VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

MATEMATIKA II

MODUL 2

KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY

STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

Typeset by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

Obsah

1 Úvod

1.1 Cíle modulu

Prostudováním kapitoly *Křivkový integrál ve skalárním poli* byste měli získat následující vědomosti a dovednosti:

- Umět vysvětlit integrální součet pro křivkový integrál ve skalárním poli na základě úlohy na stanovení hmotnosti oblouku. Znát vlastnosti křivkového integrálu a vztahy pro výpočet křivkových integrálu po oblouku v rovině i v prostoru;

- Porozumět vztahům pro geometrické a technické aplikace křivkového integrálu ve skalárním poli na základě příslušných integrálních součtů. Jde zejména o výpočet délky křivky, obsahu válcové plochy, těžiště a momentu setrvačnosti hmotného oblouku;

Následující odstavce vás předběžně seznámí s obsahem této kapitoly *Křivkový integrál ve vektorovém poli* a přestaví vám studijní cíle, kterých máte dosáhnout:

- Seznámit se s integrálními součty pro křivkový integrál ve vektorovém poli, které dostaneme při řešení úlohy o nalezení práce silového pole po orientovaném oblouku. Tyto úvahy vyústí v definici křivkového integrálu ve vektorovém poli. Je třeba znát jeho vlastnosti a vztahy pro výpočet v rovinném i prostorovém vektorovém poli.

- Seznámit se s Greenovou větou, která umožňuje převést křivkový integrál v rovinném vektorovém poli na dvojný integrál. Je zapotřebí znát detailně všechny předpoklady pro její použití a umět ji aplikovat při řešení praktických úloh. Jednoduchou úvahou se přesvědčíte o správnosti vztahu pro výpočet obsahu rovinné oblasti užitím křivkového integrálu.

- Závěrečný odstavec je věnován nezávislosti křivkového integrálu na integrační cestě. Dozvíte se o různých druzích vektorových polí, o jejich charakterizaci a vzájemných vztazích. Naučíte se zjišťovat, zda je pole nevírové, určovat potenciál a jeho užitím vypočítat zadaný křivkový integrál.

1.2 Požadované znalosti

Pro zvládnutí křivkových integrálů je nezbytné dobře zvládnout problematiku kapitoly *Dvojný integrál* modulu *Dvojný a trojný integrál* a umět rovnice a grafy základních křivek v prostoru R^3.

1.3 Doba potřebná ke studiu

Přibližně lze odhadnout potřebnou dobu ke studiu křivkového integrálu na 25 hodin. Pro získání zkušeností a zručnosti ve výpočtu bude ještě zřejmě zapotřebí další čas závislý na dosavadní početní praxi studenta.

1.4 Klíčová slova

Křivkový integrál ve skalárním poli, základní vlastnosti křivkového integrálu ve skalárním poli, délka křivky, obsah části válcové plochy, těžiště hmotného oblouku, křivkový integrál ve vektorovém poli, práce v silovém poli, základní vlastnosti křivkového integrálu ve vektorovém poli, Greenova věta, nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě, potenciální vektorové pole, potenciál, jednoduše souvislá oblast, plošně jednoduše souvislá oblast.

2 Křivkový integrál ve skalárním poli

2.1 Zavedení pojmu, základní vlastnosti křivkového integrálu ve skalárním poli

Průvodce studiem
Před studiem této kapitoly je **nutné** si zopakovat základní pojmy z teorie křivek – viz Modul *Určitý integrál*, Dodatek A.

Nechť je dán oblouk $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, který má parametrické rovnice

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in \langle a, b \rangle.$$

V každém bodě M křivky γ známe hustotu $\varrho(M)$. Chceme znát hmotnost celé křivky. Na oblouku A_iA_{i+1} si zvolíme libovolný bod $M_i = [\xi_i, \eta_i]$ a vypočteme $\varrho(\xi_i, \eta_i) = \varrho(M_i)$. Předpokládejme, že ta stejná hustota je v každém bodě oblouku $\widehat{A_iA_{i+1}}$. Označme Δs_i délku oblouku $\widehat{A_iA_{i+1}}$. Hmotnost tohoto oblouku $\widehat{A_iA_{i+1}}$ bude tedy dána přibližně vztahem

$$\Delta m_i = \varrho(M_i)\Delta s_i.$$

Celkem dostáváme

$$m_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} \varrho\left(M_i\right) \Delta s_i.$$

Toto číslo jistě neudává hmotnost křivky γ přesně, ale přibližně. Položme

$$\nu_n = \max\left\{\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n\right\}$$

a přejdeme-li ve výrazu m_n k limitě, tj. bude-li existovat limita

$$\lim_{\nu_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} \varrho\left(M_i\right) \Delta s_i,$$

pak tuto limitu nazveme hmotnost drátu ve tvaru křivky γ a budeme značit m.

V naší úvaze, ale můžeme místo hustoty ϱ uvažovat libovolnou spojitou funkci f na oblouku γ. Integrální součet bude mít tvar

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(M_i\right) \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_i\right) \Delta s_i.$$

Definice 2.1. Jestliže existuje konečná limita integrálního součtu

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_i\right) \Delta s_i,$$

která nezávisí jak na způsobu dělení křivky γ, tak na výběru bodů $M_i = [\xi_i, \eta_i]$ na obloucích $\widehat{A_i A_{i+1}}$, pak tuto limitu značíme

$$\imath\gamma f\left(M\right)s = \imath\gamma f\left(x, y\right)s.$$

a nazveme ji *křivkovým integrálem* funkce f přes křivku γ.

Věta 2.1. *Nechť oblouk γ je dán parametrickými rovnicemi*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in \langle a, b\rangle$$

a funkce $f\left(x, y\right)$ je spojitá na oblouku γ. Pak platí

$$\int_\gamma f\left(M\right)\,\mathrm{d}s = \int_\gamma f\left(x, y\right)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f\left(\varphi\left(t\right), \psi\left(t\right)\right)\sqrt{\dot\varphi^2\left(t\right) + \dot\psi^2\left(t\right)}\,dt.$$

Poznámka 2.1. Je-li dána křivka předpisem $y = g(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ a derivace g' je spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak platí

$$\int_\gamma f\left(x, y\right)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f\left(x, g\left(x\right)\right)\sqrt{1 + \left(g'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Je-li dána křivka předpisem $x = h(y)$, $y \in \langle c, d\rangle$ a derivace h' je spojitá na $\langle c, d\rangle$, pak platí

$$\int_\gamma f\left(x, y\right)\,\mathrm{d}s = \int_c^d f\left(h\left(y\right), y\right)\sqrt{1 + \left(h'(y)\right)^2}\,\mathrm{d}y.$$

Příklad 2.1. Vypočtěte

$$I = \int_\gamma xy^2\,\mathrm{d}s,$$

kde je křivka $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ dána rovnicí $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$.
Řešení:

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t, \quad y = \frac{a}{2}\sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{a^3}{8}\int\limits_0^{2\pi} (1+\cos t)\sin^2 t \sqrt{\frac{a^2}{4}\sin^2 t + \frac{a^2}{4}\cos^2 t}\, dt \\ &= \frac{a^4}{16}\int\limits_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos t \sin^2 t\right)\, dt = \frac{a^4}{16}\left(\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\, dt + \int\limits_0^{2\pi}\cos t \sin^2 t\, dt\right) \\ &= \frac{a^4}{16}\left(\frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{2\pi}\right) = \frac{\pi a^4}{16}. \end{aligned}$$

Věta 2.2. *Nechť oblouk γ je dán parametrickými rovnicemi*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad t \in \langle a, b \rangle$$

a funkce $f(x, y, z)$ je spojitá na oblouku γ. Pak platí

$$\begin{aligned} \int\limits_\gamma f(M)\,\mathrm{d}s &= \int\limits_\gamma f(x, y, z)\,\mathrm{d}s \\ &= \int\limits_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)}\, dt. \end{aligned}$$

Příklad 2.2. Vypočtěte

$$I = \int\limits_\gamma \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathrm{d}s,$$

kde je křivka $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ dána parametrickými rovnicemi $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a > 0$, $b > 0$.
Řešení:

$$\sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned} I &= b\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2t^2}}\, dt = b\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2t^2}}\, dt \\ &= b\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{1}{b^2}\sqrt{a^2+b^2t^2}\right]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\left(\sqrt{a^2+4\pi^2b^2} - a\right). \end{aligned}$$

Příklad 2.3. Vypočtěte

$$I = \int_\gamma xy \,\mathrm{d}s,$$

kde křivka $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ je průsečík ploch $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, $x^2 + y^2 - ay = 0$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $a > 0$.

Řešení:

$$x = \frac{a}{2}\sin 2t, \quad y = a\sin^2 t, \quad z = a\cos t, \quad t \in \langle 0, \pi/2\rangle,$$

$$\dot\varphi(t) = a\cos 2t, \quad \dot\psi(t) = a\sin 2t, \quad \dot\chi(t) = -a\sin t.$$

Odtud

$$\begin{aligned} I &= a^3 \int_0^{\pi/2} \cos t \sin^3 t \sqrt{1+\sin^2 t}\, dt = \left| \begin{array}{ll} 1+\sin^2 t = u & t = 0|\pi/2 \\ 2\sin t\cos t\, dt = du & u = 1|2 \end{array} \right| \\ &= \frac{a^3}{2}\int_1^2 (u-1)\sqrt{u}\, du = \frac{a^3}{2}\left[\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^2 = \frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{15}a^3. \end{aligned}$$

Věta 2.3. *(Základní vlastnosti křivkového integrálu ve skalárním poli)*

(a) **Linearita.** *Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$ je oblouk a funkce f a g jsou spojité na oblouku γ. Pak platí*

$$\int_\gamma (c_1 f + c_2 g)(M)\,\mathrm{d}s = c_1 \int_\gamma f(M)\,\mathrm{d}s + c_2 \int_\gamma g(M)\,\mathrm{d}s,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné reálné konstanty.

(b) **Aditivita.** *Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$ je křivka, která je sjednocením dvou oblouků γ_1, γ_2 a funkce f je spojitá na křivce γ. Pak platí*

$$\int_\gamma f(M)\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} f(M)\,\mathrm{d}s + \int_{\gamma_2} f(M)\,\mathrm{d}s.$$

Cvičení 2.1. Vypočítejte křivkové integrály po dané křivce γ:

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{x-y}\,\mathrm{d}s$, kde γ je usečka AB, $A = [0,-2]$, $B = [4,0]$; $\left[\sqrt{5}\ln 2\right]$
2. $\displaystyle\int_\gamma x^2\,\mathrm{d}s$, kde γ je oblouk AB křivky dané rovnicí $y = \ln x$ pro $A = [2,\ln 2]$, $B = [1,0]$; $\left[\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right)\right]$
3. $\displaystyle\int_\gamma (x-y)\,\mathrm{d}s$, kde γ je kružnice $x^2 + y^2 - ax = 0$, $a > 0$; $\left[\frac{1}{2}\pi a^2\right]$

4. $\int_\gamma (x^2+y^2+z^2)\ \mathrm{d}s$, kde γ je oblouk šroubovice $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = at,$ $t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ a > 0$; $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3(4\pi^2+3)\right]$

5. $\int_\gamma z\ \mathrm{d}s$, kde γ je křivka $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ t \in \langle 0, \sqrt{2}\rangle$. $\left[\frac{2}{3}(4-\sqrt{2})\right]$

2.2 Geometrické a fyzikální aplikace křivkového integrálu ve skalární poli

(a) *Délka* křivky

$$L = \int_\gamma \mathrm{d}s.$$

Příklad 2.4. Vypočtěte délku křivky určené průsečnicí ploch o rovnicích

$$y = 2\arcsin\frac{x}{2}, \quad z = \frac{1}{2}\ln\frac{2-x}{2+x}$$

od bodu $A = [0,0,0]$ do bodu $B = [1, \pi/3, -\ln 3/2]$.

Řešení: Při užití přirozené parametrizace dostaneme

$$x = t, \quad y = 2\arcsin\frac{t}{2}, \quad z = \frac{1}{2}\ln\frac{2-t}{2+t},$$

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = \frac{2}{\sqrt{4-t^2}}, \quad \dot{z} = \frac{2}{t^2-4}.$$

Odtud

$$\begin{aligned} L &= \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{4}{4-t^2} + \frac{4}{(t^2-4)^2}}\,dt = \int_0^1 \frac{t^2-6}{t^2-4}\,dt \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2\,(t-2)} + \frac{1}{2\,(t+2)}\right) dt = \left[t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2}\ln 3[m]. \end{aligned}$$

(b) *Obsah* části válcové plochy Φ s řídící křivkou $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ v rovině $z = 0$ a tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezenými plochami $z = g(x,y)$, $z = f(x,y)$, $g(x,y) \le f(x,y)$ pro každé $[x,y] \in \gamma$.

$$P = \int_\gamma [f(x,y) - g(x,y)]\ \mathrm{d}s.$$

Příklad 2.5. Vypočtěte obsah části válcové plochy Φ s řídící křivkou $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ danou rovnicí $y = \ln x$, $x \in [1, \sqrt{e}]$ v rovině $z = 0$ a tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezenými plochami: $z = 0$, $z = x^2$.

Řešení:

$$\begin{aligned} P &= \int_\gamma [f(x,y) - g(x,y)]\,\mathrm{d}s = \int_\gamma x^2\,\mathrm{d}s = \int_1^{\sqrt{e}} t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\,dt \\ &= \int_1^{\sqrt{e}} t\sqrt{1+t^2}\,dt = \left| \begin{array}{ll} 1+t^2 = u^2 & t = 1|e \\ t\,dt = u\,du & u = \sqrt{2}|\sqrt{1+e} \end{array} \right| = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} u^2\,du \\ &= \frac{1}{3}\left((1+e)^{3/2} - 2^{3/2}\right)\ [m^2]. \end{aligned}$$

(c) *Hmotnost* drátu ve tvaru křivky.

$$m = \int_\gamma \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

s lineární hustotou $\varrho\,(x,y,z)\ \ [kg \cdot m^{-1}]$.

Příklad 2.6. Vypočtěte hmotnost homogenního drátu ve tvaru křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ s parametrickými rovnicemi $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ a konstantní lineární hustotou $\varrho\,(x,y,z) = \varrho\ [kg \cdot m^{-1}]$.

Řešení:

$$\begin{aligned} m &= \int_\gamma \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \varrho\int_\gamma \mathrm{d}s = \varrho\int_0^{2\pi} \sqrt{2+t^2}\,dt \\ &= \left| \begin{array}{ll} t = \sqrt{2}u & t = 0|2\pi \\ dt = \sqrt{2}\,du & u = 0|2\pi/\sqrt{2} \end{array} \right| = 2\varrho\int_0^{2\pi/\sqrt{2}} \sqrt{1+u^2}\,du \\ &= \varrho\left[u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^{2\pi/\sqrt{2}} \\ &= \varrho\left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2\pi^2} + \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}} + \sqrt{1+2\pi^2}\right)\right)\ [kg]. \end{aligned}$$

(d) *Statický moment* hmotného drátu ve tvaru křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ vzhledem k přímce p.

$$S_p = \int_\gamma d([x,y],p) \cdot \varrho(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

kde $d([x,y],p)$ je orientovaná vzdálenost bodu $[x,y]$ od přímky p.

Speciální případ vzhledem k souřadnicovým osám x a y.

$$S_x = \int_\gamma y \cdot \varrho(x,y)\,\mathrm{d}s, \qquad S_y = \int_\gamma x \cdot \varrho(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

(e) *Statické momenty* hmotného drátu ve tvaru křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ vzhledem k rovině τ.

$$S_\tau = \int_\gamma d([x,y,z],\tau) \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s.$$

kde $d([x,y,z],\tau)$ je orientovaná vzdálenost bodu $[x,y,z]$ od roviny τ.

Speciální případ vzhledem k souřadnicovým rovinám xy, xz a yz.

$$S_{xy} = \int_\gamma z \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s, \quad S_{xz} = \int_\gamma y \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s, \quad S_{yz} = \int_\gamma x \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s.$$

(f) *Těžiště* hmotného drátu ve tvaru křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ a $\gamma \subset \mathbb{R}^3$.

$$T = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m}\right], \qquad T = \left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m}, \frac{S_{xy}}{m}\right].$$

Příklad 2.7. Vypočtěte těžiště homogenního drátu ve tvaru křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ s parametrickými rovnicemi $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\cos(t/2)$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$ a konstantní lineární hustotou $\varrho\,(x,y,z) = \varrho\ [kg \cdot m^{-1}]$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
m &= \int_\gamma \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \varrho \int_\gamma \mathrm{d}s = 2\varrho \int_0^\pi \sqrt{1-\cos t}\,dt \\
&= 2\sqrt{2}\varrho \int_0^\pi \sin\frac{t}{2}\,dt = -4\sqrt{2}\varrho \left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^\pi = 4\sqrt{2}\varrho\ [kg], \\
S_{yz} &= \int_\gamma x\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \varrho \int_\gamma x\,\mathrm{d}s = 2\sqrt{2}\varrho \int_0^\pi (t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\,dt \\
&= 2\sqrt{2}\varrho \left[-2t\cos\frac{t}{2} + 3\sin\frac{t}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}t\right]_0^\pi = \frac{16\sqrt{2}}{3}\varrho\ [kg \cdot m], \\
S_{xz} &= \int_\gamma y\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \varrho \int_\gamma y\,\mathrm{d}s = 2\sqrt{2}\varrho \int_0^\pi (1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt \\
&= 2\sqrt{2}\varrho \left[-3\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}t\right]_0^\pi = \frac{16\sqrt{2}}{3}\varrho\ [kg \cdot m],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \int\limits_{\gamma} z\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \varrho\int\limits_{\gamma} z\,\mathrm{d}s = 8\sqrt{2}\varrho\int\limits_{0}^{\pi}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt \\ &= 4\sqrt{2}\varrho\int\limits_{0}^{\pi}\sin t\,dt = -4\sqrt{2}\varrho\,[\cos t]_{0}^{\pi} = 8\sqrt{2}\varrho\ [kg\cdot m], \end{aligned}$$

$$T = \left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m}, \frac{S_{xy}}{m}\right] = \left[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 2\right].$$

(g) *Moment setrvačnosti* hmotného drátu ve tvaru křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ vzhledem k přímce $p \subset \mathbb{R}^2$, resp. $p \subset \mathbb{R}^3$.

$$I_p = \int\limits_{\gamma} d^2([x,y],p)\cdot\varrho(x,y)\,\mathrm{d}s, \qquad I_p = \int\limits_{\gamma} d^2([x,y,z],p)\cdot\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,$$

kde $d([x,y],p)$ je vzdálenost bodu $[x,y]$ od přímky $p \subset \mathbb{R}^2$, resp. $d([x,y,z],p)$ je vzdálenost bodu $[x,y,z]$ od přímky $p \subset \mathbb{R}^3$.

Speciální případ vzhledem k souřadnicovým osám x a y.

$$I_x = \int\limits_{\gamma} y^2\cdot\varrho(x,y)\,\mathrm{d}s, \qquad I_y = \int\limits_{\gamma} x^2\cdot\varrho(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

Speciální případ vzhledem k souřadnicovým osám x, y a z.

$$I_x = \int\limits_{\gamma}\left(y^2+z^2\right)\cdot\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,\ I_y = \int\limits_{\gamma}\left(x^2+z^2\right)\cdot\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,$$

$$I_z = \int\limits_{\gamma}\left(x^2+y^2\right)\cdot\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s.$$

Cvičení 2.2. Užitím křivkového integrálu ve skalárním poli vypočtěte:

1. Délku křivky $\gamma:\ \vec{r} = a\cos t\cdot\vec{i} + a\sin t\cdot\vec{j} + vt\cdot\vec{k}$ pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, $a, v > 0$; $\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{a^2+v^2}\right]$
2. Obsah části válcové plochy $\Phi:\ 4x^2 + 9y^2 = 36$ pro $y \geq 0$ s řídící křivkou γ v rovině $z = 0$ a tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezenými plochami $z = 0,\ z = -xy$; $\left[\frac{76}{5}\right]$
3. Hmotnost konická šroubovice
$$\gamma = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x = t\cos t,\ y = t\sin t, z = t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\},$$
je-li hustota křivky $\sigma(x,y,z) \equiv z$; $\left[\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{2\pi^2+1}-2\right)\right]$
4. Souřadnice těžiště $T = [x_T, y_T]$ homogeního oblouku cykloidy
$$\gamma:\ \vec{r}(t) = a(t-\sin t)\vec{i} + a(1-\cos t)\vec{j},\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle,$$
kde $a > 0$ je konstanta, je-li hustota křivky $\sigma(\vec{r}(t)) \equiv k$. $\left[T = [\pi a, 4a/3]\right]$

3 Křivkový integrál ve vektorovém poli

3.1 Zavedení pojmu, základní vlastnosti křivkového integrálu ve skalárním poli

Ve fyzice a v technických aplikacích se často setkáváme s různými druhy rovinných nebo prostorových vektorových polí – *silové pole, pole rychlostí částic proudící nestlačitelné kapaliny, pole magnetické a elektrické intenzity.*
Z matematického hlediska jde vlastně o zobrazení, které bodům přiřazuje vektory.

Vektorové pole je zobrazení

$$\vec{f} :\to \Omega\mathbb{R}^n,$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. V technické praxi je nejčastější použití pro $n = 2, 3$. V tomto případě budeme jednoduše psát

$$\vec{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)), \qquad \vec{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)),$$

kde P, Q, R jsou složky (komponenty) vektorové funkce $\vec{f}$.

Říkáme, že vektorové pole $\vec{f}$ je spojité vektorové pole, nebo stručněji je třídy C na Ω, když všechny složky jsou spojité na Ω. Říkáme, že vektorové pole $\vec{f}$ je třídy C^1 na Ω, když všechny složky tohoto pole mají spojité všechny první parciální derivace na množině Ω.

Uvažujeme-li orientovaný oblouk $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^3)$, pak můžeme v každém bodě $M = \Gamma(t)$, $t \in (a, b)$ oblouku γ určit jednotkový tečný vektor vztahem

$$\vec{t}(M) = \frac{\dot{\Gamma}(t)}{\|\dot{\Gamma}(t)\|}.$$

Mějme nyní spojité vektorové silové pole $\vec{f}$ na oblouku γ a hledejme práci, která se vykoná v zadaném vektorovém poli, pohybuje-li se hmotný bod po oblouku γ ve směru jeho orientace. Rozdělíme-li oblouk γ na dostatečně malé oblouky γ_i, $i = 1, \ldots, n$ můžeme vektor síly $\vec{f}$ na oblouku γ_i aproximovat konstantním vektorem $\vec{f}(M_i)$. Z fyziky je známo, že absolutní hodnota práce W_i je pak rovna součinu velikosti tečné složky $\vec{f_t}$ síly $\vec{f}(M_i)$ a délky dráhy Δs_i, což je délka oblouku γ_i. Protože $\left|\vec{f}(M_i) \cdot \vec{t}(M_i)\right| = \|\vec{f_t}(M_i)\|$ pak práce W je přibližně rovna

$$W = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}(M_i) \cdot \vec{t}(M_i) \Delta s_i,$$

což je možno interpretovat jako integrální součet pro křivkový integrál

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{t}\, \mathrm{d}s.$$

V aplikacích se často tento integrál označuje

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{r}.$$

Definice 3.1. Nechť $\vec{f}$ je spojité vektorové pole na orientovaném oblouku γ. *Křivkovým integrálem* ve vektorovém poli $\vec{f}$ (křivkovým integrálem druhého druhu) přes křivku γ nazýváme integrál tvaru

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{t}\,\mathrm{d}s.$$

Jeli $\Gamma : \langle a, b \rangle \to \gamma$, parametrizace orientovaného oblouku γ (tj. parametrizace oblouku souhlasí s jeho orientací), pak platí

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{t}\,\mathrm{d}s = \int_a^b \vec{f}\,(\Gamma(t)) \cdot \frac{\dot{\Gamma}(t)}{\|\dot{\Gamma}(t)\|} \|\dot{\Gamma}(t)\|\, dt = \int_a^b \vec{f}\,(\Gamma(t)) \cdot \dot{\Gamma}(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \left[P\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right) \dot{\varphi}(t) + Q\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right) \dot{\psi}(t) + R\left(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\right) \dot{\chi}(t)\right] dt.$$

Mnohdy se používá označení

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{t}\,\mathrm{d}s = \int_\gamma P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z,$$

které se po dosazení z parametrických rovnic oblouku γ převede na výše uvedený tvar.

Poznámka 3.1. Je-li dána křivka předpisem $y = g(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ a g je spojitá na $\langle a, b \rangle$, pak platí

$$\int_\gamma P\,(x, y)\ \mathrm{d}x = \int_a^b P\,(t, g\,(t))\ dt.$$

Je-li dána křivka předpisem $x = h(y)$, $y \in \langle c, d \rangle$ a h je spojitá na $\langle c, d \rangle$, pak platí

$$\int_\gamma Q\,(x, y)\ \mathrm{d}y = \int_c^d Q\,(h\,(t)\,, t)\ dt.$$

Příklad 3.1. Vypočtěte

$$I = \int_\gamma y^2\,\mathrm{d}x + x(1 + y^2)\,\mathrm{d}y,$$

kde γ je část elipsy $4x^2 + y^2 = 16$, ležící v prvním kvadrantu a orientovaná od bodu $A = [2, 0]$ do bodu $B = [0, 4]$.

Řešení: Parametrické rovnice jsou:

$$x = 2\cos t, \quad y = 4\sin t, \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Odtud

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2} \left(-32\sin^3 t + 8\cos^2 t(1 + 16\sin^2 t)\right) dt \\
&= 8 \int_0^{\pi/2} \left(-4\sin^3 t + \cos^2 t + 16\sin^2\cos^2 t\right) dt \\
&= 8 \left[-\frac{4}{3}\cos^3 t + 4\cos t + \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}\sin 4t + \frac{5}{2}t \right]_0^{\pi/2} = 10\pi - \frac{64}{3}.
\end{aligned}$$

Příklad 3.2. Vypočtěte

$$I = \int_\gamma \frac{y}{x + z^2}\,\mathrm{d}x - (x + 2z)\,\mathrm{d}y + \frac{y}{z}\,\mathrm{d}z,$$

kde γ je úsečka s počátečním bodem $A = [3, 2, 1]$ a s koncovým bodem $B = [1, 1, 2]$.
Řešení: Parametrické rovnice úsečky jsou:

$$x = 3 - 2t, \quad y = 2 - t, \quad z = 1 + t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Odtud

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\frac{2t - 4}{t^2 + 4} + 5 + \frac{2 - t}{1 + t} \right) dt \\
&= \left[\ln(t^2 + 4) - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2} + 4t + 3\ln|t + 1| \right]_0^1 = 4 - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + \ln\,10.
\end{aligned}$$

Příklad 3.3. Vypočtěte práci silového pole při pohybu hmotného bodu po průnikové křivce $\gamma = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 1 + y^2\}$ od bodu $A = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$ přes bod $B = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}]$ do bodu $C = [0, 1, 2]$. Silové pole působí v každém bodě silou, která směřuje kolmo k rovině xz a velikost této síly je rovna převrácené hodnotě vzdálenosti bodu od roviny xy.
Řešení: Sílu $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\vec{F} = \|\vec{F}\| \cdot \vec{F}_0 = \frac{1}{z} \cdot (0, -\frac{y}{|y|}, 0).$$

Křivku γ lze parametrizovat např. takto: $\Gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1 + \sin^2 t)$, $t \in \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned} W &= \int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\, dt = \left| \begin{array}{ll} \sin t = u & t = \frac{\pi}{6} | \frac{\pi}{2} \\ \cos t\, dt = du & u = \frac{1}{2} | 1 \end{array} \right| \\ &= -\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{1+u^2}\, du = -\left[\operatorname{arctg} u\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = -\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Věta 3.1. *(Základní vlastnosti křivkového integrálu ve vektorovém poli)*

(a) **Linearita.** *Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ je orientovaný oblouk a $\vec{f}$ a $\vec{g}$ jsou spojitá vektorová pole na oblouku γ. Pak platí*

$$\int_\gamma (c_1 \vec{f} + c_2 \vec{g}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = c_1 \int_\gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} + c_2 \int_\gamma \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{s},$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné reálné konstanty.

(b) **Aditivita.** *Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ je křivka, která je sjednocením dvou orientovaných oblouků γ_1, γ_2 a $\vec{f}$ je spojitá vektorové pole na křivce γ. Pak platí*

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

Cvičení 3.1. Vypočítejte křivkové integrály po dané křivce γ (uvažujeme pravotočivý souřadnicový systém):

1. $\int_\gamma y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, kde γ je orientovaná čtvrtkružnice $\vec{r}(t) = a\cos t \cdot \vec{i} + a \sin t \cdot \vec{j}$, $0 \le t \le \pi/2$ a kde bod $A = [a, 0]$ je daný jako počáteční bod, $a > 0$ konstanta; $\left[0\right]$

2. $\int_\gamma \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$, kde γ je orientovaná úsečka AB, s počátečním bodem $A = [1, 1, 1]$ a koncovým bodem $B = [4, 4, 4]$; $\left[3\sqrt{3}\right]$

3. $\int_\gamma (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$, kde γ je orientovaná křivka $y = 1 - |1-x|$ pro $0 \le x \le 2$, počáteční bod $A = [2, 0]$; $\left[-\frac{4}{3}\right]$

4. $\int_\gamma yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$, kde γ je oblouk AB šroubovice

$$\vec{r}(t) = a\cos t \cdot \vec{i} + a \sin t \cdot \vec{j} + bt/2\pi \cdot \vec{k}$$

(orientovaný) od bodu $A = [a, 0, 0]$ do $B = [a, 0, b]$, $a, b > 0$ konstanty. $\left[0\right]$

Cvičení 3.2. V každém bodě silového pole v $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) působí síla $\vec{F}(\vec{r})$. Vypočítejte práci A tohoto pole při pohybu hmotného bodu po orientované křivce γ:

1. $\vec{F} = xy \cdot \vec{i} + (x+y) \cdot \vec{j}$, γ je oblouk AB křivky γ dané rovnicí $y = \operatorname{arctg} x$ od bodu $A = [1, ?]$ do bodu $B = [0, ?]$; $\left[\frac{1}{32}\left(16 - 8\pi - \pi^2\right) - \ln 2\right]$

2. $\vec{F}(\vec{r}) = y\vec{i} + z\vec{j} + yz\vec{k}$, γ : $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, ct)$ orientované souhlasně s daným parametrickým vyjádřením pro $t \in \langle 0, \pi \rangle$, $c > 0$. $\left[\frac{\pi}{2}\left(2c^2 - 4c - 1\right)\right]$

3.2 Greenova věta

Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se nazývá *jednoduše souvislá* v $\mathbb{R}^2$, jestliže s každou kružnicí, která je obsažena v Ω je také vnitřek kružnice obsažen v Ω. Mezikruží není jednoduše souvislá množina v $\mathbb{R}^2$.

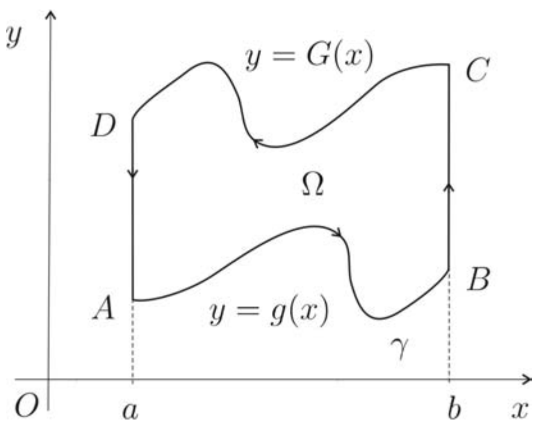
Věta 3.2. (Greenova věta) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, ohraničená množina, jejíž hranicí je jediná kladně orientovaná jednoduchá uzavřená křivka γ. Dále nechť $\vec{f} = (P, Q)$ je spojité vektorové pole na $\overline{\Omega}$ a $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ jsou spojité funkce na $\overline{\Omega}$. Pak platí*

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\gamma} \vec{f}(x,y) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_{\gamma} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro oblast prvního druhu

$$\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ g(x) < y < G(x)\},$$

kde funkce g a G jsou spojité na $\langle a, b \rangle$ (viz obrázek).



$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{G(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_a^b \Big[P(x,y) \Big]_{g(x)}^{G(x)} \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_a^b \Big[P(x, G(x)) - P(x, g(x)) \Big] \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Poslední integrály můžeme vyjádřit podle Poznámky 3.1 následovně

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^b P(x, G(x))\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{DC} P(x,y)\,\mathrm{d}x, \\
\int\limits_a^b P(x, g(x))\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{AB} P(x,y)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Vzhledem k předešlému můžeme psát

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int\limits_{DC} P(x,y)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{AB} P(x,y)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int\limits_{AB} P(x,y)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{CD} P(x,y)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int\limits_{AB} P(x,y)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{BC} P(x,y)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{CD} P(x,y)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{DA} P(x,y)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int\limits_{\gamma} P(x,y)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

neboť integrály po úsečkách BC a DA jsou nulové. Můžeme-li náš integrační obor rozložit na konečné sjednocení oblastí prvního druhu, platí předešlá rovnice na každé takové oblasti a ze základních vlastností dvojných a křivkových integrálů plyne žádaná rovnice na celé oblasti.

Analogicky se dokáže platnost rovnice

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\gamma} Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

kde Ω je oblast druhého druhu.

Nakonec můžeme-li náš integrační obor rozložit na konečné sjednocení oblastí prvního druhu a současně na sjednocení konečného počtu oblastí druhého druhu, sečteme předešlé rovnice a dostaneme žádaný vzorec.

Příklad 3.4. Užitím Greenovy věty vypočtěte

$$I = \int\limits_{\gamma} \left(x^2 y - x \right) \mathrm{d}x - \left(x y^2 + y \right) \mathrm{d}y,$$

kde γ je křivka o rovnici $x^2 + y^2 = 2y$, orientovaná ve směru pohybu hodinových ručiček.
Řešení: Křivka γ je záporně orientovaná hranice jednoduše souvislé oblasti

$$\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 \leq 2y\}.$$

Vektorové pole $\vec{f} = (P, Q)$ je třídy C^1 v $\mathbb{R}^2$ a tedy dle Greenovy věty platí

$$\int\limits_{\gamma} P(x, y) \, \mathrm{d}x + Q(x, y) \, \mathrm{d}y = - \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Odtud dostáváme

$$I = - \iint\limits_{\Omega} (-y^2 - x^2) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Na poslední dvojný integrál použijeme transformace do polárních souřadnic

$$\begin{aligned} x &= r \cos t \equiv \varphi\,(r, t)\,, \\ y &= r \sin t \equiv \psi\,(r, t)\,. \end{aligned}$$

s jakobiánem $J(r, t) = r$. Vzor množiny Ω je množina

$$\Omega^* = \{[r, t] \in \mathbb{R}^2 : \, 0 < t < \pi, \; 0 < r < 2 \sin \, t\}.$$

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{\pi} \left(\int\limits_0^{2\sin t} r^3 \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}r = 4 \int\limits_0^{\pi} \sin^4 \, t \, \mathrm{d}t = \int\limits_0^{\pi} \left[1 - 2\cos 2t + \frac{1}{2}(1 + \cos 4t) \right] \mathrm{d}t \\ &= \left[t - \sin 2t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}\sin 4t \right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Aplikace Greenovy věty. *Obsah* rovinné oblasti splující předpoklady Greenovy věty.

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma} x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x.$$

Důkaz. Položíme-li v Greenově větě

$$P(x, y) = -\frac{1}{2}y, \quad Q(x, y) = \frac{1}{2}x,$$

dostaneme požadovaný výsledek.

Příklad 3.5. Vypočtěte obsah elipsy.
Řešení: Zvolíme-li parametrizaci

$$x = a \cos \, t, \quad y = b \sin \, t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

$$\dot{x} = -a \sin t, \quad \dot{y} = b \cos t,$$

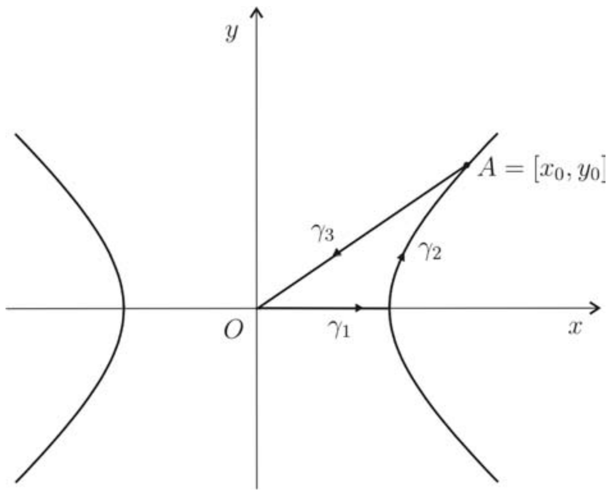
dostaneme

$$\mu = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma} x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{2\pi} \left(ab \cos^2 t + ab \sin^2 t \right) \, dt = \frac{1}{2} ab \int\limits_{0}^{2\pi} dt = \pi ab \; [m^2].$$

Příklad 3.6. Užitím Greenovy věty vypočtěte obsah množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde Ω je ohraničená obloukem hyperboly o parametrických rovnicích

$$x = a \cosh t, \quad y = b \sinh t, \quad t \in (-\infty, \infty), \; a, b > 0,$$

osou x a spojnicí počátku souřadné soustavy s bodem $A = [x_0, y_0]$ hyperboly, kde $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.



Řešení: Platí

$$P = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x,$$

kde $\partial\Omega$ je kladně orientovaná hranice oblasti Ω, tvořená křivkami γ_1, γ_2, γ_3. Odtud

$$\int\limits_{\partial\Omega} x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x = \int\limits_{\gamma_1} x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x + \int\limits_{\gamma_2} x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x + \int\limits_{\gamma_3} x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x.$$

Parametrické rovnice postupně jsou:

$$\begin{array}{lll} \gamma_1: \; y = 0, & x = t, & t \in \langle 0, a \rangle \\ \gamma_2: \; x = a \cosh t, & y = b \sinh t, & t \in \langle 0, t_0 \rangle \\ \gamma_3: \; x = t, & y = kt, & t \in \langle x_0, 0 \rangle, \end{array}$$

kde $k = y_0 / x_0$. Je vidět, že

$$\int\limits_{\gamma_1} x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x = \int\limits_{\gamma_3} x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x = 0.$$

Dále

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_2} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{t_0}\left(\cosh^2 t - \sinh^2 t\right)\,dt = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{t_0} dt = \frac{ab}{2}t_0.$$

Pro parametr t_0 bodu A platí

$$\cosh t_0 + \sinh t_0 = e^{t_0} = \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \quad \Rightarrow \quad t_0 = \ln\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)$$

a celkem

$$P = \frac{ab}{2}\ln\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)\ [m^2].$$

Cvičení 3.3. Ověřte, že jsou splněny podmínky pro užití Greenovy věty, a užijte ji k výpočtu následujících integrálů:

1. $\int_\gamma (x+y)^2\,\mathrm{d}x \,-\, (x+y)^2\,\mathrm{d}y$, kde γ je kladně orientovaný obvod trojúhelníka OAB s vrcholy $O = [0,0]$, $A = [1,0]$, $B = [0,1]$; $[-4/3]$
2. $\int_\gamma (x+y)\,\mathrm{d}x \,-\, (x-y)\,\mathrm{d}y$, kde γ je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ orientovaná kladně. $[-2\pi ab]$

Cvičení 3.4. Aplikací Greenovy věty vypočtěte obsah rovinného obrazce

$$A = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 \leq y \leq x\right\}.$$

[1/6]

3.3 Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě

V tomto odstavci budeme *oblastí* v $\mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$ rozumět otevřenou podmnožinu v $\mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$, ve které můžeme každé dva různé body ležící v této množině spojit jednoduchou křivkou, ležící v této množině.
Řekneme, že spojité vektorové pole $\vec{f}$ v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$ *nezávisí na integrační cestě*, jestliže pro libovolné orientované křivky γ_1, γ_2 ležící v Ω se stejným počátečním bodem A a koncovým bodem B, platí

$$\int\limits_{\gamma_1} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_{\gamma_2} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

Pak také píšeme

$$\int\limits_A^B \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

Nechť $\vec{f} = (P,Q)$ ($\vec{f} = (P,Q,R)$) je spojité vektorové pole na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$). Řekneme, že vektorové pole je *potenciální* na Ω, jestliže existuje funkce $V \in C^1(\Omega)$ tak, že

$$\nabla V = \vec{f}$$

pro každé $[x,y] \in \Omega$ ($[x,y,z] \in \Omega$). Každou takovou funkci V nazýváme *potenciálem* vektorového pole $\vec{f}$ na Ω.

Věta 3.3. *Nechť vektorové pole $\vec{f} = (P,Q)$ je třídy C^1 na jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Pak toto pole je potenciální tehdy a jen tehdy, když*

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$

pro každé $[x,y] \in \Omega$.

Rotaci vektorového pole $\vec{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ definujeme pomocí formálního determinantu

$$\begin{aligned} rot\, \vec{f}(x,y,z) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}. \end{aligned}$$

Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá *jednoduše souvislá* v $\mathbb{R}^3$, jestliže s každou kulovou plochou, která je obsažena v Ω je také vnitřek kulové plochy obsažen v Ω. Koule, trojrozměrný interval jsou jednoduše souvislé množiny, ale mezisféra není jednoduše souvislá množina v $\mathbb{R}^3$.
Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá *plošně jednoduše souvislá* v $\mathbb{R}^3$, jestliže ke každé jednoduché uzavřené křivce, která je obsažena v Ω existuje hladká plocha, která sama sebe neprotíná taková, že $S \subset \Omega$ a jejíž okraj je tato křivka.
Množina $\mathbb{R}^3 \setminus \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ je jednoduše souvislá, ale není plošně jednoduše souvislá.

Věta 3.4. *Nechť vektorové pole $\vec{f} = (P,Q,R)$ je třídy C^1 na plošně jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Pak toto pole je potenciální tehdy a jen tehdy, když*

$$rot\, \vec{f}(x,y,z) = (0,0,0)$$

pro každé $[x,y,z] \in \Omega$.

Věta 3.5. *Nechť $\vec{f} = (P,Q)$ je třídy C^1 v jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Křivkový integrál*

$$\int_\gamma \vec{f}(x,y) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

kde $\gamma \subset \Omega$ nezávisí na integrační cestě AB v oblasti Ω tehdy a jen tehdy, když vektorové pole $\vec{f}$ je na Ω potenciální. Je-li V jeho potenciál na Ω, pak platí

$$\int_A^B P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = V(B) - V(A).$$

Příklad 3.7. Dokažte, že integrál

$$\int_A^B \left(\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right)\mathrm{d}y$$

z bodu $A = [1,2]$ do bodu $B = [2,6]$ nezávisí na integrační cestě a určete jeho hodnotu.

Řešení: Vektorové pole $\vec{f} = (P,Q)$ je v oblasti $\Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y > x > 0\}$ třídy C^1. Pro funkce P, Q platí

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{(x-y)^3}$$

pro každé $[x,y] \in \Omega$. Vektorové pole $\vec{f}$ je tedy v jednoduše souvislé oblasti Ω potenciální a zadaný integrál tedy nezávisí na integrační cestě. Pro potenciál V platí

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \qquad \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$$

pro každé $[x,y] \in \Omega$. Integrací první rovnice podle proměnné x máme

$$V(x,y) = \int \left(\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + g(y) = \frac{y^2}{y-x} - \ln x + g(y).$$

Z rovnice

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Q(x,y)$$

plyne

$$g'(y) + \frac{y^2 - 2xy}{(x-y)^2} = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}$$

a po úpravě

$$g'(y) = -1 + \frac{1}{y}.$$

Integrací předešlé rovnice dostáváme

$$g(y) = -y + \ln y + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Celkem

$$V(x,y) = \frac{xy}{y-x} + \ln\frac{y}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Hodnota integrálu je

$$V(B) - V(A) = 2 + \ln\frac{3}{2}.$$

Věta 3.6. *Nechť $\vec{f} = (P, Q, R)$ je třídy C^1 v plošně jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Křivkový integrál*

$$\int\limits_{\gamma} \vec{f}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_{\gamma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z,$$

kde $\gamma \subset \Omega$ nezávisí na integrační cestě AB na oblasti Ω tehdy a jen tehdy, když vektorové pole $\vec{f}$ je potenciální na Ω . Je-li V jeho potenciál na Ω, pak platí

$$\int\limits_{A}^{B} P\,(x,y,z)\;\mathrm{d}x + Q\,(x,y,z)\;\mathrm{d}y + R\,(x,y,z)\;\mathrm{d}z = V(B) - V(A).$$

Příklad 3.8. Dokažte, že integrál

$$\int\limits_{A}^{B} yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$$

z bodu $A = [1,2,3]$ do bodu $B = [3,2,1]$ nezávisí na integrační cestě a určete jeho hodnotu.
Řešení: Vektorove pole $\vec{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) = (yz, xz, xy)$ je třídy C^1 na plošně jednoduše souvislé oblasti $\Omega = \mathbb{R}^3$. Pro funkce P, Q, R platí

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) &= x - x = 0,\\
\frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) &= y - y = 0,\\
\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) &= z - z = 0
\end{aligned}$$

pro každé $[x,y,z] \in \Omega$. Vektorové pole $\vec{f}$ je tedy na Ω potenciální a existuje potenciál V tak, že

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) = yz, \qquad \frac{\partial V}{\partial y}(x,y,z) = xz, \qquad \frac{\partial V}{\partial z}(x,y,z) = xy$$

pro každé $[x,y,z] \in \Omega$. Integrací první rovnice podle proměnné x máme

$$V(x,y,z) = \int yz\,\mathrm{d}x + g(y,z) = xyz + g(y,z),$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xyz + g(y,z)) = xz + \frac{\partial g(y,z)}{\partial y}.$$

Z předešlého a využitím druhé rovnice máme

$$xz + \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = xz$$

a tedy

$$\frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = 0.$$

Integrací této rovnice podle proměnné y máme

$$g(y,z) = \int 0 \, \mathrm{d}y + h(z) = h(z),$$

$$V(x,y,z) = xyz + h(z).$$

Využitím třetí rovnice dostáváme

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\,(xyz + h(z)) = xy + h'(z) = xy.$$

Z předešlého máme

$$h'(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad h(z) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

a závěrem

$$V(x,y,z) = xyz + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Hodnota integrálu je

$$V(B) - V(A) = 6 + c - 6 - c = 0.$$

Příklad 3.9. Dokažte, že integrál

$$\int\limits_A^B x \, \mathrm{d}x + y^2 \, \mathrm{d}y - z^3 \, \mathrm{d}z$$

z bodu $A = [1,1,1]$ do bodu $B = [1,1,-1]$ nezávisí na integrační cestě a určete jeho hodnotu.

Řešení: Vektorové pole $\vec{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) = (x, y^2, -z^3)$ je třídy C^1 na plošně jednoduše souvislé oblasti $\Omega = \mathbb{R}^3$. Pro funkce P, Q, R platí

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial y}\,(x,y,z) - \frac{\partial Q}{\partial z}\,(x,y,z) &= 0 - 0 = 0,\\
\frac{\partial R}{\partial x}\,(x,y,z) - \frac{\partial P}{\partial z}\,(x,y,z) &= 0 - 0 = 0,\\
\frac{\partial Q}{\partial x}\,(x,y,z) - \frac{\partial P}{\partial y}\,(x,y,z) &= 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

pro každé $[x,y,z] \in \Omega$. Vektorové pole $\vec{f}$ je tedy na Ω potenciální a existuje potenciál V tak, že

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = y^2, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -z^3$$

pro každé $[x, y, z] \in \Omega$. Integrací první rovnice podle proměnné x dostáváme

$$V(x,y,z) = \int x \,\mathrm{d}x + g(y,z) = \frac{1}{2}x^2 + g(y,z),$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2 + g(y,z)\right) = \frac{\partial g(y,z)}{\partial y}.$$

Z předešlého a využitím druhé rovnice máme

$$\frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = y^2.$$

Integrací předešlé rovnice podle y máme

$$g(y,z) = \int y^2 \,\mathrm{d}y + h(z) = \frac{1}{3}y^3 + h(z),$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 + h(z).$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 + h(z)\right) = h'(z).$$

Z předešlého a využitím třetí rovnice dostaneme

$$h'(z) = -z^3 \quad \Longrightarrow \quad h(z) = -\frac{1}{4}z^4 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

a potenciál má tvar

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}z^4 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Hodnota integrálu je

$$V(B) - V(A) = 0.$$

Cvičení 3.5. Ověřte, že daný integrál nezávisí na integrační cestě v $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (resp. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$) a vypočtěte jeho hodnotu od bodu A do bodu B:

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, $A = [-2,-6]$, $B = [1,0]$; $\left[-\frac{1}{2}\ln 40\right]$
2. $\displaystyle\int_\gamma x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + (x+y-1)\,\mathrm{d}z$, $A = [2,3,4]$, $B = [1,1,1]$; $\left[-13\right]$

Cvičení 3.6. Ověřte, že práce v silovém poli $\overrightarrow{F}$ nezávisí na integrační cestě v $\mathbb{R}^2$ (resp. v $\mathbb{R}^3$), určete potenciál $\overrightarrow{F}(\vec{r})$ tohoto silového pole a vypočtěte práci A od bodu M do bodu N.

1. $\overrightarrow{F}(x,y) = (x\cos 2y + 1)\cdot\vec{i} - x^2\sin 2y\cdot\vec{j}$, $M = [0, -\frac{\pi}{2}]$, $N = [\frac{\pi}{2}, \pi]$;
$\left[V(x,y) = \frac{1}{2}x^2\cos 2y + x + c;\ W = \frac{1}{8}\pi(\pi+4)\right]$
2. $\overrightarrow{F}(\vec{r}) = (x^2+yz)\cdot\vec{i} + (y^2+xz)\cdot\vec{j} + (z^2+xy)\cdot\vec{k}$, $M = [1,-2,3]$, $N = [2,3,4]$.
$\left[V(x,y,z) = \frac{1}{3}\left(x^3+y^3+z^3\right) + xyz + c;\ W = \frac{169}{3}\right]$

4 Kontrolní otázky, autotest

Otázky pro vás:

- Napište integrální součet, který vyjadřuje aproximaci hmotnosti oblou-ku.
- Kdy nazveme limitu integrálních součtů křivkovým integrálem ve skalá-rním poli?
- Uveďte vztahy pro výpočet křivkového integrálu v rovinném a prostorovém skalárním poli.
- Jaké znáte základní vlastnosti křivkového integrálu ve skalárním poli?
- Vysvětlete vztahy pro výpočet základních geometrických a technických aplikací křivkového integrálu ve skalárním poli.
- Jaký tvar má integrální součet pro výpočet práce v silovém poli?
- Zapište vztahy pro výpočet křivkového integrálu ve vektorovém poli v rovině a v prostoru.
- Uveďte základní vlastnosti křivkového integrálu ve vektorovém poli.
- Zformulujte Greenovu větu.
- Užitím Greenovy věty odvoďte vztah pro výpočet plošného obsahu rovinné oblasti.
- Kdy řekneme, že křivkový integrál nezávisí na integrační cestě?
- Jak definujeme potenciál vektorového pole?
- Co je jednoduše souvislá oblast v R^2?
- Co stačí k tomu, aby rovinné vektorové pole na jednoduše souvislé oblasti bylo potenciální? Jak se změní tyto podmínky v případě prostorového vektorového pole?
- Popište postup při výpočtu potenciálu v případě rovinného a prostorového vektorového pole.
- Jak se vypočítá křivkový integrál nezávislý na integrační cestě, známe-li potenciál?

Autotest

Vzorové zadání kontrolního testu.

Matematika, 2. semestr Zpracoval:
Test č. 4 Jméno: ....

Adresa: ....

A. Vypočtěte křivkové integrály 1. druhu po dané křivce γ:

1) $\int_\gamma (x+y)\,\mathrm{d}s$, kde γ je obvod trojúhelníka s vrcholy $A=[1,-1]$, $B=[2,-1]$ a $C=[1,0]$;

2) $\int_\gamma (\dfrac{z^2}{(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}s$, kde γ je oblouk šroubovice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$, $a>0$;

3) $\int_\gamma xy\,\mathrm{d}s$, kde γ je elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ pro $x\geq 0$, $y\geq 0$, $a,b>0$.

B. Vypočtěte křivkové integrály 2 druhu po dané křivce γ:

4) $\int_\gamma x\,\mathrm{d}x\ +\ y\,\mathrm{d}y\ +\ (x+y-1)\,\mathrm{d}z$, kde γ je orientovaná úsečka $A=[1,1,1]$, $B=[2,3,4]$;

5) $\int_\gamma (y^2-x^2)\,\mathrm{d}x\ +\ (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$, kde γ je orientovaná křivka $x+|y-1|=1$ pro $0\leq y\leq 2$ s koncovým bodem $B=[0,2]$;

6) $\int_\gamma xy\,\mathrm{d}x\ +\ y^2\,\mathrm{d}y$, kde γ je oblouk AB křivky $y=\operatorname{arctg} x$ od bodu $A=[1,?]$ do bodu $B=[0,?]$.

C. Ověřte, že daný integrál nezávisí na integrační cestě a vypočtěte jeho hodnou od bodu A do bodu B:

7) $\int_\gamma \dfrac{1-y^2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\ +\ \dfrac{2y}{1+x}\,\mathrm{d}y$, $A=[0,0]$, $B=[1,1]$;

8) $\int_\gamma xz^2\,\mathrm{d}x\ +\ y^3\,\mathrm{d}y\ +\ x^2z\,\mathrm{d}z$, $A=[-1,1,2]$, $B=[-4,2,-1]$.

D. Ověřte, že jsou splněny podmínky pro užití Greenovy věty a užijte ji k výpočtu integrálů:

9) $\int_\gamma (x+y)^2 \,\mathrm{d}x \; - \; (x+y)^2 \,\mathrm{d}y$, kde γ je kladně orientovaný obvod trojúhelníka ABC, $A = [0,0]$, $B = [1,0]$ a $C = [0,1]$;

10) $\int_\gamma (xy + x + y) \,\mathrm{d}x \; + \; (xy + x - y) \,\mathrm{d}y$, kde γ je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$ konstanta.

E. Vypočtěte délku křivky γ, je-li:

11) $\gamma : \; \vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + vt\vec{j} + a\sin t\vec{k}$, $0 \le t \le \pi/4$, $a, v > 0$ konstanty.

F. Vypočtěte obsah rovinného obrazce A, je-li

12) $A \; = \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \; 3x^2 + 4y^2 \le 12, \; x \le 2y \le 3x\Big\}$.

G. Vypočtěte hmotnost křivky γ, je-li hustota křivky $\sigma(\vec{r})$:

13) $\gamma : \; y = \sqrt{x^3}$ pro $0 \le x \le 4/9$, $\sigma(x,y) \equiv x$.

H. V každém bodě silového pole v $\mathbb{R}^3$ působí síla $\overrightarrow{F}(\vec{r})$. Vypočítejte práci tohoto pole při pohybu hmotného bodu po orientované křivce γ:

14) $\gamma \; : \; \vec{r}(t) \; = \; (\cos t, \; \sin t, \; ct)$ orientované souhlasně s daným parametrickým vyjádřním pro $t \in \langle 0, \pi\rangle$; $\overrightarrow{F}(\vec{r}) \equiv y \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + yz \cdot \vec{k}$.

př.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$	opravil(a)
max. bodů	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	14	
zís. bodů																

5 Studijní prameny.

[1] Brabec, J., Hrůza, B.: *Matematická analýza* II., SNTL, Praha 1986.

[2] Drábek, P., Míka, S.: *Matematická analýza* II., FAV, Plzeň 1997, 2. vydání.

[3] Fichtěngolc G.M.: *Kurs diferencialnovo i integralnovo isčislenija* III., Nauka, Moskva 1966, 4. vydání.

[4] Rektorys, K. a kol.: *Přehled užité matematiky* I., Prometheus, Praha 1995, 6. přepracované vydání.

[5] Škrášek, J., Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky* II., SNTL, Praha 1986.

[6] Ženíšek, A.: *Křivkový a plošný integrál*, PC-DIR, Brno 1997.