Kapitola 1

POSLOUPNOSTI REÁLNÝCH ČÍSEL

1.1 Základní pojmy

Definice 1. Zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se nazývá posloupností prvků z $\mathbb{R}$, nebo-li posloupností reálných čísel, $f(n)$ značíme a_n nebo y_n, posloupnost zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka. Okolím bodu $+\infty$ $(-\infty)$ rozumíme libovolný interval (k, ∞) $((-\infty, \ell))$, kde k, $\ell \in \mathbb{R}$.

Definice 2. O posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ řekneme, že má limitu $L \in \overline{\mathbb{R}}$ jestliže ke každému okolí $U_\varepsilon(L)$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí, že $a_n \in U_\varepsilon(L)$. Limitu značíme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{nebo} \quad a_n \to L \text{ jakmile } n \to \infty$$

Poznámka.

- Jestliže $L \in \mathbb{R}$ říkáme, že existuje vlastní limita (posloupnost *konverguje*), jestliže $L = \pm\infty$ říkáme, že existuje nevlastní limita (posloupnost *diverguje*).
- Jestliže $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *neklesající*
- jestliže $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *rostoucí*,
- jestliže $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *nerostoucí*,
- jestliže $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *klesající*.
- Takové posloupnosti nazýváme souhrně *monotonní*.

1.2 Vlastnosti posloupností

POSV1 **Věta 1.2.1**

(a) *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

(b) *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

(c) *Každá monotonní posloupnost má limitu.*

1) *Je-li* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *neklesající (rostoucí) posloupnost, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n\{a_n\}$,

2) *Je-li* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nerostoucí (klesající) posloupnost, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_n\{a_n\}$.

(d) *Předpokládejme, že posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu* L.

1) *Jestliže* $L > 0$ $(L < 0)$ *pak existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že* $a_n > 0$ $(a_n < 0)$ *pro každé* $n \geq n_0$

2) *Jestliže existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že* $a_n \geq 0$ $(a_n \leq 0)$ *pro každé* $n \geq n_0$ *pak* $L \geq 0$ $(L \leq 0)$.

POSD1 **Důsledek 1.2.2** *Monotonní posloupnost je konvergentní tehdy a jen tehdy, když je omezená.*

Poznámka. Počítání se symboly $\pm\infty$. Definujeme

- $a + (+\infty) = +\infty$, $a + (-\infty) = -\infty$, $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$,
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$,
- Jestliže $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ pak $a(+\infty) = +\infty$, $a(-\infty) = -\infty$,
- Jestliže $a < 0$, $a \in \mathbb{R}$ pak $a(+\infty) = -\infty$, $a(-\infty) = +\infty$,
- Jestliže $a \in \mathbb{R}$ pak $a/(+\infty) = 0$, $a/(-\infty) = 0$.

POSV3 **Věta 1.2.3** ***(Pravidla pro počítání s limitami)*** *Nechť pro posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí, že $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, A, $B \in \overline{\mathbb{R}}$. Označme $\odot$ jeden ze symbolů $+$, $-$, $\cdot$, $/$. Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \odot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \odot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = A \odot B,$$

pokud má pravá strana smysl.

POSV4 **Věta 1.2.4** ***(Věta o sevření)*** *Nechť jsou dány posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Předpokládejme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, takové, že $a_n \le c_n \le b_n$ pro každé $n \ge n_0$. Jestliže $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$ pak $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.*

POSD2 **Důsledek 1.2.5** *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou dvě posloupnosti a* $L \in \mathbb{R}$. *Jestliže existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *takové, že*

$$|a_n - L| \leq b_n, \quad \forall\, n \geq n_0 \quad a \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

POSV5 **Věta 1.2.6**

(a) *Jestliže* $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$ *pak* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L| \in \overline{\mathbb{R}}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *tehdy a jen tehdy když* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

(c) *Nechť* $a_n \geq 0$, *pro* $n \in \mathbb{N}$ *a* $b > 0$ *je libovolné reálné číslo. Jestliže* $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ *pak* $\lim_{n\to\infty} a_n^b = L^b$.

(d) *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, $b > 0$ *pak* $\lim_{n\to\infty} b^{a_n} = b^L$.

(e) *Jestliže* $|a| < 1$ *pak* $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

(f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ *pro každé* $a > 0$.

(g) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

POSV6 **Věta 1.2.7** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a posloupnost* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je omezená. Pak* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

POSVBC **Věta 1.2.8** *(Bolzano-Cachyova podmínka) Posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentní tehdy a jen tehdy, když pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$*, tak, že pro každé* n*,* $m \geq n_0$ *platí*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

1.3 Podposloupnosti, liminf a limsup

Definice 3. Říkáme, že $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *podposloupnost* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jestliže existuje funkce $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ která je rostoucí, tj. $k_1 < k_2 < \dots$, taková, že

$$p_n = a_{k_n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

POSV7 **Věta 1.3.1** *Jestliže* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu* $L \in \overline{\mathbb{R}}$*, pak jakákoliv podposloupnost posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má tutéž limitu* L.

Poznámka.

- Poznamenejme, že $k_n \geq n$ protože $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je rostoucí.
- Jestliže $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má dvě různé podposloupnosti s různými limitami, pak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá žádnou limitu.

Definice 4. Uvažujme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Posloupnosti definované

$$\ell_n = \inf_{k \geq n} \{a_k\} \qquad L_n = \sup_{k \geq n} \{a_k\}$$

jsou neklesající resp. nerostoucí posloupnost. Tedy existují limity

$$\lim_{n \to \infty} \ell_n = \sup_k \ell_k, \qquad \lim_{n \to \infty} L_n = \inf_k L_k$$

s hodnotami v $\overline{\mathbb{R}}$. Označme

$$\liminf_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \ell_n = \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} \{a_k\}$$

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} L_n = \lim_{n \to \infty} \sup_{k \geq n} \{a_k\}$$

Tyto limity nazýváme *limesinferior* (*dolní limita*) *limessuperior* (*horní limita*).

POSV8 **Věta 1.3.2** *Uvažujme posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(a) *Posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má* liminf *a* limsup *v* $\overline{\mathbb{R}}$.

(b)

$$\begin{aligned} &\mathrm{liminf}_{n\to\infty} a_n \leq \mathrm{limsup}_{n\to\infty} a_n \\ &\mathrm{liminf}_{n\to\infty} a_n = -\mathrm{limsup}_{n\to\infty}(-a_n) \end{aligned}$$

(c) *Platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{liminf}_{n\to\infty} a_n = \mathrm{limsup}_{n\to\infty} a_n = L$$

(d) $\mathrm{limsup}_{n\to\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$ *tehdy a jen tehdy*

(i) *ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že pro každé* $n \geq n_0$ *platí*

$$a_n < L + \varepsilon,$$

(ii) *existuje podposloupnost* $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *která konverguje k číslu* L.

Kapitola 2

NEKONEČNÉ ŘADY

2.1 ČÍSELNÉ ŘADY

2.1.1 Úvod

Definice 2.1.1 Nechť je daná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel. Rekurence

$$\begin{cases} s_1 &= a_1 \\ s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} \end{cases}$$

definuje indukcí jedinou posloupnost

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *posloupností částečných součtů řady* tvořenou posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pro limitu posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ (jestliže existuje!) užíváme symbol

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{2.1.1}$$

NR

a nazýváme *nekonečnou řadou* tvořenou posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice 2.1.2 Jestliže posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje k reálnému číslu L, říkáme že nekonečná řada (2.1.1) *konverguje* a číslo L nazýváme součetem této řady.

Řadu $r_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j$ nazýváme zbytkem řady $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ po n-tém členu.

NR1 **Věta 2.1.3** *Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

BC **Věta 2.1.4** *(Bolzano-Cachyova podmínka) Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a každé $m \in \mathbb{N}$ platí*

$$|a_{n+1} + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon \tag{2.1.2}$$

BCC

NR2 **Věta 2.1.5**

(a) *Řada konverguje tehdy a jen tehdy, když konverguje zbytek řady.*

(b) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní pak je konvergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ *a platí* $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *pro každé* $c \in \mathbb{R}$.

(c) *Jsou-li řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní pak je konvergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *a platí* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Definice 2.1.6

(a) Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje *absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(b) Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje *relativně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje.

NR3 **Věta 2.1.7** *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, pak daná řada konverguje a platí*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

2.1.2 Kritéria konvergence řad

NR5 **Věta 2.1.8**

(a) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy. Jestliže existuje* $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *tak, že pro každé* $n \geq n_0$ *platí* $a_n \leq b_n$ *pak:*

(1) *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje pak je konvergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(2) *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje pak je divergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(b) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady s kladnými členy a předpokládejme, že*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}$$

pak

(1) *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje pak je konvergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(2) *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje pak je divergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

NR6 **Věta 2.1.9**

(a) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy.*

(1) *Předpokládejme, že existuje* $0 \leq K < 1$ *a* $p \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $n \geq p$

$$\sqrt[n]{a_n} \leq K < 1$$

Pak daná řada konverguje a

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \leq \frac{K^p}{1-K}$$

(2) *Předpokládejme, že existuje* $p \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $n \geq p$

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$$

Pak daná řada diverguje.

(b) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

(1) *Předpokládejme, že existuje* $0 \leq K < 1$ *a* $p \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $n \geq p$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq K < 1$$

Pak daná řada konverguje a

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \leq \frac{a_p}{1-K}$$

(2) *Předpokládejme, že existuje* $p \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $n \geq p$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

Pak daná řada diverguje.

NR7 **Věta 2.1.10**

(a) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy taková, že*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$$

(1) *Je-li* $0 \leq K < 1$ *pak daná řada konverguje.*

(2) *Je-li* $K > 1$ *pak daná řada diverguje.*

(3) *Je-li* $K = 1$ *pak nelze o konvergenci řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *rozhodnout.*

(b) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy taková, že*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = K$$

(1) *Je-li* $0 \leq K < 1$ *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(2) *Je-li* $K > 1$ *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

(3) *Je-li* $K = 1$ *pak nelze o konvergenci řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *rozhodnout.*

2.1.3 Další důležitá kritéria konvergence řad

NR8 **Věta 2.1.11** *(Integrální kritérium) Nechť* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *je daná řada s nezápornými členy a nechť existuje funkce* f *taková, že*

(1) funkce f *je spojitá, nezáporná a nerostoucí na* $[n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$,

(2) platí $f(k) = a_k$ *pro každé* $k \geq n$, $k \in \mathbb{N}$.

Pak daná řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje právě když konverguje integrál* $\int\limits_n^{\infty} f(x)\,dx$.

Odhad pro případ $n = 1$

$$\int\limits_1^{k+1} f(x)\,dx - s_1 \leq s_k - s_1 \leq \int\limits_1^{k} f(x)\,dx, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

NR9 **Věta 2.1.12** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je daná řada s nezápornými členy.*

(1) Existuje-li $k \in \mathbb{N}$ *a* $\alpha > 1$ *tak, že platí*

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq \alpha > 1, \quad \forall\, n \geq k$$

pak daná řada konverguje.

(2) Je-li

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leq 1,\quad \forall\, n\geq k$$

pak daná řada diverguje.

NR10 **Věta 2.1.13** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je daná řada s nezápornými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=K$$

(1) Je-li $K>1$ *pak daná řada konverguje.*

(2) Je-li $K<1$ *pak daná řada diverguje.*

2.1.4 Řady s libovolnými členy

$$a_n^+=\begin{cases} a_n & \text{pro } a_n>0 \\ 0 & \text{jinak}\end{cases}\qquad a_n^-=\begin{cases} -a_n & \text{pro } a_n<0 \\ 0 & \text{jinak}\end{cases}$$

NR11 **Věta 2.1.14** *(1) Jestliže řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ *konvergují, pak konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(2) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ *diverguje k* ∞ *a řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ *konverguje, pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje k* ∞.

(3) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ diverguje k ∞, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $-\infty$.

Definice 2.1.15 Alternující řada je tvaru $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost s nezápornými členy.

NR12 **Věta 2.1.16** *(Leibnitzovo kritérium) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost s kladnými členy a platí*

(1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(2) posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ konverguje.
Máme odhad

$$a_k - a_{k+1} \leq \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^n a_n \right| \leq a_k + a_m \quad \forall\, m, k,\ m > k$$

Předešlé nerovnice jsou ostré v případě, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ostře klesající.

Poznámka. Všechna kritéria pro konvergenci řad můžeme použít pro určení absolutní konvergence řad.

2.1.5 Další kritéria konvergence řad

NR14 **Věta 2.1.17** *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou dvě posloupnosti reálných čísel a* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, *Jestliže zároveň platí:*

(1) řada $\sum_{k=1}^{\infty} s_k (b_k - b_{k+1})$ *konverguje,*

(2) existuje konečná limita $\lim_{n\to\infty} s_n b_{n+1}$,

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Důsledekem předešlé Věty jsou následující dvě kritéria pro řady, které nemusí konvergovat absolutně.

NR15 **Tvrzení 2.1.18** *(Abel-Leibnitzovo kritérium) Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a posloupnost* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je monotonní a ohraničená. Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

NR16 **Tvrzení 2.1.19** *(Dirichletovo kritérium) Nechť poslopnost částečných součtů řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je ohraničená. Dále nechť posloupnost* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerostoucí a* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. *Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Poznámka. Položíme-li $a_n = (-1)^{n+1}$ a uvážíme-li, že nerostoucí nulová posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zároveň nezáporná, vidíme, že Dirichletovo kritérium je zobecněním Abel-Leibnitzova kritéria.

PŘÍKLADY

Číselné řady

Rozhodněte o konvergenci řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n+1} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{n^n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (n+1)} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt[k]{n}}, \quad k \in \mathbb{N}, 0 < a < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2} \right)^2 \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{1}{n} \right) \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln\, n)^{\ln\, n}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(n+1)!} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!} \qquad \text{[divergentní]}$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p$$

v závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$.

Výsledek

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n}}{1+\sin\frac{2}{n}-\cos\frac{2}{n}}\frac{1}{n}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}$$

Výsledek

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Výsledek: konverguje podle odmocninivého kritéria

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3}. $[n >]$

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-2}.

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-1}. $[n > \mathrm{e}^{10}]$

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-2}.

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3}.

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{7n}\right)^n$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3}. $[n = 9]$

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-2}. $[n = 9]$

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \ln(1+2^n)$$

$[\ln(1+2^n) \leq \ln 2^{n+1} = (n+1)\ln 2]$ pak podilovym a srovnavacim, konverguje

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right) \sin 2^n \tag{2.1.3}$$

$\left[|\sin 2^n| \leq 1, \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right) \leq \pi \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$ pak srovnavacim, konverguje

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^{n^2}}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3}. []

Určte sdoučet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

aby chyba byla menší než 10^{-2}. []

Kapitola 3

Funkční řady

3.0.6 Posloupnosti funkcí

Definice 3.0.20 Zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny funkcí $\mathcal{F}(M)$, $M \subset \mathbb{R}$ nazýváme *posloupností funkcí* a značíme $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice 3.0.21 Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaná na množině M. Jestliže pro každé $x \in M$ číselná posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, říkáme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje bodově* k funkci f na množině M.

Definice 3.0.22 Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje na množině $M \subset \mathcal{D}$ *stejnoměrně k funkci* f jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a pro každé $x \in M$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{3.0.1}$$

BCP

Poznámka. Stejnoměrnou konvergenci označujeme $f_n \rightrightarrows f$.

PFV1 **Věta 3.0.23** *(Bolzano-Cachyova podmínka) Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f na množině $M \subset \mathcal{D}$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$, každé $m \geq n_0$ a každé $x \in M$ platí*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{3.0.2}$$

BCC

PFD1 **Důsledek 3.0.24** *Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f na množině $M \subset \mathcal{D}$ právě tehdy, když*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

PFV3 **Věta 3.0.25** *Konverguje-li posloupnost spojitých funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ k funkci f stejnoměrně na množině $M \subset \mathcal{D}$, pak funkce f je na M spojitá.*

3.1 Obecné funkční řady

Definice 3.1.1 Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Rekurence

$$\begin{cases} s_1(x) &= f_1(x) \\ s_{n+1}(x) &= s_n(x) + f_{n+1}(x) \end{cases}$$

definuje indukcí jedinou posloupnost

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

Posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *posloupností částečných součtů řady* tvořenou posloupností $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Pro limitu posloupnosti $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (jestliže existuje!) užíváme symbol

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \tag{3.1.1}$$

NRF

a nazýváme *nekonečnou funkční řadou* tvořenou posloupností funkcí $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Definice 3.1.2 Nechť je dána funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ definovaná na množině $\mathcal{D}$ a $M \subset \mathcal{D}$. Jestliže pro každé $x \in M$ posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje bodově (konverguje stejnoměrně) k funkci f, říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *konverguje bodově* (*konverguje stejnoměrně*) na množině M k funkci f.

NFRV1 **Věta 3.1.3** *(Weierstrassovo kritérium) Nechť je dána funkční řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *definovaná na množině* $M \subset \mathcal{D}$. *Jestliže existuje číselná konvegentní řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *s nezápornými členy taková, že platí*

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad \forall\, x \in M, \forall\, n \geq n_0,\ n_0 \in \mathbb{N}$$

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na množině* M.

3.1.1 Mocninné řady

Definice 3.1.4 Řadu funkcí tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

kde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je daná posloupnost a $c \in \mathbb{R}$ nazýváme *mocninnou řadou* o středu v bodě c. Čísla a_n nazýváme *koeficienty* mocninné řady.

MRV1 **Věta 3.1.5** *(Abelova) Konverguje-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ v bodě $r \neq 0$, pak řada konverguje absolutně pro každé je $x \in (-r, r)$.*

Definice 3.1.6 Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninná řada. Číslo

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

nazýváme *poloměr konvergence* mocninné řady.

MRV2 **Věta 3.1.7** *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $\varrho \geq 0$. Pak*

(a) jestliže $\varrho > 0$ pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje absolutně pro každé $|x| < \varrho$,

(b) Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nekonverguje jestliže $|x| > \varrho$.

MRT1

Nechť existuje $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, pak poloměr konvergence je

$$\varrho = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

MRV3 **Věta 3.1.8** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $\varrho > 0$.

- *Pak mocninná řada konverguje stejnoměrně na intervalu* $[c-r, c+r]$ *pro každé* $0 < r < \varrho$.
- *Konverguje-li mocninná řada v bodě* $c+\varrho$, *pak konverguje stejnoměrně na intervalu* $[c-r, c+\varrho]$ *pro každé* $0 < r < \varrho$.
- *Konverguje-li mocninná řada v bodě* $c-\varrho$, *pak konverguje stejnoměrně na intervalu* $[c-\varrho, c+r]$ *pro každé* $0 < r < \varrho$.

MRV4 **Věta 3.1.9** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $\varrho > 0$. *Pak součet mocninné řady je spojitá funkce na intervalu, kde daná řada konverguje stejnoměrně.*

MRV5 **Věta 3.1.10** *Nechť* $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $\varrho > 0$. *Pak odpovídající mocninná řada derivací má stejný poloměr konvergence a součet řady s má derivaci na intervalu* $(c-\varrho, c+\varrho)$ *a platí*

$$(s(x))' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x-c)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$$

MRV6 **Věta 3.1.11** *Nechť* $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $\varrho > 0$. *Pak odpovídající mocninná řada integrálů má stejný poloměr konvergence a součet řady má integrál na intervalu* $(c-\varrho, c+\varrho)$ *a platí*

$$\int_c^x s(t)dt = \int_c^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-c)^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_c^x a_n(t-c)^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$$

Algebraické operace s mocninnými řadami

MRV7 **Věta 3.1.12** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ *jsou dvě mocninné řady s poloměry konvergence* $\varrho_1 > 0$ *a* $\varrho_2 > 0$. *Pak řady*

- $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-c)^n$$

  má poloměr konvergence $\sigma = \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$.

- $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}(x-c)^n\right)$$

  má poloměr konvergence $\sigma = \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$.

Vyjádření funkcí mocninnou řadou - Taylorova řada

Taylorova řada je důležitým příkladem mocninných řad.

TRV1 **Věta 3.1.13** *Nechť $\varrho > 0$ je poloměr konvergence mocninné řady*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

se součtem f na $(c-\varrho, c+\varrho)$. Pak funkce f má na tomto intervalu derivace všech řádů a platí

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \qquad k \in \mathbb{N}_0 \tag{3.1.2}$$ TR1

Definice 3.1.14 Je-li f funkce, která má v bodě $c \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů, pak mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce f se středem v bodě c.

TRV2 **Věta 3.1.15** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Má-li funkce f v bodě $c \in I$ (c je střed intervalu I) derivace všech řádů, pak pro $x \in I$ platí*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

tehdy a jen tehdy, platí-li pro zbytek $R_{n+1}(x)$ v Taylorově vzorci $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ pro všechna $x \in I$.

TRV3 **Věta 3.1.16** *Nechť funkce f má tyto vlastnosti:*

(a) $f \in C^\infty(I)$,

(b) existují čísla c, M taková, že pro každé $x \in I$ a každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq c\,M^k$.

Pak Taylorova řada funkce f konverguje na intervalu I k funkci f, tj. platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \qquad \forall\, x \in I$$

kde c je střed intervalu I.

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}, \qquad \forall\, x \in (-1,1]$$

$$\mathrm{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \qquad \forall\, x \in [-1,1]$$

Binomická řada $m \in \mathbb{R} \setminus \{\{0\} \cup \mathbb{N}\}$, $x > -1$

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1}$$

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$$

konverguje v intervalu $(-1, 1)$.

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n)!} x^{2n}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Kapitola 4

FOURIEROVY ŘADY

Uvažujme interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ($(a, b) \subset \mathbb{R}$). Množinu všech funkcí spojitých na $[a, b]$ resp. na (a, b) označme $C([a, b])$ resp. $C((a, b))$. Symbolem $C^1([a, b])$, $C^1((a, b))$ ($C^2([a, b])$, $C^2((a, b))$) označme množinu všech funkcí jejichž první (druhá) derivace je spojitá na $[a, b]$ resp. na (a, b) .

4.0.2 Ortogonální systémy

Řekneme, že funkce f je z prostoru $L^2((a,b))$, jestliže

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx < \infty \tag{4.0.1}$$

ve smyslu Lebesguea. Prostor $L^2((a,b))$ je Hilbertův prostor, tj. úplný normovaný lineární prostor se skalárním součinem

$$(f|g)_{L^2} = \int_a^b f(x)g(x) \, dx < \infty \tag{4.0.2}$$

a normou

$$\|f\|_{L^2} = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx, \qquad \forall\, f \in L^2((a,b)) \tag{4.0.3}$$

Funkce f, g jsou <u>ortogonální</u> (kolmé) v prostoru $L^2((a,b))$, jestliže

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = 0$$

Definice 4.0.17 Posloupnost funkcí $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi_n \in L^2((a,b))$ se nazvá <u>ortogonální</u> <u>systém</u>, právě když

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 \, dx > 0 \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

a

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x) \, dx = 0 \quad \forall n \neq m$$

Systém je <u>ortonormální</u>, jestliže navíc

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 \, dx = 1 \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

FR1 **Věta 4.0.18** *Nechť $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost lineárně nezávislých prvků v $L^2((a,b))$. Pak existuje takový ortonormální systém $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $L^2((a,b))$ tak, že platí*

$$Lin\{g_1, g_2, \ldots, g_n\} = Lin\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Množina funkcí

$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{\ell}x, \sin\frac{\pi}{\ell}x, \ldots, \cos\frac{n\pi}{\ell}x, \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \ldots\right\}$$

tvoří na intervalu $[a, a+2\ell]$, $a \in \mathbb{R}$ ortogonální systém funkcí. Existují samozřejmě i jiné ortogonální systémy funkcí.

Množina funkcí

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1), \dots, \right\}$$

tvoří na intervalu $(-1,1)$ ortonormální systém funkcí v $L^2((-1,1))$ a tento systém se nazývá posloupnost *Legendreových polynomů*.

Existují samozřejmě i jiné ortogonální (ortonormální) systémy funkcí.

4.1 Fourierovy řady (J.B. Fourier 1768-1830)

Symbolem $\mathcal{P}_{2\ell}(\mathbb{R})$ označme množinu všech periodických funkcí s periodou 2ℓ.

Definice 4.1.1 Trigonometrická řada je funkční řada tvaru

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin \frac{n\pi}{\ell}x \right), \tag{4.1.1}$$

T

kde $x \in \mathbb{R}$ a a_n, b_n jsou reálné konstanty.

FR4 **Věta 4.1.2** *Předpokládejme, že trigonometrická řada (4.1.1) konverguje stejnoměrně na intervalu* $[a, a+2\ell]$ *k funkci* f. *Pak platí*

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_a^{a+2\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\ell}\int_a^{a+2\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx \tag{4.1.2}$$ FK

pro $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Definice 4.1.3 Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\ell}(\mathbb{R})$. Trigonometrická řada jejíž koeficienty jsou dány vzorci (4.1.2) se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f a trigonometrická řada (4.1.1) s těmito koeficienty se nazývá Fourierova řada pro funkci f a píšeme

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right).$$

Poznámka 4.1.4 Řada napravo nemusí, ale může konvergovat k funkci f. Řada je funkci f přiřazena formálně. Otázkou je zda-li existuje množina funkcí jejíž Fourierova řada konverguje k této funkci.

FR5 **Věta 4.1.5** *Nechť* $f \in L_1((a, a+2\ell))$ *a* a_n, b_n *jsou její Fourierovy koeficienty. Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ *konverguje.*

Řekneme, že funkce $\tilde{f}$ je <u>periodickým</u> prodloužením funkce $f \in PC\left((a, a+2\ell)\right)$ jestliže platí

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a, a+2\ell), \\ f\left(x - 2(n-1)\ell\right) & x \in (a+2(n-1)\ell, a+2nl) \end{cases}$$

a platí $f(a+2nl) = c$ pro každé $n \in \mathcal{Z}$, $c \in \mathbb{R}$ libovolné.

Řekneme, že funkce $\tilde{f}$ je <u>standardizovaným</u> <u>periodickým</u> prodloužením funkce $f \in PC((a, a+2\ell))$ jestliže platí

$$f(a+2nl) = \frac{1}{2}\left[f(a+) + f(a+2\ell-)\right]$$

pro každé $n \in \mathbb{Z}$.

Poznámka 4.1.6

(a) Nechť $f \in PC((-\ell, \ell))$ je lichá. Pak

$$a_n = 0 \qquad b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

(b) Nechť $f \in PC((-\ell, \ell))$ je sudá. Pak

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx \qquad b_n = 0$$

Kosinová a sinová Fourierova řada.

Fourierovu řadu funkce, která je definovaná pouze na $[0, \ell]$ můžeme dodefinovat na $[-\ell, 0]$ tak, že výsledná funkce bude sudá respektive lichá.
Nechť funkce f je integrovatelná na $(0, \ell)$.

(a) <u>Sudé prodloužení.</u>

$$f_S(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0, \ell), \\ f(-x) & x \in (-\ell, 0) \end{cases}$$

Hodnota $f_S(0)$ může být libovolná.

(b) <u>Liché prodloužení.</u>

$$f_L(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0, \ell), \\ 0 & x = 0, \\ -f(-x) & x \in (-\ell, 0) \end{cases}$$

Poznámka 4.1.7

(a) Když bude funkce f <u>sudá</u> dostaneme <u>kosinovou</u> řadu.

(b) Když bude funkce f lichá dostaneme sinovou řadu.

Otázky konvergence trigonometrických a Fourierových řad.

Definujme

$$\overline{f}(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-)\right]$$

Definice 4.1.8 Jestliže na intervalu $[a, b]$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\lambda}, \qquad \forall\, x, y \in [a, b]$$

kde $0 < \lambda \leq 1$, $C \geq 0$, pak řekneme, že funkce f je *Hölderovsky spojitá* na intervalu $[a, b]$ s koeficientem λ a prostor všech Hölderovsky spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ značíme $C^{0,\lambda}([a, b])$.

FR5 **Věta 4.1.9** *Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti rálných čísel a nechť konverguje řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

Pak trigonometrická řada

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x + b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

konverguje absolutně a stejnoměrně na $\mathbb{R}$ ke spojité funkci f a je Fourierovou řadou funkce f.

FR6 **Věta 4.1.10** *(Lipschitzovo kritérium, str.489, [7]) Jestliže* $f \in C^{0,\lambda}([a,b])$, $0 < \lambda \leq 1$, *pak Fourierova řada příslušná k funkci* f *konverguje stejnoměrně k* f *na libovolném intervalu* $[c,d] \subset [a,b]$ $(a < c < d < b)$.

FR7 **Věta 4.1.11** *Mějme Fourierovu řadu příslušnou k funkci* f. *Nechť* $f \in C^{0,\lambda}([a, a+2\ell])$, $0 < \lambda \leq 1$ *a* $f(a) = f(a+2\ell)$, *pak její Fourierova řada konverguje stejnoměrně k funkci* f *na* $[a, a+2\ell]$.

FR8 **Věta 4.1.12** *Nechť* $f \in \mathcal{P}_{2\ell}(\mathbb{R})$, f, $f' \in PC([a, a+2\ell])$. *Pak Fourierova řada pro funkci* f *konverguje k* $f(x)$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}$, *kde je funkce* f *spojitá a v bodech, kde není spojitá platí*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x\right) = \overline{f}(x)$$

Kapitola 5

INTEGRÁLNÍ POČET VÍCE PROMĚNNÝCH

5.1 Dvojný integrál

5.1.1 Dvojný integrál na dvojrozměrném intervalu

Uvažujme interval $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ a nechť D_m^x, resp. D_n^y je dělení $[a, b]$, resp. $[c, d]$ s dělicími body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ a $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$. Uspořádanou dvojici (D_m^x, D_n^y)

(pro stručnost budeme značit tuto dvojici D_{mn}) nazýváme *dělením intervalu* I (viz Obr.5.1). Každý interval $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ nazýváme *částečným intervalem* dělení D_{mn}. Říkáme, že systém intervalů I_{ij} pokrývá interval I. Množinu všech dělení intervalu I budeme značit $\mathcal{D}(I)$. Zjemnění dělení.

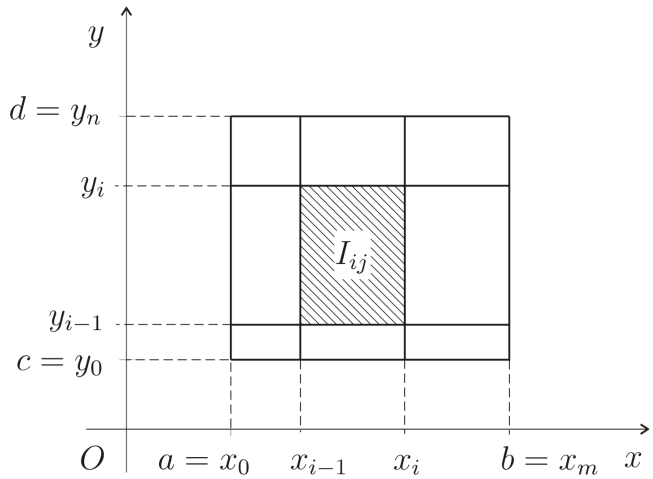
Obsah (míru) intervalu I_{ij} definujeme $\mu(I_{ij}) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) = \Delta x_i \Delta y_j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Výraz $\nu(D_{MN}) = \max\{\nu(D_M^x), \nu(D_N^y)\}$ nazýváme *normou dělení*. Nulovou posloupností dělení nazýváme posloupnost dělení $\{D_k\}$ takovou, že $\lim_{k\to\infty} \nu(D_k) = 0$.

def2.3.1 **Definice 5.1.1** Nechť f je ohraničená funkce na I, D_{mn} dělení I s dělicími body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$. Přiřadíme dělení D_{mn} a funkci f *dolní Riemannův integrální součet* definovaný vztahem

$$s(f, D_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\mu(I_{ij}), \quad m_{ij} = \inf_{[x,y]\in I_{ij}} f(x, y) \tag{5.1.1}$$ dis

a *horní Riemannův integrální součet* definovaný vztahem

$$S(f, D_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\mu(I_{ij}), \quad M_{ij} = \sup_{[x,y]\in I_{ij}} f(x, y) \tag{5.1.2}$$ his



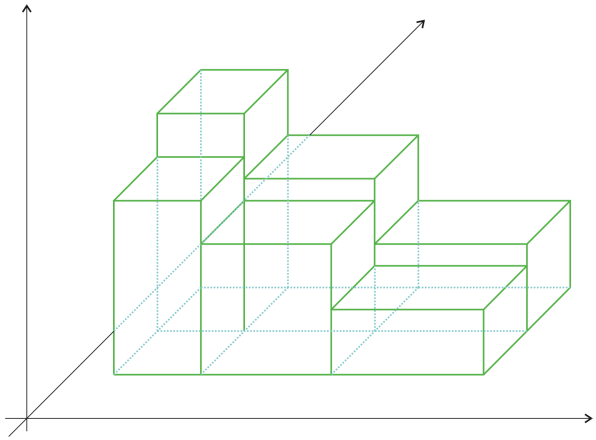
Obrázek 5.1: Dělení intervalu. 01

def2.3.2 **Definice 5.1.2** Nechť f je ohraničená funkce na I. Definujme *dolní Riemannův integrál* pro funkci f definovaný vztahem

$$\underline{\iint}_I f(x,y)\,dxdy = I^-(f) = \sup_D s(f,D) \tag{5.1.3}$$ hris

a *horní Riemannův integrál* pro funkci f definovaný vztahem

$$\overline{\iint}_I f(x)\,dx = I^+(f) = \inf_D S(f,D) \tag{5.1.4}$$ dris



Obrázek 5.2: Integrální součet. 02

def2.3.3 **Definice 5.1.3** Řekneme, že funkce f je *Riemannovsky integrabilní* na I tehdy a jen tehdy jestliže je ohraničená na I a

$$I^-(f) = I^+(f) \tag{5.1.5}$$ ri

V tomto případě se tato společná hodnota nazývá *Riemannův integrál* funkce f na I a značíme

$$\iint\limits_I f(x,y)\,dxdy = I^-(f) = I^+(f) \tag{5.1.6}$$ ri1

Jestliže integrál existuje, řekneme, že funkce f je *integrabilní* (*integrovatelná*) na intervalu I, a píšeme $f \in \mathcal{R}(I)$.

DVI1 **Věta 5.1.4** *(test integrability) Nechť f je omezená funkce na intervalu I. Funkce f je Riemannovsky integrabilní na I tehdy a jen tehdy když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D tak, že*

$$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon \tag{5.1.7}$$

TI

Poz2 **Poznámka 5.1.5** Nechť f je omezená funkce na intervalu I a D je ekvidistantní dělení, tj. $x_i = a + (b-a)i/2^n$, $y_j = c + (d-c)j/2^n$, $i, j = 0, 1, \ldots, 2^n$. Definujme

$$m_{ij} = \inf_{[x,y] \in I_{ij}} f(x, y), \quad M_{ij} = \sup_{[x,y] \in I_{ij}} f(x, y)$$

Definujme

$$J^-(f) = \lim_{n \to \infty} \frac{(b-a)(d-c)}{2^{2n}} \sum_{i,j=1}^{2^n} m_{ij}, \quad J^+(f) = \lim_{n \to \infty} \frac{(b-a)(d-c)}{2^{2n}} \sum_{i,j=1}^{2^n} M_{ij}$$

Pak f je Riemannovsky integrabilní na I tehdy a jen tehdy když $J^-(f) = J^+(f)$.

Poz3 **Poznámka 5.1.6** Všimněte si, že při konstrukci Riemannova integrálu jsme předpokládali, že jak funkce f tak i interval $[a, b]$ jsou ohraničené.

Následující věta nám zaručuje existenci integrálu:

VD2 **Věta 5.1.7** *Každá funkce spojitá na intervalu $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ je integrovatelná.*

VD3 **Věta 5.1.8 (Fubiniova věta)** *Nechť f je integrovatelná na $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Pak platí*

$$\iint\limits_I f(x, y)\, dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right) dx \tag{5.1.8}$$

Fub

Poz4 **Poznámka 5.1.9** Integrály v koncových členech řetězce rovností (5.1.8) se nazývají *dvojnásobné.*

subsection[Dvojný integrál na elementárních oblastech v rovině]Dvojný integrál na oblastech prvního a druhého druhu v $\mathbb{R}^2$.

Zavedeme pojem elementární oblasti v rovině:

Elementární oblast I. druhu v rovině je množina

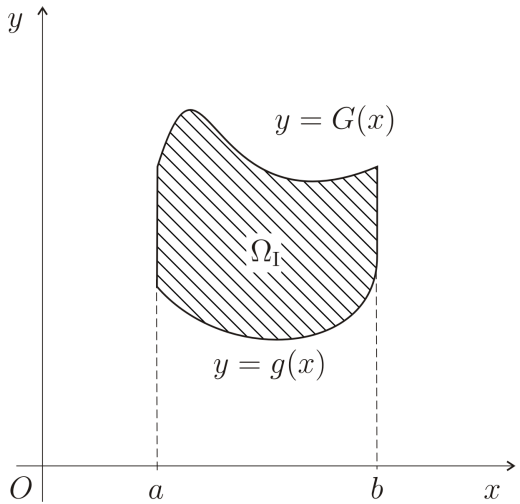
$$\Omega_I = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, g(x) < y < G(x) \right\},$$

kde g a G jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$ a $g(x) \leq G(x)$ pro každé $x \in [a, b]$.

Elementární oblast II. druhu v rovině je množina

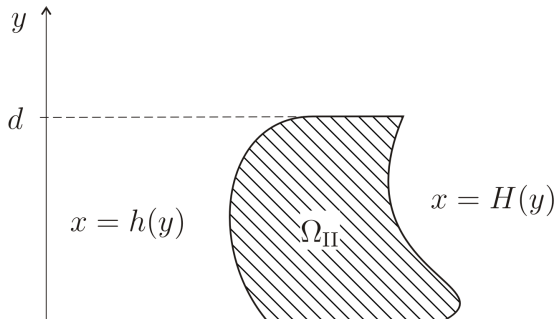
$$\Omega_{II} = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, h(y) < x < H(y) \right\},$$

kde h a H jsou spojité funkce na intervalu $[c, d]$ a $h(y) \leq H(y)$ pro každé $y \in [c, d]$.



Obrázek 5.3: Oblast I. druhu.

03



DV3 **Věta 5.1.10 (Fubiniova věta)**

(a) Nechť existuje $\iint\limits_{\Omega_I} f(x,y)\,dxdy$ *a pro každé* $x \in [a,b]$ *nechť existuje integrál*

$$J(x) = \int\limits_{g(x)}^{G(x)} f(x,y)\,dy.$$

Pak existuje také dvojnásobný integrál

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{G(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

a platí rovnosti

$$\iint\limits_{\Omega_I} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b J(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{G(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

(b) Nechť existuje $\iint\limits_{\Omega_{II}} f(x,y)\,dxdy$ *a pro každé* $y \in [c,d]$ *existuje integrál*

$$K(y) = \int\limits_{h(y)}^{H(y)} f(x,y)\,dx.$$

Pak existuje také dvojnásobný integrál

$$\int_c^d \left(\int_{h(y)}^{H(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

a platí rovnosti

$$\iint_{\Omega_{II}} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d K(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_{h(y)}^{H(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

DV4 **Věta 5.1.11** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je elementární oblast prvního nebo druhého druhu a nechť funkce f je na Ω spojitá a ohraničená. Pak je funkce f na Ω integrabilní.*

DP2 **Poznámka 5.1.12** Integrovatelnost a hodnota dvojného integrálu nezávisí na chování funkce v konečném počtu bodů integračního oboru, nebo na sjednocení konečného počtu křivek konečné délky. Je tedy v předešlých větách nepodstatné, jestli integrujeme přes otevřený integrační obor, nebo jestli přidáme k tomuto oboru jakoukoliv část hranice oboru.

DV5 **Věta 5.1.13** (*Základní vlastnosti dvojného integrálu.*) *Nechť Ω, Ω_1, Ω_2 jsou oblasti prvního nebo druhého druhu a nechť f, $g \in \mathcal{R}(\Omega)$ (tzn. f a g jsou funkce integrovatelné na Ω). Pak platí:*

(a)

$$\iint\limits_{\Omega} (f(x,y)+g(x,y))\,dxdy = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,dxdy.$$

(b)

$$\iint\limits_{\Omega} kf(x,y)\,dxdy = k\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy,$$

kde $k \in \mathbb{R}$.

(c) Jestliže pro každé $[x,y] \in \Omega$ *platí* $f(x,y) \leq g(x,y)$, *pak*

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy \leq \iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,dxdy.$$

(d) $|f| \in \mathcal{R}(\Omega)$ *a platí*

$$\left|\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy\right| \leq \iint\limits_{\Omega} |f(x,y)|\,dxdy.$$

(e) Jestliže pro každé $[x,y] \in \Omega$ *platí že* $|f(x,y)| \leq M$, *pak*

$$\left|\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy\right| \leq \iint\limits_{\Omega} |f(x,y)|\,dxdy \leq M\mu(\Omega).$$

(f) *Jestliže* $int\Omega_1 \cap int\Omega_2 = \emptyset$, $f \in \mathcal{R}(\Omega_1)$ *a* $f \in \mathcal{R}(\Omega_2)$, *pak je funkce* f *integrovatelná na* $\Omega_1 \cup \Omega_2$ *a platí*

$$\iint\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\Omega_2} f(x,y)\,dxdy.$$

(g) $f \cdot g \in \mathcal{R}(\Omega)$.

(h) *Jestliže je funkce* f *spojitá na* $\overline{\Omega}$, *pak existuje bod* $[\xi, \eta] \in \overline{\Omega}$ *tak, že*

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = f(\xi,\eta)\mu(\Omega).$$

Poznámka 5.1.14 Symbolem $\mu(\Omega)$ budeme v této kapitole rozumět míru (obsah) elementární oblasti Ω.

Symbolem $\overline{\Omega}$ značíme tzv. *uzávěr množiny* Ω. Je to zjednodušeně řečeno ,,množina Ω uvažovaná spolu se svou hranicí".

Ukažte, že z tvrzení (h) Věty 5.1.13 plyne následující jednoduchý důsledek:

$$\mu(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} dxdy.$$

5.1.2 Transformace dvojného integrálu

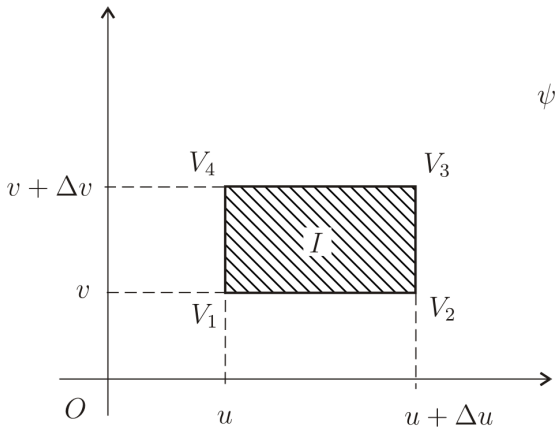
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Uvažujme funkce $\varphi, \psi : \Omega \to \mathbb{R}$ a $G : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $G = (\varphi, \psi)$ takové, že:

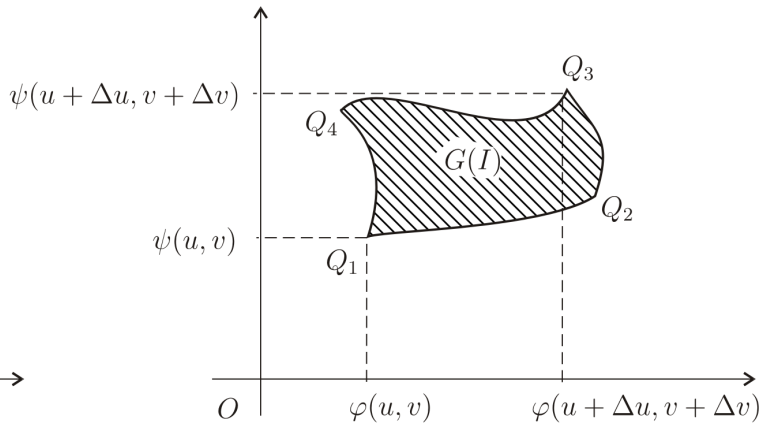
a) φ, $\psi \in C^1(\Omega)$, tj. φ, ψ jsou *spojitě diferencovatelné* na Ω;

b) $G = (\varphi, \psi)$ je *prosté* zobrazení, tj. pro všechna $[u_0, v_0]$, $[u_1, v_1] \in \Omega$ platí:
Jestliže $[u_0, v_0] \neq [u_1, v_1]$, pak $G(u_0, v_0) \neq G(u_1, v_1)$.

Uvažujme libovolný dvojrozměrný interval (tj. obdélník) $I \subset \Omega$ o vrcholech V_1, V_2, V_3 a V_4 a stranách délky Δu, Δv. Transformací $G = (\varphi, \psi)$ se zobrazí obdélník I na „křivočarý obdélník" $I^* = G(I)$ o vrcholech Q_1, Q_2, Q_3 a Q_4:

$$
\begin{aligned}
V_1 &= [u, v] &&\mapsto\ Q_1 = [\varphi(u, v), \psi(u, v)],\\
V_2 &= [u + \Delta u, v] &&\mapsto\ Q_2 = [\varphi(u + \Delta u, v), \psi(u + \Delta u, v)],\\
V_3 &= [u + \Delta u, v + \Delta v] &&\mapsto\ Q_3 = [\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), \psi(u + \Delta u, v + \Delta v)],\\
V_4 &= [u, v + \Delta v] &&\mapsto\ Q_4 = [\varphi(u, v + \Delta v), \psi(u, v + \Delta v)].
\end{aligned}
$$





V dalším se pokusíme alespoň přibližně spočítat obsah obrazce $G(I)$.

S použitím Taylorovy věty máme:

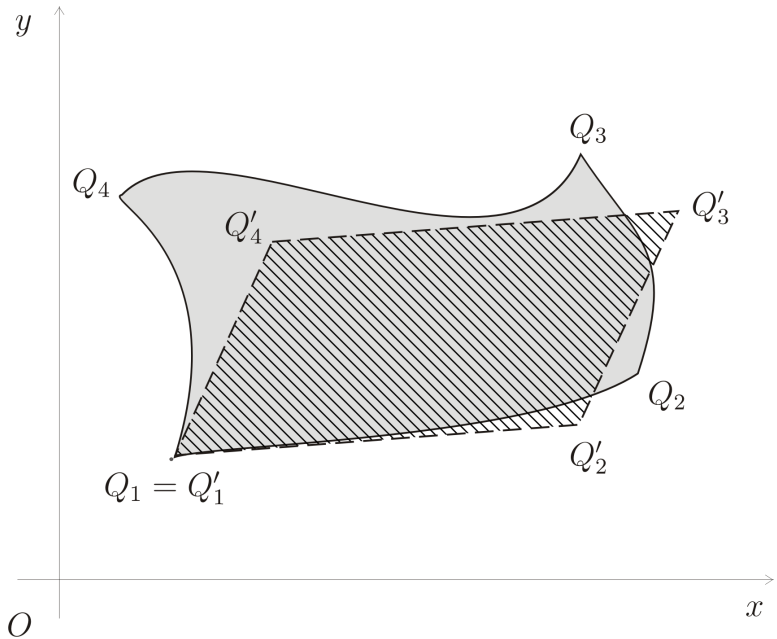
$$\begin{aligned}
\varphi(u+\Delta u, v) &= \varphi(u,v) + \varphi'_u(u,v)\Delta u + R,\\
\varphi(u, v+\Delta v) &= \varphi(u,v) + \varphi'_v(u,v)\Delta v + R,\\
\psi(u+\Delta u, v) &= \psi(u,v) + \psi'_u(u,v)\Delta u + R,\\
\psi(u, v+\Delta v) &= \psi(u,v) + \psi'_v(u,v)\Delta v + R,\\
\varphi(u+\Delta u, v+\Delta v) &= \varphi(u,v) + \varphi'_u(u,v)\Delta u + \varphi'_v(u,v)\Delta v + R,\\
\psi(u+\Delta u, v+\Delta v) &= \psi(u,v) + \psi'_u(u,v)\Delta u + \psi'_v(u,v)\Delta v + R,
\end{aligned}$$

kde $R = R((\Delta u)^2, (\Delta v)^2, \Delta u \Delta v)$ jsou zbytky v Taylorově vzorci, které označíme ve všech předešlých výrazech stejně.

Všechny zbytky v naší úvaze zanedbáme a budeme uvažovat pouze body

$$\begin{aligned}
&Q'_1 = Q_1,\\
&Q'_2 = Q_1 + [\varphi'_u(u,v)\Delta u,\ \psi'_u(u,v)\Delta u]\,,\\
&Q'_3 = Q_1 + [\varphi'_u(u,v)\Delta u + \varphi'_v(u,v)\Delta v,\ \psi'_u\Delta u + \psi'_v(u,v)\Delta v]\,,\\
&Q'_4 = Q_1 + [\varphi'_v(u,v)\Delta v,\ \psi'_v(u,v)\Delta v]\,.
\end{aligned}$$

Obsah křivočarého lichoběžníka $G(I)$ je přibližně roven obsahu rovnoběžníka $Q'_1Q'_2Q'_3Q'_4$ o stranách $Q'_1Q'_2$ a $Q'_1Q'_4$.



Obsah tohoto rovnoběžníka je roven dvojnásobku obsahu $\Delta Q'_1 Q'_2 Q'_4$, což z analytické geometrie je absolutní hodnota z determinantu

$$\left| \det \begin{pmatrix} x'_2 - x'_1 & y'_2 - y'_1 \\ x'_4 - x'_1 & y'_4 - y'_1 \end{pmatrix} \right|,$$

kde $Q_1' = [x_1', y_1']$, $Q_2' = [x_2', y_2']$, $Q_4' = [x_4', y_4']$. Po dosazení máme

$$\left|\det\begin{pmatrix} \varphi'_u(u,v)\Delta u & \psi'_u(u,v)\Delta u \\ \varphi'_v(u,v)\Delta v & \psi'_v(u,v)\Delta v \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \varphi'_u(u,v)\Delta u & \varphi'_v(u,v)\Delta v \\ \psi'_u(u,v)\Delta u & \psi'_v(u,v)\Delta v \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\det\left(\begin{pmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta u & 0 \\ 0 & \Delta v \end{pmatrix}\right)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} \Delta u & 0 \\ 0 & \Delta v \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\det\begin{pmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{pmatrix}\right| |\Delta u|\,|\Delta v|\,.$$

Matice

$$\mathcal{J}(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi'_u(u,v) & \varphi'_v(u,v) \\ \psi'_u(u,v) & \psi'_v(u,v) \end{pmatrix}$$

se nazývá *Jacobiho matice* transformace $G = (\varphi, \psi)$. Determinant

$$J(u,v) = det\,\mathcal{J}(u,v)$$

z této matice se nazývá *jakobián* této transformace.

Můžeme tedy psát

$$\mu\left(G(I)\right) \approx |J(u,v)|\,|\Delta u|\,|\Delta v| = |J(u,v)|\,\mu(I)$$

Dospěli jsme k jedné z nejdůležitějších vět:

DT1 **Věta 5.1.15** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $G = (\varphi, \psi) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je prosté zobrazení takové, že φ, $\psi \in C^1(\Omega)$ a jakobián $J(u,v) \neq 0$ v každém bodě $[u,v] \in \Omega$. Nechť $K \subset \Omega$ je uzavřená množina, která je sjednocením konečného počtu elementárních oblastí prvního nebo druhého druhu, a funkce f je spojitá na $G(\Omega)$. Pak platí*

$$\iint\limits_{G(K)} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{K} f\left(\varphi(u,v), \psi(u,v)\right) |J(u,v)|\; dudv.$$

DP3 **Poznámka 5.1.16** Věta zůstane v platnosti, pokud zobrazení G nebude prosté, nebo jakobián bude roven nule na podmnožinách množiny K uvedených v Poznámce 5.1.12, budou-li jejich obrazy při zobrazení G opět množiny uvedených typů v $G(K)$. Pokud funkce f bude ohraničená na $G(K)$, pak také stačí, aby f byla spojitá na $G(K)$ s výjimkou množin uvedených v Poznámce 5.1.12.

DP4 **Poznámka 5.1.17** Účelem transformace je zjednodušit integrační obor nebo integrovanou funkci. Nejlepší alternativou je, když se podaří zlepšit obojí.

Nejdůležitější typy transformací:

Posunutí. *Je dán bod* $[u_0, v_0]$. *Transformace* $G = (\varphi, \psi)$ *daná vztahy*

$$\begin{aligned} x &= u_0 + u \equiv \varphi(u, v), \\ y &= v_0 + v \equiv \psi(u, v) \end{aligned}$$

posouvá bod $[x, y]$ *o orientovanou vzdálenost* u_0 *ve směru souřadnicové osy* x *a o orientovanou vzdálenost ve směru souřadnicové osy* y.

Řešení:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Lineární transformace. *Je dána regulární matice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Transformace $G = (\varphi, \psi)$ daná vztahy

$$x = a_{11}u + a_{12}v \equiv \varphi(u, v),$$
$$y = a_{21}u + a_{22}v \equiv \psi(u, v)$$

Zobrazuje přímku na přímku, v případě, že A je ortogonální pak zachovává úhly.

Řešení:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |A| \,.$$

Zobecněné polární souřadnice. *Jsou dány konstanty a, $b > 0$.*

Transformace do zobecněných polárních souřadnic je dána vztahy:

$$x = ar\cos t \equiv \varphi(r, t),$$
$$y = br\sin t \equiv \psi(r, t).$$

$$J(r, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial r} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} & \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos t & -ar\sin t \\ b\sin t & br\cos t \end{vmatrix} = abr.$$

Tato transformace $G = (\varphi, \psi)$ *zobrazuje množinu* $(0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ *vzájemně jednoznačně na množinu* $\mathbb{R}^2 \setminus \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y = 0\}$.

Inverzní zobrazení $G^{-1} = \left(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}\right)$ *je dáno vztahy*

$$r = \widetilde{\varphi}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$t = \widetilde{\psi}(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & x \leq 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & x \leq 0, y < 0 \end{cases}$$

Poznámka 5.1.18 Speciální případ nastává pro volbu parametrů $a = b = 1$. V takovém případě mluvíme o polárních souřadnicích (vypouštíme přívlastek zobecněné).

Geometrický význam polárních souřadnic je popsán na Obrázku 5.7.

5.1.3 Geometrické a fyzikální aplikace dvojného integrálu

V dalším budeme předpokládat, že Ω může být sjednocením konečného počtu elementárních oblastí prvního nebo druhého druhu.

Obsah rovinného obrazce

Obsah rovinného obrazce $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se spočte s použitím vzorce:

$$\mu(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} dxdy.$$

Objem válcového tělesa $K \subset \mathbb{R}^3$.

Mějme dáno těleso

$$K = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in \Omega, g(x, y) < z < f(x, y)\right\},$$

kde $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$, f, g jsou spojité a ohraničené na Ω. Pak objem tohoto tělesa je dán vzorcem

$$V(K) = \iint\limits_{\Omega} [f(x, y) - g(x, y)]\, dxdy.$$

Obsah plochy

Obsah části plochy

$$S = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y),\ [x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2\right\},$$

kde $f \in C^1(\overline{\Omega})$ je dán vzorcem

$$P(S) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + \left(f'_y(x, y)\right)^2} dxdy.$$

Hmotnost tenké rovinné desky $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Hmotnost tenké rovinné desky Ω o plošné hustotě $\sigma(x, y)$ je dána vztahem

$$m(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \sigma(x, y)\, dxdy, \quad [kg].$$

Statický moment tenké rovinné desky

Statický moment tenké rovinné desky $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s plošnou hustotou $\sigma(x, y)$ vzhledem k přímce p je

$$S_p = \iint\limits_{\Omega} \operatorname{dist}\left([x, y], p\right) \cdot \sigma(x, y)\, dxdy\, kg \cdot m,$$

kde $\operatorname{dist}([x,y],p)$ je orientovaná vzdálenost bodu $[x,y]$ od přímky p.
Speciální případ vzhledem k souřadnicovým osám x a y.

$$S_x = \iint\limits_{\Omega} y\sigma(x,y)\,dxdy, \qquad S_y = \iint\limits_{\Omega} x\sigma(x,y)\,dxdy.$$

Těžiště tenké rovinné desky $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$$T = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m}\right].$$

Moment setrvačnosti tenké rovinné desky

Moment setrvačnosti tenké rovinné desky $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s plošnou hustotou $\sigma(x,y)$ vzhledem k přímce p je

$$I_p = \iint\limits_{\Omega} \operatorname{dist}^2([x,y],p)\cdot\sigma(x,y)\,dxdy,\ \ kg\,m^2,$$

kde $\operatorname{dist}([x,y],p)$ je vzdálenost bodu $[x,y]$ od přímky p.
Speciální případ vzhledem k souřadnicovým osám x a y.

$$I_x = \iint\limits_{\Omega} y^2\sigma(x,y)\,dxdy, \qquad I_y = \iint\limits_{\Omega} x^2\sigma(x,y)\,dxdy.$$

5.2 Křivkové integrály

5.2.1 Pojem křivky v $\mathbb{R}^n$.

DefK1 **Definice 5.2.1** Množinu $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ nazveme *křivkou v* $\mathbb{R}^n$, jestliže existuje spojité zobrazení $\Phi = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ intervalu I na množinu γ takové, že platí:

1) Zobrazení Φ je prosté s výjimkou konečně mnoha bodů.

2) Zobrazení Φ je po částech třídy C^1 na I, tj. Φ' je spojitá s výjimkou konečně mnoha bodů, v nichž existují jednostranné derivace, které mohou být různé.

3) Φ' má až na konečně mnoho bodů nenulovou hodnotu v každém bodě intervalu I.

Zobrazení pak Φ nazýváme *parametrizací* křivky γ.

Nechť $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že bod C je *k-násobným* bodem křivky γ, jestliže existuje právě k různých hodnot parametru $t_1, \ldots, t_k \in [a, b]$ takových, že $C = \Phi(t_i)$ pro $i = 1,\ 2, \ldots, k$. Křivka γ se nazývá *jednoduchá*, když nemá vícenásobné body.

Křivka γ se nazývá *uzavřená*, jestliže $\Phi(a) = \Phi(b)$. Uzavřenou křivku nazveme *jednoduchou*, jestliže nemá žádný vícenásobný bod kromě dvojnásobného bodu $\Phi(a)$.
Je-li $I_1, I_2, \ldots, I_n$ dělení intervalu $[a, b]$, pak obrazy dělicích intervalů $\Phi(I_1), \Phi(I_2), \ldots, \Phi(I_n)$ jsou opět křivky. Posloupnost těchto křivek nazveme *dělením křivky* γ.

DefK2 **Definice 5.2.2** Je-li parametrizace Φ křivky γ prosté zobrazení a třídy C^1 na celém intervalu $[a, b]$ a má přitom nenulovou derivaci (v bodech a, b uvažujeme jednostranné derivace) v každém bodě intervalu $[a, b]$, nazýváme γ *obloukem* a zobrazení Φ jeho parametrizací.

Oblouk γ je *sjednocením* podoblouků $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, jestliže $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_n$ a oblouky γ_i, γ_j, $i \neq j$, mají společné nejvýše krajní body.

DefK3 **Definice 5.2.3** Nechť je daná křivka γ s parametrizací $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$ a $\Phi \in C^1$ na I. Pro $t \in I$ nazveme

$$\Phi'(t) := D\Phi(t)$$

tečným vektorem ke křivce γ v bodě t.

Transformace parametru. Nechť je dán oblouk γ s parametrizací $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$. Nechť funkce g zobrazuje interval J na interval I a $g \in C^1(I)$, $g' \neq 0$ na J. Zobrazení

$$\Psi = \Phi \circ g : J \to \mathbb{R}^n$$

je rovněž parametrizací oblouku γ.
Je-li funkce g rostoucí říkáme, že parametrizace Φ a Ψ jsou *souhlasné parametrizace*.

Orientace oblouku. Nechť je dán oblouk γ s parametrizací $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$. Na oblouku γ zavedeme relaci $\prec$

$$M_1, M_2 \in \gamma : M_1 \prec M_2 \;\Leftrightarrow\; t_1 = \Phi^{-1}(M_1) < t_2 = \Phi^{-1}(M_2)$$

která je relací uspořádání na γ.
O tomto uspořádání řekneme, že určuje *orientaci* oblouku γ a oblouk s tímto uspořádáním nazveme *orientovaným obloukem*. O parametrizaci Φ řekneme, že *souhlasí s orientací* γ.

Příklady křivek.

- Graf spojité funkce

$$f : I \to \mathbb{R}$$
$$\Phi(t) = (t, f(t)), \quad t \in I$$

- Přímka

$$ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, |a| + |b| \neq 0$$
$$\Phi(t) = (x_0 + s_1 t, y_0 + s_2 t), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

- Elipsa

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$
$$\Phi(t) = (x_0 + a \cos\, t, y_0 + b \sin\, t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

- Hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\Phi(t) = (\pm a \cosh\, t, b \sinh\, t), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

- Polokubická parabola

$$y^2 - ax^3 = 0, \quad x \in [0, \infty),\ a > 0$$
$$\Phi(t) = \left(\frac{t^2}{\sqrt[3]{a}}, t^3\right), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

- Asteroida

$$x^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3} = 0, \quad a > 0$$
$$\Phi(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

- Steinerova hypocykloida

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + 8ax\left(3y^2 - x^2\right) + 18a^2\left(x^2 + y^2\right) - 27a^4 = 0, \quad a > 0$$
$$\Phi(t) = \left(a\left(2\cos t + \cos 2t\right), a\left(2\sin t - \sin 2t\right)\right), \quad t \in [0, 2]$$

- Cykloida

$$x = a\arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}, \quad y \in [0, 2a],\ a > 0$$
$$\Phi(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

- Kardioida (srdcovka)

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 - 6a^2\left(x^2 + y^2\right) + 8a^3x - 3a^4 = 0, \quad a > 0$$
$$\Phi(t) = \left(a\left(2\cos t - \cos 2t\right), a\left(2\sin t - \sin 2t\right)\right), \quad t \in [0, 2\pi]$$

- Descartův list

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a > 0$$
$$\Phi(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right), \quad t \in (-\infty, \infty),\ t \neq -1$$

- Bernoulliova lemniskáta

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + a^2 \left(y^2 - x^2\right) = 0, \quad a \neq 0$$
$$\Phi(t) = \left(\frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{a \cos t \sin t}{1 + \sin^2 t} \right), \quad t \in [-\pi, \pi]$$
$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \qquad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$$

- Dioklova kisoida

$$y^2 - \frac{x^3}{a - x} = 0, \quad a > 0,\ x \neq a$$
$$\Phi(t) = \left(\frac{at^2}{1+t^2}, \frac{at^3}{1+t^2} \right), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

- Logaritmická spirála

$$\Phi(t) = b\left(\mathrm{e}^{at}\cos\, t, \mathrm{e}^{at}\sin\, t\right), \quad t \in (-\infty, \infty),\ a, b > 0$$
$$r = a\mathrm{e}^{b\varphi}, \qquad \varphi \in [0, \infty)$$

- Archimédova spirála

$$\Phi(t) = (at\sin t, -at\cos t), \quad t \in [0, \infty),\ a > 0$$
$$r = a\varphi, \qquad \varphi \in [0, \infty)$$

- Šroubovice

$$\Phi(t) = (a\cos\, t, b\sin\, t, ct), \quad t \in [0, 2\pi],\ a, b > 0, c \neq 0.$$

5.2.2 Křivkový integrál ve skalárním poli

Délka křivky

Nechť je dán oblouk $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, který má parametrické rovnice

$$x = \Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)), \quad t \in [a, b].$$

My nepotřebujeme žádnou teorii míry k definici délky křivky v $\mathbb{R}^n$. Definujme dělení D_N intervalu $I = [a, b]$ s dělicími body $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = b$ a počítejme

$$\sum_{i=1}^{N} \|\Phi(t_{i-1}) - \Phi(t_i)\| = \sum_{i=1}^{N} \|[\varphi_1(t_{i-1}), \varphi_2(t)(t_{i-1}), \ldots, \varphi_n(t_{i-1})] - [\varphi_1(t_i), \varphi_2(t)(t_i), \ldots, \varphi_n(t_i)]\|$$

a definujme *délku křivky* jako

$$L(\gamma) = \sup_{D_N} \sum_{i=1}^{N} \|[\varphi_1(t_{i-1}), \varphi_2(t)(t_{i-1}), \ldots, \varphi_n(t_{i-1})] - [\varphi_1(t_i), \varphi_2(t)(t_i), \ldots, \varphi_n(t_i)]\| < \infty$$

Pak řekneme, že křivka γ je *rektifikovatelná*.

Nechť je nyní dán oblouk $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ parametrickými rovnicemi

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [a, b]$$

Pro $i = 1, 2, \ldots, N$ máme z Lagrangeovy věty

$$\begin{aligned}\|(\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i), \psi(t_{i-1}) - \psi(t_i))\| &= \sqrt{(\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i-1}) - \psi(t_i))^2} \\ &= \sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\eta_i))^2}\Delta t_i \qquad (5.2.1)\end{aligned}$$

KI1

kde $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Protože funkce φ a ψ mají spojité derivace existuje $K > 0$ tak, že $|\varphi'(t)|, |\psi'(t)| \leq K$ pro každé $t \in [a, b]$.

$$L(\gamma, D_N) \leq \sum_{i=1}^{N} \sqrt{K^2 + K^2}\Delta t_i \leq \sqrt{2}K(b - a)$$

Dělení D_N bylo libovolné a proto existuje $\sup_D L(\gamma, D)$.

KV1 **Věta 5.2.4** *Číslo $L(\gamma)$ je délkou oblouku γ, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu I tak, že pro každé zjemnění $\widetilde{D}$ dělení D platí*

$$\left| L(\gamma, \widetilde{D}) - L(\gamma) \right| < \varepsilon$$

KV2 **Věta 5.2.5** *V případě parametrických rovnic $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a, b]$, je tedy délka oblouku γ dána vztahem*

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt,$$

Křivkový integrál ve skalárním poli (neorientovaný křivkový integrál)

V každém bodě M oblouku γ známe hustotu $\varrho(M)$. Chceme znát hmotnost celé křivky. Na oblouku $\widehat{A_{i-1}A_i}$ definujme

$$m_i = \min_{[x,y]\in\widehat{A_{i-1}A_i}} \varrho(x,y) \quad M_i = \max_{[x,y]\in\widehat{A_{i-1}A_i}} \varrho(x,y),\ \forall\, i = 1,1,\dots,N$$

Označme Δs_i délku podoblouku $\widehat{A_{i-1}A_i}$. Označme Δh_i hmotnost podoblouku $\widehat{A_{i-1}A_i}$. Pro hmotnost tohoto podoblouku platí

$$m_i\Delta s_i \le \Delta h_i \le M_i\Delta s_i, \quad \forall\, i = 1,\dots,N$$

Hmotnost h celého oblouku bude tedy

$$h = \sum_{i=1}^{N} \Delta h_i$$

a

$$s(\varrho, D_N) = \sum_{i=1}^{N} m_i\Delta s_i \le h \le \sum_{i=1}^{N} M_i\Delta s_i = S(\varrho, D_N)$$

Výrazy

$$s(\varrho, D_N) = \sum_{i=1}^{N} m_i\Delta s_i, \qquad S(\varrho, D_N) = \sum_{i=1}^{N} M_i\Delta s_i$$

jsou dolní a horní Riemannův integrální součet pro funkci ϱ a dělení D_N.

V naší úvaze, ale můžeme místo hustoty ϱ uvažovat libovolnou spojitou funkci f na oblouku γ.

Definice 5.2.6 Jestliže platí

$$\sup_{D_N} s(f, D_N) = \inf_{D_N} S(f, D_N)$$

pak tuto hodnotu značíme

$$\int_\gamma f(M)\, ds = \int_\gamma f(x, y)\, ds.$$

a nazveme ji *křivkovým integrálem* funkce f přes křivku γ.

KV1 **Věta 5.2.7** *Nechť oblouk γ je dán parametrickými rovnicemi*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [a, b]$$

a funkce $f(x, y)$ je spojitá na oblouku γ. Pak platí

$$\int_\gamma f(M)\, ds = \int_\gamma f(x, y)\, ds = \int_a^b f\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt.$$

KP1 **Poznámka 5.2.8** Je-li dána křivka předpisem $y = g(x)$, $x \in [a, b]$ a derivace g' je spojitá na $[a, b]$, pak platí

$$\int_\gamma f(x, y)\, ds = \int_a^b f\left(x, g(x)\right) \sqrt{1 + \left(g'(x)\right)^2}\, dx.$$

Je-li dána křivka předpisem $x = h(y)$, $y \in [c, d]$ a derivace h' je spojitá na $[c, d]$, pak platí

$$\int_\gamma f(x, y)\, ds = \int_c^d f\left(h(y), y\right) \sqrt{1 + \left(h'(y)\right)^2}\, dy.$$

KV3 **Věta 5.2.9** *(Nezávislost na parametrizaci) Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je oblouk, Φ, Ψ jeho dvě parametrizace a f je funkce spojitá na γ. Pak platí*

$$\int_{\gamma_\Phi} f(M)\, ds = \int_{\gamma_\Psi} f(M)\, ds$$

KV4 **Věta 5.2.10** *(Základní vlastnosti křivkového integrálu ve skalárním poli)*

(a) ***Linearita.*** *Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je oblouk a funkce f a g jsou spojité na oblouku γ. Pak platí*

$$\int_\gamma (c_1\, f + c_2\, g)(M)\, ds = c_1 \int_\gamma f(M)\, ds + c_2 \int_\gamma g(M)\, ds,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné reálné konstanty.

(b) ***Aditivita.*** *Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je křivka, která je sjednocením dvou oblouků γ_1, γ_2 a funkce f je spojitá na křivce γ. Pak platí*

$$\int_{\gamma} f(M)\, ds = \int_{\gamma_1} f(M)\, ds + \int_{\gamma_2} f(M)\, ds.$$

5.2.3 Geometrické a fyzikální aplikace křivkového integrálu ve skalární poli

(a) *Délka* křivky

$$L = \int_{\gamma} ds.$$

(b) *Obsah* části válcové plochy Φ s řídící křivkou $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ v rovině $z = 0$ a tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezenými plochami $z = g(x, y)$, $z = f(x, y)$, $g(x, y) \leq f(x, y)$ pro každé $[x, y] \in \gamma$.

$$P = \int_{\gamma} [f(x, y) - g(x, y)]\, ds.$$

5.2.4 Křivkový integrál ve vektorovém poli

Zavedení pojmu, základní vlastnosti křivkového integrálu ve vektorovém poli

Ve fyzice a v technických aplikacích se často setkáváme s různými druhy rovinných nebo prostorových vektorových polí – *silové pole, pole rychlostí částic proudící nestlačitelné kapaliny, pole magnetické a elektrické intenzity.*

Z matematického hlediska jde vlastně o zobrazení, které bodům přiřazuje vektory.

Vektorové pole je zobrazení

$$\vec{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n,$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. V technické praxi je nejčastější použití pro $n = 2, 3$. V tomto případě budeme jednoduše psát

$$\vec{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))\,, \qquad \vec{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))\,,$$

kde P, Q, R jsou složky (komponenty) vektorové funkce $\vec{f}$.

Říkáme, že vektorové pole $\vec{f}$ je spojité vektorové pole, nebo stručněji je třídy C na Ω, když všechny složky jsou spojité na Ω. Říkáme, že vektorové pole $\vec{f}$ je třídy C^1 na Ω, když všechny složky tohoto pole mají spojité všechny první parciální derivace na množině Ω.

Uvažujeme-li orientovaný oblouk $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), pak můžeme v každém bodě $C = \Phi(t)$, $t \in (a, b)$ oblouku γ určit jednotkový tečný vektor vztahem

$$\vec{t}(C) = \frac{\Phi'(t)}{\|\Phi'(t)\|}.$$

Definice 5.2.11 Nechť $\vec{f}$ je spojité vektorové pole na orientovaném oblouku γ. *Křivkovým integrálem* ve vektorovém poli $\vec{f}$ (křivkovým integrálem druhého druhu) přes křivku γ nazýváme integrál tvaru

$$\int_\gamma \left(\vec{f}|d\vec{s}\right) = \int_\gamma \left(\vec{f}(M)|\vec{t}(M)\right) ds$$

Jeli $\Phi : [a, b] \to \gamma$, parametrizace orientovaného oblouku γ (tj. parametrizace oblouku souhlasí s jeho orientací), pak platí

$$\int_\gamma \left(\vec{f}(M)|\vec{t}(M)\right) ds = \int_a^b \left[P\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right) \varphi'(t) + Q\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right) \psi'(t) + R\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right) \chi'(t)\right] dt$$

Mnohdy se používá označení

$$\int_\gamma \left(\vec{f}|\vec{t}\right) ds = \int_\gamma P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$

které se po dosazení z parametrických rovnic oblouku γ převede na výše uvedený tvar.

KP2 **Poznámka 5.2.12** Je-li dána křivka předpisem $y = g(x)$, $x \in [a, b]$ a g je spojitá na $[a, b]$, pak platí

$$\int_\gamma P(x, y)\, dx = \int_a^b P\left(t, g(t)\right)\, dt$$

Je-li dána křivka předpisem $x = h(y)$, $y \in [c, d]$ a h je spojitá na $[c, d]$, pak platí

$$\int_\gamma Q(x, y)\, dy = \int_c^d Q\left(h(t), t\right)\, dt$$

KV4 **Věta 5.2.13** *(Základní vlastnosti křivkového integrálu ve vektorovém poli)*

(a) ***Linearita.*** *Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je orientovaný oblouk a $\vec{f}$ a $\vec{g}$ jsou spojitá vektorová pole na oblouku γ. Pak platí*

$$\int_\gamma \left((c_1\, \vec{f} + c_2\, \vec{g})|d\vec{s}\right) = c_1 \int_\gamma \left(\vec{f}|d\vec{s}\right) + c_2 \int_\gamma (\vec{g}|d\vec{s})$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné reálné konstanty.

(b) ***Aditivita.*** *Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je křivka, která je sjednocením dvou orientovaných oblouků γ_1, γ_2 a $\vec{f}$ je spojitá vektorové pole na křivce γ. Pak platí*

$$\int_\gamma \left(\vec{f}|d\vec{s}\right) = \int_{\gamma_1} \left(\vec{f}|d\vec{s}\right) + \int_{\gamma_2} \left(\vec{f}|d\vec{s}\right)$$

Greenova věta

Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se nazývá *jednoduše souvislá* v $\mathbb{R}^2$, jestliže s každou kružnicí, která je obsažena v Ω je také vnitřek kružnice obsažen v Ω. Mezikruží není jednoduše souvislá množina v $\mathbb{R}^2$.

GrV **Věta 5.2.14** ***(Greenova věta)*** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, ohraničená jednoduše souvislá množina, jejíž hranicí je jediná kladně orientovaná jednoduchá uzavřená křivka γ. Dále nechť $\vec{f} = (P, Q)$ je spojité vektorové pole na $\overline{\Omega}$ a $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ jsou spojité funkce na $\overline{\Omega}$. Pak platí*

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy = \int\limits_{\gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Aplikace Greenovy věty. *Obsah* rovinné oblasti splňující předpoklady Greenovy věty.

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma} x\,dy - y\,dx.$$

5.2.5 Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě

V tomto odstavci budeme *oblastí* v $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ rozumět otevřenou podmnožinu v $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, ve které můžeme každé dva různé body ležící v této množině spojit jednoduchou křivkou, ležící v této množině.

Řekneme, že spojité vektorové pole $\vec{f}$ v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ *nezávisí na integrační cestě*, jestliže pro libovolné orientované křivky γ_1, γ_2 ležící v Ω se stejným počátečním bodem A a koncovým bodem B, platí

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Pak také píšeme

$$\int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Nechť $\vec{f} = (P, Q)$ $(\vec{f} = (P, Q, R))$ je spojité vektorové pole na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^3)$. Řekneme, že vektorové pole je *potenciální* na Ω, jestliže existuje funkce $V \in C^1(\Omega)$ tak, že

$$\nabla V = \vec{f}$$

pro každé $[x, y] \in \Omega$ $([x, y, z] \in \Omega)$. Každou takovou funkci V nazýváme *potenciálem* vektorového pole $\vec{f}$ na Ω.

Věta 5.2.15 *Nechť vektorové pole $\vec{f} = (P, Q)$ je třídy C^2 na jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Pak toto pole je potenciální tehdy a jen tehdy, když*

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0 \quad \forall\, [x, y] \in \Omega$$

Rotaci vektorového pole $\vec{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ definujeme takto:

$$\operatorname{rot} \vec{f}(x,y,z) = \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right), + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right), + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right).$$

Mů si definici zapamatovat pomocí formálního determinantu

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{f}(x,y,z) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá *jednoduše souvislá* v $\mathbb{R}^3$, jestliže s každou kulovou plochou, která je obsažena v Ω je také vnitřek kulové plochy obsažen v Ω. Koule, trojrozměrný interval jsou jednoduše souvislé množiny, ale mezisféra není jednoduše souvislá množina v $\mathbb{R}^3$.

Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá *plošně jednoduše souvislá* v $\mathbb{R}^3$, jestliže ke každé jednoduché uzavřené křivce, která je obsažena v Ω existuje hladká plocha, která sama sebe neprotíná taková, že $S \subset \Omega$ a jejíž okraj je tato křivka.

Množina $\mathbb{R}^3 \setminus \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ je jednoduše souvislá, ale není plošně jednoduše souvislá.

Věta 5.2.16 *Nechť vektorové pole $\vec{f} = (P,Q,R)$ je třídy C^1 na plošně jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset$*

$\mathbb{R}^3$. *Pak toto pole je potenciální tehdy a jen tehdy, když*

$$\operatorname{rot} \vec{f}(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

pro každé $[x, y, z] \in \Omega$.

Věta 5.2.17 *Nechť* $\vec{f} = (P, Q)$ *je třídy* C^1 *v jednoduše souvislé oblasti* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. *Křivkový integrál*

$$\int_\gamma \vec{f}(x, y) \cdot d\vec{s} = \int_\gamma P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy,$$

kde $\gamma \subset \Omega$ *nezávisí na integrační cestě* AB *v oblasti* Ω *tehdy a jen tehdy, když vektorové pole* $\vec{f}$ *je na* Ω *potenciální. Je-li* V *jeho potenciál na* Ω, *pak platí*

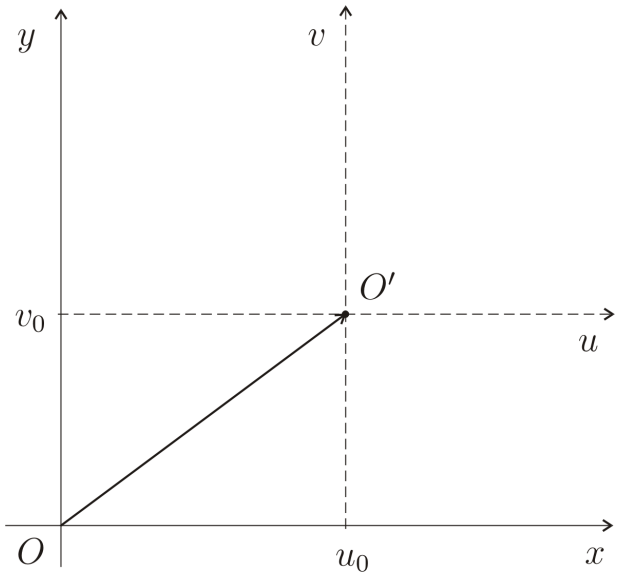
$$\int_A^B P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = V(B) - V(A).$$

Věta 5.2.18 *Nechť* $\vec{f} = (P, Q, R)$ *je třídy* C^1 *v plošně jednoduše souvislé oblasti* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. *Křivkový integrál*

$$\int_\gamma \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{s} = \int_\gamma P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz,$$

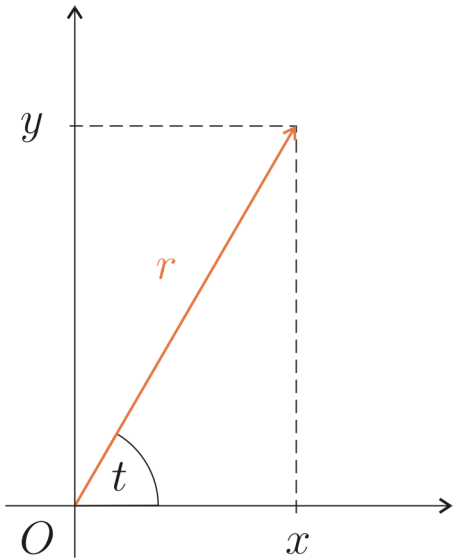
kde $\gamma \subset \Omega$ nezávisí na integrační cestě AB na oblasti Ω tehdy a jen tehdy, když vektorové pole $\vec{f}$ je potenciální na Ω. Je-li V jeho potenciál na Ω, pak platí

$$\int_A^B P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = V(B) - V(A).$$



Obrázek 5.6: Transformace posunutí.

pos



Obrázek 5.7: Polární souřadnice.

pol

Literatura

MaRo85 [1] Brabec, J., Martán, F., Rozenský, Z.: *Matematická analýza I.* SNTL, Praha 1985.

BrHr86 [2] Brabec, J., Hrůza, B.: *Matematická analýza II.* SNTL, Praha 1986.

HKII86 [3] Eliáš J., Horváth J., Kajan J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky II.* Alfa, Bratislava (1986).

KSIV79 [4] Eliáš J., Horváth J., Kajan J., Šulka R.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky IV.* Alfa, Bratislava (1979).

ch1-70 [5] Fichtengolc, G. M.: *Kurz diferencialnovo i integralnovo iscislenija I.* Nauka, 7.vyd., Moskva 1970.

ch2-59 [6] Fichtengolc, G. M.: *Kurz diferencialnovo i integralnovo iscislenija II.* Nauka, 4.vyd., Moskva 1959.

ch3-66 [7] Fichtengolc, G. M.: *Kurz diferencialnovo i integralnovo iscislenija III.* Nauka, 4.vyd., Moskva 1966.

aMod03 [8] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. Function of One Variable.* Birkhäuser, Boston (2003).

aMod04 [9] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. Approximation and Discrete Processes.* Birkhäuser, Boston (2004).

aMod07 [10] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. Linear and Metric Structures and Continuity.* Birkhäuser, Boston (2007).

aMod09 [11] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. An Introduction to Function of Several Variables.* Birkhäuser, Boston (2009).

Hol90 [12] Holenda J.: *Řady.* SNTL Praha (1990).

aDPI63 [13] Jarník V.: *Diferenciální počet I.* ČAV Praha (1963).

aIPI63 [14] Jarník V.: *Integrální počet I.* ČAV Praha (1963).

DPII63 [15] Jarník V.: *Diferenciální počet II.* ČAV Praha (1963).

IPII63 [16] Jarník V.: *Integrální počet II.* ČAV Praha (1963).

KaKu09 [17] Kalas J., Kuben J.: *Integrální počet funkcí více proměnných.* MU Brno (2009).

KaKu63 [18] Kufner A., Kadlec J.: *Fourierovy řady.* Academia Praha (1969).

oVa84a [19] Nagy J., Nováková E., Vacek M.: *Integrální počet.* SNTL Praha (1984).

oVa84b [20] Nagy J., Nováková E., Vacek M.: *Vektorová analýza.* SNTL Praha (1984).

Rab88 [21] Ráb M.: *Zobrazení a Riemannův integrál v* $\mathbb{E}^n$*.* SPN Praha (1988).

krTi86 [22] Škrášek, J., Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky II.* SNTL, Praha 1986.

PŘÍKLADY

Číselné řady

Rozhodněte o konvergenci řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n+1} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{n^n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (n+1)} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt[k]{n}}, \quad k \in \mathbb{N}, 0 < a < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2} \right)^2 \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{1}{n} \right) \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln\, n)^{\ln\, n}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(n+1)!} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!} \qquad \text{[divergentní]}$$

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3}.

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-2}.

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-1}. $[n > \mathrm{e}^{10}]$

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-2}.

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3}.

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{7n}\right)^n$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3}. $[n = 9]$

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-2}. $[n = 9]$

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^{n^2}}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3}. []

Určte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

aby chyba byla menší než 10^{-2}. []

Příklad . Určete Cauchyův součin řad

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j}{j!}$$

Výsledek

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}$$

Příklad . Určete Cauchyův součin řad

$$\sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1}, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j-1} jq^{j-1}$$

Výsledek

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^{2n-2}$$

Funkční řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}$$

Výsledek: $x \in (-1, 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{x}{2^{n+1}}$$

Výsledek: $x \in (-\infty, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^n$$

Výsledek: $x \in (-\infty, 0)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^n$$

Výsledek: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^n$$

Výsledek: $x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$$

Výsledek: $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$$

Výsledek $x \in (-2, 2)$

Dokžte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n^2}$$

konverguje stejnoměrně na $[0, \infty)$.

Dokžte, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

konverguje stejnoměrně na $[-b, b]$, $\forall\, 0 < b < 1$.

Dokžte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

konverguje stejnoměrně na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Dokažte, že řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}$$

konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$.

Dokažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{3/2}}$$

konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$.

Dokažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$ za předpokladu, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Dokažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$ za předpokladu, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Určete obor konvergence a obor stejnoměrné konvergence řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$$

Výsledek: konverguje na $(0, \infty)$, konverguje stejnoměrné na $[a, \infty)$, $\forall\, a > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$$

Výsledek: konverguje na $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right)$, konverguje stejnoměrně na $[a, b]$, $\forall\ \frac{1}{\mathrm{e}} < a < b < \mathrm{e}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\mathrm{e}^{nx}}$$

Výsledek: konverguje na $[0, \infty)$, konverguje stejnoměrné na $[a, \infty)$, $\forall\, a > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^4 + n^2}$$

Výsledek: konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$$

Výsledek: konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-nx}$$

Výsledek: konverguje na $[0, \infty)$, konverguje stejnoměrné na $[a, \infty)$, $\forall\, a > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

Výsledek:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$$

Výsledek: konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$

Určete obor stejnoměrné konvergence řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^3}$$

Výsledek: $(-\infty, \infty)$

Určete obor stejnoměrné konvergence řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}$$

Výsledek: $(-\infty, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2 x}$$

Výsledek: konverguje na $(0, \infty)$, konverguje stejnoměrně na $[a, \infty)$, $\forall\, a > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$$

Výsledek: konverguje na $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\mathrm{e}^{nx}}$$

Výsledek: konverguje na $(0, \infty)$, konverguje stejnoměrně na $[a, \infty)$, $\forall\, a > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^n}$$

Výsledek: $(-\infty, \infty)$

Určete poloměr konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^n x^n}$$

Výsledek: $\varrho = \mathrm{e}$

Určete poloměr konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Výsledek: $\varrho = \infty$

Určete poloměr a obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}(x-1)^n$$

Výsledek: $\varrho = 1$, obor konvergence $[0, 2)$

Určete poloměr a obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} x^n$$

Výsledek: $\varrho = 1$, obor konvergence $[-1, 1)$

Určete poloměr a obor konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n}$$

Výsledek: $\varrho = 1/2$, obor konvergence $(-1/2, 1/2)$

Určete poloměr a obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{1}{n}$$

Výsledek: $\varrho = 1$, obor konvergence $[-1, 1)$

Určete poloměr a obor konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}(x+3)^n$$

Výsledek: $\varrho = 2$, obor konvergence $(-5, -1)$

Určete poloměr a obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n$$

Výsledek: $\varrho = 1$, obor konvergence $[0, 2)$

Určete součet řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$$

Výsledek $\frac{x}{2(1-x)} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2x}\ln(1-x)$.

Určete součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}$$

Výsledek $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$.

Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

Výsledek $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.

Je dána řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

(a) Určete obor konvergence řady.

(b) Určete součet řady.

Výsledek:

(a) $[-1, 1)$

(b) $-\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}$

Je dána řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

(a) Určete obor konvergence řady.

(b) Určete součet řady.

Výsledek:

(a) $(-1, 1)$

(b) $-\frac{x}{(1-x)^2}$

Rozviňte do Taylorovy řady o středu $c = 0$ funkci $f(x) = \operatorname{arctg} x$ a určete obor konvergence této řady.
Výsledek: $x \in [-1, 1]$
Rozviňte do Taylorovy řady o středu $c = 0$ funkci $f(x) = \ln(4 - x^2)$ a určete obor konvergence této řady.
Výsledek: $f(x) = 2\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n2^{2n}}$, $x \in (-2, 2)$.

Rozviňte do Taylorovy řady o středu $c = 0$ funkci $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1+2x)}$ a určete obor konvergence této řady.

Výsledek: $f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(1 + 4(-1)^n)\,x^n$, $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Rozviňte do Taylorovy řady o středu $c = 0$ funkci $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1+3x)}$ a určete obor konvergence této řady.

Výsledek: $f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(3^n - 1)x^n$, $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

Odvoďte rozvoj funkce $f(x) = \ln(1 + x)$ v nekonečnou řadu na základě vztahu $f'(x) = \frac{1}{1+x}$.

Výsledek: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, $x \in (-1, 1]$

Fourierovy řady

Příklad . Napište Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1/2], \\ 0 & x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

a nakreslete standartizované periodické prodloužení a vyšetřete konvergenci této řady na $\mathbb{R}$.

Výsledek:

$$a_0 = 2 \int_0^{1/2} x \, dx = \frac{1}{4}$$

$$a_k = 2 \int_0^{1/2} x \cos(2k\pi x) \, dx = \frac{\cos k\pi - 1}{2k^2\pi^2} = \frac{(-1)^k - 1}{2k^2\pi^2}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$b_k = 2 \int_0^{1/2} x \sin 2k\pi x \, dx = -\frac{\cos k\pi}{2k\pi} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k\pi}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$f(x) \sim \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{(-1)^k - 1}{k\pi} \cos(2k\pi x) + (-1)^{k+1} \sin(2k\pi x) \right]$$

Příklad . Určete v intervalu $[-\pi, \pi]$ Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}$$

nakreslete standartizované periodické prodloužení a vyšetřete konvergenci této řady na $\mathbb{R}$.

Výsledek:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2 \pi} \cos(kx) + \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) \right]$$

Příklad . Určete v intervalu $[-1, 1]$ Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \in [-1, 0), \\ \\ x - 1 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

nakreslete standartizované periodické prodloužení a vyšetřete konvergenci této řady na $\mathbb{R}$.

Výsledek: $a_n = 0$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$f(x) \sim -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi x)$$

Příklad . Určete v intervalu $[-\pi, \pi]$ Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, 0], \\ \\ 1 & x \in (0, \pi] \end{cases}$$

nakreslete standartizované periodické prodloužení a vyšetřete konvergenci této řady na $\mathbb{R}$.

Výsledek: $a_0 = 1$, $a_n = 0$ pro $n = 1, 2, \ldots$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \sin(nx) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)x$$

Příklad . Určete v intervalu $[-\pi, \pi]$ Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = |x|$$

nakreslete standartizované periodické prodloužení a vyšetřete konvergenci této řady na $\mathbb{R}$.

Výsledek: $b_n = 0$ pro $n = 1, 2, \ldots$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$$

Příklad . Je dána funkce

$$f(x) = x - 1, \quad x \in (0, 1]$$

Určete kosinovou Fourierovu řadu této funkce, nakreslete standartizované periodické prodloužení a vyšetřete konvergenci této řady na $\mathbb{R}$.

Výsledek: $b_n = 0$ pro $n = 1, 2, \ldots$

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(n\pi x) = -\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x$$

Dvojné integrály

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M xy\cos(x+y)\,dxdy$$

kde $M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,\pi]\right\}$.

Řešení. []

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M \mathrm{e}^{xy}\,dxdy$$

kde $M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (0,\pi)\right\}$.

Řešení. []

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M x^3y\cos(xy^2)\,dxdy$$

kde $M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : [0,2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$.

Řešení. []

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M xy^2\mathrm{e}^{xy}\,dxdy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : [0, 2] \times [0, 1]\}$.

Řešení. 2

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M x^2 \mathrm{e}^{xy}\, dxdy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y < -x + 1\}$.

Řešení.

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\, dxdy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 1, y < 2, y > \sqrt{x}\}$.

Řešení. $\mathrm{e}^2 - \frac{3}{2}$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M x\left(y + \sin(\pi y)\right)\, dxdy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y < -x + 1\}$.

Řešení.

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dxdy$$

kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$.

Řešení. $\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M x(1-y)\,dxdy$$

kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y > 0, y < x\}$.

Řešení. $\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{16}$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M (x^2+y)\,dxdy$$

kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y > x^2, y < 1\}$.

Řešení.

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M xy\,dxdy$$

kde $M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y < \ln \frac{1}{x}, y < 1, y > 0, 0 < x < 1\right\}$.

Řešení.

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M |xy| \, dxdy$$

kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y < 1, y > |x|\}$.

Řešení.

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \, dxdy$$

kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 1, y < 2, y > \sqrt{x}\}$.

Řešení. $\mathrm{e}^2 - \frac{3}{2}$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M (x^2 + y^2) \, dxdy$$

kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < a^2\}$.

Řešení. $\frac{1}{2}\pi a^4$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M (x^2+y^2)\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,dxdy$$

kde $M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x < y < \sqrt{3}x, 0 < x^2+y^2 < 1\right\}$.

Řešení. $\frac{\pi}{24}$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy$$

kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > x, x^2+y^2 < 1\}$.

Řešení. $\frac{1}{4}\pi(2-\sqrt{3})$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < ax\}$, $a > 0$.

Řešení. $\frac{a^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M |x|\,dxdy$$

kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y, 4x^2+y^2 < 12\}$.

Řešení. $4\sqrt{3} - \frac{10}{3}$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy$$

kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < y, y^2 < 2x\}$.

Řešení. $\frac{1}{2}\left(5\ln 2 - 3\ln 3\right)$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy$$

kde $M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x < y < \sqrt{3}x, 1 < x^2+y^2 < 4\right\}$.

Řešení. $\frac{1}{12}\pi \ln^2 2$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$$

kde $M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y > \frac{1}{x}, y < 4x, x < 3\right\}$.

Řešení. $\frac{1225}{64}$.

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_M |xy|\;dxdy$$

kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < a^2\}$.

Řešení. $\frac{1}{2}a^4$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_D \ln(1 + x^2 + y^2)\, dxdy$$

je-li $D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 < 16, x > 0, y > 0\}$.

Řešení. $\frac{\pi}{4}(17 \ln 17 - 16)$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_D \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

je-li $D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < rx\}$, $r > 0$.

Řešení.

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_D \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\, dxdy$$

je-li $D = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 9, \frac{\sqrt{3}}{3}x < y < \sqrt{3}x\right\}$, $r > 0$.

Řešení. $\frac{\pi^2}{6}$

Příklad . Vypočtěte integrál

$$\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$$

je-li $D=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1\right\}$, kde $a>0$, $b>0$;

Řešení. $\frac{2}{3}\pi ab$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah části roviny ohraničené křivkami $(x-a)^2+y^2=a^2$, $x^2+(y-a)^2=a^2$.

Řešení.

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah části roviny ohraničené křivkou $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.

Řešení. $\frac{\pi a^4\sqrt{2}}{2}\,m^2$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah části roviny ohraničené křivkou $x^2+y^2=5$, tečnou k této křivce v bodě $A=[1,2]$ a přímkou $y=0$.

Řešení.

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah části roviny $\Omega = \{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : y>x^3, y<2, x>0, y<x+1\}$

Řešení.

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah části roviny ohraničené křivkami $y = 4$, $y = 2^x$, $y = 2^{-2x}$.

Řešení. $12 - \frac{9}{\ln 4}\, m^2$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah množiny

$$\Omega = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 - 6y < 0, \ x^2 + y^2 - 2y > 0, \ x < y < \sqrt{3}x \right\}.$$

Řešení. $\frac{2}{3}\pi - 2\sqrt{3} + 4\, m^2$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah množiny

$$A = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : \ xy < a^2, x^2 > ay, y < 2a, x > 0 \right\}, \quad a > 0.$$

Řešení. $\mu(A) = a^2 \left(\frac{2}{3} + \ln 2 \right)\, m^2$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah množiny

$$A = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^3 < y < x^2 + 1, 0 < x < 3 - y \right\}$$

Řešení.

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami $z = 4 - y^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $z = 0$.

Řešení. $\frac{256}{21}\, m^3$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 12 + y - x^2$, $z = 0$.

Řešení. $\frac{541}{140}\, m^3$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z > 2(x^2 + y^2), z < 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

Řešení. $\frac{5}{48}\pi\, m^3$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa

$$K = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in \Omega, 0 < z < x^2 + y^2\right\}$$

kde $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < \sqrt{x}\}$.

Řešení. $\frac{6}{35}\, m^3$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ z > 0, z < x^2 + y^2, x^2 + y^2 > x, x^2 + y^2 < 2x\right\}$$

Řešení. $\frac{45}{32}\pi\, m^3$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z > 2(x^2 + y^2), \ z < 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

Řešení. $\frac{5}{48}\pi\, m^3$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa

$$\Omega = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 4 - y^2,\ y > \frac{1}{2}x^2 \right\}$$

Řešení. $\frac{256}{21}\, m^3$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah části plochy $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ vyťaté plochami $x - y = 1$, $x - y = -1$, $x + y = 1$, $x + y = -1$.

Řešení.

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah části plochy $z = x^2 + y^2$, kde $0 < z < a$, $a > 0$.

Řešení. $\frac{\pi}{6}\left[(1 + 4a)\sqrt{1 + 4a} - 1\right]\ m^2$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah části plochy $x^2 + z^2 = 1$ ohraničené plochami $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$.

Řešení. $2\pi\, m^2$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah části plochy

$$S = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 :\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \frac{x^2}{4} + y^2 < 1, -1 < x < 1 \right\}.$$

Řešení. $\frac{4}{3}\pi\, m^2$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah části plochy

$$S = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 6x + 3y + 2z = 12,\ x > 0, y > 0, z > 0\right\}$$

Řešení.

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah části plochy

$$S = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2z, x^2 + y^2 < 1\right\}$$

Řešení.

Křivkové integrály

Příklad 5.2.19 Vypočtěte

$$\int_\gamma xy^2\, ds,$$

kde je křivka $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ dána rovnicí $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$.

Řešení. $\frac{\pi a^4}{16}$

Příklad 5.2.20 Vypočtěte

$$\int\limits_{\gamma} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, ds,$$

kde je křivka $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ dána parametrickými rovnicemi $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$, $b > 0$.

Řešení. $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\left(\sqrt{a^2+4\pi^2b^2} - a\right)$

Příklad 5.2.21 Vypočtěte

$$\int\limits_{\gamma} xy\, ds,$$

kde křivka $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ je průsečík ploch $x^2+y^2+z^2-a^2 = 0$, $x^2+y^2-ay = 0$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $a > 0$.

Řešení. $\frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{15}a^3$

Vypočítejte křivkové integrály po dané křivce γ:

1. $$\int\limits_{\gamma} \frac{1}{x-y}\, ds$$

   kde γ je usečka AB, $A = [0, -2]$, $B = [4, 0]$;

$$\left[\sqrt{5}\ln 2\right]$$

2.
$$\int_\gamma x^2\,ds$$
kde γ je oblouk AB křivky dané rovnicí $y = \ln x$ pro $A = [2, \ln 2],\ B = [1, 0]$; $\left[\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right)\right]$

3.
$$\int_\gamma (x - y)\,ds$$
kde γ je kružnice $x^2 + y^2 - ax = 0,\ a > 0$; $\left[\frac{1}{2}\pi a^2\right]$

4.
$$\int_\gamma (x^2 + y^2 + z^2)\,ds$$
kde γ je oblouk šroubovice $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = at,\ t \in [0, 2\pi],\ a > 0$; $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3(4\pi^2 + 3)\right]$

5.
$$\int_\gamma z\,ds$$
kde γ je křivka $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ t \in [0, \sqrt{2}]$. $\left[\frac{2}{3}(4 - \sqrt{2})\right]$

Příklad 5.2.22 Vypočtěte délku křivky určené průsečnicí ploch o rovnicích

$$y = 2\arcsin\frac{x}{2}, \quad z = \frac{1}{2}\ln\frac{2-x}{2+x}$$

od bodu $A = [0, 0, 0]$ do bodu $B = [1, \pi/3, -\ln 3/2]$.

Řešení. $1 + \frac{1}{2}\ln 3\ m$

Příklad 5.2.23 Vypočtěte obsah části válcové plochy Φ s řídící křivkou $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ danou rovnicí $y = \ln x$, $x \in [1, \sqrt{e}]$ v rovině $z = 0$ a tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezenými plochami: $z = 0$, $z = x^2$.

Řešení. $\frac{1}{3}\left((1+e)^{3/2} - 2^{3/2}\right)\ m^2$

Příklad 5.2.24 Vypočtěte

$$I = \int_\gamma y^2\,dx + x(1+y^2)\,dy,$$

kde γ je část elipsy $4x^2 + y^2 = 16$, ležící v prvním kvadrantu a orientovaná od bodu $A = [2, 0]$ do bodu $B = [0, 4]$.

Řešení. $10\pi - \frac{64}{3}$

Příklad 5.2.25 Vypočtěte

$$I = \int\limits_{\gamma} \frac{y}{x+z^2}\,dx - (x+2z)\,dy + \frac{y}{z}\,dz,$$

kde γ je úsečka s počátečním bodem $A = [3,2,1]$ a s koncovým bodem $B = [1,1,2]$.
Řešení. $4 - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \ln 10$

Příklad 5.2.26 Vypočtěte práci silového pole při pohybu hmotného bodu po průnikové křivce $\gamma = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, z = 1+y^2\}$ od bodu $A = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$ přes bod $B = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}]$ do bodu $C = [0,1,2]$. Silové pole působí v každém bodě silou, která směřuje kolmo k rovině xz a velikost této síly je rovna převrácené hodnotě vzdálenosti bodu od roviny xy.
Řešení. $-\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

Vypočítejte křivkové integrály po dané křivce γ (uvažujeme pravotočivý souřadnicový systém):

1. $\int\limits_{\gamma} y\,dx + x\,dy$, kde γ je orientovaná čtvrtkružnice $\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j}$, $0 \le t \le \pi/2$ a kde bod $A = [a,0]$ je daný jako počáteční bod, $a > 0$ konstanta; $\left[0\right]$

2. $\int\limits_{\gamma} \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$, kde γ je orientovaná úsečka AB, s počátečním bodem $A = [1,1,1]$ a koncovým bodem $B = [4,4,4]$; $\left[3\sqrt{3}\right]$

3. $\int\limits_{\gamma} (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, kde γ je orientovaná křivka $y = 1-|1-x|$ pro $0 \le x \le 2$, počáteční bod $A = [2,0]$; $\left[-\frac{4}{3}\right]$

4. $\int\limits_{\gamma} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, kde γ je oblouk AB šroubovice

$$\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt/2\pi\vec{k}$$

(orientovaný) od bodu $A = [a,0,0]$ do $B = [a,0,b]$, a, $b > 0$ konstanty. $\left[0\right]$

V každém bodě silového pole v $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) působí síla $\overrightarrow{F}(\vec{r})$. Vypočítejte práci A tohoto pole při pohybu hmotného bodu po orientované křivce γ:

1. $\overrightarrow{F} = xy\cdot\vec{i} + (x+y)\cdot\vec{j}$, γ je oblouk AB křivky γ dané rovnicí $y = \operatorname{arctg} x$ od bodu $A = [1,?]$ do bodu $B = [0,?]$; $\left[\frac{1}{32}\left(16-8\pi-\pi^2\right) - \ln 2\right]$

2. $\overrightarrow{F}(\vec{r}) = y\vec{i} + z\vec{j} + yz\vec{k}$, $\gamma:\ \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, ct)$ orientované souhlasně s daným parametrickým vyjádřením pro $t \in [0,\pi]$, $c > 0$. $\left[\frac{\pi}{2}\left(2c^2-4c-1\right)\right]$

Příklad 5.2.27 Užitím Greenovy věty vypočtěte

$$I = \int\limits_{\gamma} (x^2y - x)\,dx - \left(xy^2 + y\right)\,dy,$$

kde γ je křivka o rovnici $x^2 + y^2 = 2y$, orientovaná ve směru pohybu hodinových ručiček.
Řešení. $\frac{3}{2}\pi$

pr111 **Příklad 5.2.28** Vypočtěte obsah elipsy.
Řešení. $\pi ab\ m^2$

Příklad 5.2.29 Užitím Greenovy věty vypočtěte obsah množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde Ω je ohraničená obloukem hyperboly o parametrických rovnicích

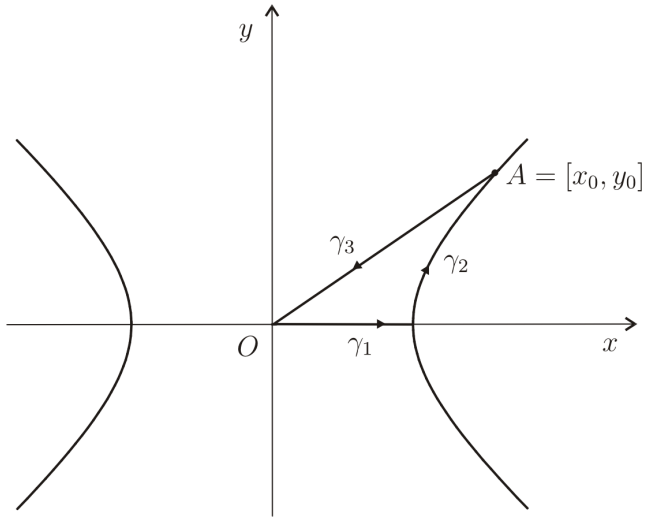
$$x = a\cosh t, \quad y = b\sinh t, \quad t \in (-\infty, \infty),\ a, b > 0,$$

osou x a spojnicí počátku souřadné soustavy s bodem $A = [x_0, y_0]$ hyperboly, kde $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.
Řešení. $\frac{ab}{2} \ln\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)\ m^2$

Ověřte, že jsou splněny podmínky pro užití Greenovy věty, a užijte ji k výpočtu následujících integrálů:

1. $\int_\gamma (x+y)^2\,dx - (x+y)^2\,dy$, kde γ je kladně orientovaný obvod trojúhelníka OAB s vrcholy $O = [0,0]$, $A = [1,0]$, $B = [0,1]$; $[-4/3]$

2. $\int_\gamma (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, kde γ je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ orientovaná kladně. $[-2\pi ab]$



Obrázek 5.8: K Příkladu 5.2.28 K6

Aplikací Greenovy věty vypočtěte obsah rovinného obrazce

$$A = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 \leq y \leq x \right\}.$$

[1/6]

Literatura

Atk95 [1] Atkins, P.W.: *Physical chemistry.* Oxford University Press, 5.vyd., Oxford 1995.

Bou65 [2] Bourbaki, N.: *Funkcii dejstvitelnovo peremennovo.* Moskva 1965.

BrHr85 [3] Brabec, J., Hrůza, B.: *Matematická analýza I.* SNTL, Praha 1985.

BrHr86 [4] Brabec, J., Hrůza, B.: *Matematická analýza II.* SNTL, Praha 1986.

DaDl03 [5] Daněček, J., Dlouhý, O.: *Integrální počet I.* Akad. nakl. CERM Brno, VUT FAST Brno, 2003.

DDKP09 [6] Daněček, J., Dlouhý, O., Koutková, H., Prudilová, K., Sekaninová, J., Slatinský, E.: *Sbírka příkladů z matematiky I.* VUT FAST Cerm, 9.vyd., Brno 2009.

HKII86 [7] Eliáš J., Horváth J., Kajan J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky II.* Alfa, Bratislava (1986).

KIII80 [8] Eliáš J., Horváth J., Kajan J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky III.* Alfa, Bratislava (1980).

Fich59 [9] Fichtengolc, G. M.: *Kurz diferencialnovo i integralnovo iscislenija II.* Nauka, 4.vyd., Moskva 1959.

aMod03 [10] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. Function of One Variable.* Birkhäuser, Boston (2003).

aMod04 [11] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. Approximation and Discrete Processes.* Birkhäuser, Boston (2004).

aMod09 [12] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. An Introduction to Functions of Several Variables.* Birkhäuser, Boston (2009).

aDPI63 [13] Jarník V.: *Diferenciální počet I.* ČAV Praha (1963).

DPII63 [14] Jarník V.: *Diferenciální počet II.* ČAV Praha (1963).

aIPI63 [15] Jarník V.: *Integrální počet I.* ČAV Praha (1963).

LuMa93 [16] Lukeš J., Malý, J.: *Míra a integrál.* Univerzita Karlova, Praha (1993).

Mil78 [17] Milota, J.: *Matematická analýza I–II.* SPN Praha, 1978.

oVa84a [18] Nagy J., Nováková E., Vacek M.: *Integrální počet.* SNTL Praha (1984).

BrMa81 [19] Prudnikov, A. P., Bryčkov, J. A., Maričev, O. I.: *Integrály i rjady.* Nauka, Moskva 1981.

Re95 [20] Rektorys, K. a kol.: *Přehled užité matematiky I.* Prometheus, Praha 1995.

Schw99 [21] Schwabik, Š.: *Integrace v $\mathbb{R}$. Kurzweilova teorie.* Karolinum, UK Praha 1999.

wSar?? [22] Schwabik, Š., Šarmanová: *Integrace v $\mathbb{R}$. Historie integrálu.*

krTi86 [23] Škrášek, J., Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky II.* SNTL, Praha 1986.

Ung90 [24] Ungermann Z.: *Matematika a řešení fyzikálních úloh.* SPN, Praha 1990.