VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

MATEMATIKA II

MODUL 2

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY

STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

Typeset by LaTeX 2_ε

Obsah

1 Úvod

1.1 Cíle modulu

Prostudováním kapitoly *Křivkový integrál ve skalárním poli* byste měli získat následující vědomosti a dovednosti:

- Umět vysvětlit integrální součet pro křivkový integrál ve skalárním poli na základě úlohy na stanovení hmotnosti oblouku. Znát vlastnosti křivkového integrálu a vztahy pro výpočet křivkových integrálu po oblouku v rovině i v prostoru;
- Porozumět vztahům pro geometrické a technické aplikace křivkového integrálu ve skalárním poli na základě příslušných integrálních součtů. Jde zejména o výpočet délky křivky, obsahu válcové plochy, těžiště a momentu setrvačnosti hmotného oblouku;

Následující odstavce vás předběžně seznámí s obsahem této kapitoly *Křivkový integrál ve vektorovém poli* a přestaví vám studijní cíle, kterých máte dosáhnout:

- Seznámit se s integrálními součty pro křivkový integrál ve vektorovém poli, které dostaneme při řešení úlohy o nalezení práce silového pole po orientovaném oblouku. Tyto úvahy vyúst í v definici křivkového integrálu ve vektorovém poli. Je třeba znát jeho vlastnosti a vztahy pro výpočet v rovinném i prostorovém vektorovém poli.
- Seznámit se s Greenovou větou, která umožňuje převést křivkový integrál v rovinném vektorovém poli na dvojný integrál. Je zapotřebí znát detailně všechny předpoklady pro její použití a umět ji aplikovat při řešení praktických úloh. Jednoduchou úvahou se přesvědčíte o správnosti vztahu pro výpočet obsahu rovinné oblasti užitím křivkového integrálu.
- Závěrečný odstavec je věnován nezávislosti křivkového integrálu na integrační cestě. Dozvíte se o různých druzích vektorových polí, o jejich charakterizaci a vzájemných vztazích. Naučíte se zjišťovat, zda je pole nevírové, určovat potenciál a jeho užitím vypočítat zadaný křivkový integrál.

1.2 Požadované znalosti

Pro zvládnutí křivkových integrálů je nezbytné dobře zvládnout problematiku kapitoly *Dvojný integrál* modulu *Dvojný a trojný integrál* a umět rovnice a grafy základních křivek v prostoru R^3.

1.3 Doba potřebná ke studiu

Přibližně lze odhadnout potřebnou dobu ke studiu křivkového integrálu na 25 hodin. Pro získání zkušeností a zručnosti ve výpočtu bude ještě zřejmě zapotřebí další čas závislý na dosavadní početní praxi studenta.

1.4 Klíčová slova

Křivkový integrál ve skalárním poli, základní vlastnosti křivkového integrálu ve skalárním poli, délka křivky, obsah části válcové plochy, těžiště hmotného oblouku, křivkový integrál ve vektorovém poli, práce v silovém poli, základní vlastnosti křivkového integrálu ve vektorovém poli, Greenova věta, nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě, potenciální vektorové pole, potenciál, jednoduše souvislá oblast, plošně jednoduše souvislá oblast.

2 Křivkový integrál ve skalárním poli

2.1 Zavedení pojmu, základní vlastnosti křivkového integrálu ve skalárním poli

Průvodce studiem
Před studiem této kapitoly je **nutné** si zopakovat základní pojmy z teorie křivek – viz Modul *Určitý integrál*, Dodatek A.

Nechť je dán oblouk $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, který má parametrické rovnice

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in \langle a, b \rangle.$$

V každém bodě M křivky γ známe hustotu $\varrho(M)$. Chceme znát hmotnost celé křivky. Na oblouku A_iA_{i+1} si zvolíme libovolný bod $M_i = [\xi_i, \eta_i]$ a vypočteme $\varrho(\xi_i, \eta_i) = \varrho(M_i)$. Předpokládejme, že ta stejná hustota je v každém bodě oblouku $\widehat{A_iA_{i+1}}$. Označme Δs_i délku oblouku $\widehat{A_iA_{i+1}}$. Hmotnost tohoto oblouku $\widehat{A_iA_{i+1}}$ bude tedy dána přibližně vztahem

$$\Delta m_i = \varrho(M_i)\Delta s_i.$$

Celkem dostáváme

$$m_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} \varrho(M_i)\,\Delta s_i.$$

Toto číslo jistě neudává hmotnost křivky γ přesně, ale přibližně. Položme

$$\nu_n = \max\{\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n\}$$

a přejdeme-li ve výrazu m_n k limitě, tj. bude-li existovat limita

$$\lim_{\nu_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} \varrho(M_i)\,\Delta s_i,$$

pak tuto limitu nazveme hmotnost drátu ve tvaru křivky γ a budeme značit m.

V naší úvaze, ale můžeme místo hustoty ϱ uvažovat libovolnou spojitou funkci f na oblouku γ. Integrální součet bude mít tvar

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_i.$$

Definice 2.1. Jestliže existuje konečná limita integrálního součtu

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_i,$$

která nezávisí jak na způsobu dělení křivky γ, tak na výběru bodů $M_i = [\xi_i, \eta_i]$ na obloucích $\widehat{A_iA_{i+1}}$, pak tuto limitu značíme

$$\imath\gamma f(M)s = \imath\gamma f(x,y)s.$$

a nazveme ji *křivkovým integrálem* funkce f přes křivku γ.

Věta 2.1. *Nechť oblouk γ je dán parametrickými rovnicemi*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in \langle a, b \rangle$$

a funkce $f(x,y)$ je spojitá na oblouku γ. Pak platí

$$\int_\gamma f(M)\,\mathrm{d}s = \int_\gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\dot\varphi^2(t) + \dot\psi^2(t)}\,dt.$$

Poznámka 2.1. Je-li dána křivka předpisem $y = g(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ a derivace g' je spojitá na $\langle a, b \rangle$, pak platí

$$\int_\gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x, g(x))\sqrt{1 + (g'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Je-li dána křivka předpisem $x = h(y)$, $y \in \langle c, d \rangle$ a derivace h' je spojitá na $\langle c, d \rangle$, pak platí

$$\int_\gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_c^d f(h(y), y)\sqrt{1 + (h'(y))^2}\,\mathrm{d}y.$$

Příklad 2.1. Vypočtěte

$$I = \int_\gamma xy^2\,\mathrm{d}s,$$

kde je křivka $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ dána rovnicí $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$.
Řešení:

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t, \quad y = \frac{a}{2}\sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{a^3}{8}\int_0^{2\pi} (1+\cos t)\sin^2 t\sqrt{\frac{a^2}{4}\sin^2 t + \frac{a^2}{4}\cos^2 t\,dt} \\ &= \frac{a^4}{16}\int_0^{2\pi}\left(\sin^2 t + \cos t\sin^2 t\right)\,dt = \frac{a^4}{16}\left(\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt + \int_0^{2\pi}\cos t\sin^2 t\,dt\right) \\ &= \frac{a^4}{16}\left(\frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{2\pi}\right) = \frac{\pi a^4}{16}. \end{aligned}$$

Věta 2.2. *Nechť oblouk γ je dán parametrickými rovnicemi*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad t \in \langle a, b \rangle$$

a funkce $f(x,y,z)$ je spojitá na oblouku γ. Pak platí

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(M)\,\mathrm{d}s &= \int_\gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{\dot\varphi^2(t) + \dot\psi^2(t) + \dot\chi^2(t)}\,dt. \end{aligned}$$

Příklad 2.2. Vypočtěte

$$I = \int_\gamma \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}s,$$

kde je křivka $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ dána parametrickými rovnicemi $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a > 0$, $b > 0$.
Řešení:

$$\sqrt{\dot\varphi^2(t) + \dot\psi^2(t) + \dot\chi^2(t)} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\begin{aligned} I &= b\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\frac{t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2t^2}}\,dt = b\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2t^2}}\,dt \\ &= b\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{1}{b^2}\sqrt{a^2+b^2t^2}\right]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\left(\sqrt{a^2+4\pi^2b^2} - a\right). \end{aligned}$$

Příklad 2.3. Vypočtěte

$$I = \int_\gamma xy\,\mathrm{d}s,$$

kde křivka $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ je průsečík ploch $x^2+y^2+z^2-a^2 = 0$, $x^2+y^2-ay = 0$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $a > 0$.
Řešení:

$$\begin{aligned} &x = \frac{a}{2}\sin 2t, \quad y = a\sin^2 t, \quad z = a\cos t, \quad t \in \langle 0, \pi/2 \rangle, \\ &\dot\varphi(t) = a\cos 2t, \quad \dot\psi(t) = a\sin 2t, \quad \dot\chi(t) = -a\sin t. \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} I &= a^3\int_0^{\pi/2}\cos t\sin^3 t\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt = \left|\begin{array}{ll} 1+\sin^2 t = u & t = 0|\pi/2 \\ 2\sin t\cos t\,dt = du & u = 1|2 \end{array}\right| \\ &= \frac{a^3}{2}\int_1^2 (u-1)\sqrt{u}\,du = \frac{a^3}{2}\left[\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^2 = \frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{15}a^3. \end{aligned}$$

Věta 2.3. *(Základní vlastnosti křivkového integrálu ve skalárním poli)*

(a) **Linearita.** *Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ je oblouk a funkce f a g jsou spojité na oblouku γ. Pak platí*

$$\int_\gamma (c_1 f + c_2 g)(M)\,\mathrm{d}s = c_1\int_\gamma f(M)\,\mathrm{d}s + c_2\int_\gamma g(M)\,\mathrm{d}s,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné reálné konstanty.

(b) **Aditivita.** *Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ je křivka, která je sjednocením dvou oblouků γ_1, γ_2 a funkce f je spojitá na křivce γ. Pak platí*

$$\int_\gamma f(M)\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} f(M)\,\mathrm{d}s + \int_{\gamma_2} f(M)\,\mathrm{d}s.$$

Cvičení 2.1. Vypočítejte křivkové integrály po dané křivce γ:

1. $\int_\gamma \frac{1}{x-y}\,\mathrm{d}s$, kde γ je úsečka AB, $A = [0,-2]$, $B = [4,0]$; $\left[\sqrt{5}\ln 2\right]$

2. $\int_\gamma x^2\,\mathrm{d}s$, kde γ je oblouk AB křivky dané rovnicí $y = \ln x$ pro $A = [2, \ln 2]$, $B = [1, 0]$; $\left[\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right)\right]$

3. $\int_\gamma (x-y)\,\mathrm{d}s$, kde γ je kružnice $x^2+y^2-ax = 0$, $a > 0$; $\left[\frac{1}{2}\pi a^2\right]$

4. $\int_\gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$, kde γ je oblouk šroubovice $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = at,$ $t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ a > 0;$ $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3(4\pi^2+3)\right]$

5. $\int_\gamma z\,\mathrm{d}s$, kde γ je křivka $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ t \in \langle 0, \sqrt{2}\rangle.$ $\left[\frac{2}{3}(4-\sqrt{2})\right]$

2.2 Geometrické a fyzikální aplikace křivkového integrálu ve skalární poli

(a) *Délka* křivky

$$L = \int_\gamma \mathrm{d}s.$$

Příklad 2.4. Vypočtěte délku křivky určené průsečnicí ploch o rovnicích

$$y = 2\arcsin\frac{x}{2}, \quad z = \frac{1}{2}\ln\frac{2-x}{2+x}$$

od bodu $A = [0,0,0]$ do bodu $B = [1, \pi/3, -\ln 3/2]$.

Řešení: Při užití přirozené parametrizace dostaneme

$$x = t, \quad y = 2\arcsin\frac{t}{2}, \quad z = \frac{1}{2}\ln\frac{2-t}{2+t},$$

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = \frac{2}{\sqrt{4-t^2}}, \quad \dot{z} = \frac{2}{t^2-4}.$$

Odtud

$$\begin{aligned} L &= \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{4}{4-t^2} + \frac{4}{(t^2-4)^2}}\,dt = \int_0^1 \frac{t^2-6}{t^2-4}\,dt \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2(t-2)} + \frac{1}{2(t+2)}\right) dt = \left[t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2}\ln 3 [m]. \end{aligned}$$

(b) *Obsah* části válcové plochy Φ s řídící křivkou $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ v rovině $z = 0$ a tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezenými plochami $z = g(x,y)$, $z = f(x,y)$, $g(x,y) \le f(x,y)$ pro každé $[x,y] \in \gamma$.

$$P = \int_\gamma [f(x,y) - g(x,y)]\,\mathrm{d}s.$$

Příklad 2.5. Vypočtěte obsah části válcové plochy Φ s řídící křivkou $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ danou rovnicí $y = \ln x$, $x \in [1, \sqrt{e}]$ v rovině $z = 0$ a tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezenými plochami: $z = 0$, $z = x^2$.

Řešení:

$$\begin{aligned} P &= \int_\gamma [f(x,y) - g(x,y)]\,\mathrm{d}s = \int_\gamma x^2\,\mathrm{d}s = \int_1^{\sqrt{e}} t^2\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}\,dt \\ &= \int_1^{\sqrt{e}} t\sqrt{1+t^2}\,dt = \left| \begin{matrix} 1+t^2 = u^2 & t = 1|e \\ t\,dt = u\,du & u = \sqrt{2}|\sqrt{1+e} \end{matrix} \right| = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} u^2\,du \\ &= \frac{1}{3}\left((1+e)^{3/2} - 2^{3/2}\right) [m^2]. \end{aligned}$$

(c) *Hmotnost* drátu ve tvaru křivky.

$$m = \int_\gamma \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

s lineární hustotou $\varrho(x,y,z)$ $[kg \cdot m^{-1}]$.

Příklad 2.6. Vypočtěte hmotnost homogenního drátu ve tvaru křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ s parametrickými rovnicemi $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ a konstantní lineární hustotou $\varrho(x,y,z) = \varrho$ $[kg \cdot m^{-1}]$.

Řešení:

$$\begin{aligned} m &= \int_\gamma \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \varrho\int_\gamma \mathrm{d}s = \varrho\int_0^{2\pi} \sqrt{2+t^2}\,dt \\ &= \left| \begin{matrix} t = \sqrt{2}u & t = 0|2\pi \\ dt = \sqrt{2}\,du & u = 0|2\pi/\sqrt{2} \end{matrix} \right| = 2\varrho\int_0^{2\pi/\sqrt{2}} \sqrt{1+u^2}\,du \\ &= \varrho\left[u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^{2\pi/\sqrt{2}} \\ &= \varrho\left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2\pi^2} + \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}} + \sqrt{1+2\pi^2}\right)\right) [kg]. \end{aligned}$$

(d) *Statický moment* hmotného drátu ve tvaru křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ vzhledem k přímce p.

$$S_p = \int_\gamma d([x,y],p) \cdot \varrho(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

kde $d([x,y],p)$ je orientovaná vzdálenost bodu $[x,y]$ od přímky p.

Speciální případ vzhledem k souřadnicovým osám x a y.

$$S_x = \int_\gamma y \cdot \varrho(x,y)\,\mathrm{d}s, \qquad S_y = \int_\gamma x \cdot \varrho(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

(e) *Statické momenty* hmotného drátu ve tvaru křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ vzhledem k rovině τ.

$$S_\tau = \int_\gamma d([x,y,z],\tau) \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s.$$

kde $d([x,y,z],\tau)$ je orientovaná vzdálenost bodu $[x,y,z]$ od roviny τ.

Speciální případ vzhledem k souřadnicovým rovinám xy, xz a yz.

$$S_{xy} = \int_\gamma z \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s, \quad S_{xz} = \int_\gamma y \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s, \quad S_{yz} = \int_\gamma x \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s.$$

(f) *Těžiště* hmotného drátu ve tvaru křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ a $\gamma \subset \mathbb{R}^3$.

$$T = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m}\right], \qquad T = \left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m}, \frac{S_{xy}}{m}\right].$$

Příklad 2.7. Vypočtěte těžiště homogenního drátu ve tvaru křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ s parametrickými rovnicemi $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\cos(t/2)$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$ a konstantní lineární hustotou $\varrho(x,y,z) = \varrho$ $[kg \cdot m^{-1}]$.

Řešení:

$$\begin{aligned} m &= \int_\gamma \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \varrho\int_\gamma \mathrm{d}s = 2\varrho\int_0^\pi \sqrt{1-\cos t}\,dt \\ &= 2\sqrt{2}\varrho\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}\,dt = -4\sqrt{2}\varrho\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^\pi = 4\sqrt{2}\varrho\ [kg], \\ S_{yz} &= \int_\gamma x\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \varrho\int_\gamma x\,\mathrm{d}s = 2\sqrt{2}\varrho\int_0^\pi (t - \sin t)\sin\frac{t}{2}\,dt \\ &= 2\sqrt{2}\varrho\left[-2t\cos\frac{t}{2} + 3\sin\frac{t}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}t\right]_0^\pi = \frac{16\sqrt{2}}{3}\varrho\ [kg \cdot m], \\ S_{xz} &= \int_\gamma y\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \varrho\int_\gamma y\,\mathrm{d}s = 2\sqrt{2}\varrho\int_0^\pi (1 - \cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt \\ &= 2\sqrt{2}\varrho\left[-3\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}t\right]_0^\pi = \frac{16\sqrt{2}}{3}\varrho\ [kg \cdot m], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \int_\gamma z\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \varrho\int_\gamma z\,\mathrm{d}s = 8\sqrt{2}\varrho\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt \\ &= 4\sqrt{2}\varrho\int_0^\pi \sin t\,dt = -4\sqrt{2}\varrho\left[\cos t\right]_0^\pi = 8\sqrt{2}\varrho\ [kg \cdot m], \end{aligned}$$

$$T = \left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m}, \frac{S_{xy}}{m}\right] = \left[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 2\right].$$

(g) *Moment setrvačnosti* hmotného drátu ve tvaru křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ vzhledem k přímce $p \subset \mathbb{R}^2$, resp. $p \subset \mathbb{R}^3$.

$$I_p = \int_\gamma d^2([x,y],p) \cdot \varrho(x,y)\,\mathrm{d}s, \qquad I_p = \int_\gamma d^2([x,y,z],p) \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,$$

kde $d([x,y],p)$ je vzdálenost bodu $[x,y]$ od přímky $p \subset \mathbb{R}^2$, resp. $d([x,y,z],p)$ je vzdálenost bodu $[x,y,z]$ od přímky $p \subset \mathbb{R}^3$.

Speciální případ vzhledem k souřadnicovým osám x a y.

$$I_x = \int_\gamma y^2 \cdot \varrho(x,y)\,\mathrm{d}s, \qquad I_y = \int_\gamma x^2 \cdot \varrho(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

Speciální případ vzhledem k souřadnicovým osám x, y a z.

$$I_x = \int_\gamma \left(y^2+z^2\right) \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s, \ I_y = \int_\gamma \left(x^2+z^2\right) \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,$$

$$I_z = \int_\gamma \left(x^2+y^2\right) \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s.$$

Cvičení 2.2. Užitím křivkového integrálu ve skalárním poli vypočtěte:

1. Délku křivky $\gamma:\ \vec{r} = a\cos t \cdot \vec{i} + a\sin t \cdot \vec{j} + vt \cdot \vec{k}$ pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, $a, v > 0$; $\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{a^2+v^2}\right]$
2. Obsah části válcové plochy $\Phi:\ 4x^2 + 9y^2 = 36$ pro $y \ge 0$ s řídící křivkou γ v rovině $z = 0$ a tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezenými plochami $z = 0,\ z = -xy$; $\left[\frac{76}{5}\right]$
3. Hmotnost konická šroubovice
$$\gamma = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x = t\cos t,\ y = t\sin t, z = t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\},$$
je-li hustota křivky $\sigma(x,y,z) \equiv z$; $\left[\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{2\pi^2+1} - 2\right)\right]$
4. Souřadnice těžiště $T = [x_T, y_T]$ homogeního oblouku cykloidy
$$\gamma:\ \vec{r}(t) = a(t - \sin t)\vec{i} + a(1 - \cos t)\vec{j},\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
kde $a > 0$ je konstanta, je-li hustota křivky $\sigma(\vec{r}(t)) \equiv k$. $[T = [\pi a, 4a/3]]$

3 Křivkový integrál ve vektorovém poli

3.1 Zavedení pojmu, základní vlastnosti křivkového integrálu ve skalárním poli

Ve fyzice a v technických aplikacích se často setkáváme s různými druhy rovinných nebo prostorových vektorových polí – *silové pole, pole rychlostí částic proudící nestlačitelné kapaliny, pole magnetické a elektrické intenzity.*
Z matematického hlediska jde vlastně o zobrazení, které bodům přiřazuje vektory.

Vektorové pole je zobrazení
$$\vec{f} :\to \Omega\mathbb{R}^n,$$
kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. V technické praxi je nejčastější použití pro $n = 2, 3$. V tomto případě budeme jednoduše psát
$$\vec{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)), \qquad \vec{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)),$$
kde P, Q, R jsou složky (komponenty) vektorové funkce $\vec{f}$.

Říkáme, že vektorové pole $\vec{f}$ je spojité vektorové pole, nebo stručněji je třídy C na Ω, když všechny složky jsou spojité na Ω. Říkáme, že vektorové pole $\vec{f}$ je třídy C^1 na Ω, když všechny složky tohoto pole mají spojité všechny první parciální derivace na množině Ω.

Uvažujeme-li orientovaný oblouk $\gamma : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^3)$, pak můžeme v každém bodě $M = \Gamma(t)$, $t \in (a,b)$ oblouku γ určit jednotkový tečný vektor vztahem
$$\vec{t}(M) = \frac{\dot{\Gamma}(t)}{\|\dot{\Gamma}(t)\|}.$$

Mějme nyní spojité vektorové silové pole $\vec{f}$ na oblouku γ a hledejme práci, která se vykoná v zadaném vektorovém poli, pohybuje-li se hmotný bod po oblouku γ ve směru jeho orientace. Rozdělíme-li oblouk γ na dostatečně malé oblouky γ_i, $i = 1, \dots, n$ můžeme vektor síly $\vec{f}$ na oblouku γ_i aproximovat konstantním vektorem $\vec{f}(M_i)$. Z fyziky je známo, že absolutní hodnota práce W_i je pak rovna součinu velikosti tečné složky $\vec{f}_t$ síly $\vec{f}(M_i)$ a délky dráhy Δs_i, což je délka oblouku γ_i. Protože $\left|\vec{f}(M_i) \cdot \vec{t}(M_i)\right| = \|\vec{f}_t(M_i)\|$ pak práce W je přibližně rovna
$$W = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}(M_i) \cdot \vec{t}(M_i) \Delta s_i,$$
což je možno interpretovat jako integrální součet pro křivkový integrál
$$\int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{t}\,\mathrm{d}s.$$
V aplikacích se často tento integrál označuje
$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{r}.$$

Definice 3.1. Nechť $\vec{f}$ je spojité vektorové pole na orientovaném oblouku γ. *Křivkovým integrálem* ve vektorovém poli $\vec{f}$ (křivkovým integrálem druhého druhu) přes křivku γ nazýváme integrál tvaru
$$\int_\gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{t}\,\mathrm{d}s.$$

Jeli $\Gamma : \langle a,b\rangle \to \gamma$, parametrizace orientovaného oblouku γ (tj. parametrizace oblouku souhlasí s jeho orientací), pak platí
$$\int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{t}\,\mathrm{d}s = \int_a^b \vec{f}(\Gamma(t)) \cdot \frac{\dot{\Gamma}(t)}{\|\dot{\Gamma}(t)\|} \|\dot{\Gamma}(t)\|\,dt = \int_a^b \vec{f}(\Gamma(t)) \cdot \dot{\Gamma}(t)\,dt$$
$$= \int_a^b \Big[P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\,\dot{\varphi}(t) + Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\,\dot{\psi}(t) + R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\,\dot{\chi}(t)\Big]\,dt.$$

Mnohdy se používá označení
$$\int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{t}\,\mathrm{d}s = \int_\gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z,$$
které se po dosazení z parametrických rovnic oblouku γ převede na výše uvedený tvar.

Poznámka 3.1. Je-li dána křivka předpisem $y = g(x)$, $x \in \langle a,b\rangle$ a g je spojitá na $\langle a,b\rangle$, pak platí
$$\int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b P(t, g(t))\,dt.$$
Je-li dána křivka předpisem $x = h(y)$, $y \in \langle c,d\rangle$ a h je spojitá na $\langle c,d\rangle$, pak platí
$$\int_\gamma Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d Q(h(t), t)\,dt.$$

Příklad 3.1. Vypočtěte
$$I = \int_\gamma y^2\,\mathrm{d}x + x(1+y^2)\,\mathrm{d}y,$$
kde γ je část elipsy $4x^2 + y^2 = 16$, ležící v prvním kvadrantu a orientovaná od bodu $A = [2,0]$ do bodu $B = [0,4]$.

Řešení: Parametrické rovnice jsou:
$$x = 2\cos t, \quad y = 4\sin t, \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle.$$
Odtud
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \Big(-32\sin^3 t + 8\cos^2 t(1 + 16\sin^2 t)\Big)\,dt \\ &= 8\int_0^{\pi/2} \Big(-4\sin^3 t + \cos^2 t + 16\sin^2\cos^2 t\Big)\,dt \\ &= 8\left[-\frac{4}{3}\cos^3 t + 4\cos t + \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}\sin 4t + \frac{5}{2}t\right]_0^{\pi/2} = 10\pi - \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

Příklad 3.2. Vypočtěte
$$I = \int_\gamma \frac{y}{x+z^2}\,\mathrm{d}x - (x+2z)\,\mathrm{d}y + \frac{y}{z}\,\mathrm{d}z,$$
kde γ je úsečka s počátečním bodem $A = [3,2,1]$ a s koncovým bodem $B = [1,1,2]$.
Řešení: Parametrické rovnice úsečky jsou:
$$x = 3 - 2t, \quad y = 2 - t, \quad z = 1 + t, \quad t \in \langle 0, 1\rangle.$$
Odtud
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\frac{2t-4}{t^2+4} + 5 + \frac{2-t}{1+t}\right)\,dt \\ &= \Big[\ln(t^2+4) - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2} + 4t + 3\ln|t+1|\Big]_0^1 = 4 - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + \ln 10. \end{aligned}$$

Příklad 3.3. Vypočtěte práci silového pole při pohybu hmotného bodu po průnikové křivce $\gamma = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 1 + y^2\}$ od bodu $A = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$ přes bod $B = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}]$ do bodu $C = [0,1,2]$. Silové pole působí v každém bodě silou, která směřuje kolmo k rovině xz a velikost této síly je rovna převrácené hodnotě vzdálenosti bodu od roviny xy.
Řešení: Sílu $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$ můžeme vyjádřit ve tvaru
$$\vec{F} = \|\vec{F}\| \cdot \vec{F_0} = \frac{1}{z} \cdot (0, -\frac{y}{|y|}, 0).$$

Křivku γ lze parametrizovat např. takto: $\Gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1 + \sin^2 t)$, $t \in \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Pak dostáváme
$$\begin{aligned} W &= \int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}\,dt = \left| \begin{matrix} \sin t = u & t = \frac{\pi}{6} | \frac{\pi}{2} \\ \cos t\,dt = du & u = \frac{1}{2} | 1 \end{matrix} \right| \\ &= -\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{1+u^2}\,du = -\left[\mathrm{arctg}\,u\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = -\frac{\pi}{4} + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Věta 3.1. *(Základní vlastnosti křivkového integrálu ve vektorovém poli)*

(a) **Linearita.** *Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$ je orientovaný oblouk a $\vec{f}$ a $\vec{g}$ jsou spojitá vektorová pole na oblouku γ. Pak platí*
$$\int_\gamma (c_1\vec{f} + c_2\vec{g}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = c_1\int_\gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} + c_2\int_\gamma \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{s},$$
kde c_1 a c_2 jsou libovolné reálné konstanty.

(b) **Aditivita.** *Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$ je křivka, která je sjednocením dvou orientovaných oblouků γ_1, γ_2 a $\vec{f}$ je spojitá vektorové pole na křivce γ. Pak platí*
$$\int_\gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

Cvičení 3.1. Vypočítejte křivkové integrály po dané křivce γ (uvažujeme pravotočivý souřadnicový systém):

1. $\int_\gamma y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, kde γ je orientovaná čtvrtkružnice $\vec{r}(t) = a\cos t \cdot \vec{i} + a\sin t \cdot \vec{j}$, $0 \le t \le \pi/2$ a kde bod $A = [a, 0]$ je daný jako počáteční bod, $a > 0$ konstanta; $\big[0\big]$
2. $\int_\gamma \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$, kde γ je orientovaná úsečka AB, s počátečním bodem $A = [1,1,1]$ a koncovým bodem $B = [4,4,4]$; $\big[3\sqrt{3}\big]$
3. $\int_\gamma (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$, kde γ je orientovaná křivka $y = 1 - |1-x|$ pro $0 \le x \le 2$, počáteční bod $A = [2,0]$; $\big[-\frac{4}{3}\big]$
4. $\int_\gamma yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$, kde γ je oblouk AB šroubovice
$$\vec{r}(t) = a\cos t \cdot \vec{i} + a\sin t \cdot \vec{j} + bt/2\pi \cdot \vec{k}$$
(orientovaný) od bodu $A = [a,0,0]$ do $B = [a,0,b]$, $a, b > 0$ konstanty. $\big[0\big]$

Cvičení 3.2. V každém bodě silového pole v $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) působí síla $\vec{F}(\vec{r})$. Vypočítejte práci A tohoto pole při pohybu hmotného bodu po orientované křivce γ:

1. $\vec{F} = xy \cdot \vec{i} + (x+y) \cdot \vec{j}$, γ je oblouk AB křivky γ dané rovnicí $y = \operatorname{arctg} x$ od bodu $A = [1, ?]$ do bodu $B = [0, ?]$; $\left[\frac{1}{32}\left(16 - 8\pi - \pi^2\right) - \ln 2\right]$

2. $\vec{F}(\vec{r}) = y\vec{i} + z\vec{j} + yz\vec{k}$, γ : $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, ct)$ orientované souhlasně s daným parametrickým vyjádřením pro $t \in \langle 0, \pi \rangle$, $c > 0$. $\left[\frac{\pi}{2}\left(2c^2 - 4c - 1\right)\right]$

3.2 Greenova věta

Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se nazývá *jednoduše souvislá* v $\mathbb{R}^2$, jestliže s každou kružnicí, která je obsažena v Ω je také vnitřek kružnice obsažen v Ω. Mezikruží není jednoduše souvislá množina v $\mathbb{R}^2$.

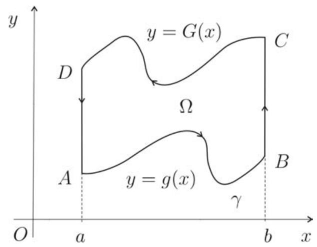
Věta 3.2. (Greenova věta) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, ohraničená množina, jejíž hranicí je jediná kladně orientovaná jednoduchá uzavřená křivka γ. Dále nechť $\vec{f} = (P, Q)$ je spojité vektorové pole na $\overline{\Omega}$ a $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ jsou spojité funkce na $\overline{\Omega}$. Pak platí*

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int\limits_{\gamma} \vec{f}(x,y) \cdot \mathrm{d}\vec{s} \\ &= \int\limits_{\gamma} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro oblast prvního druhu

$$\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ a < x < b, \ g(x) < y < G(x)\},$$

kde funkce g a G jsou spojité na $\langle a, b \rangle$ (viz obrázek).



$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{G(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int\limits_a^b \Big[P(x,y)\Big]_{g(x)}^{G(x)} \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_a^b \Big[P(x, G(x)) - P(x, g(x))\Big]\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Poslední integrály můžeme vyjádřit podle Poznámky 3.1 následovně

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b P(x, G(x))\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{DC} P(x,y)\,\mathrm{d}x, \\ \int\limits_a^b P(x, g(x))\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{AB} P(x,y)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Vzhledem k předešlému můžeme psát

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int\limits_{DC} P(x,y)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{AB} P(x,y)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int\limits_{AB} P(x,y)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{CD} P(x,y)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int\limits_{AB} P(x,y)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{BC} P(x,y)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{CD} P(x,y)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{DA} P(x,y)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int\limits_{\gamma} P(x,y)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

neboť integrály po úsečkách BC a DA jsou nulové. Můžeme-li náš integrační obor rozložit na konečné sjednocení oblastí prvního druhu, platí předešlá rovnice na každé takové oblasti a ze základních vlastností dvojných a křivkových integrálů plyne žádaná rovnice na celé oblasti.
Analogicky se dokáže platnost rovnice

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\gamma} Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

kde Ω je oblast druhého druhu.
Nakonec můžeme-li náš integrační obor rozložit na konečné sjednocení oblastí prvního druhu a současně na sjednocení konečného počtu oblastí druhého druhu, sečteme předešlé rovnice a dostaneme žádaný vzorec.

Příklad 3.4. Užitím Greenovy věty vypočtěte

$$I = \int\limits_{\gamma} \left(x^2 y - x\right)\mathrm{d}x - \left(xy^2 + y\right)\mathrm{d}y,$$

kde γ je křivka o rovnici $x^2 + y^2 = 2y$, orientovaná ve směru pohybu hodinových ručiček.
Řešení: Křivka γ je záporně orientovaná hranice jednoduše souvislé oblasti

$$\Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 2y\}.$$

Vektorové pole $\vec{f} = (P, Q)$ je třídy C^1 v $\mathbb{R}^2$ a tedy dle Greenovy věty platí

$$\int\limits_{\gamma} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = -\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Odtud dostáváme

$$I = -\iint\limits_{\Omega} (-y^2 - x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Na poslední dvojný integrál použijeme transformace do polárních souřadnic

$$\begin{aligned}x &= r\cos t \equiv \varphi(r,t), \\ y &= r\sin t \equiv \psi(r,t).\end{aligned}$$

s jakobiánem $J(r,t) = r$. Vzor množiny Ω je množina

$$\Omega^* = \{[r,t] \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < t < \pi, \ 0 < r < 2\sin t\}.$$

$$\begin{aligned}I &= \int\limits_0^{\pi} \left(\int\limits_0^{2\sin t} r^3\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}r = 4\int\limits_0^{\pi} \sin^4 t\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\pi} \left[1 - 2\cos 2t + \frac{1}{2}(1 + \cos 4t)\right] \mathrm{d}t \\ &= \left[t - \sin 2t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}\sin 4t\right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

Aplikace Greenovy věty. *Obsah* rovinné oblasti splující předpoklady Greenovy věty.

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Položíme-li v Greenově větě

$$P(x,y) = -\frac{1}{2}y, \quad Q(x,y) = \frac{1}{2}x,$$

dostaneme požadovaný výsledek.

Příklad 3.5. Vypočtěte obsah elipsy.
Řešení: Zvolíme-li parametrizaci

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

$$\dot{x} = -a\sin t, \quad \dot{y} = b\cos t,$$

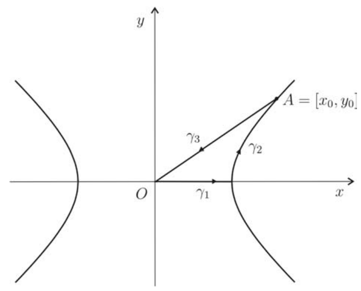
dostaneme

$$\mu = \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(ab\cos^2 t + ab\sin^2 t\right) dt = \frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi ab \ [m^2].$$

Příklad 3.6. Užitím Greenovy věty vypočtěte obsah množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde Ω je ohraničená obloukem hyperboly o parametrických rovnicích

$$x = a\cosh t, \quad y = b\sinh t, \quad t \in (-\infty, \infty), \ a, b > 0,$$

osou x a spojnicí počátku souřadné soustavy s bodem $A = [x_0, y_0]$ hyperboly, kde $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.



Řešení: Platí

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x,$$

kde $\partial\Omega$ je kladně orientovaná hranice oblasti Ω, tvořená křivkami γ_1, γ_2, γ_3. Odtud

$$\int\limits_{\partial\Omega} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\gamma_1} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\gamma_2} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\gamma_3} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

Parametrické rovnice postupně jsou:

$$\begin{aligned}&\gamma_1 : \ y = 0, && x = t, && t \in \langle 0, a \rangle \\ &\gamma_2 : \ x = a\cosh t, && y = b\sinh t, && t \in \langle 0, t_0 \rangle \\ &\gamma_3 : \ x = t, && y = kt, && t \in \langle x_0, 0 \rangle,\end{aligned}$$

kde $k = y_0/x_0$. Je vidět, že

$$\int\limits_{\gamma_1} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\gamma_3} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = 0.$$

Dále
$$\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_2} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{t_0}\left(\cosh^2 t - \sinh^2 t\right) dt = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{t_0} dt = \frac{ab}{2}t_0.$$
Pro parametr t_0 bodu A platí
$$\cosh t_0 + \sinh t_0 = e^{t_0} = \frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b} \quad\Rightarrow\quad t_0 = \ln\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)$$
a celkem
$$P = \frac{ab}{2}\ln\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)\ [m^2].$$

Cvičení 3.3. Ověřte, že jsou splněny podmínky pro užití Greenovy věty, a užijte ji k výpočtu následujících integrálů:

1. $\int_\gamma (x+y)^2\,\mathrm{d}x - (x+y)^2\,\mathrm{d}y$, kde γ je kladně orientovaný obvod trojúhelníka OAB s vrcholy $O=[0,0]$, $A=[1,0]$, $B=[0,1]$; [$-4/3$]
2. $\int_\gamma (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y$, kde γ je elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ orientovaná kladně. [$-2\pi ab$]

Cvičení 3.4. Aplikací Greenovy věty vypočtěte obsah rovinného obrazce
$$A = \left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x^2\le y\le x\right\}.$$
[1/6]

3.3 Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě

V tomto odstavci budeme *oblastí* v $\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ rozumět otevřenou podmnožinu v $\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$, ve které můžeme každé dva různé body ležící v této množině spojit jednoduchou křivkou, ležící v této množině.
Řekneme, že spojité vektorové pole $\vec f$ v oblasti $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ *nezávisí na integrační cestě*, jestliže pro libovolné orientované křivky γ_1, γ_2 ležící v Ω se stejným počátečním bodem A a koncovým bodem B, platí
$$\int\limits_{\gamma_1}\vec f\cdot\mathrm{d}\vec s = \int\limits_{\gamma_2}\vec f\cdot\mathrm{d}\vec s.$$
Pak také píšeme
$$\int\limits_A^B \vec f\cdot\mathrm{d}\vec s.$$

Nechť $\vec f=(P,Q)$ $(\vec f=(P,Q,R))$ je spojité vektorové pole na oblasti $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ $(\Omega\subset\mathbb{R}^3)$. Řekneme, že vektorové pole je *potenciální* na Ω, jestliže existuje funkce $V\in C^1(\Omega)$ tak, že
$$\nabla V = \vec f$$
pro každé $[x,y]\in\Omega$ $([x,y,z]\in\Omega)$. Každou takovou funkci V nazýváme *potenciálem* vektorového pole $\vec f$ na Ω.

Věta 3.3. *Nechť vektorové pole $\vec f=(P,Q)$ je třídy C^1 na jednoduše souvislé oblasti $\Omega\subset\mathbb{R}^2$. Pak toto pole je potenciální tehdy a jen tehdy, když*
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$
pro každé $[x,y]\in\Omega$.

Rotaci vektorového pole $\vec f(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ definujeme pomocí formálního determinantu
$$\begin{aligned} rot\,\vec f(x,y,z) &= \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z)\end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec i + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec k.\end{aligned}$$

Oblast $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ se nazývá *jednoduše souvislá* v $\mathbb{R}^3$, jestliže s každou kulovou plochou, která je obsažena v Ω je také vnitřek kulové plochy obsažen v Ω. Koule, trojrozměrný interval jsou jednoduše souvislé množiny, ale mezisféra není jednoduše souvislá množina v $\mathbb{R}^3$.
Oblast $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ se nazývá *plošně jednoduše souvislá* v $\mathbb{R}^3$, jestliže ke každé jednoduché uzavřené křivce, která je obsažena v Ω existuje hladká plocha, která sama sebe neprotíná taková, že $S\subset\Omega$ a jejíž okraj je tato křivka.
Množina $\mathbb{R}^3\setminus\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : x=y=0\}$ je jednoduše souvislá, ale není plošně jednoduše souvislá.

Věta 3.4. *Nechť vektorové pole $\vec f=(P,Q,R)$ je třídy C^1 na plošně jednoduše souvislé oblasti $\Omega\subset\mathbb{R}^3$. Pak toto pole je potenciální tehdy a jen tehdy, když*
$$rot\,\vec f(x,y,z) = (0,0,0)$$
pro každé $[x,y,z]\in\Omega$.

Věta 3.5. *Nechť $\vec f=(P,Q)$ je třídy C^1 v jednoduše souvislé oblasti $\Omega\subset\mathbb{R}^2$. Křivkový integrál*
$$\int\limits_\gamma \vec f(x,y)\cdot\mathrm{d}\vec s = \int\limits_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

kde $\gamma\subset\Omega$ nezávisí na integrační cestě AB v oblasti Ω tehdy a jen tehdy, když vektorové pole $\vec f$ je na Ω potenciální. Je-li V jeho potenciál na Ω, pak platí
$$\int\limits_A^B P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = V(B)-V(A).$$

Příklad 3.7. Dokažte, že integrál
$$\int\limits_A^B\left(\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}\right)\mathrm{d}y$$
z bodu $A=[1,2]$ do bodu $B=[2,6]$ nezávisí na integrační cestě a určete jeho hodnotu.
Řešení: Vektorové pole $\vec f=(P,Q)$ je v oblasti $\Omega=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : y>x>0\}$ třídy C^1. Pro funkce P, Q platí
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{(x-y)^3}$$
pro každé $[x,y]\in\Omega$. Vektorové pole $\vec f$ je tedy v jednoduše souvislé oblasti Ω potenciální a zadaný integrál tedy nezávisí na integrační cestě. Pro potenciál V platí
$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \qquad \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$$
pro každé $[x,y]\in\Omega$. Integrací první rovnice podle proměnné x máme
$$V(x,y) = \int\left(\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + g(y) = \frac{y^2}{y-x} - \ln x + g(y).$$
Z rovnice
$$\frac{\partial V}{\partial y} = Q(x,y)$$
plyne
$$g'(y) + \frac{y^2-2xy}{(x-y)^2} = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}$$
a po úpravě
$$g'(y) = -1 + \frac{1}{y}.$$
Integrací předešlé rovnice dostáváme
$$g(y) = -y + \ln y + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$
Celkem
$$V(x,y) = \frac{xy}{y-x} + \ln\frac{y}{x} + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$
Hodnota integrálu je
$$V(B)-V(A) = 2 + \ln\frac{3}{2}.$$

Věta 3.6. *Nechť $\vec f=(P,Q,R)$ je třídy C^1 v plošně jednoduše souvislé oblasti $\Omega\subset\mathbb{R}^3$. Křivkový integrál*
$$\int\limits_\gamma \vec f(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\vec s = \int\limits_\gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z,$$
kde $\gamma\subset\Omega$ nezávisí na integrační cestě AB na oblasti Ω tehdy a jen tehdy, když vektorové pole $\vec f$ je potenciální na Ω . Je-li V jeho potenciál na Ω, pak platí
$$\int\limits_A^B P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z = V(B)-V(A).$$

Příklad 3.8. Dokažte, že integrál
$$\int\limits_A^B yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$$
z bodu $A=[1,2,3]$ do bodu $B=[3,2,1]$ nezávisí na integrační cestě a určete jeho hodnotu.
Řešení: Vektorove pole $\vec f(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))=(yz,xz,xy)$ je třídy C^1 na plošně jednoduše souvislé oblasti $\Omega=\mathbb{R}^3$. Pro funkce P, Q, R platí
$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) &= x-x=0,\\ \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) &= y-y=0,\\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) &= z-z=0\end{aligned}$$
pro každé $[x,y,z]\in\Omega$. Vektorové pole $\vec f$ je tedy na Ω potenciální a existuje potenciál V tak, že
$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) = yz, \qquad \frac{\partial V}{\partial y}(x,y,z) = xz, \qquad \frac{\partial V}{\partial z}(x,y,z) = xy$$
pro každé $[x,y,z]\in\Omega$. Integrací první rovnice podle proměnné x máme
$$V(x,y,z) = \int yz\,\mathrm{d}x + g(y,z) = xyz + g(y,z),$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xyz + g(y,z)) = xz + \frac{\partial g(y,z)}{\partial y}.$$
Z předešlého a využitím druhé rovnice máme
$$xz + \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = xz$$

a tedy

$$\frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = 0.$$

Integrací této rovnice podle proměnné y máme

$$g(y,z) = \int 0 \, \mathrm{d}y + h(z) = h(z),$$

$$V(x,y,z) = xyz + h(z).$$

Využitím třetí rovnice dostáváme

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(xyz + h(z)\right) = xy + h'(z) = xy.$$

Z předešlého máme

$$h'(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad h(z) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

a závěrem

$$V(x,y,z) = xyz + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Hodnota integrálu je

$$V(B) - V(A) = 6 + c - 6 - c = 0.$$

Příklad 3.9. Dokažte, že integrál

$$\int_A^B x \, \mathrm{d}x + y^2 \, \mathrm{d}y - z^3 \, \mathrm{d}z$$

z bodu $A = [1,1,1]$ do bodu $B = [1,1,-1]$ nezávisí na integrační cestě a určete jeho hodnotu.

Řešení: Vektorové pole $\vec{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) = (x, y^2, -z^3)$ je třídy C^1 na plošně jednoduše souvislé oblasti $\Omega = \mathbb{R}^3$. Pro funkce P, Q, R platí

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) &= 0 - 0 = 0,\\
\frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) &= 0 - 0 = 0,\\
\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) &= 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

pro každé $[x,y,z] \in \Omega$. Vektorové pole $\vec{f}$ je tedy na Ω potenciální a existuje potenciál V tak, že

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = y^2, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -z^3$$

pro každé $[x,y,z] \in \Omega$. Integrací první rovnice podle proměnné x dostáváme

$$V(x,y,z) = \int x \, \mathrm{d}x + g(y,z) = \frac{1}{2}x^2 + g(y,z),$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2 + g(y,z)\right) = \frac{\partial g(y,z)}{\partial y}.$$

Z předešlého a využitím druhé rovnice máme

$$\frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = y^2.$$

Integrací předešlé rovnice podle y máme

$$g(y,z) = \int y^2 \, \mathrm{d}y + h(z) = \frac{1}{3}y^3 + h(z),$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 + h(z).$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 + h(z)\right) = h'(z).$$

Z předešlého a využitím třetí rovnice dostaneme

$$h'(z) = -z^3 \quad \Longrightarrow \quad h(z) = -\frac{1}{4}z^4 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

a potenciál má tvar

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}z^4 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Hodnota integrálu je

$$V(B) - V(A) = 0.$$

Cvičení 3.5. Ověřte, že daný integrál nezávisí na integrační cestě v $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (resp. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$) a vypočtěte jeho hodnotu od bodu A do bodu B:

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{x \, \mathrm{d}x + y \, \mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$, $A = [-2,-6]$, $B = [1,0]$; $\left[-\frac{1}{2}\ln 40\right]$
2. $\displaystyle\int_\gamma x \, \mathrm{d}x + y \, \mathrm{d}y + (x + y - 1) \, \mathrm{d}z$, $A = [2,3,4]$, $B = [1,1,1]$; $\left[-13\right]$

Cvičení 3.6. Ověřte, že práce v silovém poli $\vec{F}$ nezávisí na integrační cestě v $\mathbb{R}^2$ (resp. v $\mathbb{R}^3$), určete potenciál $\vec{F}(\vec{r})$ tohoto silového pole a vypočtěte práci A od bodu M do bodu N.

1. $\vec{F}(x,y) = (x\cos 2y + 1)\cdot\vec{i} - x^2 \sin 2y \cdot \vec{j}$, $M = [0, -\frac{\pi}{2}]$, $N = [\frac{\pi}{2}, \pi]$;
$\left[V(x,y) = \frac{1}{2}x^2\cos 2y + x + c;\ W = \frac{1}{8}\pi(\pi + 4)\right]$
2. $\vec{F}(\vec{r}) = (x^2 + yz)\cdot\vec{i} + (y^2 + xz)\cdot\vec{j} + (z^2 + xy)\cdot\vec{k}$, $M = [1,-2,3]$, $N = [2,3,4]$.
$\left[V(x,y,z) = \frac{1}{3}\left(x^3 + y^3 + z^3\right) + xyz + c;\ W = \frac{169}{3}\right]$

4 Kontrolní otázky, autotest

Otázky pro vás:

- Napište integrální součet, který vyjadřuje aproximaci hmotnosti oblou-ku.
- Kdy nazveme limitu integrálních součtů křivkovým integrálem ve skalá-rním poli?
- Uveďte vztahy pro výpočet křivkového integrálu v rovinném a prostorovém skalárním poli.
- Jaké znáte základní vlastnosti křivkového integrálu ve skalárním poli?
- Vysvětlete vztahy pro výpočet základních geometrických a technických aplikací křivkového integrálu ve skalárním poli.
- Jaký tvar má integrální součet pro výpočet práce v silovém poli?
- Zapište vztahy pro výpočet křivkového integrálu ve vektorovém poli v rovině a v prostoru.
- Uveďte základní vlastnosti křivkového integrálu ve vektorovém poli.
- Zformulujte Greenovu větu.
- Užitím Greenovy věty odvoďte vztah pro výpočet plošného obsahu rovinné oblasti.
- Kdy řekneme, že křivkový integrál nezávisí na integrační cestě?
- Jak definujeme potenciál vektorového pole?
- Co je jednoduše souvislá oblast v R^2?
- Co stačí k tomu, aby rovinné vektorové pole na jednoduše souvislé oblasti bylo potenciální? Jak se změní tyto podmínky v případě prostorového vektorového pole?
- Popište postup při výpočtu potenciálu v případě rovinného a prostorového vektorového pole.
- Jak se vypočítá křivkový integrál nezávislý na integrační cestě, známe-li potenciál?

Autotest

Vzorové zadání kontrolního testu.

Matematika, 2. semestr	Zpracoval:
Test č. 4	Jméno: ....
	Adresa: ....

A. Vypočtěte křivkové integrály 1. druhu po dané křivce γ:

1) $\displaystyle\int_\gamma (x+y)\,\mathrm{d}s$, kde γ je obvod trojúhelníka s vrcholy $A = [1,-1]$, $B = [2,-1]$ a $C = [1,0]$;

2) $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{z^2}{(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}s\right.$, kde γ je oblouk šroubovice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = at$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $a > 0$;

3) $\displaystyle\int_\gamma xy\,\mathrm{d}s$, kde γ je elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ pro $x \geq 0$, $y \geq 0$, $a, b > 0$.

B. Vypočtěte křivkové integrály 2 druhu po dané křivce γ:

4) $\displaystyle\int_\gamma x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + (x+y-1)\,\mathrm{d}z$, kde γ je orientovaná úsečka $A = [1,1,1]$, $B = [2,3,4]$;

5) $\displaystyle\int_\gamma (y^2 - x^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y$, kde γ je orientovaná křivka $x + |y-1| = 1$ pro $0 \leq y \leq 2$ s koncovým bodem $B = [0,2]$;

6) $\displaystyle\int_\gamma xy\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y$, kde γ je oblouk AB křivky $y = \operatorname{arctg} x$ od bodu $A = [1, ?]$ do bodu $B = [0, ?]$.

C. Ověřte, že daný integrál nezávisí na integrační cestě a vypočtěte jeho hodnou od bodu A do bodu B:

7) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1-y^2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{2y}{1+x}\,\mathrm{d}y$, $A = [0,0]$, $B = [1,1]$;

8) $\displaystyle\int_\gamma xz^2\,\mathrm{d}x + y^3\,\mathrm{d}y + x^2z\,\mathrm{d}z$, $A = [-1,1,2]$, $B = [-4,2,-1]$.

D. Ověřte, že jsou splněny podmínky pro užití Greenovy věty a užijte ji k výpočtu integrálů:

9) $\int_\gamma (x+y)^2\,\mathrm{d}x \;-\; (x+y)^2\,\mathrm{d}y$, kde γ je kladně orientovaný obvod trojúhelníka ABC, $A=[0,0]$, $B=[1,0]$ a $C=[0,1]$;

10) $\int_\gamma (xy+x+y)\,\mathrm{d}x \;+\; (xy+x-y)\,\mathrm{d}y$, kde γ je kladně orientovaná kružnice $x^2+y^2=ax$, $a>0$ konstanta.

E. Vypočtěte délku křivky γ, je-li:

11) $\gamma:\ \vec{r}(t)=a\cos t\vec{i}+vt\vec{j}+a\sin t\vec{k}$, $0\le t\le \pi/4$, $a,v>0$ konstanty.

F. Vypočtěte obsah rovinného obrazce A, je-li

12) $A\ =\Big\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ 3x^2+4y^2\le 12,\ x\le 2y\le 3x\Big\}$.

G. Vypočtěte hmotnost křivky γ, je-li hustota křivky $\sigma(\vec{r})$:

13) $\gamma:\ y=\sqrt{x^3}$ pro $0\le x\le 4/9$, $\sigma(x,y)\equiv x$.

H. V každém bodě silového pole v $\mathbb{R}^3$ působí síla $\vec{F}(\vec{r})$. Vypočítejte práci tohoto pole při pohybu hmotného bodu po orientované křivce γ:

14) $\gamma:\ \vec{r}(t)=(\cos t,\ \sin t,\ ct)$ orientované souhlasně s daným parametrickým vyjádřním pro $t\in\langle 0,\pi\rangle$; $\vec{F}(\vec{r})\equiv y\cdot\vec{i}+z\cdot\vec{j}+yz\cdot\vec{k}$.

př.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$	opravil(a)
max. bodů	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	14	
zís. bodů																

5 Studijní prameny.

[1] Brabec, J., Hrůza, B.: *Matematická analýza* II., SNTL, Praha 1986.

[2] Drábek, P., Míka, S.: *Matematická analýza* II., FAV, Plzeň 1997, 2. vydání.

[3] Fichtěngolc G.M.: *Kurs diferencialnovo i integralnovo isčislenija* III., Nauka, Moskva 1966, 4. vydání.

[4] Rektorys, K. a kol.: *Přehled užité matematiky* I., Prometheus, Praha 1995, 6. přepracované vydání.

[5] Škrášek, J., Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky* II., SNTL, Praha 1986.

[6] Ženíšek, A.: *Křivkový a plošný integrál*, PC-DIR, Brno 1997.

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

HELENA KOUTKOVÁ, KVĚTOSLAVA PRUDILOVÁ

SBÍRKA PŘÍKLADŮ Z MATEMATIKY III

MODUL BA02-M05

DVOJNÝ, TROJNÝ A KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

STUDIJNÍ OPORY PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

Obsah

Úvod

Sbírka úloh je určena především posluchačům třetího semestru Stavební fakulty VUT v Brně. Navazuje na teoretická skripta Matematika II (Modul 1 a Modul 2 -viz Literatura). Sbírka je věnována dvojrozměrnému, trojrozměrnému a křivkovému integrálu.

V kapitolách Dvojný a Trojný integrál jsou uvedeny řešené příklady, v každé kapitole přehledy vzorců na aplikace, v příloze přehled nejdůležitějších tabulkových integrálů. Každá kapitola obsahuje řadu neřešených příkladů s výsledky.

Děkujeme RNDr. O. Dlouhému za cenné rady a připomínky při vytváření sbírky.

Dále děkujeme za upozornění na jakékoliv případné nedostatky a chyby v této sbírce.

V Brně dne 4. listopadu 2007. Autoři

Kapitola 1

Dvojný integrál

1.1 Výpočet dvojného integrálu bez transformace

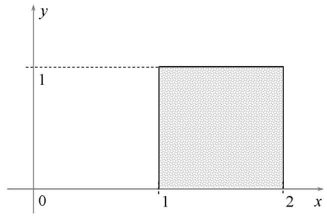
Příklad 1: Vypočítejte integrál $\int\int_D (x+y)\,dxdy$, kde integrační obor D je dán vztahy $0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$, $0 \le y \le 1$.

Řešení: Integrační obor je oblast druhého druhu. Funkce $f(x,y) = x + y$ je na D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Podle Fubiniho věty převedeme výpočet dvojného integrálu na výpočet dvojnásobného integrálu. Přitom nejprve budeme integrovat podle proměnné x, potom podle proměnné y.

$$\begin{aligned}
\iint_D (x+y)\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 + xy \right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(1-y^2) + y\sqrt{1-y^2} \right) dy = \frac{1}{2}\left[y - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^1 \\
&+ \int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,dy = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{1-y^2} \\ t^2 = 1-y^2 \\ tdt = -ydy \end{array} \begin{array}{c|c} y & t \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| = \frac{1}{3} - \int_1^0 t^2\,dt = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Příklad 2: Vypočítejte integrál $\int\int_D y^x\,dxdy$, kde $D = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

Řešení: Integrační obor je čtverec - viz Obrázek 1.1. Jedná se o oblast, která je prvního i druhého druhu. Funkce $f(x,y) = y^x$ je na D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Podle Fubiniho věty převedeme výpočet dvojného integrálu na výpočet dvojnásobného integrálu. Přitom nezávisí na pořadí integrace. Výpočet nejprve provedeme za předpokladu, že je D oblast 1. druhu.



Obrázek 1.1: $D = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$

$$\begin{aligned}
\iint_D y^x\,dxdy &= \int_1^2 \left(\int_0^1 y^x\,dy \right) dx = \int_1^2 \left[\frac{y^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 dx = \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx \\
&= [\ln|x+1|]_1^2 = \ln\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Při výpočtu pomocí oblasti 2. druhu dostaneme

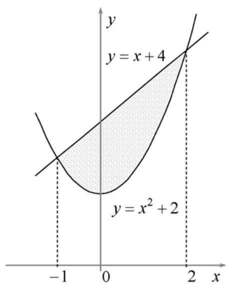
$$\iint_D y^x\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_1^2 y^x\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{y^x}{\ln y} \right]_1^2 dy = \int_0^1 \frac{y^2 - y}{\ln y}\,dy.$$

Tento integrál ale nelze vyřešit pomocí tabulkových integrálů. Z teoretického hlediska tedy sice nezáviselo na pořadí integrace, z praktického hlediska ano.

Příklad 3: Vypočítejte integrál $\int\int_D y\,dxdy$, je-li integrační obor D vymezen nerovnicemi: $y - x^2 - 2 \ge 0$, $y - x - 4 \le 0$.

Řešení: Integrační obor je - viz Obrázek 1.2 - oblast prvního druhu. Funkce $f(x,y) = y$ je na D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Podle Fubiniho věty převedeme výpočet dvojného integrálu na výpočet dvojnásobného integrálu. Nejprve budeme integrovat podle proměnné y, potom podle x. Krajní meze $x-$ ové souřadnice oblasti získáme jako $x-$ové souřadnice průsečíku paraboly a přímky. Řešíme rovnici $x^2 + 2 = x + 4$, odtud $x^2 - x - 2 = 0$, tedy $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Tedy $D = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ -1 \le x \le 2,\ x^2 + 2 \le y \le x + 4\}$.

$$\begin{aligned}
\iint_D y\,dxdy &= \int_{-1}^2 \left(\int_{x^2+2}^{x+4} y\,dy \right) dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^2 \left[y^2\right]_{x^2+2}^{x+4} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^2 \left((x+4)^2 - (x^2+2)^2 \right) dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^2 \left(-x^4 - 3x^2 + 8x + 12 \right) dx = \frac{81}{5}.
\end{aligned}$$



Obrázek 1.2: $D:\ y - x^2 - 2 \ge 0,\ y - x - 4 \le 0$

Příklad 4: Vypočítejte integrál $\int\int_D xy^2\,dxdy$, je-li integrační obor D určen nerovnicemi $x^2 + y^2 \le 4$, $y + x - 2 \ge 0$.

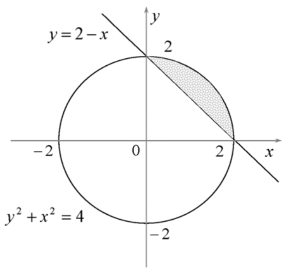
Řešení: Integrační obor je ohraničen přímkou a kružnicí - viz Obrázek 1.3. Jedná se o oblast, která je prvního i druhého druhu. Funkce $f(x,y) = xy^2$ je na oblasti D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Podle Fubiniho věty převedeme výpočet dvojného integrálu na výpočet dvojnásobného integrálu. Přitom nezávisí na pořadí integrace. Výpočet nejprve provedeme za předpokladu, že je D oblast 1. druhu. Tedy

$$D = \left\{ [x,y] \in \mathbf{E_2};\ 0 \le x \le 2,\ 2 - x \le y \le \sqrt{4 - x^2} \right\}.$$

Potom

$$\begin{aligned}
\iint_D xy^2\,dxdy &= \int_0^2 \left(\int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} xy^2\,dy \right) dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{3}xy^3 \right]_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} \\
&= \int_0^2 \frac{x}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}\,dx - \int_0^2 \frac{x}{3}(2-x)^3\,dx = \frac{8}{5}.
\end{aligned}$$

První z integrálů řešíme substitucí $t = \sqrt{4 - x^2}$, druhý pomocí algebraických úprav nebo substitucí $t = 2 - x$.
Zvolíme-li oblast druhého druhu, tj. $D = \left\{ [x,y] \in \mathbf{E_2};\ 0 \le y \le 2,\ 2 - y \le x \le \sqrt{4 - y^2} \right\}$,



Obrázek 1.3: $D:\ x^2 + y^2 \le 4,\ y + x - 2 \ge 0$

dostaneme:

$$\begin{aligned}
\iint_D xy^2\,dxdy &= \int_0^2 \left(\int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} xy^2\,dx \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2y^2 \right]_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 y^2 \left(4 - y^2 - (2-y)^2 \right) dy = \int_0^2 \left(2y^3 - y^4 \right) dx = \frac{8}{5}.
\end{aligned}$$

Vidíme, že výpočet tohoto dvojného integrálu pomocí oblasti druhého druhu je jednodušší.

Příklad 5: Vypočtěte integrál $\int\int_D x^2ye^{xy}dxdy$, kde integrační obor D je obdélník daný nerovnicemi: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$.

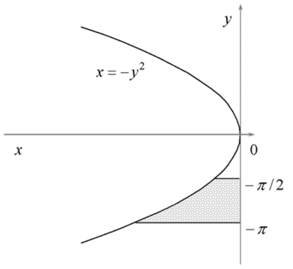
Řešení: Množina D je oblast prvního i druhého druhu. Funkce $f(x,y) = x^2ye^{xy}$ je na oblasti D spojitá a ohraničená. Oblast D budeme uvažovat jako oblast prvního druhu.

Aplikujeme Fubiniho větu.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D x^2y\mathrm{e}^{xy}\,dxdy &= \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^2 x^2y\mathrm{e}^{xy}dy\right)dx = \left|\begin{array}{ll} u=x^2y, & v'_y=\mathrm{e}^{xy} \\ u'_y=x^2, & v=\int\mathrm{e}^{xy}\,dy=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{xy}\end{array}\right| \\
&= \int\limits_0^1\left(\Big[xy\mathrm{e}^{xy}\Big]_0^2-\int\limits_0^2 x\mathrm{e}^{xy}dy\right)dx = \int\limits_0^1\left[\mathrm{e}^{xy}(xy-1)\right]_0^2\,dx \\
&= \int\limits_0^1\left((2x-1)\mathrm{e}^{2x}+1\right)\,dx = \left[x\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{2x}+x\right]_0^1=2.
\end{aligned}$$

Příklad 6: Vypočítejte integrál $\int\int_D \cos\frac{x}{y}\,dxdy$, kde integrační obor D je určen nerovnicemi: $x\geq -y^2,\ -\pi\leq y\leq -\frac{\pi}{2},\ x\leq 0.$

Řešení: Integrační obor je ohraničen parabolou a třemi přímkami - viz Obrázek 1.4. Jedná se o oblast druhého druhu. Funkce $f(x,y)=\cos\frac{x}{y}$ je na oblasti D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Podle Fubiniho věty převedeme výpočet dvojného integrálu na výpočet dvojnásobného integrálu. Nejprve budeme integrovat podle proměnné x, potom podle y. Tedy

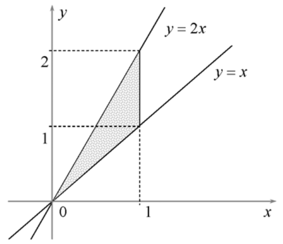


Obrázek 1.4: $D:\ x\geq -y^2,\ -\pi\leq y\leq -\frac{\pi}{2},\ x\leq 0$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \cos\frac{x}{y}\,dxdy &= \int\limits_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{-y^2}^{0}\cos\frac{x}{y}\,dx\right)\,dy = \left|\begin{array}{ll} t=\frac{x}{y} & \begin{array}{r|r} x & t \\ \hline -y^2 & -y \\ 0 & 0\end{array} \\ dt=\frac{1}{y}dx & \end{array}\right| \\
&= \int\limits_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{-y}^{0}y\cos t\,dt\right)\,dy = \int\limits_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}y\left[\sin t\right]_{-y}^{0}\,dy \\
&= \int\limits_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}y\sin y\,dy = \left|\begin{array}{ll} u=y, & v'=\sin y \\ u'=1, & v=-\cos y\end{array}\right| \\
&= -\left[y\cos y\right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}+\int\limits_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\cos y\,dy=\pi-1.
\end{aligned}$$

Příklad 7: Vypočítejte integrál $\int\int_D \mathrm{e}^{x-y}\,dxdy$, je-li oblast D ohraničená trojúhelníkem s vrcholy $A=[0,0]\,,\ B=[1,1]\ \ C=[1,2]$.

Řešení: Integrační obor je oblast prvního druhu, která je ohraničená třemi přímkami - viz Obrázek 1.5. Funkce $f(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}$ je na oblasti D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Podle Fubiniho věty převedeme dvojný integrál na dvojnásobný. Nejprve budeme integrovat podle proměnné y, potom podle x.

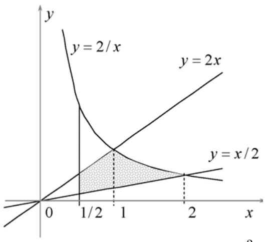


Obrázek 1.5: $D:\ A=[0,0]\,,\ B=[1,1]\ \ C=[1,2]$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \mathrm{e}^{x-y}\,dxdy &= \int\limits_0^1\left(\int\limits_x^{2x}\mathrm{e}^{x-y}\,dy\right)\,dx = \left|\begin{array}{ll} t=x-y & \begin{array}{c|c} y & t \\ \hline x & 0 \\ 2x & -x\end{array} \\ dt=-dy & \end{array}\right| \\
&= -\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{-x}\mathrm{e}^t\,dt\right)\,dx = -\int\limits_0^1\left[\mathrm{e}^t\right]_0^{-x}\,dx = \int\limits_0^1\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\,dx=\mathrm{e}^{-1}.
\end{aligned}$$

Příklad 8: Vypočítejte integrál $\int\int_D \frac{y}{x}\,dxdy$, kde množina D je omezená rovinná oblast ohraničená křivkami: $y=\frac{x}{2},\ y=2x,\ y=\frac{2}{x},\ x=\frac{1}{2}$.

Řešení: Integrační obor D je ohraničen třemi přímkami a jednou větví hyperboly - viz Obrázek 1.6. Je zřejmé, že obor D není oblast prvního ani druhého druhu. Lze jej ale rozdělit na dvě oblasti prvního druhu D_1 a D_2 tak, že $D_1\cup D_2=D$. Funkce $f(x,y)=\frac{y}{x}$ je na D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Převedeme jej na součet dvou integrálů. Dostaneme:



Obrázek 1.6: $D:\ y=\frac{x}{2},\ y=2x,\ y=\frac{2}{x},\ x=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{y}{x}\,dxdy &= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x}\frac{y}{x}\,dy\right)\,dx+\int\limits_1^2\left(\int\limits_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}}\frac{y}{x}\,dy\right)\,dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{2x}\left[y^2\right]_{\frac{x}{2}}^{2x}\,dx \\
&+ \int\limits_1^2\frac{1}{2x}\left[y^2\right]_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}}\,dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{15}{8}x\,dx+\int\limits_1^2\left(\frac{2}{x^3}-\frac{x}{8}\right)\,dx=\frac{81}{64}.
\end{aligned}$$

Příklad 1.1.1: Převeďte $\int\int_D 1\,dxdy$ na dvojnásobný (pokud to lze) nebo na součet dvojnásobných integrálů. Množina D je omezená oblast v rovině ohraničená křivkami nebo určená nerovnicemi.

1. $D:\ x=1,\ y=x,\ y=2x$
2. $D:\ y=5,\ y=3x,\ y=\frac{1}{3}x$
3. $D:\ x+y=1,\ y=x,\ y=\frac{1}{2}x$
4. $D:\ x=1,\ x=2,\ y-x=5,\ y=3$
5. $D:\ x\leq y,\ y\leq 1,\ x\geq 0$
6. $D:\ |x|\leq y,\ y\leq 2$
7. $D:\ y=x^2+1,\ y=x-1,\ 0\leq x\leq 1$
8. $D:\ y^2=x,\ 1\leq x\leq 3$
9. $D:\ y\leq x^2,\ y\leq -x+2,\ y\geq 0$
10. $D:\ y\geq x^2,\ y\leq -x+2,\ x\geq 0$
11. $D:\ y\leq -2x,\ y^2\leq x$
12. $D:\ y\leq x,\ y\geq x^2$
13. $D:\ x=1,\ x=2,\ y=x,\ y=\frac{1}{x}$
14. $D:\ y=0,\ y=1,\ x=\sqrt{y}$, $x=3-2y$
15. $D:\ y=0,\ y=1,\ y=\sqrt{x}$,

$x=3-2y$

16. $D:\ x-y^2=0,\ x^2+y=0,$
17. $D:\ x^3\leq y,\ y^2\leq x$
18. $D:\ y\geq x^2,\ y\leq\sqrt{8x},\ y\geq -2x+3$
19. $D:\ y\geq x^2,\ y\leq 2-x^2$
20. $D:\ y\geq\operatorname{arctg}x\geq\frac{\pi}{4},\ y\leq\frac{\pi}{3}$
21. $D:\ y\geq 1-x,\ y\geq\ln x,\ y\leq 2$
22. $D:\ y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=0,$ $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$

Výsledky:

1. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_x^{2x}1\,dy\right)dx$
2. $\int\limits_0^5\left(\int\limits_{\frac{1}{3}y}^{3y}1\,dx\right)dy$
3. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x}1\,dy\right)dx+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\int\limits_{\frac{x}{2}}^{1-x}1\,dy\right)dx$ $=\int\limits_0^{\frac{1}{4}}\left(\int\limits_y^{2y}1\,dx\right)dy+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_y^{1-y}1\,dx\right)dy$
4. $\int\limits_1^2\left(\int\limits_3^{5+x}1\,dy\right)dx$
5. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_x^{1}1\,dy\right)dx=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{y}1\,dx\right)dy$
6. $\int\limits_0^2\left(\int\limits_{-y}^{y}1\,dx\right)dy$
7. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_{x-1}^{x^2+1}1\,dy\right)dx$
8. $\int\limits_1^3\left(\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}1\,dy\right)dx$
9. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y}1\,dx\right)dy$
10. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_{x^2}^{2-x}1\,dy\right)dx$
11. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}}\left(\int\limits_{-\sqrt{x}}^{-2x}1\,dy\right)dx=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(\int\limits_{y^2}^{-\frac{y}{2}}1\,dx\right)dy$
12. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_{x^2}^{x}1\,dy\right)dx=\int\limits_0^1\left(\int\limits_y^{\sqrt{y}}1\,dx\right)dy$
13. $\int\limits_1^2\left(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}1\,dy\right)dx$
14. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y}1\,dx\right)dy$
15. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_{y^2}^{3-2y}1\,dx\right)dy$
16. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_{-\sqrt{y}}^{-x^2}1\,dy\right)dx=\int\limits_{-1}^{0}\left(\int\limits_{y^2}^{\sqrt{-y}}1\,dx\right)dy$
17. $\int\limits_0^1\left(\int\limits_{x^3}^{\sqrt{x}}1\,dy\right)dx=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{y^2}^{\sqrt[3]{y}}1\,dx\right)dy$
18. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int\limits_{-2x+3}^{\sqrt{8x}}1\,dy\right)dx+\int\limits_1^2\left(\int\limits_{x^2}^{\sqrt{8x}}1\,dy\right)dx$ $=\int\limits_1^2\left(\int\limits_{\frac{3-y}{2}}^{\sqrt{y}}1\,dx\right)dy+\int\limits_2^4\left(\int\limits_{\frac{y^2}{8}}^{\sqrt{y}}1\,dx\right)dy$
19. $\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{x^2}^{2-x^2}1\,dy\right)dx$
20. $\int\limits_1^{\sqrt{3}}\left(\int\limits_{\operatorname{arctg}x}^{\frac{\pi}{3}}1\,dy\right)dx$
21. $\int\limits_0^2\left(\int\limits_{1-y}^{\mathrm{e}^y}1\,dx\right)dy$
22. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\int\limits_{\arcsin y}^{\arccos y}1\,dx\right)dy$

Příklad 1.1.2: Vypočtěte následující $\int\int_D f(x,y)dxdy$, je-li oblast D dána nerovnicemi:

1. $\iint\limits_D (x^2+2y)\,dxdy,\ D: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$ $\left[\frac{14}{3}\right]$
2. $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dxdy,\quad D:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ $\left[\frac{\pi}{12}\right]$
3. $\iint\limits_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dxdy,\quad D:\ 3 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 2$ $\left[\ln\frac{25}{24}\right]$
4. $\iint\limits_D e^x\,dxdy,\quad D:\ 1 \le y \le 2,\ 0 \le x \le \ln y$ $\left[\frac{1}{2}\right]$
5. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy,\quad D:\ 1 \le x \le 2,\ \frac{1}{x} \le y \le x$ $\left[\frac{9}{4}\right]$
6. $\iint\limits_D e^{x+y}\,dxdy,\quad D:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$ $[(e-1)(e^2-1)]$
7. $\iint\limits_D \sin(2x+y)\,dxdy,\quad D: 0 \le x \le \pi,\ \frac{\pi}{4} \le y \le \pi$ $[0]$
8. $\iint\limits_D x^4\,dxdy,\quad D:\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2},\ \cos y \le x \le 1$ $\left[\frac{15\pi-16}{150}\right]$
9. $\int\int\limits_D \varrho^2\sin^2\varphi\,d\rho d\varphi,\quad D:\ 0 \le \varrho \le 3\cos\varphi,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ $\left[\frac{12}{5}\right]$
10. $\iint\limits_D x^2y\cos(xy^2)\,dxdy,\quad D:\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le 2$ $\left[-\frac{\pi}{16}\right]$
11. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy,\quad D:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$ $\left[\frac{\pi}{6}\right]$
12. $\iint\limits_D (2x-y+3)\,dxdy,\quad D:\ 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le x,\ y \le \frac{4}{x}$ $[24+12\ln 2]$
13. $\iint\limits_D |x-1|\,dxdy,\quad D:\ x^2-y-1 \le 0,\ x-y+1 \ge 0$ $\left[\frac{37}{12}\right]$
14. $\iint\limits_D |x|\,dxdy,\quad D:\ y \le \frac{\pi}{3},\ y \ge -x,\ y \ge \operatorname{arctg} x$ $\left[\frac{\pi^3-27\pi+81\sqrt{3}}{162}\right]$
15. $\iint\limits_D |x+y-2|\,dxdy,\quad D:\ y \ge x^{\frac{2}{3}},\ y \le 2-x^2$ $\left[\frac{8}{3}\right]$
16. $\iint\limits_D |y-x^2|\,dxdy,\quad D:\ x \ge 0,\ 0 \le y \le 1,\ y \ge \ln x$ $\left[\frac{5e^3-26}{45}\right]$
17. $\iint\limits_D |y-x|\,dxdy,\quad D:\ x \le 2,\ y \le 4x,\ y \le \frac{4}{x},\ y \ge \frac{x}{4}$ $\left[\frac{41}{12}\right]$
18. $\iint\limits_D |y-x|\,dxdy,\quad D:\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ \ln x \le y \le 1$ $\left[\frac{3e^2-11}{12}\right]$

Příklad 1.1.3: Vypočtěte následující integrály $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, je-li D omezená rovinná oblast ohraničená danými křivkami:

1. $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy,\ D: y=0,\ y=x,\ x+y=2$ $\left[\frac{2}{3}\right]$
2. $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dxdy,\ D: x=0,\ y=\pi,\ y=x$ $[-2]$
3. $\iint\limits_D \frac{x}{y^2}\,dxdy,\ D: x=1,\ y=3,\ y=x$ $\left[\frac{2}{3}\right]$
4. $\iint\limits_D sin\,y^2\,dxdy,\ D: y=3,\ y=3x,\ y=\frac{1}{3}x$ $\left[\frac{4}{9}\sin 9\right]$
5. $\iint\limits_D (x^2+y)\,dxdy,\ D: y=x^2,\ y^2=x$ $\left[\frac{33}{140}\right]$
6. $\iint\limits_D x\,dxdy,\ D: x=0,\ y=3-x^2+2x,\ y=\frac{3}{2}x$ $\left[\frac{10}{3}\right]$
7. $\iint\limits_D y\,dxdy,\ D: y+x-4=0,\ x^2-y+2=0$ $\left[\frac{81}{5}\right]$
8. $\iint\limits_D xy\,dxdy,\ D: xy=1,\ 2y+2x-5=0$ $\left[\frac{165}{128}-\ln 2\right]$
9. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy,\ D: x=2,\ y=x,\ xy=1$ $\left[\frac{9}{4}\right]$
10. $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,dxdy,\ D: y=1,\ y=2,\ x=0,\ x=y^2$ $\left[\mathrm{e}^2-\frac{3}{2}\right]$
11. $\iint\limits_D dxdy,\ D: x+y-4=0,\ x+y-12=0,\ y^2=2x$ $[62]$
12. $\iint\limits_D (x+y+10)\,dxdy,\ D: x^2+y^2=4$ $[40\pi]$
13. $\iint\limits_D xy\,dxdy,\ D: y \ge 0,\ (x-2)^2+y^2=1$ $\left[\frac{4}{3}\right]$
14. $\iint\limits_D (x^2+y)\,dxdy,\ D: y=\frac{1}{2}x,\ y=2x,\ xy=2,\ x \ge 0$ $\left[\frac{17}{6}\right]$
15. $\iint\limits_D |(x-1)y|\,dxdy,\ D:\ x=0,\ y=-x+2,\ y=-1$ $\left[\frac{41}{24}\right]$
16. $\iint\limits_D \frac{x}{3}\,dxdy,\ D: x=2+\sin y,\ x=0,\ y=0,\ y=2\pi$ $\left[\frac{3\pi}{2}\right]$
17. $\iint\limits_D |x|e^y\,dxdy,\ D: y=x^2,\ y=x$ $\left[\frac{3-\mathrm{e}}{2}\right]$
18. $\iint\limits_D |y-x|\,dxdy,\ D: y=\sqrt{x},\ y=0,\ x=1$ pro $x \ge 0$ $\left[\frac{11}{60}\right]$

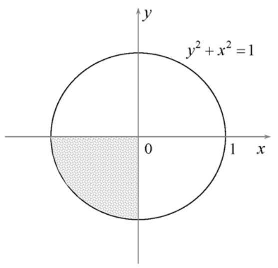
19. $\iint\limits_D |y-x^2|\,dxdy,\ D: y=\sqrt{x},\ y=x^4$ pro $x \ge 0$ $\left[\frac{13}{140}\right]$
20. $\iint\limits_D |y-x^2|\,dxdy,\ D: y=\sqrt{2-x},\ y=0$ pro $x \ge 0$ $\left[\frac{512\sqrt{2}-238}{420}\right]$

1.2 Transformace dvojného integrálu

Příklad 1: Vypočtěte integrál $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dxdy$, kde množina

$$D = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^2+y^2 \le 1,\ x \le 0,\ y \le 0\}\,.$$

Řešení: Funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ je na oblasti D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Množina D je výseč kruhu se středem v počátku souřadného systému - viz Obrázek 1.7. Výpočet provedeme transformací dvojného integrálu do polárních souřadnic:



Obrázek 1.7: $D = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^2+y^2 \le 1,\ x \le 0,\ y \le 0\}$

$$\begin{array}{lll} x = \varrho\cos\varphi & D^*: & 0 \le \varrho \le 1 \\ y = \varrho\sin\varphi & & \pi \le \varphi \le \frac{3}{2}\pi \\ |J| = \varrho & & \end{array}$$

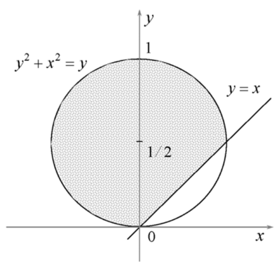
Potom

$$\begin{aligned} \iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dxdy &= \iint\limits_{D^*} \mathrm{e}^{-\varrho^2}\varrho\,d\varrho d\varphi = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \varrho\,\mathrm{e}^{-\varrho^2} d\varphi\right) d\varrho = \int\limits_0^1 \varrho\,\mathrm{e}^{-\varrho^2}\,[\varphi]_\pi^{\frac{3}{2}\pi}\,d\rho \\ &= \frac{1}{2}\pi\int\limits_0^1 \varrho\mathrm{e}^{-\varrho^2} d\varrho = \left| \begin{array}{ll} t = -\varrho^2 & \begin{array}{c|c} \varrho & t \\ \hline 0 & 0 \end{array} \\ dt = -2\varrho\,d\varrho & \begin{array}{c|c} 1 & -1 \end{array} \end{array} \right| = -\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{-1} \mathrm{e}^t\,dt \\ &= \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right). \end{aligned}$$

Příklad 2: Vypočtěte integrál $\iint\limits_D dxdy$, kde množina

$$D = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^2+y^2 \le y,\ x \le y\}\,.$$

Řešení: Funkce $f(x,y) = 1$ je na oblasti D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Množina D je znázorněna na Obrázku 1.8. Výpočet provedeme transformací dvojného integrálu do polárních souřadnic:



Obrázek 1.8: $D = \{\ [x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^2+y^2 \le y,\ x \le y\}$

$$\begin{array}{lll} x = \varrho\cos\varphi & D^*: & 0 \le \varrho \le \sin\varphi \\ y = \varrho\sin\varphi & & \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \pi \\ |J| = \varrho & & \end{array}$$

Potom

$$\begin{aligned} \iint\limits_D dxdy &= \iint\limits_{D^*} \varrho\,d\varrho d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(\int\limits_0^{\sin\varphi} \varrho\,d\varrho\right) d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (1-\cos 2\varphi)\,d\varphi \\ &= \frac{1}{4}\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \frac{1}{16}(3\pi+2)\,. \end{aligned}$$

Příklad 1.2.1: Vyjádřete dvojný integrál použitím transformace do polárních souřadnic:

1. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ x^2+y^2 \le 3\}$
2. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ x^2+y^2 \le ax\}$, je-li a) $a=4$, b) $a=-4$
3. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ D = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ x^2+y^2 \le by\}$, je-li a) $b=2$, b) $b=-2$

4. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2;\ x^2+y^2\le 16,\ x^2+y^2\ge 1, y\ge x,\ y\ge -x\ \}$
5. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$ kde D je omezená oblast v rovině ohraničená rovinnými křivkami: $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=8x,\ y=x,\ y=2x$
6. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$ kde D je vnitřní část pravé smyčky Bernoulliovy lemniskáty $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),\ a\ge 0$

Výsledky:

1. $\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\sqrt{3}} f(\rho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\right)d\varphi$
2. a) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^{4\cos\varphi} f(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\right)d\varphi$, b) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\int\limits_0^{4\cos\varphi} f(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\right)d\varphi$
3. a) $\int\limits_0^{\pi}\left(\int\limits_0^{2\sin\varphi} f(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\right)d\varphi$, b) $\int\limits_{-\pi}^{0}\left(\int\limits_0^{2\sin\varphi} f(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\right)d\varphi$
4. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\int\limits_1^{4} f(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\right)d\varphi$
5. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arctg}2}\left(\int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi)\,\varrho\,d\varrho\right)d\varphi$
6. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi)\,\varrho\,d\varrho\right)d\varphi$

Příklad 1.2.2: Vypočtěte integrály s použitím transformace do polárních souřadnic:

1. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2; x^2+y^2\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$
2. $\int\limits_0^4[\int\limits_0^{\sqrt{16-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)dy]dx$
3. $\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2;\ x^2+y^2\le 3x,\}$
4. $\iint\limits_D \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2;\ x^2+y^2\ge 1,\ x^2+y^2\le 9,\ y\ge\frac{x}{\sqrt{3}},\ y\le x\sqrt{3}\}$

5. $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2;\ 1\le x^2+y^2\le 9,\ y\ge 0\}$
6. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2;\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge|x|\}$
7. $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2;\ x^2+y^2\le 2y,\ x\ge 0\}$
8. $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2;\ \pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2,\ y\ge 0\}$
9. $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2;\ 1\le x^2+y^2\le e^2\}$
10. $\iint\limits_D |xy|\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2;\ x^2+y^2-2y\le 0\}$
11. $\iint\limits_D |x|\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2;\ x^2+y^2\le ay,\ a>0\}$
12. $\iint\limits_D |y|\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2;\ x^2+y^2+2x-6y+6\le 0\}$
13. $\iint\limits_D |x|\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2;\ x^2+y^2-4y\le 0\le x^2+y^2-2y,\ y\le -x\ \}$
14. $\iint\limits_D |y|\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2;\ x^2+y^2-2x\ge 0,\ x^2+y^2-4x\le 0\}$
15. $\iint\limits_D |x|\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2;\ x^2+y^2\le ay,\ y+\sqrt{3}x\ge 0,\ a\ge 0\}$
16. $\iint\limits_D |x|y^2\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2;\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ x\le y\le 0\}$

Výsledky:

1. $\left[\frac{1}{2}\pi\right]$
2. $\left[\frac{\pi}{4}(17\ln 17-16)\right]$
3. $[9\pi-12]$
4. $\left[\frac{\pi^2}{6}\right]$
5. $\left[\ \frac{1}{2}\pi(e^{-1}-e^{-9})\right]$
6. $\left[\ \frac{15}{8}\pi\right]$
7. $\left[\ \frac{8}{3}(\pi-\frac{4}{3})\right]$
8. $[\ -3\pi^2]$
9. $[\ 2\pi]$
10. $\left[\frac{4}{3}\right]$
11. $\left[\frac{a^3}{6}\right]$
12. $[12\pi]$
13. $\left[\frac{112}{3}\right]$
14. $\left[\frac{28}{3}\right]$
15. $\left[\frac{23a^3}{192}\right]$
16. $\left[\frac{31\sqrt{3}}{60}\right]$

Příklad 1.2.3: Vypočtěte dvojný integrál pomocí transformace do zobecněných polárních souřadnic

1. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-\frac{y^2}{4}}\,dxdy,\ \ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2; x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\}$
2. $\iint\limits_D xy\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2; \frac{x^2}{4}+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$
3. $\iint\limits_D (9x^2+4y^2+4)\,dxdy,\ \ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2; 9x^2+4y^2\le 36\}$
4. $\iint\limits_D |x|\,dxdy,\ \ D=\{[x,y]\in\mathbf{E}_2; \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1,\ y\le 0,\ x\ge 0\}$

Výsledky:

1. $\left[\frac{4\pi}{3}\right]$
2. $\left[\frac{1}{2}\right]$
3. $[132\pi]$
4. $[4]$

Příklad 1.2.4: Vyjádřete $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ použitím vhodné transformace a následně vypočítejte pro zadanou funkci. D je omezená rovinná oblast, ohraničená křivkami nebo určená nerovnicemi.

1. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ f(x,y)=x+y,\ D:\ 0\le x\le 4,\ 2x\le y\le 3x$
(Návod: Užijte transformační rovnice: $u=x,\ v=y-2x$.)
2. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ f(x,y)=(x-y)^2,\ D:\ 0\le x\le 2,\ 1-x\le y\le 2-x,$ $y\ge 0$
(Návod: Užijte transformační rovnice: $u=x+y,\ v=x-y$.)
3. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ f(x,y)=(x-y)^2,\ D:=0\le x\le 2,\ 1-x\le y\le 2-x$
(Návod: Užijte transformační rovnice: $u=x,\ v=x+y$.)
4. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ f(x,y)=1,\ D:\ xy=\frac{1}{2},\ xy=2,\ 2y=x,\ y=2x,$ pro $x\ge 0,\ y\ge 0$
(Návod: Užijte transformační rovnice: $u=xy,\ y=vx$.)
5. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ xy=1,\ D:\ y^2=x,\ y^2=2x,\ xy=2$
(Návod: Užijte transformační rovnice: $u=xy,\ y^2=vx$.)
6. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ f(x,y)=1,\ D:\ y^2=x,\ y^2=8x,\ y=x^2,\ y=\frac{x^2}{8}$
(Návod: Užijte transformační rovnice: $x^2=uy,\ y^2=vx$.)

7. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ f(x,y)=1,\ D:\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\le a^{\frac{2}{3}},\ a\ge 0$
(Návod: Užijte transformační rovnice: $x=\varrho\cos^3\varphi,\ y=\varrho\sin^3\varphi$.)

Výsledky:

1. $\int\limits_0^4[\int\limits_0^u f(u,\ v+2u)\ dv]du$ $\left[\frac{224}{3}\right]$
2. $\frac{1}{2}\int\limits_1^2[\int\limits_{-u}^{-u+4} f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)dv]du$ $\left[\frac{10}{3}\right]$
3. $\int\limits_0^2[\int\limits_1^2 f(u,v-u)\,dv]du$ $\left[\frac{10}{3}\right]$
4. $\int\limits_{1/2}^2[\int\limits_{1/2}^2 f\left(\sqrt{\frac{u}{v}},\sqrt{uv}\right)\frac{1}{2|v|}du]dv$ $\left[\frac{3}{2}\ln 2\right]$
5. $\int\limits_1^2[\int\limits_1^2 f\left(\sqrt[3]{\frac{u^2}{v}},\sqrt[3]{uv}\right)\frac{1}{3|v|}\ du]dv$ $\left[\frac{1}{3}\ln 2\right]$
6. $\int\limits_1^8[\int\limits_1^8 f\left(\sqrt[3]{u^2v},\sqrt[3]{uv^2}\right)\frac{1}{3}\ du]dv$ $\left[\frac{49}{3}\right]$
7. $3\int\limits_0^a[\int\limits_0^{2\pi} f\left(\varrho\cos^3\varphi,\ \varrho\sin^3\varphi\right)\ \varrho\cos^2\varphi\ \sin^2\varphi\ d\varphi]d\varrho$ $\left[\frac{3}{8}\pi a^2\right]$

1.3 Geometrické aplikace dvojného integrálu

$A\subset\mathbf{E_2}$ je elementární oblast prvního nebo druhého druhu.

$O=\iint\limits_A dxdy\ [m^2]$ – obsah rovinné oblasti A

$V=\iint\limits_A (f(x,y)-g(x,y))\,dxdy\ [m^3]$ – objem válcového tělesa
$W=\{[x,y,z]\in\mathbf{E_3}:\ [x,y]\in A,\ g(x,y)\le z\le f(x,y)\}$

$S=\iint\limits_A \sqrt{1+(f'_x(x,y))^2+\left(f'_y(x,y)\right)^2}dxdy\ [m^2]$ – obsah části plochy
$S=\{[x,y,z]\in\mathbf{E_3}:\ z=f(x,y),[x,y]\in A\}$

Poznámka: Doplňte příslušné jednotky v zadání a výsledcích.

Příklad 1.3.1: Vypočtěte obsah omezeného rovinného obrazce A ohraničeného křivkami:

1. $x+y=1,\ x+y=2,\ y=\frac{1}{2}x,\ y=2x$
2. $y=\cos x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ y=0$
3. $y=4,\ y=2^x,\ y=2^{-2x}$
4. $y=x^2,\ y=4-x^2$
5. $y=-2,\ y=x+2,\ y=2,\ y^2=x$
6. $y=x^2,\ y=\sqrt{x}$
7. $xy=4,\ x^2=2y,\ y=4,\ x=0$
8. $y=\frac{1}{x},\ y=4x,\ y=8$ a přímkou $y=0$
9. $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=2x,\ y=x,\ y=0$
10. $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=8x,\ y=2x,\ y=x$
11. $(x-1)^2+y^2=1,\ x^2+(y-1)^2=1$
12. A omezený obrazec ohraničený křivkou $x^2+y^2=5$ a tečnou k této křivce v bodě $A=[1,2]$

Výsledky:

1. $\left[\frac{1}{2}\right]$
2. $[1]$
3. $\left[12-\frac{9}{\ln 4}\right]$
4. $\left[\frac{16\sqrt{2}}{3}\right]$
5. $\left[\frac{40}{3}\right]$
6. $\left[\frac{1}{3}\right]$
7. $\left[4\left(\frac{2}{3}+\ln 2\right)\right]$
8. $\left[\frac{15}{2}-\ln 4\right]$
9. $\left[\frac{3}{4}(\pi+2)\right]$
10. $[12\operatorname{arctg} 2+6\sin 2\operatorname{arctg} 2-3\pi-6]$
11. $\left[\frac{\pi}{2}-1\right]$
12. $\left[5-\frac{5}{2}\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$

Příklad 1.3.2: Vypočtěte obsah rovinného obrazce A:

1. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y\le -x^3,\ y\le 2x^3,\ y\ge x^3-1\}$
2. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ 9(y+2)\ge(x-1)^3,\ x-y-3\ge 0,\ x\ge 0\}$
3. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y\ge x^2,\ y\le\sqrt{8x},\ y\ge -2x+3\}$

4. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x\ge 0,\ \operatorname{arctg} x\le y\le 1\}$
5. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y\le 1,\ y\le x-1,\ y\ge\ln x\}$
6. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x^2+y^2\le 4,\ x+y\ge 2\}$
7. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1,\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}\ge 1\}$
8. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y\le\arcsin x,\ y\ge\frac{x^2}{2},\ y\le\frac{\pi}{2}\}$
9. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ (y+3)^2\le 3x-2,\ y+1+x^2\le 0\}$
10. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y\le 1-x,\ y\le e^x,\ y\ge 0\}$
11. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x\ge 1,\ \frac{1}{x^3}\le y\le\frac{1}{x^2}\}$
12. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x\le 0,\ e^{3x}\le y\le e^x\}$
13. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ x\ge 0,\ -e^{-x}\le y\le\frac{1}{x^2+1}\}$
14. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y\le -x^2,\ y\le x^3-2,\ 3x+2y+9\ge 0\}$
15. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ y\le x^2+1,\ y\ge(x-1)^3,\ y\le -x+3,\ x\ge 0\}$
16. $A=\{\,[x,y]\ \in\ \mathbf{E_2};\ 2x-y-4\le 0,\ y^2\ge 4x,\ y+|x|^3\le 0\}$

Výsledky:

1. $\left[\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt{32}}\right)\right]$
2. $\left[\frac{9}{4}\right]$
3. $\left[\frac{19}{12}\right]$
4. $\left[\ln\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 1}\right]$
5. $\left[\frac{2e-5}{2}\right]$
6. $[\pi-2]$
7. $\left[\frac{3}{2}(\pi-2)\right]$
8. $\left[\frac{\pi\sqrt{\pi}-3}{3}\right]$
9. $\left[\frac{5}{3}\right]$
10. $\left[\frac{3}{2}\right]$
11. $\left[\frac{1}{2}\right]$
12. $\left[\frac{2}{3}\right]$
13. $\left[\frac{\pi+2}{2}\right]$
14. $\left[\frac{34}{3}\right]$
15. $\left[\frac{17}{6}\right]$
16. $\left[\frac{29}{3}\right]$

Příklad 1.3.3: Vypočtěte objem tělesa W ohraničeného plochami:

1. $6x-9y+5z=0,\ 3x-2y=0,\ 4x-y=0,\ x+y=5,\ z=0$
2. $x+y+z=6,\ 3x+2y=12,\ y=0,\ z=0$
3. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=\pi,\ y=\pi,\ z=\sin^2 x\sin^2 y$
4. $z=x^2+y^2,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

5. $z=2x^2+y^2+1,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$
6. $y=x^2,\ x+y+z=4,\ y=1,\ z=0$
7. $x^2=6-5y,\ y^2=x,\ 0\le z\le 9$
8. $x^2=y,\ x^2=4-3y,\ z=0,\ z=9$
9. $y=x^2,\ x=y^2,\ z=12+y-x^2,\ z=0$
10. $z=x^2-y^2,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x\le 1$
11. $x^2+z^2=16,\ y=0,\ z=0,\ y=x,\ x\ge 0$
12. $y=x^2,\ y^2=x,\ z=x^2-y^2$
13. $z=4-x^2-y^2,\ 2z=2+x^2+y^2$
14. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z^2,\ 2z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$
15. $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2-z^2=-4$
16. $2x^2+2y^2-z^2=0,\ x^2+y^2-z^2=-4$
17. $x^2+y^2=a^2,\ x^2+y^2+z^2=4a^2$
18. $x^2+y^2-2ax=0,\ x^2+y^2+z^2=4a^2,\ a\ge 0$
19. $x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=z^2,\ z\ge 0$
20. $z=4-y^2,\ y=\frac{x^2}{2},\ z=0$
21. $x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+y^2+z^2=16,\ z^2=x^2+y^2,\ z\ge 0$
22. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=3z$
23. $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=x,\ x^2+y^2=2x,\ z=0$
24. $z=xy,\ x^2+y^2=2x,\ z\ge 0$
25. $z=-y^3,\ z=-x$ pro $-x\le y\le 0,\ x\le 1$
26. $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$
27. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z^2,\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$

Výsledky:

1. $\left[\frac{15}{2}\right]$
2. $[4]$
3. $\left[\frac{\pi^2}{4}\right]$
4. $\left[\frac{1}{6}\right]$
5. $\left[\frac{3}{4}\right]$
6. $\left[\frac{68}{15}\right]$

7. $\left[\frac{243}{5}\right]$
8. $[16]$
9. $\left[\frac{569}{140}\right]$
10. $\left[\frac{1}{3}\right]$
11. $\left[\frac{64}{3}\right]$
12. $\left[\frac{1}{35}\right]$
13. $[3\pi]$
14. $[8\pi]$
15. $\left[\frac{32\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\right]$
16. $\left[\frac{32\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$
17. $\left[\frac{4\pi a^3}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)\right]$
18. $\left[\frac{16a^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)\right]$
19. $\left[\frac{32}{9}\right]$
20. $\left[\frac{256}{21}\right]$
21. $\left[21\pi\left(2-\sqrt{2}\right)\right]$
22. $\left[\frac{19\pi}{6}\right]$
23. $\left[\frac{45\pi}{32}\right]$
24. $\left[\frac{2}{3}\right]$
25. $\left[\frac{23}{60}\right]$
26. $[16\pi]$
27. $\left[4\pi\left(2-\sqrt{2}\right)\right]$

Příklad 1.3.4: Vypočtěte obsah plochy S, je-li:

1. $S=\{\,[x,y,z]\in\mathbf{E_3};\ 6x+3y+2z=12,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\,\}$
2. $S=\{\,[x,y,z]\in\mathbf{E_3};\ x+y+z-4=0,\ x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=2\,\}$
3. $S=\{\,[x,y,z]\in\mathbf{E_3};\ z^2=2xy,\ x\ge 0,\ x\le 3,\ y\ge 0,\ y\le 6,\ z\ge 0\,\}$
4. $S=\{\,[x,y,z]\in\mathbf{E_3};\ 2z=x^2,\ y\le 2x,\ y\ge\frac{x}{2},\ x\le 2\sqrt{2},\,\}$
5. $S=\{\,[x,y,z]\in\mathbf{E_3};\ x^2+z^2=1,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y\le 2\,\}$
6. $S=\{\,[x,y,z]\in\mathbf{E_3};\ x^2+y^2=2z,\ x^2+y^2\le 1\,\}$
7. $S=\{\,[x,y,z]\in\mathbf{E_3};\ z=xy,\ x^2+y^2\le a^2\,\}$
8. $S=\{\,[x,y,z]\in\mathbf{E_3};\ y^2+z^2=x^2,\ x^2+y^2\le a^2\,\}$
9. $S=\{\,[x,y,z]\in\mathbf{E_3};\ \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\,\}$
10. $S=\{\,[x,y,z]\in\mathbf{E_3};\ x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2\le 1,\ z\ge 0\,\}$
11. $S=\{\,[x,y,z]\in\mathbf{E_3};\ z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ 3x^2+3y^2\le z^2\,\}$
12. $S=\{\,[x,y,z]\in\mathbf{E_3};\ x^2+y^2+z^2=9,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1\,\}$
13. $S=\{\,[x,y,z]\in\mathbf{E_3};\ z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ x^2+y^2-x\le 0\,\}$
14. $S=\{\,[x,y,z]\in\mathbf{E_3};\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2\le 2x\,\}$
15. $S=\{\,[x,y,z]\in\mathbf{E_3};\ y^2+z^2=2ax,\ y^2\le ax,\ x\le a,\ a\ >\ 0\,\}$
16. $S=\{\,[x,y,z]\in\mathbf{E_3};\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z^2\le 2y\,\}$
17. $S=\{\,[x,y,z]\in\mathbf{E_3};\ z^2=4x,\ y^2\le 4x,\ x\le 1\,\}$

18. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ x^2+z^2=1,\ x^2+y^2 \le 1 \,\}$
19. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ z = -\frac{x^2}{2}+2,\ \frac{x^3}{3} \le y \le x,\ x \ge 0 \,\}$
20. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ z = -x^3,\ x^3 \le y \le 0,\ x \ge -1 \,\}$
21. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ z = 4-x^2,\ 0 \le y \le 2x,\ z \ge 0 \,\}$
22. $S = \{\, [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ z = 2-(x^2+y^2),\ 0 \le y \le x,\ z \ge 0 \,\}$

Výsledky:

1. $[14]$
2. $[4\sqrt{3}]$
3. $[36]$
4. $[13]$
5. $[2\pi]$
6. $\left[\frac{2}{3}\pi\left(\sqrt{8}-1\right)\right]$
7. $\left[\frac{2\pi}{3}\left((1+a^2)^{\frac{3}{2}}-1\right)\right]$
8. $[2\pi a^2]$
9. $\left[\frac{2}{3}\pi ab\left(\sqrt{8}-1\right)\right]$
10. $\left[4\pi\left(2-\sqrt{3}\right)\right]$
11. $\left[4\pi\left(2-\sqrt{3}\right)\right]$
12. $\left[72\arcsin\frac{2}{3}\right]$
13. $[\pi-2]$
14. $[\sqrt{2}\pi]$
15. $\left[\frac{\pi a^2}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)\right]$
16. $[\pi\sqrt{2}]$
17. $\left[\frac{16}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)\right]$
18. $[8]$
19. $\left[\frac{47}{45}\right]$
20. $\left[\frac{10\sqrt{10}-1}{54}\right]$
21. $\left[\frac{17\sqrt{17}-1}{6}\right]$
22. $\left[\frac{13\pi}{24}\right]$

1.4 Fyzikální aplikace dvojného integrálu

$A \subset \mathbf{E_2}$ je elementární oblast prvního nebo druhého druhu. Tenká rovinná deska A má plošnou hustotu $\sigma(x,y)$ $[kg \cdot m^{-2}]$.

$m = \iint\limits_A \sigma(x,y)dxdy$ $[kg]$ – hmotnost desky A

$S_x = \iint\limits_A y\sigma(x,y)dxdy$ $[kg \cdot m]$ – statický moment desky A vzhledem k ose x

$S_y = \iint\limits_A x\sigma(x,y)dxdy$ $[kg \cdot m]$ – statický moment desky A vzhledem k ose y

$T = [t_1, t_2]$, kde $t_1 = \dfrac{S_y}{m}$, $t_2 = \dfrac{S_x}{m}$ – těžiště desky A

$I_x = \iint\limits_A y^2\sigma(x,y)dxdy$ $[kg \cdot m^2]$ – moment setrvačnosti desky A vzhledem k ose x

$I_y = \iint\limits_A x^2\sigma(x,y)dxdy$ $[kg \cdot m^2]$ – moment setrvačnosti desky A vzhledem k ose y

Poznámka: Doplňte příslušné jednotky v zadání a výsledcích.

Příklad 1.4.1: Vypočtěte hmotnost rovinného obrazce A, je-li $\sigma(x,y)$ plošná hustota:

1. A je omezená rovinná oblast ohraničená křivkami: $y = \mathrm{e}^x,\ y = \mathrm{e}^{-2x}$, $y = 4$; $\sigma(x,y) = k$
2. A je omezená rovinná oblast ohraničená křivkami: $y = 2^x,\ y = 2^{-2x}$, $x = 1$; $\sigma(x,y) = k$
3. $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ y \le x^3,\ y \ge 4x \,\}$; $\sigma(x,y) = e^x$
4. $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \sin 2x \,\}$; $\sigma(x,y) = x^2$
5. $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ y \le 2x^3,\ y \le \frac{2}{x},\ x-y \le 1 \,\}$; $\sigma(x,y) = |x-1|$
6. $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ y \le e^{2x},\ y \ge e^x,\ y \le e^{\pi} \,\}$; $\sigma(x,y) = |y|$
7. $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ x^2+y^2-4x \le 0,\ x^2+y^2-2x \ge 0,\ y \le x \,\}$; $\sigma(x,y) = |x|$
8. $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ x^3 \le y,\ y^2 \le x \,\}$; $\sigma(x,y) = |y-x|$

Výsledky:

1. $\left[k\left(-\frac{9}{2}+12\ln 2\right)\right]$
2. $\left[k\left(\frac{5}{8}\frac{1}{\ln 2}\right)\right]$
3. $\left[\frac{26}{e^2}-2\right]$
4. $\left[\frac{\pi^2-4}{8}\right]$
5. $\left[\frac{21-10\ln 2}{10}\right]$
6. $\left[\frac{2\pi e^{2\pi}-e^{2\pi}+1}{8}\right]$
7. $\left[\frac{7}{12}(9\pi+8)\right]$
8. $\left[\frac{23}{420}\right]$

Příklad 1.4.2: Vypočtěte statický moment S_x vzhledem k ose x, resp. S_y vzhledem k ose y rovinného obrazce A, je-li $\sigma(x,y)$ plošná hustota:

1. $S_x,\ S_y$ omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = \frac{x}{2}+3$, $y = \frac{x}{2}-3,\ x = 0,\ x = 4$; $\sigma(x,y) = 1$
2. S_x omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = -1,\ y = 2$, $y = x,\ y = \ln x$; $\sigma(x,y) = k$
3. S_x rovinného obrazce $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ 0 \le y \le |\sin x|,\ 0 \le x \le \pi \,\}$; $\sigma(x,y) = |\cos x|$
4. S_y rovinného obrazce $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ y \le x,\ y \le \frac{1}{x},\ y \ge \frac{1}{2} \,\}$; $\sigma(x,y) = 2y$

5. S_x omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = x,\ x = y^2$; $\sigma(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$
6. S_y rovinného obrazce $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ \ln x \le y \le 1 \,\}$; $\sigma(x,y) = xy$
7. S_y omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkou $y = \sin x$ a úsečkou spojující body $[0,0]$, $\left[\frac{\pi}{2},\ 1\right]$; $\sigma(x,y) = k$
8. $S_x,\ S_y$ omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y^2 = 4x+4$, $y^2 = -2x+4$; $\sigma(x,y) = 1$
9. S_x rovinného obrazce $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ y \ge x,\ y \ge 0 \,\}$; $\sigma(x,y) = x^2$
10. S_x rovinného obrazce $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ 1 \le x^2+\frac{y^2}{4} \le 4,\ y \ge 0 \,\}$; $\sigma(x,y) = x^2$
11. S_x rovinného obrazce $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ 1 \le x^2+\frac{y^2}{4} \le 4,\ y \ge 0,\ y \ge 2\sqrt{3}x \,\}$; $\sigma(x,y) = x^2$
12. S_x rovinného obrazce $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ 4 \le x^2+\frac{y^2}{4} \le 8,\ y \ge 0 \,\}$; $\sigma(x,y) = x^2$
13. S_x rovinného obrazce $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ x^2+y^2 \le 4,\ x^2+y^2 \ge 2x,\ x \ge 0$, $y \ge 0 \,\}$; $\sigma(x,y) = x$
14. S_y rovinného obrazce $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ 4x^2+\frac{y^2}{9} \le 1,\ x \ge 0,\ y \le 0 \,\}$; $\sigma(x,y) = |xy|$
15. S_x rovinného obrazce $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ x^2+y^2-2x \ge 0,\ x^2+y^2-4x \le 0$, $y \ge 0,\ y \le x \,\}$; $\sigma(x,y) = 1$
16. S_y omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = 2-x,\ y = 2x^2-1$ pro $x \ge 0$; $\sigma(x,y) = 1$
17. S_y rovinného obrazce $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ y \ge -x,\ y \ge \sqrt{3}x \,\}$; $\sigma(x,y) = 1$
18. S_y omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = e^x,\ y = 0$ pro $x \le -1$; $\sigma(x,y) = |x|$
19. S_y rovinného obrazce $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0 \,\}$; $\sigma(x,y) = x\sqrt{4-x^2-y^2}$

Výsledky:

1. $[S_x = 24,\ S_y = 48]$
2. $\left[S_x = k\left(\mathrm{e}^2+\frac{2}{\mathrm{e}}-3\right)\right]$
3. $\left[S_x = \frac{1}{3}\right]$
4. $\left[S_y = -\frac{15}{64}+\ln 2\right]$
5. $\left[S_x = \frac{6-4\sqrt{2}}{5}\right]$
6. $\left[S_y = \frac{2e^3+1}{27}\right]$
7. $\left[S_y = k\left(1-\frac{\pi^2}{12}\right)\right]$
8. $\left[S_x = 0,\ S_y = \frac{16}{5}\right]$
9. $\left[S_x = \frac{31\left(\sqrt{2}+4\right)}{60}\right]$
10. $\left[S_x = \frac{248}{15}\right]$
11. $\left[S_x = \frac{93}{10}\right]$
12. $\left[S_x = \frac{256}{15}\left(4\sqrt{2}-1\right)\right]$
13. $\left[S_x = \frac{4}{3}\right]$
14. $\left[S_y = \frac{3}{40}\right]$
15. $\left[S_x = \frac{7}{2}\right]$
16. $\left[S_y = \frac{2}{3}\right]$
17. $\left[S_y = \frac{7}{6}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\right]$
18. $\left[S_y = -\frac{5}{e}\right]$
19. $\left[S_y = \frac{32}{15}\pi\right]$

Příklad 1.4.3: Vypočtěte souřadnice (souřadnici) těžiště rovinného obrazce A, je-li $\sigma(x,y)$ plošná hustota:

1. T rovinného obrazce $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \,\}$; $\sigma(x,y) = xy$
2. T omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y^2 = 4x$, $y = x$; $\sigma(x,y) = 1$
3. T omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y^2 = 4x+4$, $y^2 = -2x+4$; $\sigma(x,y) = 1$
4. T omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = -x,\ y = 2x-x^2$; $\sigma(x,y) = 1$
5. T omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = \sin x,\ y = 0$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$; $\sigma(x,y) = 1$
6. T rovinného obrazce $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \,\}$, $a \ge 0$, $b \ge 0$; $\sigma(x,y) = 1$
7. x_T rovinného obrazce $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ x^2+y^2 \le r^2,\ 0 \le x \le y \,\}$, $r \ge 0$; $\sigma(x,y) = x$
8. y_T rovinného obrazce $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ 0 \le x \le y \le 3,\ y \le \frac{1}{x} \,\}$; $\sigma(x,y) = k$
9. T rovinného obrazce $A = \{\, [x,y] \in \mathbf{E_2};\ x^2+y^2 \le 1,\ y \le x+1,\ y \ge 0 \,\}$; $\sigma(x,y) = 1$

10. x_T rovinného obrazce $A = \{ [x,y] \in \mathbf{E_2};\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le y \le x \}$;
$\sigma(x,y) = xy$
11. T omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $x = 1,\ y = 0,\ y = \sqrt{x}$;
$\sigma(x,y) = \frac{1}{x+1}$
12. T rovinného obrazce $A = \{ [x,y] \in \mathbf{E_2};\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ 4x^2 + y^2 \le 4 \}$;
$\sigma(x,y) = x$
13. T rovinného obrazce $A = \{ [x,y] \in \mathbf{E_2};\ x^2 + y^2 \le ay \},\ a \ge 0$; $\sigma(x,y) = y$
14. T omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $xy = 1,\ y^2 = 8x$,
$x = 2$; $\sigma(x,y) = 1$

Výsledky:

1. $T = \left[\frac{8a}{15},\ \frac{8b}{15}\right]$
2. $T = \left[\frac{8}{5},\ 2\right]$
3. $T = \left[\frac{2}{5},\ 0\right]$
4. $T = \left[\frac{3}{2},\ -\frac{3}{5}\right]$
5. $T = \left[\frac{\pi-4}{4(1-\sqrt{2})},\ \frac{\pi-2}{8(2-\sqrt{2})}\right]$
6. $T = \left[\frac{4a}{3\pi},\ \frac{4b}{3\pi}\right]$
7. $\left[x_T = \frac{3(\pi-2)r}{16\left(2-\sqrt{2}\right)}\right]$
8. $\left[y_T = \frac{14}{3(1+2\ln 3)}\right]$
9. $T = \left[\frac{2}{3(\pi+2)},\ \frac{2}{\pi+2}\right]$
10. $\left[x_T = \frac{124\left(4-\sqrt{2}\right)}{225}\right]$
11. $T = \left[\frac{3\pi-8}{12-3\pi},\ \frac{1-\ln 2}{4-\pi}\right]$
12. $T = \left[\frac{3\pi}{16},\ \frac{3}{4}\right]$
13. $T = \left[0,\ \frac{5a}{8}\right]$
14. $T = \left[\frac{141}{20(7-3\ln 2)},\ \frac{81}{8(7-3\ln 2)}\right]$

Příklad 1.4.4: Vypočtěte moment setrvačnosti rovinného obrazce A, je-li $\sigma(x,y)$ plošná hustota:

1. I_y rovinného obrazce $A = \{ [x,y] \in \mathbf{E_2};\ 6x + y \ge 6,\ 2x + y \le 6,\ y \ge 0; \}$;
$\sigma(x,y) = k$
2. I_y rovinného obrazce $A = \{ [x,y] \in \mathbf{E_2};\ (x-a)^2 + y^2 \le a^2,\ a > 0\}$; $\sigma(x,y) = k$
3. I_x omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $x + y = 2,\ x = 2$,
$y = 2$; $\sigma(x,y) = 1$
4. I_y omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $x = 0,\ x = 4$,
$y = \frac{x}{2} + 3,\ y = \frac{x}{2} - 3$; $\sigma(x,y) = x$

5. $I_x,\ I_y$ rovinného obrazce $A = \{ [x,y] \in \mathbf{E_2};\ x^2 \le y \le x \}$; $\sigma(x,y) = k$
6. I_x rovinného obrazce $A = \{ [x,y] \in \mathbf{E_2};\ y \le -x^2 + 1,\ y \ge 0\}$; $\sigma(x,y) = 1$
7. I_x omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = \sqrt{x},\ y = x^4$;
$\sigma(x,y) = 1$
8. $I_x,\ I_y$ omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $xy = a^2,\ xy = 2a^2$,
$x = 2y,\ 2x = y,\ x \ge 0,\ \sigma(x,y) = 1$
9. I_x rovinného obrazce $A = \{ [x,y] \in \mathbf{E_2};\ x^2 + y^2 \le r^2,\ r \ge 0 \}$; $\sigma(x,y) = 1$
10. I_x rovinného obrazce $A = \{ [x,y] \in \mathbf{E_2};\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge x,\ y \ge -x \}$;
$\sigma(x,y) = y$
11. I_x rovinného obrazce $A = \{ [x,y] \in \mathbf{E_2};\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1,\ 2x - \sqrt{3}y \le 0,\ x \ge 0 \}$;
$\sigma(x,y) = |x|$
12. I_y rovinného obrazce $A = \{ [x,y] \in \mathbf{E_2};\ x^2 \le y \le x \}$; $\sigma(x,y) = \frac{1}{y+1}$
13. I_y omezeného rovinného obrazce ohraničeného křivkami: $y = x^2,\ y = x$;
$\sigma(x,y) = x\mathrm{e}^y$

Výsledky:

1. $[I_y = 13k]$
2. $\left[I_y = \frac{5\pi k a^4}{4}\right]$
3. $[I_x = 4]$
4. $[I_y = 384]$
5. $\left[I_x = \frac{k}{28},\ I_y = \frac{k}{20}\right]$
6. $\left[I_x = \frac{32}{105}\right]$
7. $\left[I_x = \frac{7}{65}\right]$
8. $\left[I_x = \frac{9a^4}{8},\ I_y = \frac{9a^4}{8}\right]$
9. $\left[I_x = \frac{1}{4}\pi r^4\right]$
10. $\left[I_x = \frac{31}{6}\sqrt{2}\right]$
11. $\left[I_x = \frac{24}{5}\left(1 - \frac{8}{7\sqrt{7}}\right)\right]$
12. $\left[I_y = \ln\sqrt[3]{2} + \frac{3\pi-13}{18}\right]$
13. $\left[I_y = \frac{11-4e}{2}\right]$

Kapitola 2

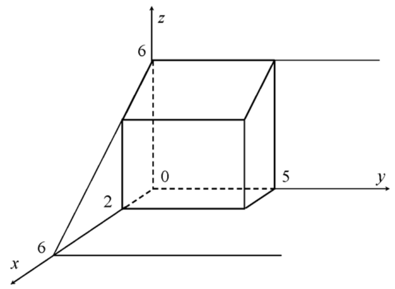
Trojný integrál

2.1 Výpočet trojného integrálu

Příklad 1: Vypočtěte integrál $\iiint\limits_W z^2\,dxdydz$, kde množina

$$W = \{ [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 5,\ 0 \le z \le 6 - x \}.$$

Řešení: Množina W je oblast prvního i druhého druhu v $\mathbf{E_3}$ - viz Obrázek 2.1. Funkce $f(x,y,z) = z^2$ je na oblasti W spojitá a ohraničená. Trojný integrál existuje. Podle Fubiniho věty převedeme výpočet trojného integrálu na výpočet trojnásobného integrálu. Výpočet provedeme za předpokladu, že W je oblast prvního druhu.



Obrázek 2.1: $W = \{ [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 5,\ 0 \le z \le 6 - x \}$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_W z^2\,dxdydz &= \int_0^2 \left(\int_0^5 \left(\int_0^{6-x} z^2\,dz \right) dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^5 \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{6-x} dy \right) dx \\
&= \frac{1}{3} \int_0^2 \left(\int_0^5 (6-x)^3\,dy \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^2 (6-x)^3\,[y]_0^5\,dx \\
&= \frac{5}{3} \int_0^2 (6-x)^3\,dx = \frac{5}{3} \left[-\frac{(6-x)^4}{4} \right]_0^2 = \frac{1300}{3}
\end{aligned}$$

Příklad 2.1.1: Převeďte trojný integrál $\iiint\limits_W dxdydz$ na trojnásobný (pokud to lze) nebo na součet trojnásobných integrálů. Množina W je omezená oblast v prostoru $\mathbf{E_3}$ ohraničená plochami nebo určená nerovnicemi.

1. $W: x \ge 0,\ y \ge 1,\ z \ge 0,\ 2z \le 2 - 2x - y$
2. $W: x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ y \le 1 - x,\ z \le x + y$
3. $W: 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2,\ z \ge 0,\ z \le 1 - y,\ z \le y - 1$
4. $W: x \ge 0,\ x^2 \le y \le 1,\ z \le 6$
5. $W: z = 0,\ z = 3\left(1 - y^2\right),\ y = |x|$
6. $W: y = 0,\ z = 0,\ x + z = \frac{\pi}{2},\ y = \sqrt{x}$
7. $W: z \ge e^x,\ z \le e,\ 0 \le y \le 4,\ x \ge 0$
8. $W: z \ge -x^2,\ z \le -y^3,\ x \le 1,\ -x \le y \le 0$
9. $W: z \ge 0,\ z \le 4 - y^2,\ x \ge 0,\ y \ge \ln x,\ y \ge 0$

Výsledky:

1. $\int_1^{\frac{1}{2}} \left(\int_1^{2-2x} \left(\int_0^{1-x-\frac{y}{2}} dz \right) dy \right) dx = \int_1^2 \left(\int_0^{1-\frac{y}{2}} \left(\int_0^{1-x-\frac{y}{2}} dz \right) dx \right) dy$
2. $\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{x+y} dz \right) dy \right) dx$
3. $\int_0^2 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} dz \right) dy \right) dx + \int_0^2 \left(\int_1^2 \left(\int_0^{y-1} dz \right) dy \right) dx$
4. $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \left(\int_0^6 dz \right) dy \right) dx$

5. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-y}^{y} \left(\int\limits_0^{3(1-y^2)} dz\right) dx\right) dy$

6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{\sqrt{x}} \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-x} dz\right) dy\right) dx$

7. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^4 \left(\int\limits_{e^x}^{e} dz\right) dy\right) dx$

8. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{-x}^{0} \left(\int\limits_{-x^2}^{-y^3} dz\right) dy\right) dx = \int\limits_{-1}^{0} \left(\int\limits_{-y}^{1} \left(\int\limits_{-x^2}^{-y^3} dz\right) dx\right) dy$

9. $\int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{e^y} \left(\int\limits_0^{4-y^2} dz\right) dx\right) dy$

Příklad 2.1.2: Vypočtěte následující integrály. Množina W je omezená oblast v prostoru $\mathbf{E_3}$ ohraničená plochami nebo určená nerovnicemi.

1. $\int\int\limits_W\int (x+y)\, dxdydz,\ W: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3$
2. $\int\int\limits_W\int (x+y+z)\, dxdydz,\ W: 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 1$
3. $\int\int\limits_W\int z^2 r\, dtdrdz,\ W = \{[t,r,z] \in \mathbf{E_3};\ 0 \le t \le \pi,\ 0 \le r \le a,$
   $0 \le z \le b\},\ a,b > 0$
4. $\int\int\limits_W\int \frac{1}{\sqrt{x+y+z+1}}\, dxdydz,\ W: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$
5. $\int\int\limits_W\int \varrho^3 \sin\varphi \cos\varphi\, d\varrho d\varphi dz$, je-li $W = \{[\varrho,\varphi,z] \in \mathbf{E_3};\ 0 \le \varrho \le a,$
   $0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\frac{1}{2} \le z \le \frac{1}{2}\}$
6. $\int\int\limits_W\int (x^2 z \cos x)\, dxdydz,\ W: 0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le y \le 2,\ \frac{1}{2} \le z \le 1$
7. $\int\int\limits_W\int (2e^{3x+2y}z)\, dxdydz,\ W: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$

Výsledky:

1. $[9]$
2. $[18]$
3. $\left[\frac{1}{6}\pi a^2 b^3\right]$
4. $\left[\frac{8}{15}\left(31 + 12\sqrt{2} - 27\sqrt{3}\right)\right]$

5. $[0]$
6. $[0]$
7. $\left[\frac{1}{6}\left(e^5 - e^3 - e^2 + 1\right)\right]$

Příklad 2.1.3: Vypočtěte následující integrály $\int\int\limits_W\int f(x,y,z)\, dxdydz$. Množina W je omezená oblast v prostoru $\mathbf{E_3}$ ohraničená plochami nebo určená nerovnicemi.

1. $\int\int\limits_W\int \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\, dxdydz,\ W: x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x+y+z = 1$
2. $\int\int\limits_W\int x\, dxdydz,\ W: x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+2y+z \le 1$
3. $\int\int\limits_W\int z\, dxdydz,\ W: x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 1$
4. $\int\int\limits_W\int \frac{1}{x+y+1}\, dxdydz,\ W: x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 1$
5. $\int\int\limits_W\int (x+y+z)\, dxdydz,\ W: x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 4$
6. $\int\int\limits_W\int (2x-y+3z)^2\, dxdydz,\ W: x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 1$
7. $\int\int\limits_W\int xyz\, dxdydz,\ W: x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 1$
8. $\int\int\limits_W\int xy\, dxdydz,\ W: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le x+y,\ z \le 2-x-y$
9. $\int\int\limits_W\int x^2 y z^3\, dxdydz,\ W: z = xy,\ y = x,\ y = 1,\ z = 0$
10. $\int\int\limits_W\int x\, dxdydz,\ W: x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 1,\ 0 \le z \le x^2+y^2+1$
11. $\int\int\limits_W\int e^y\, dxdydz,\ W: 0 \le y \le 3,\ x^2 \le z \le 4$
12. $\int\int\limits_W\int dxdydz,\ W: x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ z \le 1-x^2,\ x+y \le 1, y \le 2x$
13. $\int\int\limits_W\int 16x^2 yz\, dxdydz,\ W: x = 1,\ y = 0,\ y = -x,\ z = 0,\ z = -y^3$
14. $\int\int\limits_W\int y\cos(x+z)\, dxdydz,\ W: y = 0,\ z = 0,\ y = \sqrt{x},\ x+z = \frac{\pi}{2}$
15. $\int\int\limits_W\int xyz\, dxdydz,\ W: y \ge x^2,\ x \ge y^2,\ z \ge 0,\ z \le xy$
16. $\int\int\limits_W\int dxdydz,\ W: x = y^2,\ y = x,\ y = x-2,\ y = 0,\ z = 0,\ z = -\frac{3}{2}x+6$

Výsledky:

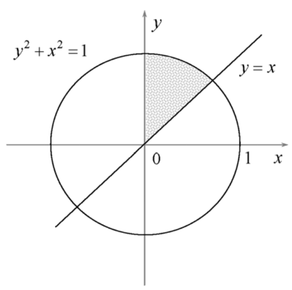
1. $\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{8} + \ln 2\right)\right]$
2. $\left[\frac{1}{48}\right]$
3. $\left[\frac{1}{24}\right]$
4. $\left[\frac{3}{2} - 2\ln 2\right]$
5. $[32]$
6. $\left[\frac{1}{4}\right]$
7. $\left[\frac{1}{720}\right]$
8. $\left[\frac{3}{20}\right]$
9. $\left[\frac{1}{364}\right]$
10. $\left[\frac{3}{70}\right]$
11. $\left[\frac{32}{3}\left(e^3 - 1\right)\right]$
12. $\left[\frac{41}{162}\right]$
13. $\left[-\frac{1}{11}\right]$
14. $\left[\frac{1}{16}\left(\pi^2 - 8\right)\right]$
15. $\left[\frac{1}{96}\right]$
16. $\left[\frac{99}{10}\right]$

2.2 Transformace trojného integrálu

Příklad 1: Vypočítejte integrál $\int\int\limits_W\int \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$, kde množina

$$W = \left\{ [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ 0 \le x \le y,\ z \ge 0,\ x^2+y^2+z^2 \le 1 \right\}.$$

Řešení: Množina W je 1/16 koule ležící v 1. oktantu, její kolmý průmět do roviny $z = 0$ je na Obrázku 2.2. Funkce $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ je na oblasti W spojitá a ohraničená. Trojný integrál tedy existuje. K řešení použijeme transformaci do sférických souřadnic.



Obrázek 2.2: $W = \{ [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ 0 \le x \le y,\ z \ge 0,\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

$$\begin{array}{lll} x = \varrho\cos\varphi\cos\gamma & A: & 0 \le \varrho \le 1 \\ y = \varrho\sin\varphi\cos\gamma & & \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ z = \varrho\sin\gamma & & 0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2} \\ |J| = \varrho^2\cos\gamma & & \end{array}$$

Potom

$$\begin{aligned} & \int\int\limits_W\int \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz \\ = & \iiint\limits_A \sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi\cos^2\gamma + \varrho^2\sin^2\varphi\cos^2\gamma + \varrho^2\sin^2\gamma}\, \varrho^2\cos\gamma\, d\varrho\, d\varphi\, d\gamma \\ = & \iiint\limits_A \varrho^3\cos\gamma\, d\varrho\, d\varphi\, d\gamma = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho^3\cos\gamma\, d\gamma\right) d\varphi\right) d\varrho \\ = & \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varrho^3 \left[\sin\gamma\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\, d\varphi\right) d\varrho = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varrho^3\, d\varphi\right) d\varrho = \int\limits_0^1 \varrho^3 \left[\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\, d\varrho \\ = & \frac{\pi}{4}\int\limits_0^1 \varrho^3\, d\varrho = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

Příklad 2: Vypočtěte integrál $\int\int\limits_W\int (x+y)\, dxdydz$, kde množina

$$W = \left\{ [x,y,z] \in \mathbf{E_3};\ 0 \le z \le y^2,\ x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0 \right\}.$$

Řešení: Množina W je válcové těleso, jehož tvořící přímky jsou rovnoběžné s osou z, a jehož kolmý průmět do roviny (x,y) je horní polovina kruhu ohraničená kružnicí se středem v počátku a poloměrem jedna. Těleso je zdola ohraničeno rovinou $z = 0$ a shora parabolickým válcem $z = y^2$, který má površky rovnoběžné s osou x. Funkce $f(x,y,z) = x+y$ je na oblasti W spojitá a ohraničená. Trojný integrál existuje. K výpočtu trojného integrálu použijeme transformaci do cylindrických souřadnic:

$$\begin{array}{lll} x = \varrho\cos\varphi & A: & 0 \le \varrho \le 1 \\ y = \varrho\sin\varphi & & 0 \le \varphi \le \pi \\ z = z & & 0 \le z \le \varrho^2\sin^2\varphi \\ |J| = \varrho & & \end{array}$$

Potom

$$
\begin{aligned}
\int\int\int_W (x+y)\,dxdydz &= \iiint_A \varrho^2(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varrho\,d\varphi\,dz \\
&= \int_0^1\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{\varrho^2\sin^2\varphi}\varrho^2(\cos\varphi+\sin\varphi)\,dz\right)d\varphi\right)d\varrho \\
&= \int_0^1\left(\int_0^\pi \varrho^2(\cos\varphi+\sin\varphi)\,[z]_0^{\varrho^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\right)d\varrho \\
&= \int_0^\pi\left(\int_0^1 \varrho^4\left(\sin^2\varphi\cos\varphi+\sin^2\varphi\sin\varphi\right)d\varrho\right)d\varphi \\
&= \int_0^\pi\left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^1\left(\sin^2\varphi\cos\varphi+\sin^2\varphi\sin\varphi\right)d\varphi \\
&= \frac{1}{5}\int_0^\pi\left(\sin^2\varphi\cos\varphi+\sin^2\varphi\sin\varphi\right)d\varphi \\
&= \frac{1}{5}\int_0^\pi \sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi+\frac{1}{5}\int_0^\pi\sin^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi=\frac{4}{15}.
\end{aligned}
$$

Oba určité integrály řešíme goniometrickou substitucí. Při výpočtu prvního integrálu zavedem substituci $t=\sin\varphi$, při výpočtu druhého substituci $t=\cos\varphi$.

Příklad 2.2.1: Převeďte trojný integrál $\int\int\int_W f(x,y,z)\ dxdydz$ na trojnásobný (pokud to lze) nebo na součet trojnásobných integrálů s použitím transformace do cylindrických nebo sférických souřadnic. Množina W je omezená oblast v prostoru $\mathbf{E_3}$ ohraničená plochami nebo určená nerovnicemi.

1. $W: x^2+y^2\le 1,\ x+y+z\le 6,\ z\ge 0$
2. $W: x^2+y^2\le 1,\ x^2+y^2-z-1\le 0,\ z\le 6$
3. $W: x^2+y^2\le 1,\ z\le\sqrt{x^2+y^2},\ z\ge 0,\ x\ge 0, y\ge 0$
4. $W: y\le x,\ y\ge -x,\ z-3\le-\left(x^2+y^2\right),\ z\ge 0$
5. $W: x^2+y^2-4y\le 0,\ 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}$
6. $W: x^2+y^2+z^2\le 4,\ x^2+y^2\le 3z^2,\ z\ge 0$
7. $W: 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\le y,\ z\ge 0$

8. $W: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$

Výsledky:

1. $\int\int\int_A f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\,d\varrho d\varphi dz=$
$=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{6-\varrho\cos\varphi-\varrho\sin\varphi} f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\ dz\right)d\varphi\right)d\varrho$
2. $\int\int\int_A f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\,d\varrho d\varphi dz=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{\varrho^2-1}^{6} f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\ dz\right)d\varphi\right)d\varrho$
3. $\int\int\int_A f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\,d\varrho d\varphi dz=\int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\varrho} f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\ dz\right)d\varphi\right)d\varrho$
4. $\int\int\int_A f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\,d\varrho d\varphi dz=\int_0^{\sqrt{3}}\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{3-\varrho^2} f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\ dz\right)d\varphi\right)d\varrho$
5. $\int\int\int_A f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\,d\varrho d\varphi dz=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{4\sin\varphi}\left(\int_0^{\varrho} f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,z)\ \varrho\ dz\right)d\varrho\right)d\varphi$
6. $\int\int\int_A f(\varrho\cos\varphi\cos\gamma,\varrho\sin\varphi\cos\gamma,\varrho\sin\gamma)\ \varrho^2\cos\gamma\,d\varrho d\varphi d\gamma=$
$=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(\varrho\cos\varphi\cos\gamma,\varrho\sin\varphi\cos\gamma,\varrho\sin\gamma)\ \varrho^2\cos\gamma\ d\gamma\right)d\varphi\right)d\varrho$
7. $\int\int\int_A f(\varrho\cos\varphi\cos\gamma,\varrho\sin\varphi\cos\gamma,\varrho\sin\gamma)\ \varrho^2\cos\gamma\,d\varrho d\varphi d\gamma=$
$=\int_1^2\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varrho\cos\varphi\cos\gamma,\varrho\sin\varphi\cos\gamma,\varrho\sin\gamma)\ \varrho^2\cos\gamma\ d\gamma\right)d\varphi\right)d\varrho$
8. $\int\int\int_A f(2\varrho\cos\varphi\cos\gamma,3\varrho\sin\varphi\cos\gamma,4\varrho\sin\gamma)\,24\varrho^2\cos\gamma\,d\varrho d\varphi d\gamma=$
$=\int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\varrho\cos\varphi\cos\gamma,3\varrho\sin\varphi\cos\gamma,4\varrho\sin\gamma)\,24\varrho^2\cos\gamma\,d\gamma\right)d\varphi\right)d\varrho$

Příklad 2.2.2: Vypočtěte následující integrály $\int\int\int_W f(x,y,z)\ dxdydz$. Množina W je omezená oblast v prostoru $\mathbf{E_3}$ ohraničená plochami nebo určená nerovnicemi. K výpočtu použijte transformace do cylindrických nebo sférických souřadnic.

1. $\int\int\int_W y^2z^3\,dxdydz,\ W: x^2+y^2\le 16,\ z\ge 0,\ z\le 4$
2. $\int\int\int_W (x^2+y^2)\,dxdydz,\ W: 2z\ge x^2+y^2,\ z\le 2$
3. $\int\int\int_W \frac{xy}{(4+z)^2}\,dxdydz,\ W: x^2+y^2\le 4z\le 16$
4. $\int\int\int_W dxdydz,\ W: x\ge 0,\ y\ge -x,\ x^2+y^2\le 4,\ 0\le z\le x+1$
5. $\int\int\int_W z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\ W: y\ge 0,\ z\ge 0,\ z\le 3,\ x^2+y^2\le 2x$
6. $\int\int\int_W 3z^2\,dxdydz,\ W: x^2+y^2\le z,\ z\le 2-(x^2+y^2)$
7. $\int\int\int_W z\,dxdydz,\ W: z^2\ge 4\left(x^2+y^2\right),\ z\le 2$
8. $\int\int\int_W y\,dxdydz,\ W: x\ge 0,\ y\le 4,\ y\ge\sqrt{x^2+z^2}$
9. $\int\int\int_W y\,dxdydz,\ W: y\ge\sqrt{x^2+z^2},\ y\le 1,\ z\ge 0$
10. $\int\int\int_W (x^2+y^2)\,dxdydz,\ W: z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le r^2$
11. $\int\int\int_W xyz\,dxdydz,\ W: x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le 1$
12. $\int\int\int_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,\ W: 0\le x\le y,\ z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le 1$
13. $\int\int\int_W x^2yz\,dxdydz,\ W: x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\le 0,\ 4x^2+y^2+z^2\le 1$
14. $\int\int\int_W xy\,dxdydz,\ W: x^2+y^2+z^2-4z\le 0,\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}$
15. $\int\int\int_W z\,dxdydz, W: x^2+y^2\le 2z,\ x^2+y^2+z^2\le 3$
16. $\int\int\int_W \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz,\ W: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1,\ a,b,c>0$

Výsledky:

1. $[4096\pi]$
2. $\left[\frac{16}{3}\pi\right]$
3. $[0]$
4. $\left[\frac{16+8\sqrt{2}+9\pi}{6}\right]$
5. $[8]$
6. $\left[\frac{7}{2}\pi\right]$
7. $[\pi]$
8. $[32\pi]$
9. $\left[\frac{1}{8}\pi\right]$
10. $\left[\frac{4}{15}\pi r^5\right]$
11. $\left[\frac{1}{48}\right]$
12. $\left[\frac{1}{16}\pi\right]$
13. $\left[-\frac{1}{840}\right]$
14. $[0]$
15. $\left[\frac{5}{3}\pi\right]$
16. $\left[\frac{4}{5}\pi abc\right]$

2.3 Geometrické a fyzikální aplikace trojného integrálu

$W \subset \mathbf{E_3}$ je elementární oblast prvního, druhého nebo třetího druhu. Těleso W má objemovou hustotu $\sigma(x,y,z)\,[kg\cdot m^{-3}]$

$V = \iiint\limits_W dxdydz\ [m^3]$ – objem tělesa W

$m = \iiint\limits_W \sigma(x,y,z)dxdydz\ [kg]$ – hmotnost tělesa W

$S_{xy} = \iiint\limits_W z\sigma(x,y,z)dxdydz\ [kg\cdot m]$ – statický moment tělesa W vzhledem k rovině (x,y)

$S_{xz} = \iiint\limits_W y\sigma(x,y,z)dxdydz\ [kg\cdot m]$ – statický moment tělesa W vzhledem k rovině (x,z)

$S_{yz} = \iiint\limits_W x\sigma(x,y,z)dxdydz\ [kg\cdot m]$ – statický moment tělesa W vzhledem k rovině (x,z)

$T = [t_1, t_2, t_3]$, kde $t_1 = \dfrac{S_{yz}}{m}$, $t_2 = \dfrac{S_{xz}}{m}$, $t_3 = \dfrac{S_{xy}}{m}$ – těžiště tělesa W

$I_x = \iiint\limits_W (y^2+z^2)\sigma(x,y,z)dxdydz\ [kg\cdot m^2]$ – moment setrvačnosti tělesa W vzhledem k ose x

$I_y = \iiint\limits_W (x^2+z^2)\sigma(x,y,z)dxdydz\ [kg\cdot m^2]$ – moment setrvačnosti tělesa W vzhledem k ose y

$I_z = \iiint\limits_W (x^2+y^2)\sigma(x,y,z)dxdydz\ [kg\cdot m^2]$ – moment setrvačnosti tělesa W vzhledem k ose z

Poznámka: Doplňte příslušné jednotky v zadání a výsledcích.

Příklad 2.3.1: Vypočtěte objem tělesa W určeného nerovnicemi nebo ohraničeného plochami:

1. $W:\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ 2x+2y+z-6=0$
2. $W:\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x/3+y+z/6=1$
3. $W:\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=3,\ y=3,\ x+y+z=4$

4. $W:\ x^2+y^2\le 1,\ x+y+z\le 6,\ z\ge 0$
5. $W:\ x^2+y^2\le 1,\ z\ge 0,\ x+y+\frac{z}{2}\le 1$
6. $W:\ 0\le z\le x^2,\ 0\le y\le 3,\ -1\le x\le 1$
7. $W:\ 0\le z\le 9,\ y\ge x^2,\ x^2\le 4-3y$
8. $W:\ z\le 1,\ z\ge \sqrt[3]{x^2},\ 0\le y\le 1$
9. $W:\ y\ge\sqrt{x},\ y\le 2\sqrt{x},\ z\ge 0,\ x+z\le 4$
10. $W:\ z\le y^2+1,\ z\ge -x^2,\ x^2+y^2\le 1,\ y\ge -x,\ x\ge 0$
11. $W:\ 2z\ge x^2+y^2,\ y+z\le 4$
12. $W:\ z\le x^2+y^2,\ z\ge 0,\ y\ge 1,\ y\le 2x,\ y\le 6-x$
13. $W:\ z\ge x^2+y^2,\ z\le y$
14. $W:\ \frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}\le x,\ x\le 1$
15. $W:\ z\ge x^2+y^2,\ z\le x^2+2y^2,\ y\ge x,\ y\le 2x,\ y\le 1$
16. $W:\ y\ge x,\ x\ge y^2,\ z\ge x^2+y^2,\ z\le 2(x^2+y^2)$
17. $W:\ x^2+y^2+2y\le 0,\ 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}$
18. $W:\ z\ge x^2+y^2,\ z^2\le x^2+y^2$
19. $W:\ z\le 6-x^2-y^2,\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}$
20. $W:\ z\ge 0,\ z\le x+2y,\ x^2+y^2\le 2x,\ x^2+y^2\le 2y$
21. $W:\ x^2+y^2+z^2\le 4,\ x^2+y^2\le 1$
22. $W:\ x^2+y^2+z^2\le 9,\ x^2+y^2\ge 4$
23. $W:\ x^2+y^2+z^2\le 2z,\ x^2+y^2\ge z^2$
24. $W:\ x^2+y^2+z^2\le 4,\ x^2+y^2+(z-2)^2\le 4$
25. $W:\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{12}\le 1,\ 0\le x\le\frac{3}{\sqrt{3}}y$

Výsledky:

1. $[9]$
2. $[3]$
3. $\left[\frac{31}{3}\right]$
4. $[6\pi]$
5. $\left[\frac{9\pi+10}{6}\right]$
6. $[1]$
7. $[16]$
8. $\left[\frac{4}{5}\right]$
9. $\left[\frac{128}{15}\right]$

10. $\left[\frac{9}{16}\pi\right]$
11. $\left[\frac{81}{4}\pi\right]$
12. $\left[\frac{2511}{32}\right]$
13. $\left[\frac{1}{32}\pi\right]$
14. $[3\pi]$
15. $\left[\frac{1}{8}\right]$
16. $\left[\frac{3}{35}\right]$
17. $\left[\frac{32}{9}\right]$
18. $\left[\frac{1}{6}\pi\right]$
19. $\left[\frac{32}{3}\pi\right]$
20. $\left[\frac{3}{4}(\pi-2)\right]$
21. $\left[\frac{4}{3}\pi\left(8-3\sqrt{3}\right)\right]$
22. $\left[\frac{20\pi\sqrt{5}}{3}\right]$
23. $\left[\frac{1}{3}\pi\right]$
24. $\left[\frac{10}{3}\pi\right]$
25. $\left[\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\right]$

Příklad 2.3.2: Vypočtěte hmotnost tělesa W určeného nerovnicemi nebo ohraničeného plochami, je-li $\sigma(x,y,z)$ hustota tělesa:

1. $W:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ z\ge 0,\ x+z+y\le 2;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
2. $W: y\ge 0,\ y\le\ln x,\ z\ge 0,\ y+z\le 1;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
3. $W:\ y\ge |x|,\ z\ge 0,\ z\le 3(1-y^2);\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
4. $W:\ x\le 1,\ y\ge 0,\ y\le x,\ z\le 0,\ z\ge -y^3;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
5. $W:\ x^2+y^2\le 1,\ z-y\le 0,\ 0\le x\le y;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
6. $W:\ x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le y^2,\ y\ge 0;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
7. $W:\ x^2+y^2\le 2x,\ x^2+y^2\ge 2z,\ z\ge 0;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
8. $W:\ y\ge 0,\ y\ge -x,\ z\le 0,\ x^2+y^2+z^2\le 1;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
9. $W:\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ y\le 0;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
10. $W:\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge\sqrt{x^2+y^2};\ \sigma(x,y,z)=1$
11. $W:\ x^2+y^2+z^2\le 2z,\ x^2+y^2\le z^2;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
12. $W:\ x^2+y^2+z^2-z\le 0,\ z\le\sqrt{x^2+y^2},\ y\le 0;\ \sigma(x,y,z)=|z|$

Výsledky:

1. $[k]$
2. $\left[k\left(2-\frac{e}{2}\right)\right]$
3. $\left[\frac{3}{2}k\right]$
4. $\left[\frac{1}{20}k\right]$
5. $\left[\frac{\sqrt{2}}{6}k\right]$
6. $\left[\frac{\pi}{8}k\right]$
7. $\left[\frac{3\pi}{4}k\right]$
8. $\left[\frac{\pi}{4}k\right]$
9. $\left[\frac{14\pi}{3}k\right]$
10. $\left[\frac{\pi}{12}\left(2-\sqrt{2}\right)\right]$
11. $[k\pi]$
12. $\left[\frac{\pi}{192}\right]$

Příklad 2.3.3: Vypočtěte statické momenty tělesa W vzhledem k souřadným rovinám, je-li $\sigma(x,y,z)$ hustota. Těleso W je určené nerovnicemi nebo ohraničené plochami.

1. $S_{xy},\ W:\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ y\le 1-x^2,\ x+z\le 2;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
2. $S_{yz},\ W:\ z\le e^x,\ y\le 1-x,\ x\ge 0,\ y\ge 0;\ z\ge 0;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
3. $S_{xy},\ W:\ 0\le z\le\sqrt{y-x^2},\ y\le 4;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
4. $S_{xy},\ W:\ z\ge x^2+y^2,\ z\le 3,\ y\ge |x|;\ \sigma(x,y,z)=y$
5. $S_{xz},\ W:\ x^2+y^2\ge 1,\ 1\le z\le 5-x^2-y^2,\ y\ge |x|;\ \sigma(x,y,z)=|y|$
6. $S_{xz},\ W:\ x^2+y^2\ge z,\ x^2+y^2+y\le 0,\ x\ge 0;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
7. $S_{xz},\ W:\ x^2+y^2-4x\le 0,\ x^2+y^2-2x\ge 0,\ y\ge 0;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
8. $S_{yz},\ W:\ x^2+y^2+z^2\le r^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0;\ \sigma(x,y,z)=1$
9. $S_{xz},\ W:\ 0\le x\le y,\ x^2+y^2+z^2\le 4;\ \sigma(x,y,z)=k$
10. $S_{xz},\ W:\ 4\le x^2+y^2+z^2\le 9,\ x\le 0,\ y\le 0,\ z\le 0;\ \sigma(x,y,z)=|y|$
11. $S_{xy},\ W:\ x^2+y^2+z^2\le 9,\ z\le\sqrt{x^2+y^2},\ 0\le x\le y;\ \sigma(x,y,z)=y$
12. $S_{yz},\ W:\ x^2+y^2+z^2-4z\le 0,\ z\ge\sqrt{x^2+y^2},\ x\le 0,\ y\ge 0;\ \sigma(x,y,z)=y$
13. $S_{xy},\ W:\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2\le 1;\ \sigma(x,y,z)=k,\ k>0$
14. $S_{yz},\ W:\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{12}\le 1,\ 0\le x\le y;\ \sigma(x,y,z)=z^2$

Výsledky:

1. $\left[S_{xy}=\frac{14}{5}k\right]$
2. $\left[S_{yz}=k(3-e)\right]$
3. $\left[S_{xy}=\frac{128}{15}k\right]$
4. $\left[S_{xy}=\frac{9\sqrt{3}}{5}\right]$
5. $\left[S_{xz}=\frac{9(2+\pi)}{8}\right]$
6. $\left[S_{xz}=\frac{\pi}{32}k\right]$
7. $\left[S_{xz}=\frac{56}{3}k\right]$
8. $\left[S_{yz}=\frac{\pi r^4}{16}\right]$
9. $\left[S_{xz}=k\pi\sqrt{2}\right]$
10. $\left[S_{xz}=-\frac{\pi}{6}\right]$
11. $\left[S_{xy}=-\frac{81}{20}\right]$
12. $\left[S_{yz}=-\frac{3}{256}\right]$
13. $\left[S_{xy}=0\right]$
14. $\left[S_{yz}=\pi\left(6\sqrt{3}-3\sqrt{6}\right)\right]$

Příklad 2.3.4: Vypočtěte souřadnice (souřadnici) těžiště T tělesa W, je-li $\sigma(x,y,z)$ hustota. Těleso W je určené nerovnicemi nebo ohraničené plochami.

1. $T,\ W:\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 8;\ \sigma(x,y,z) = k,\ k > 0$
2. $T,\ W:\ x \ge 0,\ z \ge 0,\ 1 \le y \le 3,\ x + 2z \le 3;\ \sigma(x,y,z) = 1$
3. $z_T,\ W:\ y \le 0,\ z \ge 0,\ y^2 \ge 2z,\ x^2+y^2 \le 2;\ \sigma(x,y,z) = k,\ k > 0$
4. $T,\ W:\ y \ge \sqrt{x},\ y \le 2\sqrt{x},\ x + z \le 1,\ z \ge 0;\ \sigma(x,y,z) = k,\ k > 0$
5. $T,\ W:\ z \ge 0,\ y \ge 4x^2,\ z \le \frac{1}{2}(4-y);\ \sigma(x,y,z) = k,\ k > 0$
6. $T,\ W:\ z \le 4,\ z \ge 4(x^2+y^2);\ \sigma(x,y,z) = k,\ k > 0$
7. $T,\ W:\ z \ge \sqrt{x^2+y^2},\ z \le 1;\ \sigma(x,y,z) = k,\ k > 0$
8. $T,\ W:\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le (y^2-x^2);\ \sigma(x,y,z) = k,\ k > 0$
9. $T,\ W:\ x^2+y^2+z^2 \le 3a^2,\ x^2+y^2 \le 2az,\ a > 0;\ \sigma(x,y,z) = k,\ k > 0$
10. $T,\ W:\ x^2+y^2+z^2 \le 9,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2};\ \sigma(x,y,z) = k,\ k > 0$

Výsledky:

1. $T = \left[\frac{14}{15},\ \frac{26}{15},\ \frac{8}{3}\right]$
2. $T = \left[1,\ 1,\ \frac{1}{2}\right]$
3. $z_T = \frac{1}{4}$
4. $T = \left[\frac{3}{7}, \frac{15}{16}, \frac{2}{7}\right]$
5. $T = \left[0, \frac{12}{7}, \frac{4}{7}\right]$
6. $T = \left[0, 0, \frac{8}{3}\right]$
7. $T = \left[0, 0, \frac{3}{4}\right]$
8. $T = \left[0, \frac{4}{5}, \frac{4}{15}\right]$
9. $T = \left[0, 0, \frac{5a}{6\sqrt{3}-5}\right]$
10. $T = \left[0, 0, \frac{9}{8\left(2-\sqrt{2}\right)}\right]$

Příklad 2.3.5: Vypočtěte moment setrvačnosti tělesa W, je-li $\sigma(x,y,z)$ hustota. Těleso W je určené nerovnicemi nebo ohraničené plochami.

1. $I_z,\ W:\ z \le -x^2,\ z \ge -4,\ 0 \le y \le 2;\ \sigma(x,y,z) = k,\ k > 0$
2. $I_z,\ W:\ x^2+y^2 \le z \le 1;\ \sigma(x,y,z) = 1$
3. $I_x, I_z,\ W:\ x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 3;\ \sigma(x,y,z) = k,\ k > 0$
4. $I_z,\ W:\ x^2+y^2 \le 2x,\ 0 \le z \le a,\ y \ge 0;\ \sigma(x,y,z) = k,\ k > 0$
5. $I_z,\ W:\ z \ge 3\sqrt{x^2+y^2},\ z \le 3;\ \sigma(x,y,z) = k,\ k > 0$

6. $I_y,\ W:\ y \ge \sqrt{x^2+z^2},\ y \le 2;\ x \ge 0,\ z \ge 0;\ \sigma(x,y,z) = y$
7. $I_x,\ W:\ x^2+y^2+z^2 \le r^2,\ \sigma(x,y,z)$ je přímo úměrná vzdálenosti bodu tělesa od středu koule
8. $I_z,\ W:\ x^2+y^2+z^2 \le 2z,\ x^2+y^2 \le z^2;\ \sigma(x,y,z) = |z|$
9. $I_z,\ W:\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le z^2,\ 0 \le z \le 1;\ \sigma(x,y,z) = 1$
10. $I,\ W:\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \le 1;\ \sigma(x,y,z) = 1$

Výsledky:

1. $\left[I_z = \frac{2048}{45}k\right]$
2. $\left[I_z = \frac{\pi}{6}\right]$
3. $[I_x = 48\pi k,\ I_z = 24\pi k]$
4. $\left[I_z = \frac{3}{4}\pi ak\right]$
5. $\left[I_z = \frac{3}{10}\pi k\right]$
6. $\left[I_y = \frac{4}{3}\pi\right]$
7. $\left[I_x = \frac{4}{9}\pi r^6 k\right]$
8. $\left[I_z = \frac{13}{30}\pi\right]$
9. $\left[I_z = \frac{78}{5}\pi\right]$
10. $\left[I_x = I_y = \frac{624}{15}\pi,\ I_z = \frac{384}{15}\pi\right]$

Kapitola 3

Křivkový integrál

3.1 Výpočet křivkového integrálu

Příklad 3.1.1: Vypočtěte křivkové integrály 1. druhu po dané křivce γ:

1. $\int_\gamma \frac{1}{x-y}\,ds$, kde γ je úsečka $AB,\ A = [0,-2],\ B = [4,0]$
2. $\int_\gamma x\,ds$, kde γ je oblouk paraboly $y = x^2,\ A = [2,4],\ B = [1,1]$
3. $\int_\gamma (x+y)\,ds$, kde γ je obvod trojúhelníku s vrcholy $A = [1,-1],\ B = [2,-1],\ C = [1,0]$
4. $\int_\gamma x^2 y\,ds$, kde γ je oblouk kružnice $\vec{r}(t) = (a\cos t,\ a\sin t),\ t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, $a > 0,\ a > 0$ konstanta
5. $\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, kde γ je kružnice $x^2+y^2-ax = 0,\ a > 0$
6. $\int_\gamma x^2\,ds$, kde γ je oblouk AB křivky $y = lnx,\ A = [2,\ln 2],\ B = [1,0]$
7. $\int_\gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds$, kde γ je oblouk šroubovice $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = at;$ $t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ a > 0$
8. $\int_\gamma xy\,ds$, kde γ je obvod obdélníku určený křivkami $x = 0,\ x = 4,\ y = 0,\ y = 2$
9. $\int_\gamma (x^{4/3}+y^{4/3})\,ds$, kde γ je asteroida $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3},\ a > 0$
10. $\int_\gamma \sqrt{2y}\,ds$, kde γ je část cykloidy $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ a > 0$
11. $\int_\gamma (x^2+y^2)\,ds$, kde γ je křivka $x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ a > 0$
12. $\int_\gamma z\,ds$, kde γ je křivka $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ t \in \langle 0, \sqrt{2}\rangle$.

13. $\int_\gamma \frac{z^2}{x^2+y^2}\,ds$, kde γ je oblouk šroubovice $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = at$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ a > 0$
14. $\int_\gamma \sqrt{16x^2+y^2}\,ds$, kde γ je elipsa $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$
15. $\int_\gamma (2z - \sqrt{x^2+y^2})\,ds$, kde γ je první závit šroubovice $x = t\cos t,\ y = t\sin t$, $z = t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$
16. $\int_\gamma (x-y)\,ds$, kde γ je kružnice $x^2+y^2-ax = 0,\ a > 0$
17. $\int_\gamma xy\,ds$, kde γ je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pro $x \ge 0,\ y \ge 0,\ a,b > 0$
18. $\int_\gamma 2(z-y^2)xy\,ds$, kde γ je proniková křivka ploch $x^2+y^2 = 1,\ z = x^2$ pro $y \ge 0,\ y \ge -x$
19. $\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, kde γ je kružnice $x^2+y^2-4x = 0$
20. $\int_\gamma |x(y-1)|\,ds$, kde γ je proniková křivka ploch $x^2+y^2-2y = 0,\ z = x^2+y^2$ pro $y \ge 1$
21. $\int_\gamma y\,ds$, kde γ je proniková křivka ploch $x^2+y^2 = z^2,\ x^2+y^2 = ax,\ a > 0$ v 1. oktantě

Výsledky:

1. $\left[\sqrt{5}\ln 2\right]$
2. $\left[\frac{1}{12}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)\right]$
3. $\left[1+\sqrt{2}\right]$
4. $\left[\frac{a^4}{3}\right]$
5. $[2a^2]$
6. $\left[\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right)\right]$
7. $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3(4\pi^2+3)\right]$
8. $[24]$
9. $\left[4a^{\frac{7}{3}}\right]$
10. $\left[4\pi\sqrt{a^3}\right]$
11. $[2\pi^2 a^3(1+2\pi^2)]$
12. $\left[\frac{8-2\sqrt{2}}{3}\right]$
13. $\left[\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi^3 a\right]$
14. $[10\pi]$
15. $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}(\sqrt{(2\pi^2+1)^3} - 1)\right]$
16. $\left[\frac{\pi a^2}{2}\right]$
17. $\left[\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}\right]$
18. $\left[\frac{1}{6}(\sqrt{8}-1)\right]$
19. $[32]$
20. $\left[\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)\right]$

21. $\left[\frac{a^3}{3}(2\sqrt{2}-1)\right]$

Příklad 3.1.2: Vypočtěte křivkové integrály 2. druhu po dané křivce γ (uvažujme pravotočivý souřadnicový systém):

1. $\int_\gamma y\,dx + x\,dy$, kde γ je orientovan a čtvrtkružnice $\vec{r}(t) = (a\cos t,\ a\sin t)$, $0 \le t \le \pi/2$ a $A = [a, 0]$ je počáteční bod, $a > 0$
2. $\int_\gamma x\,dx + y\,dy + (x+y-1)\,dz$, kde γ je orientovaná úsečka AB, $A[1,1,1]$, $B = [2,3,4]$
3. $\int_\gamma (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, kde γ je orientovaná křivka $y = 1 - |1-x|$ pro $0 \le x \le 2$, počáteční bod $A = [2,0]$
4. $\int_\gamma yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, kde γ je oblouk AB šroubovice $\vec{r}(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt/2\pi)$ (orientovaný) od bodu $A = [a,0,0]$ do $B = [a,0,b]$, $a, b > 0$ konstanty
5. $\int_\gamma (2a-y)\,dx + x\,dy$, kde γ je oblouk cykloidy orientovaný souhlasně s daným parametrickým vyjádřením pro $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $a > 0$
6. $\int_\gamma y^2\,dx - x^2\,dy$ po čtvrtkružnici (orientované) od bodu $A = [1,0]$ do bodu $B = [0,1]$
7. $\int_\gamma \frac{1}{|x|+|y|}\,dx + \frac{1}{|x|+|y|}\,dy$, kde γ je orientovaný obvod čtverce $ABCD$, $A = [1,0]$, $B = [0,1]$, $C = [-1,0]$, $D = [0,-1]$
8. $\int_\gamma (x^2-2xy)\,dx + (y^2-2xy)\,dy$, kde γ je orientovaný oblouk AB paraboly $y = x^2$ od bodu $A = [-1,1]$ do bodu $B = [1,1]$
9. $\int_\gamma (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, kde γ je orientovaný oblouk ABC elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $A = [0,b]$, $B = [x_B > 0, y_B > 0]$, $C = [a,0]$, $a, b > 0$
10. $\int_\gamma 2(x^2+y^2)\,dx + (2y-8)\,dy$, kde γ je orientovaná část kružnice $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t)$, $0 < t < \pi$, $A = [a,0]$ je počáteční bod, $a > 0$
11. $\int_\gamma (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, kde γ je obvod trojúhelníku s vrcholy $A = [0,0]$, $B = [1,0]$, $C = [0,1]$ orientovaný kladně
12. $\int_\gamma xy\,dx + y^2\,dy$, kde γ je oblouk AB křivky $y = \arctan x$ od bodu $A = [1,?]$ do bodu $B = [0,?]$

13. $\int_\gamma y\,dx + x\,dy$, kde γ je oblouk ABC křivky $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ od bodu $A = [0, y_A < 0]$ do bodu $C = [1, y_C > 0]$, je-li $B = [\sqrt{2}, 0]$
14. $\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$, kde γ je oblouk ABC na pronikové křivce ploch $z = xy$, $x^2+y^2 = 1$ od bodu $A = [1,?,?]$ do bodu $C = [-1,?,?]$, je-li $B = [?,1,?]$
15. $\int_\gamma x\,dx - 12y\,dy + 18\,dz$, kde γ je oblouk AB na pronikové křivce ploch $x+y-1 = 0$, $9x^2+4y^2-36z = 0$ od bodu $A = [1,?,?]$ do bodu $B = [?,1,?]$
16. $\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$, kde γ je orientovaná úsečka AB, $A = [1,1,1]$, $B = [4,4,4]$
17. $\int_\gamma x\,dx + y\,dy + yz\,dz$, kde γ je proniková křivka ploch $x^2+4y^2 = z$, $(x-2)^2 + 4y^2 = 4$ orientovaná souhlasně s obloukem $ABC \subset \gamma$, kde $A = [0,0,0,]$, $B = [x_B > 0, y_B > 0, z_B > 0]$, $C = [x_C > 0, 0, t_C > 0]$
18. $\int_\gamma y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, kde γ je oblouk ABC na pronikové křivce ploch $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2+y^2 = ax$, $z \ge 0$, $a > 0$ od bodu $A = [a,?,?]$ do bodu $C = [0,?,?]$, je-li $B = [x_B > 0, y_B > 0, z_B > 0]$

Výsledky:

1. $[0]$
2. $[13]$
3. $\left[-\frac{4}{3}\right]$
4. $[0]$
5. $[-2\pi a^2]$
6. $\left[-\frac{4}{3}\right]$
7. $[0]$
8. $\left[-\frac{14}{15}\right]$
9. $\left[\frac{a^2+b^2}{2}\right]$
10. $[-4a^3]$
11. $[0]$
12. $\left[-\frac{1}{192}(\pi^3+48\pi-96)\right]$
13. $[\sqrt{2}]$
14. $\left[\frac{4-3\pi}{6}\right]$
15. $[-9]$
16. $[3\sqrt{3}]$
17. $[64\pi]$
18. $\left[-\frac{\pi a^3}{4}\right]$

Příklad 3.1.3: Ověřte, že daný integrál nezávisí na integrační cestě v $\mathbf{E_2}[\mathbf{E_3}]$ eventuálně v $\Omega \subset \mathbf{E_2}$ $[\Omega \subset \mathbf{E_3}]$ a vypočtěte jeho hodnotu od bodu A do bodu B:

1. $\int_\gamma \frac{1-y^2}{(1+x)^2}\,dx + \frac{2y}{1+x}\,dy$, $A = [0,0]$, $B = [1,1]$
2. $\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$, $A = [-2,-6]$, $B = [1,0]$
3. $\int_\gamma (2y - 6xy^3)\,dx + (2x - 9x^2y^2)\,dy$, $A = [0,0]$, $B = [2,2]$
4. $\int_\gamma \frac{2-y^2}{2(1+x)^2}\,dx + \frac{y}{1+x}\,dy$ v oblasti $\Omega_1 = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ x < -1\}$, eventuálně $\Omega_2 = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ x > -1\}$, $A = [0,0]$, $B = [1,1]$
5. $\int_\gamma \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right)dy$ v oblasti $\Omega = \mathbf{E_2} - \{[0,0]\}$, $A = [3,4]$, $B = [5,12]$
6. $\int_\gamma \frac{x}{(x+y)^2}\,dx + \frac{2x+y}{(x+y)^2}\,dy$ v oblasti $\Omega_1 = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ y > -x\}$, eventuálně $\Omega_2 = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ y < -x\}$, $A = [1,1]$, $B = [3,2]$
7. $\int_\gamma (2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2x}{y^2})\,dx + (2x^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3})\,dy$ v oblasti Ω_i $(i = 1,2,3,4) \subset \mathbf{E_2}$ neobsahující přímky $x = 0$ a $y = 0$, $A = [2,1]$, $B = [1,2]$
8. $\int_\gamma x\,dx + y\,dy + (x+y-1)\,dz$, $A = [2,3,4]$, $B = [1,1,1]$
9. $\int_\gamma xz^2\,dx + y^3\,dy + x^2z\,dz$, $A = [-1,1,2]$, $B = [-4,2,-1]$
10. $\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy + 2z^3\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^4}}$ v oblasti $\Omega = \mathbf{E_3} - \{[0,0,0]\}$, $A = [0,0,1]$, $B = [0,2,0]$

Výsledky:

1. $\left[1, V(x,y) = \frac{y^2-1}{x+1} + c\right]$
2. $\left[-\frac{1}{2}\ln 40\right]$
3. $[-88]$
4. $\left[\frac{3}{4},\ V(x,y) = \frac{y^2-2}{2(x+1)} + c\right]$
5. $[56]$
6. $\left[\ln\frac{5}{2} - \frac{1}{10}\right]$
7. $\left[-\frac{15}{4}\right]$
8. $[-13]$
9. $\left[\frac{39}{4},\ V(x,y,z) = \frac{x^2z^2}{2} + \frac{y^4}{4} + c\right]$
10. $\left[1,\ V(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^4} + c\right]$

Příklad 3.1.4: Ověřte, že jsou splněny podmínky pro užití Greenovy věty a užijte ji k výpočtu následujících integrálů:

1. $\int_\gamma (x+y)^2\,dx - (x+y)^2\,dy$, kde γ je trojúhelník s vrcholy $O = [0,0]$, $A = [1,0]$, $B = [0,1]$ orientovaný kladně
2. $\int_\gamma (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$, kde γ je uzavřená záporně orientovaná křivka tvořená sinusoidou $y = \sin x$ a úsečkou na ose x pro $0 \le x \le \pi$
3. $\int_\gamma (x^2-y^2)\,dx + (x^2+y^2)\,dy$, kde γ je uzavřená záporně orientovaná křivka tvořená půlkružnicí $y = \sqrt{r^2-x^2}$ a úsečkou na ose x
4. $\int_\gamma (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$, kde γ je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ orientovaná kladně
5. $\int_\gamma \frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\,dx + \frac{2}{y}\arctan\frac{x}{y}\,dy$, kde γ je hranice oblasti $\Omega = \{[x,y] \in \mathbf{E_2};\ 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \le y \le x\sqrt{3}\}$ orientovaná kladně
6. $6\int_\gamma (3x^2\cos y - y^3)\,dx + (x^3 - 2x^3\sin y)\,dy$, kde γ je kladně orientovaná kružnice $x^2+y^2 = 1$
7. $\int_\gamma (xy + x^2)\,dx + x^2y\,dy$, kde γ je kladně orientovaná hranice oblasti $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{E_2}; 0 \le x \le y \le 1\}$
8. $\int_\gamma \frac{1}{y}\,dx - \frac{1}{x}\,dy$, kde γ je trojúhelník s vrcholy $A = [1,1]$, $B = [2,1]$, $C = [2,2]$ orientovaný kladně
9. $\int_\gamma (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy$, kde γ je kladně orientovaná kružnice $x^2+y^2 = ax$, $a > 0$
10. Vypočtěte rozdíl integrálů $I_1 - I_2$, je-li $I_1 = \int_{\gamma_1} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$, kde γ_1 je orientovaná úsečka AB, $I_2 = \int_{\gamma_2} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$, kde γ_2 je orientovaný oblouk AB paraboly $y = x^2$, $A = [0,0]$, $B = [1,1]$

Výsledky:

1. $\left[-\frac{4}{3}\right]$
2. $[4\pi]$
3. $\left[-\frac{4}{3}r^3\right]$
4. $[-2\pi ab]$
5. $\left[\frac{\ln 2}{12}\pi\right]$
6. $\left[\frac{3\pi}{2}\right]$
7. $\left[\frac{1}{12}\right]$
8. $\left[\frac{1}{2}\right]$
9. $\left[-\frac{\pi a^3}{8}\right]$
10. $\left[\frac{1}{3}\right]$

3.2 Geometrické a fyzikální aplikace křivkového integrálu

Hmotný drát ve tvaru rovinné křivky γ s lineární hustotou $\sigma(x,y)\ kg\cdot m^{-1}$

$m=\int\limits_\gamma \sigma(x,y)\,ds\ [kg]$ – hmotnost drátu γ

$S_x=\int\limits_\gamma y\sigma(x,y)\,ds\ [kg\cdot m]$ – statický moment drátu γ vzhledem k ose x

$S_y=\int\limits_\gamma x\sigma(x,y)\,ds\ [kg\cdot m]$ – statický moment drátu γ vzhledem k ose y

$T=\left[\frac{S_y}{m},\frac{S_x}{m}\right]$ – těžiště drátu γ

$I_x=\int\limits_\gamma y^2\sigma(x,y)\,ds\ [kg\cdot m^2]$ – moment setrvačnosti drátu γ vzhledem k ose x

$I_y=\int\limits_\gamma x^2\sigma(x,y)\,ds\ [kg\cdot m^2]$ – moment setrvačnosti drátu γ vzhledem k ose y

Hmotný drát ve tvaru prostorové křivky γ s lineární hustotou $\sigma(x,y,z)\ [kg\cdot m^{-1}]$

$m=\int\limits_\gamma \sigma(x,y,z)\,ds\ [kg]$ – hmotnost drátu γ

$S_{xy}=\int\limits_\gamma z\sigma(x,y,z)\,ds\ ;[kg\cdot m]$ – statický moment drátu γ vzhledem k rovině (x,y)

$S_{xz}=\int\limits_\gamma y\sigma(x,y,z)\,ds\ ;[kg\cdot m]$ – statický moment drátu γ vzhledem k rovině (x,z)

$S_{yz}=\int\limits_\gamma x\sigma(x,y,z)\,ds\ ;[kg\cdot m]$ – statický moment drátu γ vzhledem k rovině (y,z)

$T=\left[\frac{S_{yz}}{m},\frac{S_{xz}}{m},\frac{S_{xy}}{m}\right]$ – těžiště drátu γ

$I_x=\int\limits_\gamma (y^2+z^2)\sigma(x,y,z)\,ds\ ;[kg\cdot m^2]$ – moment setrvačnosti drátu γ vzhledem k ose x

$I_y=\int\limits_\gamma (x^2+z^2)\sigma(x,y,z)\,ds\ ;[kg\cdot m^2]$ – moment setrvačnosti drátu γ vzhledem k ose y

$I_z=\int\limits_\gamma (x^2+y^2)\sigma(x,y,z)\,ds\ ;[kg\cdot m^2]$ – moment setrvačnosti drátu γ vzhledem k ose z

$l=\int\limits_\gamma ds\ [m]$ – délka křivky křivky γ

$O=\int\limits_\gamma |f(x,y)|\,ds\ [m^2]$ – obsah části válcové plochy s řídící křivkou γ v rovině $z=0$, tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezené plochami $z=0,\ z=f(x,y)$

$P=\frac{1}{2}\int\limits_\gamma x\,dy-y\,dx\ [m^2]$ – obsah rovinného obrazce ohraničeného uzavřenou křivkou γ (plyne z Greenovy věty - křivka musí splňovat její předpoklady)

$A=\int\limits_\gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\ [J]$ – práce silového pole $\vec{F}(x,y)=(P(x,,y),Q(x,y))$ při pohybu hmotného bodu po orientované rovinné křivce γ

$A=\int\limits_\gamma P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz\ [J]$ – práce silového pole $\vec{F}(x,y,z)=(P(x,,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ při pohybu hmotného bodu po orientované prostorové křivce γ

Poznámka: Doplňte příslušné jednotky v zadání a výsledcích.

Příklad 3.2.1: Vypočtěte délku křivky γ, je-li γ:

1. $\vec{r}=a\cos t\vec{i}+a\sin t\vec{j}+vt\vec{k}$ pro $t\in[0,\frac{\pi}{2}],\ a,\ v>0$ konstanty
2. část křivky na pronikové křivce ploch $y=x^2,\ z=\frac{4}{3}x^{3/2}$ pro $0\le x\le 1$
3. část křivky na pronikové křivce ploch $z=-e^x,\ x+y=1$ pro $x\ge 0,\ y\ge 0$

Výsledky:

1. $\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{a^2+v^2}\right]$
2. $[2]$
3. $\left[\sqrt{e^2+2}-\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{2}\ln\left((\sqrt{e^2+2}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right)\right]$

Příklad 3.2.2: Vypočtěte obsah části válcové plochy Φ s řídící křivkou γ v rovině $z=0$, tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a ohraničené plochami:

1. $\Phi:\ x^2+y^2=a^2$ ohraničené rovinami $z=0,\ z=mx,\ a,\ m>0$ konstanty
2. $\Phi:\ x^2+y^2=r^2$ vymezené plochami $z=r+\frac{x^2}{r},\ z=0,\ r>0$ konstanta
3. $\Phi:\ y-\operatorname{arctg}x=0$ pro $0\le x\le 1$ vymezené plochami $z=0,\ z=\sqrt{x^4+2x^2+2}$
4. $\Phi:\ y=\ln x$ pro $|y|\le 2$ vymezené plochami $z=0,\ z=x^2$
5. $\Phi:\ x^2+y^2=1$ vymezené plochami $z=x^2,\ z=2+y^2$
6. $\Phi:\ e^x-y=0$ pro $x\le 1$ vymezené plochami $z=0,\ z=e^{2x}$
7. $\Phi:\ 4x^2+8y^2=1$ pro $x\ge 0,\ y\ge 0$ vymezené plochami $z=0,\ z=xy$
8. $\Phi:\ 4x^2+9y^2=36$ pro $y\ge 0$ vymezené plochami $z=0,\ z=-xy$
9. $\Phi:\ y-\ln x=0$ pro $1\le x\le e^2$ vymezené plochami $z=0,\ z=x^2$
10. $\Phi:\ \vec{r}(t)=(\cos^3 t,\sin t^3)$ pro $t\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$ (γ je část asteroidy) vymezené plochami $z=0,\ z=2-x-y$
11. $\Phi=\{[x,y]\in\mathbf{E_2};\ x=\cos t+t\sin t,\ y=\sin t-t\cos t,\ t\in\langle 0,2\pi\rangle\}$ (γ je kruhová evolventa) vymezené plochami $z=-\sqrt{x^2+y^2},\ z=x^2+y^2$
12. $\Phi:\ y-\sqrt{x^3}=0$ pro $0\le x\le\frac{4}{3}$ vymezené plochami $z=x^2+1,\ z=-x$

Výsledky:

1. $[2a^2m]$
2. $[3\pi r^2]$
3. $\left[\frac{16+3\pi}{12}\right]$
4. $\left[\frac{e^6-1}{3e^6}\sqrt{(e^4+1)^3}\right]$
5. $[4\pi]$
6. $\left[\frac{1}{3}(\sqrt{(e^2+1)^3}-1)\right]$
7. $\left[\frac{1}{48}(\sqrt{8}-1)\right]$
8. $\left[\frac{76}{5}\right]$
9. $\left[\frac{\sqrt{(e^4+1)^3}-2\sqrt{2}}{3}\right]$
10. $\left[\frac{9}{5}\right]$
11. $\left[2\pi^2+4\pi^4+\frac{\sqrt{(1+4\pi^2)^3}}{3}\right]$
12. $\left[(\frac{2}{9})^3(\frac{2^4(2^7-1)}{7}+\frac{2^2(2^5-1)}{5}+\frac{61(2^3-1)}{3})=5.02\right]$

Příklad 3.2.3: Vypočtěte obsah rovinného obrazce A, je-li:

1. $A=\{[x,y]\in\mathbf{E_2};\ x^2\le y\le x\}$
2. $A=\{[x,y]\in\mathbf{E_2};\ x\ge 0,\ e^x\le y\le e^\pi\}$
3. $A=\{[x,y]\in\mathbf{E_2};\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\ y\le\frac{b}{a}x,\ y\ge 0;\ a,b>0\}$
4. $A=\{[x,y]\in\mathbf{E_2};\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\le 1,\ y\le\frac{3}{2}x,\ y\ge\frac{1}{2}x\}$
5. $A=\{[x,y]\in\mathbf{E_2};\ y\le\arcsin x,\ y\ge\frac{x^2}{2},\ y\le\frac{\pi}{2}\}$
6. $A=\{[x,y]\in\mathbf{E_2};\ y\ge\ln x,\ -x+1\le y\le 1\}$
7. A je vymezen asteroidou $\gamma:\vec{r}(t)=a(\cos^3 t\vec{i}+\sin^3 t\vec{j}),\ t\in\langle 0,2\pi\rangle,\ a>0$
8. A je vymezen kardioidou $\gamma:\vec{r}(t)=(2a\cos t-a\cos 2t)\vec{i}+(2a\sin t-a\sin 2t)\vec{j}),$ $t\in\langle 0,2\pi\rangle,\ a>0$

Výsledky:

1. $\left[\frac{1}{6}\right]$
2. $[(\pi-1)e^\pi+1]$
3. $\left[\frac{\pi ab}{8}\right]$
4. $\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right]$
5. $\left[\frac{\pi\sqrt{\pi}-3}{3}\right]$
6. $\left[\frac{2e-3}{2}\right]$
7. $\left[\frac{3}{8}a^2\pi\right]$
8. $[6\pi a^2]$

Příklad 3.2.4: Vypočtěte hmotnost křivky γ, je-li hustota křivky $\sigma(\vec{r})$:

1. $\gamma:y=\sqrt{x^3}$ pro $0\le x\le\frac{4}{9},\ \sigma(x,y)=x$
2. asteroida $\gamma=\{[x,y]\in\mathbf{E_2};\ x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ t\in\langle 0,\ \pi\rangle,\ a>0\}$, $\sigma(\vec{r}(t))=\sin^2 t|\cos t|$
3. $\gamma:\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ pro $y\ge 0,\ \sigma(x,y)=|x|y$
4. šroubovice $\gamma=\{[x,y,z]\in\mathbf{E_3};\ x=at\cos t,\ y=at\sin t,\ z=vt,\ t\in\langle 0,2\pi\rangle,$ $a,v>0\},\ \sigma(x,y,z)=z$
5. $\gamma:\vec{r}=e^t(\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+\vec{k})$ pro $t\le 0,\ \sigma(x,y,z)=z$
6. γ je proniková křivka ploch $x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=0,\ \sigma(x,y,z)=kx^2,\ k>0$

7. $\gamma : \vec{r} = a(t\vec{i} + \frac{t^2}{2}\vec{j} + \frac{t^3}{3}\vec{k}),\ t \in \langle 0, 1\rangle,\ a > 0,\ \sigma(x, y, z) = \sqrt{\frac{2y}{a}}$
8. γ je část pronikové křivky ploch $x^2 + y^2 - 2y = 0,\ z = x^2 + y^2$ pro $y \geq 1,\ \sigma(x, y, z) = |x(y - 1)|$
9. γ je část pronikové křivky ploch $x^2 + y^2 = z^2,\ x^2 + y^2 = ax$ v 1. oktantu, $a > 0,\ \sigma(x, y, z) = y$

Výsledky:

1. $\left[\frac{64}{1215}(\sqrt{2} + 1)\right]$
2. $\left[\frac{12a}{15}\right]$
3. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}(27 - 5\sqrt{5})\right]$
4. $\left[\frac{v}{3a^2}(\sqrt{(a^2(4\pi^2 + 1) + v^2)^3} - \sqrt{(a^2 + v^2)^3})\right]$
5. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
6. $\left[\frac{2\pi k}{3}\right]$
7. $\left[\frac{a}{16}(6\sqrt{3} - 2 + 3\ln\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}\right]$
8. $\left[\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\right]$
9. $\left[\frac{a^2}{3}(2\sqrt{2} - 1)\right]$

Příklad 3.2.5: Hustota křivky γ je $\sigma(\vec{r})$. Vypočtěte statický moment:

1. vzhledem k ose y křivky $\gamma : y = x^2$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$, je-li $\sigma(x, y) = y$
2. vzhledem k ose x křivky $\gamma : x^2 + y^2 = a^2,\ a > 0$ pro $x > 0,\ y > 0$, je-li $\sigma(x, y) = xy$
3. vzhledem k přímce $x = 0$ křivky $\gamma : \vec{r} = \cos^3 t\vec{i} + \sin^3 t\vec{j}$ pro $t \in \langle\frac{\pi}{2}, \pi\rangle$, je-li $\sigma(\vec{r}(t)) = \sin^2 t$
4. vzhledem k rovině $y = 0$ křivky $\gamma : \vec{r} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + vt\vec{k}$ pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, $a, v > 0$, je-li $\sigma(x, y, z) = \sin^3 \arccos\frac{x}{a}$
5. vzhledem k rovině $x = 0$ křivky $\gamma : \vec{r} = t\vec{i} + t\vec{j} + \sqrt{t}\vec{k}$ pro $t \in \langle 0, 2\rangle$, je-li hustota $\sigma(x, y, z) = |z|$
6. vzhledem k rovině $y = 0$ křivky γ, kde γ je část křivky na pronikové křivce ploch $x^2 + y^2 = 1$, pro $y \geq 0,\ z = -x$, je-li hustota $\sigma(x, y, z) = |x|$
7. vzhledem k rovině $z = 0$ křivky $\gamma : \vec{r} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + e^t\vec{k}$ pro $t \leq 1$, je-li hustota $\sigma(x, y, z) = z$

Výsledky:

1. $\left[\frac{25\sqrt{5}+1}{120}\right]$
2. $\left[\frac{a^4}{3}\right]$
3. $\left[-\frac{6}{35}\right]$
4. $\left[\frac{3\pi a}{16}\sqrt{a^2 + v^2}\right]$
5. $\left[\frac{391\sqrt{17}+1}{480}\right]$
6. $\left[\frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1)\right]$
7. $\left[\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right]$

Příklad 3.2.6: Vypočtěte souřadnice (souřadnici) těžiště $T = [x_T, y_T]$, eventuálně $T = [x_T, y_T, z_T]$ křivky γ, je-li $\sigma(\vec{r})$ hustota křivky γ:

1. x_T křivky $\gamma : x^2 + y^2 = a^2$ pro $x \leq 0,\ y \geq 0,\ a > 0,\ \sigma(x, y, z) = |x|y^2$
2. y_T křivky $\gamma : \vec{r}(t) = a(t - \sin t)\vec{i} + a(1 - \cos t)\vec{j},\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ a > 0,\ \sigma(\vec{r}(t)) = |\sin t|$
3. T homogenního oblouku cykloidy $\gamma : \vec{r}(t) = a(t - \sin t)\vec{i} + a(1 - \cos t)\vec{j}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ a > 0,\ \sigma(\vec{r}(t)) = k,\ k > 0$
4. T křivky $\gamma : \vec{r}(t) = a(\cos^3 t\vec{i} + \sin^3 t\vec{j}),\ t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle,\ a > 0,\ \sigma(\vec{r}(t)) = k,\ k > 0$
5. y_T křivky $\gamma : \vec{r}(t) = a(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k})$ pro $t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ a > 0,\ \sigma(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2+y^2}$
6. x_T křivky $\gamma : \vec{r}(t) = e^t(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \vec{k}),\ t \in (-\infty, 0\rangle,\ \sigma(x, y, z) = z$
7. T křivky $\gamma : \vec{r}(t) = (a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + v\vec{k})$ pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle,\ a, v > 0,\ \sigma(x, y, z) = \sin^3 \arccos\frac{x}{a}$
8. homogenního oblouku $\gamma : \vec{r}(t) = e^t(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \vec{k}),\ t \in (-\infty, 0\rangle,\ \sigma(x, y, z) = k,\ k > 0$
9. poloviny homogenního závitu šroubovice $\gamma : \vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ pro $t \in \langle 0, \pi\rangle,\ \sigma(x, y, z) = k,\ a, b, k > 0$ jsou konstanty

Výsledky:

1. $\left[-\frac{3a\pi}{16}\right]$
2. $\left[\frac{6a}{5}\right]$
3. $\left[T = [\pi a, \frac{4}{3}a]\right]$
4. $\left[T = [\frac{64a}{75\pi}, \frac{4(15\pi-16)a\pi}{75\pi}]\right]$
5. $\left[-\frac{3a}{2\pi}\right]$

6. $\left[\frac{3}{5}\right]$
7. $\left[T = [\frac{3a}{8}, \frac{9\pi a}{32}, \frac{7v}{6}]\right]$
8. $\left[T = [\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{2}]\right]$
9. $\left[T = [0, \frac{2a}{\pi}, \frac{b\pi}{2}]\right]$

Příklad 3.2.7: V každém bodě silového pole v $\mathbf{E_2}$ působí síla $F(\vec{r})$. Vypočítejte práci A tohoto pole při pohybu hmotného bodu po orientované křivce γ:

1. γ je orientovaná úsečka MN ležící na přímce $y = x,\ M = [0, ?],\ N = [?, 1],\ F(\vec{r}) = (xy, x + y)$
2. γ je oblouk MN na parabole $y = x^2$, (orientovaný) od bodu $M = [0, 0]$ do bodu $N = [1, 1],\ F(\vec{r}) = (xy, x + y)$
3. γ je kladně orientovaný obvod trojúhelníku $MNP,\ M = [a, 0],\ N = [a, a],\ P = [0, a],\ a > 0,\ F(\vec{r}) = (y^2, (x + y)^2)$
4. $\gamma :\ x^2 + y^2 = a^2,\ a > 0$ orientovaná záporně, $F(\vec{r}) = (-x^2y, xy^2)$
5. γ je oblouk AB křivky $\gamma : y = \operatorname{arctg} x$ od bodu $A = [1, ?]$ do bodu $B = [0, ?]$; $F(\vec{r}) = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}$
6. γ je kladně orientovaná křivka ohraničující rovinnou oblast $\Omega = \{[x, y] \in \mathbf{E_2};\ x \leq e^2,\ 0 \leq y \leq \ln x\},\ F(\vec{r}) = xy^2\vec{i} + 2x^2y\vec{j}$

   [Poznámka: K výpočtu práce po uzavřené křivce v rovině lze užít Greenovu větu.]
7. γ je oblouk MN křivky $y = \ln x$ od bodu $M = [?, 1]$ do bodu $N = [1, ?]$; $F(\vec{r}) = y^2\vec{i} + x^3\vec{j}$
8. γ je kladně orientovaná uzavřená křivka tvořená oblouky na křivkách $y = x^2,\ y = \sqrt{x},\ F(\vec{r}) = xy\vec{i} - y\vec{j}$
9. γ je záporně orientovaná křivka ohraničující rovinnou oblast $\Omega = \{[x, y] \in \mathbf{E_2};\ x \geq 0,\ e^x \leq y \leq e^\pi\}, F(\vec{r}) = xy\vec{i} + y\vec{j}$
10. γ je kladně orientovaná uzavřená křivka tvořená z částí ležících na křivkách $y = \operatorname{arctg} x,\ y = \frac{\pi}{4},\ x = 0;\ F(\vec{r}) = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}$
11. γ je záporně orientovaná křivka ohraničující rovinný obrazec $\Omega = \{[x, y] \in \mathbf{E_2};\ x^2 + y^2 \leq ax,\ y \geq 0\},\ F(\vec{r}) = (e^x \sin y - 16y)\vec{i} + (e^x \cos y - 16)\vec{j}$

12. γ je oblouk MN křivky $y = \ln x$ od bodu $M = [?, 1]$ do bodu $N = [e^2, ?],\ F(\vec{r}) = xy\vec{i} - \ln y\vec{j}$
13. γ je kladně orientovaná křivka ohraničující rovinnou oblast $\Omega = \{[x, y] \in \mathbf{E_2};\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\},\ a, b > 0;\ F(\vec{r}) = (x + y)\vec{i} + (\frac{x^3y}{3} + x + y)\vec{j}$
14. γ je část kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ ležící v 1. kvadrantu, $r > 0;\ F(\vec{r})$ má konstantní velikost k a směr kladné osy x
15. γ je menší oblouk křivky $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0$ od bodu $M = [-a, 0]$ do bodu $N = [0, b];\ F(\vec{r})$ v každém bodě roviny směřuje do počátku souřadnicového systému a má velikost nepřímo úměrnou vzdálenosti působiště síly od počátku souřadnicového systému

    [Návod: $F(\vec{r}) = |F(\vec{r})|\vec{F}^0(\vec{r})$, kde $\vec{F}^0(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_1(\vec{r})}{|\vec{F}_1(\vec{r})|}$ je jednotkový, souhlasně kolineární vektor s $F(\vec{r})$, přitom $\vec{F}_1(\vec{r})$ je vhodný souhlasně kolineární vektor s $F(\vec{r})$, zde $\vec{F}_1(\vec{r}) = \overrightarrow{XO},\ X = [x, y],\ O = [0, 0],\ k$ je koeficient nepřímé úměrnosti.]
16. γ je oblouk MN paraboly $y = x^2 + 1$ od bodu $M = [2, 5]$ do bodu $N = [-1, 2];\ F(\vec{r})$ v každém bodě roviny je rovnoběžný s osou y a směřuje k bodům osy x, její velikost je rovna převrácené hodnotě čtverce vzdálenosti působiště síly od osy x

Výsledky:

1. $\left[\frac{4}{3}\right]$
2. $\left[\frac{17}{12}\right]$
3. $\left[\frac{2}{3}a^3\right]$
4. $\left[-\frac{\pi a^4}{2}\right]$
5. $\left[\frac{16-8\pi-\pi^2}{32} - \ln\sqrt{2}\right]$
6. $\left[\frac{5e^4-1}{4}\right]$
7. $\left[\frac{7-3e-e^3}{3}\right]$
8. $\left[-\frac{3}{20}\right]$
9. $\left[\frac{(\pi^2-2\pi+2)e^\pi-2}{2}\right]$
10. $\left[\frac{\pi-4+\ln 16}{8}\right]$
11. $[-2\pi a^2]$
12. $\left[\frac{3e^4-e^2-6}{4}\right]$
13. $\left[\frac{a^3b^2}{15}\right]$
14. $[-kr]$
15. $\left[A = -\frac{k(b^2-a^2)}{2(b^2+a^2)}\right]$
16. $\left[\frac{3}{10}\right]$

Příklad 3.2.8: V každém bodě silového pole v $\mathbf{E_3}$ působí síla $F(\vec{r})$. Vypočítejte práci tohoto pole při pohybu hmotného bodu po orientované křivce γ:

1. $\gamma: \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, ct)$ orientované souhlasně s daným parametrickým vyjádřením pro $t \in \langle 0, \pi\rangle,\ c > 0$; $F(\vec{r}) = (y, z, yz)$
2. $\gamma: \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ orientované souhlasně s daným parametrickým vyjádřením pro $t \in \langle 0, \pi\rangle$; $F(\vec{r}) = (y, z, yz)$
3. γ je lomená křivka $OMNPO$ orientovaná souhlasně s orientací její části OMN, kde $O = [0,0,0],\ M = [0,1,0],\ N = [1,1,0],\ P = [1,1,1],\ F(\vec{r}) = \vec{r}$
4. γ je oblouk pronikové křivky ploch $y = \sqrt{1-x^2},\ z = y^2$ (orientovaný) od bodu $M = [?,1,?]$, do bodu $N = [1,?,?]$; $F(\vec{r}) = y\vec{i} - x\vec{j} + x^2y^2\vec{k}$
5. γ je oblouk MNP pronikové křivky ploch $x^2+y^2 = 1,\ z = -x^3$ od bodu $M = [0, y_M < 0, z_M]$ do bodu $P = [x_P < 0, 0, z_P]$, kde $N = [x_N < 0, y_N > 0, z_N > 0]$; $F(\vec{r}) = xy\vec{i} + y^2\vec{j} + yz\vec{k}$
6. γ je oblouk MNP pronikové křivky ploch $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,\ z = -x$ od bodu $M = [0, y_M > 0, z_M]$ do bodu $P = [x_P < 0, 0, z_P]$, kde $N = [x_N > 0, y_N > 0, z_N]$; $F(\vec{r}) = y\vec{i} + x^2\vec{j} - xz\vec{k}$
7. γ je oblouk pronikové křivky ploch $x^2+y^2 = z^2,\ x^2+y^2 = ax,\ a > 0$ v prvním oktantě od bodu $M = [0,?,?]$ do bodu $N = [a,?,?]$; $F(\vec{r}) = \vec{r}$
8. γ je oblouk pronikové křivky ploch $y = \sqrt{3x},\ z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ od bodu $A = [?,?,0]$ do bodu $B = [0,?,?]$, $F(\vec{r}) = (xy^2, -y, z)$
9. γ je proniková křivka ploch $z = \sqrt{y-x^2},\ y = 4-x^2$ od bodu $A = [x_A > 0,?,0]$ do bodu $B = [x_B < 0,?,0]$, $F(\vec{r}) = xz\vec{i} + x^3\vec{j} + yz\vec{k}$
10. γ je oblouk MNP pronikové křivky ploch $x^2+y^2 = 1,\ z = x^2$ od bodu $M = [x_M > 0, 0, z_M]$ do bodu $P = [x_P < 0, y_P = -x_P, z_P]$, kde $N = [x_N > 0, y_N > 0, z_N > 0]$; $F(\vec{r}) = (y, -x, -yz)$
11. γ je tvořena oblouky na kulové ploše $x^2+y^2+z^2 = 1$ ležící v rovinách $x = 0,\ y = 0$ v 1. oktantu od bodu $A = [1,0,0]$ do bodu $B = [0,1,0]$; $F(\vec{r}) = (-x^2z, xy, xz^3)$
12. γ je uzavřená křivka tvořená oblouky na ploše $z = 1-x^2$ pro $x \geq 0,\ z \geq 0$, které leží postupně v rovinách $y = 0, z = 0, y = x$, γ je orientována souhlasně s orientací oblouku $MNP \subset \gamma$, kde $M = [x_M > 0, 0, z_M > 0]$, $N = [x_N > 0, y_N > 0, z_N > 0]$, $P = [1, y_P > 0, 0]$; $F(\vec{r}) = (x, z^2, e^{xy})$

13. γ je proniková křivka ploch $x^2+y^2 = a^2,\ \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1,\ a, h > 0$, γ je orientována souhlasně s orientací oblouku $MNP \subset \gamma$, kde $M = [a,0,0],\ N = [x_N > 0, y_N > 0, z_N > 0],\ P = [-a, 0, 2h]$; $F(\vec{r}) = (y-z, z-x, x-y)$
14. γ je uzavřená křivka v 1. oktantu tvořená oblouky na ploše $z = \sqrt{x^2+y^2}$, které leží postupně v rovinách $x = 0, y = 1, x = 2, y = 0$, γ je orientována souhlasně s orientací oblouku $MNP \subset \gamma$, kde $M = [0,0,?],\ N = [0,1,?],\ P = [2,1,?]$; $F(\vec{r}) = (e^x, (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}, yz^3)$
15. $\gamma: \vec{r} = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k},\ a, b > 0$ od bodu $M = [a,0,0]$ do bodu $N = [-a, 0, \pi b]$; $F(\vec{r})$ v každém bodě $\mathbf{E_3}$ směřuje do počátku souřadnicového systému a její velikost je rovna převrácené hodnotě čtverce vzdálenosti působiště síly od počátku souřadnicového systému

Výsledky:

1. $\left[\frac{\pi}{2}(2c^2-4c-1)\right]$
2. $\left[\frac{2e^{2\pi}-5e^{\pi}-5\pi-3}{10}\right]$
3. $[0]$
4. $\left[\frac{3\pi-1}{6}\right]$
5. $\left[-\frac{8}{35}\right]$
6. $\left[\frac{3}{2}\pi\right]$
7. $[a^2]$
8. $\left[\frac{5}{2}\right]$
9. $\left[\frac{16\sqrt{2}}{5}\right]$
10. $\left[\frac{7\sqrt{2}-45\pi}{60}\right]$
11. $\left[\frac{15\pi+32}{240}\right]$
12. $\left[\frac{38-15e}{15}\right]$
13. $[-2\pi a(h+a)]$
14. $[-14]$
15. $\left[\frac{a-\sqrt{a^2+b^2\pi^2}}{a\sqrt{a^2+b^2\pi^2}}\right]$

Příklad 3.2.9: Ověřte, že pr ace v silovém poli $F(\vec{r})$ nezávisí na integrační cestě v $\mathbf{E_2}\,[\mathbf{E_3}]$, eventuálně v $\Omega \subset \mathbf{E_2}\,[\Omega \subset \mathbf{E_3}]$, určete potenciál $V(\vec{r})$ tohoto silového pole a vypočtěte práci A od bodu M do bodu N.

1. $F(\vec{r}) = (x^2-y^2, 5-2xy),\ M = [1,2],\ N = [2,3]$
2. $F(\vec{r}) = (x\cos 2y + 1)\vec{i} - x^2\sin 2y\vec{j},\ M = [0, -\frac{\pi}{2}],\ N = [\frac{\pi}{2}, \pi]$
3. $F(\vec{r}) = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j},\ M = [1,1],\ N = [2,2]$
4. $F(\vec{r}) = (2x+3y)\vec{i} + (3x-4y)\vec{j},\ M = [0,0],\ N = [1,4]$

5. $F(\vec{r}) = (1-2xy-y^2, 1-2xy-x^2),\ M = [0,2],\ N = [1,0]$
6. $F(\vec{r}) = \frac{1}{(x+y)^2}(x+2y, y),\ M = [9,1],\ N = [5,5]$
7. $F(\vec{r}) = (\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}, \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}),\ M = [1,2],\ N = [2,3]$
8. $F(\vec{r}) = yx^{y-1}\vec{i} + x^y\ln x\vec{j},\ M = [2,1],\ N = [1,3]$
9. $F(\vec{r}) = (x^2+yz)\vec{i} + (y^2+xz)\vec{j} + (z^2+xy)\vec{k},\ M = [1,-2,3],\ N = [2,3,4]$
10. $F(\vec{r}) = yz\vec{i} + (2+xz)\vec{j} + (xy-1)\vec{k},\ M = [0,1,0],\ N = [-2,0,1]$
11. $F(\vec{r}) = 2xy\vec{i} + (x^2-z)\vec{j} + (1-y)\vec{k},\ M = [0,0,0],\ N = [1,1,1]$
12. $F(\vec{r}) = (x+yz)\vec{i} + (y+xz)\vec{j} + (z+xy)\vec{k},\ M = [1,2,3],\ N = [0,0,0]$
13. $F(\vec{r}) = x\vec{i} + y\vec{j} - \vec{k},\ M = [2,3,4],\ N = [1,1,1]$
14. $F(\vec{r}) = (yz^2, xz^2, 2xyz),\ M = [1,1,-1],\ N = [-3,4,1]$
15. $F(\vec{r}) = (2x + \frac{1}{x+y})\vec{i} + \frac{1}{x+y}\vec{j} + \vec{k},\ M = [1,2,3],\ N = [-2,5,-1]$

Výsledky:

1. $\left[V = \frac{x^3}{3} - y^2x + 5y + c;\ A = -\frac{20}{3}\right]$
2. $\left[V = \frac{x^2}{2}\cos 2y + x + c;\ A = \frac{\pi(\pi+4)}{8}\right]$
3. $\left[\Omega = \mathbf{E_2} - \{[0,0]\},\ V = -\mathrm{arctg}\frac{x}{y} + c;\ A = 0\right]$
4. $[V = x^2 + 3xy - 2y^2 + c;\ A = -19]$
5. $[x + y - x^2y - y^2x + c;\ A = -1]$
6. $[\Omega_i (i = 1,2)$ oblasti v $\mathbf{E_2}$ neobsahující přímku $y = -x$; $V = -\frac{x}{x+y} + \ln|x+y|;\ A = -\frac{2}{5}]$
7. $[\Omega_i (i = 1,2,\ldots,6)$ oblasti v $\mathbf{E_2}$ neobsahující přímky $y = 0, x = 0, y = x$; $V = \frac{y^2}{y-x} + \ln|\frac{y}{x}| - y + c,\ A = 4 + \ln\frac{3}{4}]$
8. $[\Omega = \{[x,y] \in \mathbf{E_2}; x > 0\};\ V = x^y + c,\ A = -1]$
9. $\left[V = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} + xyz + c;\ A = \frac{169}{3}\right]$
10. $[V = xyz + 2y - z + c;\ A = 3]$

11. $[V = x^2 - yz + z + c;\ A = 1]$
12. $\left[V = \frac{x^2+y^2+z^2}{2} + xyz + c;\ A = -13\right]$
13. $\left[V = \frac{x^2+y^2}{2} - z + c;\ A = -\frac{5}{2}\right]$
14. $[V = xyz^2 + c;\ A = -13]$
15. $[\Omega_i (i = 1,2)$ oblasti v $\mathbf{E_3}$ neobsahující rovinu $y = -x$; $V = x^2 + \ln|x+y| + z + c,\ A = -1]$

Příloha A

Tabulkové integrály

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (x \in R,\ n \in N \cup \{0\})$$
$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad (x \in (0,\infty)\,,\ \alpha \in R,\ \alpha \neq -1)$$
$$\int \frac{1}{x} = \ln|x| + c \qquad (x \in (0,\infty) \text{ nebo } x \in (-\infty,0))$$
$$\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + c \qquad (x \in R)$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln \mathrm{a}} + c \qquad (x \in R,\ a > 0,\ a \neq 1 \text{ je konstanta})$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \qquad (x \in R)$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \qquad (x \in R)$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathrm{cotg}\,x + c \qquad (x \in (k\pi,(k+1)\pi)\,,\ k \in Z)$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}\,x + c \qquad (x \in ((2k-1)\pi/2,(2k+1)\pi/2)\,,\ k \in Z)$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{arctg}\,x + c \qquad (x \in R)$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c \qquad (x \in (-1,1))$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+1}| + c \quad (x \in R)$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + c \quad (x \in (1,\infty) \text{ nebo } x \in (-\infty,-1))$$

Literatura

[1] Berman G.N.: *Sbornik zadač po kursu matematičeskovo analýza.* Nauka Moskva 1972.

[2] Daněček J., Dlouhý O. Přibyl O.: *Matematika II. Modul 1. Dvojný a trojný integrál. Studijní opory pro studijní programy s kombinovanou formou sudia.* FAST VUT Brno 2004.

[3] Daněček J., Dlouhý O. Přibyl O.: *Matematika II. Modul 2. Křivkové integrály. Studijní opory pro studijní programy s kombinovanou formou sudia.* FAST VUT Brno 2004.

[4] Děmidovič B.P.: *Sbornik zadač i upražněnij po matematičeskomu analýzu.* GIFML Moskva 1963.

[5] Eliáš J., Horváth J., Kajan J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky IV.* Alfa Bratislava 1985.

[6] Jirásek F., Čipera S., Vacek M.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky II.* SNTL Praha 1989.

[7] Minorskij V.P.: *Sbírka úloh z vyšší matematiky.* SNTL Praha 1964.

[8] Prudilová K., Sekaninová J., Slatinský E.: *Sbírka příkladů z matematiky III.* CERM Brno 2001.

[9] Tomica R.: *Cvičení z matematiky II.* SNTL Praha 1967.