0 + s_1 t, y_0 + s_2 t), \quad t \in (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

- Elipsa

$$\begin{aligned} &\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0 \\ &\Phi(t) = (x_0 + a \cos\, t, y_0 + b \sin\, t), \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

- Hyperbola

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ &\Phi(t) = (\pm a \cosh\, t, b \sinh\, t), \quad t \in (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

- Polokubická parabola

$$\begin{aligned} &y^2 - ax^3 = 0, \quad x \in [0, \infty),\ a > 0 \\ &\Phi(t) = \left(\frac{t^2}{\sqrt[3]{a}}, t^3 \right), \quad t \in (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

- Asteroida

$$\begin{aligned} &x^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3} = 0, \quad a > 0 \\ &\Phi(t) = (a \cos^3\, t, a \sin^3\, t), \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

- Steinerova hypocykloida

$$\begin{aligned} &\left(x^2 + y^2\right)^2 + 8ax\left(3y^2 - x^2\right) + 18a^2\left(x^2 + y^2\right) - 27a^4 = 0, \quad a > 0 \\ &\Phi(t) = (a\,(2 \cos\, t + \cos\, 2t), a\,(2 \sin\, t - \sin\, 2t)), \quad t \in [0, 2] \end{aligned}$$

- Cykloida

$$\begin{aligned} &x = a \arccos \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}, \quad y \in [0, 2a],\ a > 0 \\ &\Phi(t) = (a(t - \sin\, t), a(1 - \cos\, t)), \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

- Kardioida (srdcovka)

$$
\begin{aligned}
&\left(x^2+y^2\right)^2-6a^2\left(x^2+y^2\right)+8a^3x-3a^4=0, \quad a>0 \\
&\Phi(t)=\left(a\left(2\cos t-\cos 2t\right), a\left(2\sin t-\sin 2t\right)\right), \quad t\in[0,2\pi]
\end{aligned}
$$

- Descartův list

$$
\begin{aligned}
&x^3+y^3-3axy=0, \quad a>0 \\
&\Phi(t)=\left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3}\right), \quad t\in(-\infty,\infty),\ t\neq -1
\end{aligned}
$$

- Bernoulliova lemniskáta

$$
\begin{aligned}
&\left(x^2+y^2\right)^2+a^2\left(y^2-x^2\right)=0, \quad a\neq 0 \\
&\Phi(t)=\left(\frac{a\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{a\cos t\sin t}{1+\sin^2 t}\right), \quad t\in[-\pi,\pi] \\
&r=a\sqrt{\cos 2\varphi}, \qquad \varphi\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi\right]
\end{aligned}
$$

- Dioklova kisoida

$$
\begin{aligned}
&y^2-\frac{x^3}{a-x}=0, \quad a>0,\ x\neq a \\
&\Phi(t)=\left(\frac{at^2}{1+t^2}, \frac{at^3}{1+t^2}\right), \quad t\in(-\infty,\infty)
\end{aligned}
$$

- Logaritmická spirála

$$
\begin{aligned}
&\Phi(t)=b\left(\mathrm{e}^{at}\cos t, \mathrm{e}^{at}\sin t\right), \quad t\in(-\infty,\infty),\ a,b>0 \\
&r=a\mathrm{e}^{b\varphi}, \qquad \varphi\in[0,\infty)
\end{aligned}
$$

- Archimédova spirála

$$
\begin{aligned}
&\Phi(t)=\left(at\sin t, -at\cos t\right), \quad t\in[0,\infty),\ a>0 \\
&r=a\varphi, \qquad \varphi\in[0,\infty)
\end{aligned}
$$

- Šroubovice

$$
\Phi(t)=(a\cos t, b\sin t, ct), \quad t\in[0,2\pi],\ a,b>0, c\neq 0.
$$

4.3.2 Křivkový integrál ve skalárním poli

Délka křivky

Nechť je dán oblouk $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, který má parametrické rovnice

$$x = \Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)), \quad t \in [a, b].$$

My nepotřebujeme žádnou teorii míry k definici délky křivky v $\mathbb{R}$. Definujme dělení D_N intervalu $I = [a, b]$ s dělicími body $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = b$ a počítejme

$$\sum_{i=1}^{N} \|\Phi(t_{i-1}) - \Phi(t_i)\| = \sum_{i=1}^{N} \|[\varphi_1(t_{i-1}), \varphi_2(t)(t_{i-1}), \ldots, \varphi_n(t_{i-1})] - [\varphi_1(t_i), \varphi_2(t)(t_i), \ldots, \varphi_n(t_i)]\|$$

a definujme *délku křivky* jako

$$L(\gamma) = \sup_{D_N} \sum_{i=1}^{N} \|[\varphi_1(t_{i-1}), \varphi_2(t)(t_{i-1}), \ldots, \varphi_n(t_{i-1})] - [\varphi_1(t_i), \varphi_2(t)(t_i), \ldots, \varphi_n(t_i)]\| < \infty$$

Pak řekneme, že křivka γ je *rektifikovatelná*.

Nechť je nyní dán oblouk $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ parametrickými rovnicemi

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [a, b]$$

Pro $i = 1, 2, \ldots, N$ máme z Lagrangeovy věty

$$\begin{aligned} \|(\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i), \psi(t_{i-1}) - \psi(t_i))\| &= \sqrt{(\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i-1}) - \psi(t_i))^2} \\ &= \sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\eta_i))^2}\,\Delta t_i \end{aligned} \tag{4.9}$$

kde ξ_i, $\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Protože funkce φ a ψ mají spojité derivace existuje $K > 0$ tak, že $|\varphi'(t)|$, $|\psi'(t)| \le K$ pro každé $t \in [a, b]$.

$$L(\gamma, D_N) \le \sum_{1}^{N} \sqrt{K^2 + K^2}\,\Delta t_i \le \sqrt{2} K (b - a)$$

Dělení D_N bylo libovolné a proto existuje $\sup_D L(\gamma, D)$.

Věta 4.3.2 *Číslo $L(\gamma)$ je délkou oblouku γ, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu I tak, že pro každé zjemnění $\widetilde{D}$ dělení D platí*

$$\left| L(\gamma, \widetilde{D}) - L(\gamma) \right| < \varepsilon$$

Věta 4.3.3 *V případě parametrických rovnic $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a, b]$, je tedy délka oblouku γ dána vztahem*

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt,$$

Křivkový integrál ve skalárním poli (neorientovaný křivkový integrál)

V každém bodě M oblouku γ známe hustotu $\varrho(M)$. Chceme znát hmotnost celé křivky. Na oblouku $\widehat{A_iA_{i+1}}$ definujme

$$m_i = \min_{[x,y]\in\widehat{A_{i-1}A_i}} \varrho(x,y) \quad M_i = \max_{[x,y]\in\widehat{A_{i-1}A_i}} \varrho(x,y), \ \forall\, i = 1, 1, \ldots, N$$

Označme Δs_i délku podoblouku $\widehat{A_{i-1}A_i}$. Označme Δh_i hmotnost podoblouku $\widehat{A_{i-1}A_i}$. Pro hmotnost tohoto podoblouku platí

$$m_i\Delta s_i \leq \Delta h_i \leq M_i\Delta s_i, \quad \forall\, i = 1, \ldots, N$$

Hmotnost h celého oblouku bude tedy

$$h = \sum_{i=1}^{N} \Delta h_i$$

a

$$s(\varrho, D_N) = \sum_{i=1}^{N} m_i\Delta s_i \leq h \leq \sum_{i=1}^{N} M_i\Delta s_i = S(\varrho, D_N)$$

Výrazy

$$s(\varrho, D_N) = \sum_{i=1}^{N} m_i\Delta s_i \quad S(\varrho, D_N) = \sum_{i=1}^{N} M_i\Delta s_i$$

jsou dolní a horní Riemannův integrální součet pro funkci ϱ a dělení D_N.

V naší úvaze, ale můžeme místo hustoty ϱ uvažovat libovolnou spojitou funkci f na oblouku γ.

Definice 4.3.4 Jestliže platí

$$\sup_{D_N} s(f, D_N) = \inf_{D_N} S(f, D_N)$$

pak tuto hodnotu značíme

$$\int_\gamma f(M)\, ds = \int_\gamma f(x,y)\, ds.$$

a nazveme ji *křivkovým integrálem* funkce f přes křivku γ.

Věta 4.3.4 *Nechť oblouk γ je dán parametrickými rovnicemi*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [a, b]$$

a funkce $f(x,y)$ je spojitá na oblouku γ. Pak platí

$$\int_\gamma f(M)\, ds = \int_\gamma f(x,y)\, ds = \int_a^b f\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt.$$

Poznámka 4.3.3 Je-li dána křivka předpisem $y = g(x)$, $x \in [a, b]$ a derivace g' je spojitá na $[a, b]$, pak platí

$$\int_{\gamma} f(x, y)\, ds = \int_{a}^{b} f\left(x, g(x)\right) \sqrt{1 + \left(g'(x)\right)^2}\, dx.$$

Je-li dána křivka předpisem $x = h(y)$, $y \in [c, d]$ a derivace h' je spojitá na $[c, d]$, pak platí

$$\int_{\gamma} f(x, y)\, ds = \int_{c}^{d} f\left(h(y), y\right) \sqrt{1 + \left(h'(y)\right)^2}\, dy.$$

Věta 4.3.5 *Nechť oblouk γ je dán parametrickými rovnicemi*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad t \in [a, b]$$

a funkce $f(x, y, z)$ je spojitá na oblouku γ. Pak platí

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(M)\, ds &= \int_{\gamma} f(x, y, z)\, ds \\ &= \int_{a}^{b} f\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right) \sqrt{\dot{\varphi}^2\,(t) + \dot{\psi}^2\,(t) + \dot{\chi}^2\,(t)}\, dt. \end{aligned}$$

Věta 4.3.6 *(Základní vlastnosti křivkového integrálu ve skalárním poli)*

(a) Linearita. Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je oblouk a funkce f a g jsou spojité na oblouku γ. Pak platí

$$\int_{\gamma} (c_1\, f + c_2\, g)(M)\, ds = c_1 \int_{\gamma} f(M)\, ds + c_2 \int_{\gamma} g(M)\, ds,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné reálné konstanty.

(b) Aditivita. Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je křivka, která je sjednocením dvou oblouků γ_1, γ_2 a funkce f je spojitá na křivce γ. Pak platí

$$\int_{\gamma} f(M)\, ds = \int_{\gamma_1} f(M)\, ds + \int_{\gamma_2} f(M)\, ds.$$

Literatura

[1] Bouchala J.: *Matematická analýza 3 - Diferenciální a integrální počet vektorových funkcí.* VŠB TU Ostrava (2001).

[2] Drábek P., Míka S.: *Matematická analýza II.* FAV ZU Plzeň (1997).

[3] Eliáš J., Horváth J., Kajan J., Šulka R.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky IV.* Alfa, Bratislava (1979).

[4] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. Function of One Variable.* Birkhäuser, Boston (2003).

[5] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. Approximation and Discrete Processes.* Birkhäuser, Boston (2004).

[6] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. Linear and Metric Structures and Continuity.* Birkhäuser, Boston (2007).

[7] Holenda J.: *Řady.* SNTL Praha (1990).

[8] Jarník V.: *Diferenciální počet I.* ČAV Praha (1963).

[9] Jarník V.: *Diferenciální počet II.* ČAV Praha (1963).

[10] Jarník V.: *Integrální počet II.* ČAV Praha (1963).

[11] Kalas J., Kuben J.: *Integrální počet funkcí více proměnných.* MU Brno (2009).

[12] Kufner A., Kadlec J.: *Fourierovy řady.* Academia Praha (1969).

[13] Nagy J., Nováková E., Vacek M.: *Vektorová analýza.* SNTL Praha (1984).

[14] Ráb M.: *Zobrazení a Riemannův integrál v* $\mathbb{E}^n$. SPN Praha (1988).