VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

MATEMATIKA II

MODUL 1

DVOJNÝ A TROJNÝ INTEGRÁL

STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

Typeset by LaTeX 2_ε

Obsah

1 Dvojný integrál

1.1 Úvod

1.1.1 Cíle kapitoly

Tato kapitola Vás seznámí:

- s konstrukcí Riemannových integrálních součtů pro funkci dvou proměnných na dvojrozměrném intervalu a jejich využitím pro definici dvojného integrálu. Je zapotřebí dobře zvládnout Fubiniovu větu, která nám umožní převádět dvojné integrály na dvojnásobné. Pro její použití musíte umět popsat oblasti prvního a druhého druhu a základní vlastnosti dvojného integrálu.

- s větou o transformaci dvojného integrálu.
  Je zapotřebí ji umět použít zejména při transformaci do zobecněných polárních souřadnic nebo při transformaci posunutí. Pro tyto transformace je také potřebné umět odvodit jakobián.

- se základními geometrickými a fyzikálními aplikacemi dvojného integrálu.
  Měli byste znát vztahy pro výpočet a umět je zdůvodnit na základě integrálních součtu a vlastností dvojných integrálů.

1.1.2 Požadované znalosti

Pro zvládnutí dvojných integrálů je nezbytné dobře zvládnout problematiku modulu Určitý integrál.

1.1.3 Doba potřebná ke studiu

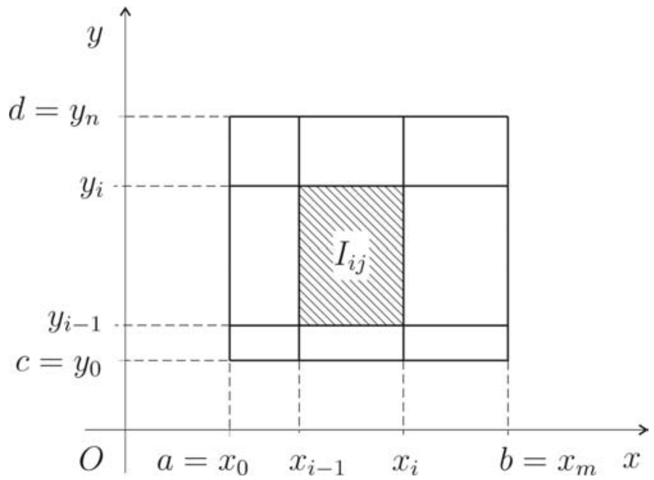
Přibližně lze odhadnout potřebnou dobu ke studiu dvojného integrálu na 15 hodin. Pro získání zkušeností a zručnosti ve výpočtu bude ještě zřejmě zapotřebí další čas závislý na dosavadní početní praxi studenta.

1.1.4 Klíčová slova

Dělení dvojrozměrného intervalu, norma dělení, Riemannův integrální součet, dvojný Riemannův integrál, funkce integrabilní na intervalu, dvojnásobný integrál, Fubiniho věta, oblast prvního a druhého druhu v R^2, základní vlastnosti dvojného integrálu, Jacobiho matice, jakobián, věta o transformaci dvojného integrálu, zobecněné polární souřadnice, geometrické a fyzikální aplikace dvojného integrálu.

1.2 Dvojný integrál na dvojrozměrném intervalu

Uvažujme interval $I = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \subset \mathbb{R}^2$ a nechť D_m^x, resp. D_n^y je dělení $\langle a,b\rangle$, resp. $\langle c,d\rangle$ s dělicími body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ a $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$. Uspořádanou dvojici (D_m^x, D_n^y) (pro stručnost budeme značit tuto dvojici D_{mn}) nazýváme *dělením intervalu* I (viz Obr.1). Každý interval $I_{ij} = \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$ nazýváme *částečným intervalem* dělení D_{mn}. Říkáme, že systém intervalů I_{ij} pokrývá interval I.
Obsah (míru) intervalu I_{ij} definujeme $\mu(I_{ij}) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$. Výraz $\nu(D_{mn}) = \max\{\nu(D_m^x), \nu(D_n^y)\}$ nazýváme *normou dělení*.



Obrázek 1: Dělení intervalu.

Definice 1.1. Nechť f je ohraničená funkce na I, D_{mn} dělení I s dělicími body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ a $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$. Označme $N(D_{mn})$ množinu všech mn-tic bodů $M_{ij} \in I_{ij}$. Číslo

$$S\left(f, D_{mn}, N(D_{mn})\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(M_{ij}\right) \mu(I_{ij})$$

nazýváme *Riemannovým integrálním součtem* funkce f příslušným dělení D_{mn} a mn-tici bodů z $N(D_{mn})$.

V dalším se budeme ptát, zda existuje

$$\lim_{\nu(D_{mn})\to 0} S\left(f, D_{mn}, N(D_{mn})\right).$$

Definice 1.2. Řekneme, že funkce f má na $I \subset \mathbb{R}^2$ *dvojný Riemannův integrál* právě tehdy, když existuje konečná limita

$$\lim_{\nu(D_{mn})\to 0} S\left(f, D_{mn}, N(D_{mn})\right),$$

která nezávisí jak na volbě posloupnosti (D_{mn}), tak na výběru mn-tic bodů z $N(D_{mn})$. Tuto limitu značíme

$$\iint_I f\left(x, y\right)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Jestliže integrál existuje, řekneme, že funkce f je *integrabilní* (*integrovatelná*) na intervalu I, a píšeme $f \in \mathcal{R}(I)$.

Následující věta nám zaručuje existenci integrálu:

Věta 1.1. *Každá funkce spojitá na intervalu $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \subset \mathbb{R}^2$ je integrovatelná.*

Věta 1.2. *Nechť f je integrovatelná na $I = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \subset \mathbb{R}^2$.*

(a) Jestliže pro každé $x \in \langle a_1, b_1\rangle$ existuje

$$J\left(x\right) = \int_{a_2}^{b_2} f\left(x, y\right)\, \mathrm{d}y,$$

pak platí

$$\iint_I f\left(x, y\right)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{b_1} J\left(x\right)\, \mathrm{d}x = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_c^d f\left(x, y\right)\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x. \tag{1}$$

(b) Jestliže pro každé $y \in \langle a_2, b_2\rangle$ existuje

$$K\left(y\right) = \int_{a_1}^{b_1} f\left(x, y\right)\, \mathrm{d}x,$$

pak platí

$$\iint_I f\left(x, y\right)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a_2}^{b_2} K\left(y\right)\, \mathrm{d}y = \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f\left(x, y\right)\, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y. \tag{2}$$

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro funkci spojitou na intervalu I. Z Věty o integrálech závislých na parametru plyne, že funkce

$$J(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \, \mathrm{d}y$$

je na intervalu $\langle a_1, b_1 \rangle$ spojitá a tedy integrabilní. Uvažujme dělení intervalu $I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle$ uvedené v definici dvojného integrálu. Pak platí

$$J(\xi_k) \, \Delta x_k = \left(\int_{a_2}^{b_2} f(\xi_k, y) \, \mathrm{d}y \right) \Delta x_k = \left(\sum_{l=1}^{n} \int_{y_{l-1}}^{y_l} f(\xi_k, y) \, \mathrm{d}y \right) \Delta x_k.$$

Dle věty o střední hodnotě pro jednorozměrný integrál lze psát

$$\int_{y_{l-1}}^{y_l} f(\xi_k, y) \, \mathrm{d}y = f(\xi_k, \eta_l) \, \Delta y_l.$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} J(\xi_k) \, \Delta x_k &= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{n} \int_{y_{l-1}}^{y_l} f(\xi_k, y) \, \mathrm{d}y \right) \Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{n} f(\xi_k, \eta_l) \, \Delta y_l \right) \Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} f(\xi_k, \eta_l) \, \mu(I_{kl}), \end{aligned}$$

a to je integrální součet pro

$$\iint_I f(x, y) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Poznámka 1.1. Integrály v koncových členech řetězců rovností (1) a (2) se nazývají *dvojnásobné*.

Příklad 1.1. Vypočtěte integrál $\iint_I y e^{xy} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ na $I = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle \subset \mathbb{R}^2$.

Řešení: Funkce $y \, e^{xy}$ je spojitá na I a podle Věty 1.1 integrál existuje.

$$\begin{aligned} \iint_I y \, e^{xy} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_1^2 \left(\int_0^1 y \, e^{xy} \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_1^2 K(y) \, \mathrm{d}y. \\ K(y) &= y \int_0^1 e^{xy} \, \mathrm{d}x = y \left[\frac{1}{y} e^{xy} \right]_0^1 = e^y - 1. \\ \int_1^2 K(y) \, \mathrm{d}y &= \int_1^2 (e^y - 1) \, \mathrm{d}y = [e^y - y]_1^2 = e^2 - e - 1. \end{aligned}$$

Poznámka 1.2. Dá se jednoduše ukázat, že pokud f je integrovatelná funkce typu

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad \text{pro } [\mathrm{x},\mathrm{y}] \in \langle \mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1 \rangle \times \langle \mathrm{a}_2, \mathrm{b}_2 \rangle,$$

můžeme v řetězcích rovností (1)–(2) dále psát:

$$\iint_I f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a_2}^{b_2} K(y)\, \mathrm{d}y = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \mathcal{J}_1 \cdot \mathcal{J}_2$$

a

$$\iint_I f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{b_1} J(x)\, \mathrm{d}x = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{c}^{d} f(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \mathcal{J}_1 \cdot \mathcal{J}_2,$$

kde

$$\mathcal{J}_i = \int_{a_i}^{b_i} f_i(u)\, \mathrm{d}u \quad \text{pro i} = 1, 2.$$

Příklad 1.2. Vypočtěte integrál $\iint_I e^{x+y}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ na $I = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \subset \mathbb{R}^2$.

Řešení: Funkce $f(x,y) \equiv e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ je spojitá na I a podle Věty 1.1 integrál existuje. Ve smyslu předchozí poznámky pak máme:

$$\begin{aligned} \iint_I e^x \cdot e^y\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^1 e^x \cdot e^y\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \left(\int_0^1 e^u\, \mathrm{d}u \right)^2 = (e-1)^2. \end{aligned}$$

1.3 Dvojný integrál na oblastech prvního a druhého druhu v $\mathbb{R}^2$.

Zavedeme pojem elementární oblasti v rovině:

Elementární oblast I. druhu v rovině je množina

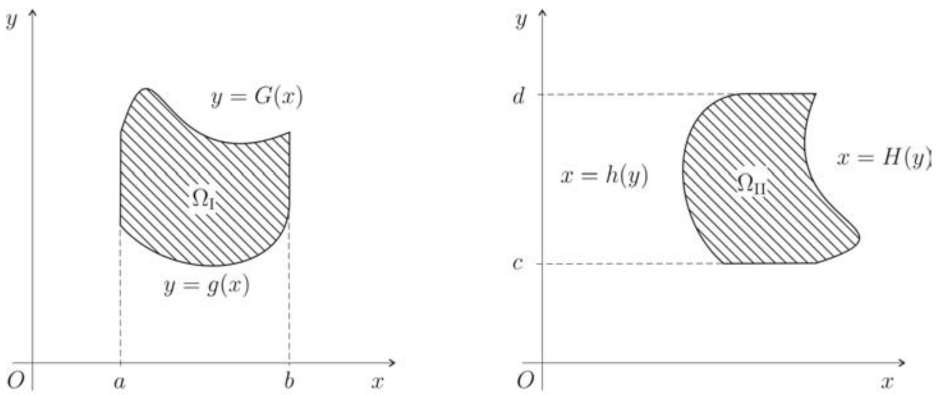
$$\Omega_I = \left\{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, g(x) < y < G(x) \right\},$$

kde g a G jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$ a $g(x) \leq G(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$.

Elementárníoblast II. druhu v rovině je množina

$$\Omega_{II} = \left\{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, h(y) < x < H(y) \right\},$$

kde h a H jsou spojité funkce na intervalu $\langle c, d \rangle$ a $h(y) \leq H(y)$ pro každé $y \in \langle c, d \rangle$.



Elementární oblasti I. a II. druhu v rovině.

Poznámka 1.3. *Všude v dalším textu této kapitoly budeme místo elementární oblast I. nebo II. druhu v rovině zkráceně mluvit o oblasti I. nebo II. druhu.*

Cvičení 1.1. Zakreslete dané množiny:

1. $A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le y,\ y \le 1\right\};$
2. $B = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 \le y \le x\right\};$
3. $\Omega = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 < 2x\right\};$
4. $C = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 :\ 1/x < y < 2/x,\ 2y < x < 3y,\ x > 0,\ y > 0\right\};$
5. $D = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 :\ 1 < x^2 + y^2 < 4,\ x > 0,\ y > 0\right\}.$

Průvodce studiem
Předchozí látka je velice důležitá! Nikdy nespočtete dvojný integrál, pokud nemáte správnou představu o integračním oboru. Proto byste neměli dále pokračovat, dokud si určování oblastí I. a II. druhu řádně neprocvičíte.

Věta 1.3. (Fubiniho věta)

(a) Nechť existuje $\displaystyle\iint\limits_{\Omega_I} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *a pro každé* $x \in \langle a, b\rangle$ *nechť existuje integrál*

$$J(x) = \int\limits_{g(x)}^{G(x)} f(x, y)\ \mathrm{d}y.$$

Pak existuje také dvojnásobný integrál

$$\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{G(x)} f(x, y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

a platí rovnosti

$$\iint_{\Omega_I} f(x, y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b J(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{G(x)} f(x, y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

(b) *Nechť existuje* $\iint_{\Omega_{II}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *a pro každé* $y \in \langle c, d\rangle$ *existuje integrál*

$$K(y) = \int_{h(y)}^{H(y)} f(x, y)\ \mathrm{d}x.$$

Pak existuje také dvojnásobný integrál

$$\int_c^d \left(\int_{h(y)}^{H(y)} f(x, y)\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

a platí rovnosti

$$\iint_{\Omega_{II}} f(x, y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d K(y)\ \mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{h(y)}^{H(y)} f(x, y)\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Věta 1.4. *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *je elementární oblast prvního nebo druhého druhu a nechť funkce* f *je na* Ω *spojitá a ohraničená. Pak je funkce* f *na* Ω *integrabilní.*

Poznámka 1.4. Integrovatelnost a hodnota dvojného integrálu nezávisí na chování funkce v konečném počtu bodů integračního oboru, nebo na sjednocení konečného počtu křivek konečné délky. Je tedy v předešlých větách nepodstatné, jestli integrujeme přes otevřený integrační obor, nebo jestli přidáme k tomuto oboru jakoukoliv část hranice oboru.

Příklad 1.3. Vypočtěte integrál

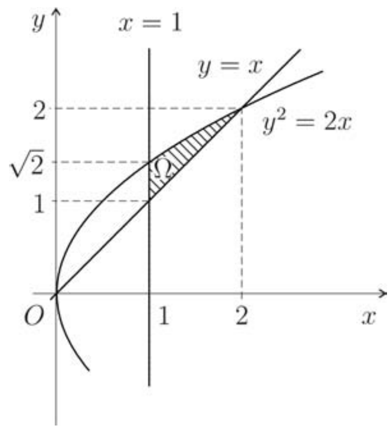
$$\iint_{\Omega} \frac{y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < y,\ y^2 < 2x\}$.

Řešení: Množina Ω je oblast prvního druhu v $\mathbb{R}^2$ a funkce $y/(x^2+y^2)$ je na Ω spojitá a ohraničená. Podle Věty 1.4 integrál existuje a můžeme na výpočet použít Větu 1.3.

$$\int_1^2 \left(\int_x^{\sqrt{2x}} \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_1^2 J(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned} J(x) &= \left| \begin{array}{rcl} u &=& x^2+y^2 \\ y\,\mathrm{d}y &=& \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u \\ y &=& x..\sqrt{2x} \\ u &=& 2x^2..x^2+2x \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \int_{2x^2}^{x^2+2x} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \Big[\ln|u| \Big]_{2x^2}^{x^2+2x} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\ln(x^2+2x) - \ln(2x^2) \Big) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+2}{2x}. \end{aligned}$$



$$\int_1^2 \left(\int_x^{\sqrt{2x}} \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_1^2 \Big[\ln(x+2) - \ln(2x) \Big]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(5\ln 2 - 3\ln 3\right).$$

Věta 1.5. (*Základní vlastnosti dvojného integrálu.*) *Nechť Ω, Ω_1, Ω_2 jsou oblasti prvního nebo druhého druhu a nechť f, $g \in \mathcal{R}(\Omega)$ (tzn. f a g jsou funkce integrovatelné na Ω). Pak platí:*

(a)

$$\iint_\Omega \Big(f(x,y) + g(x,y) \Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(b)

$$\iint_\Omega k f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = k \iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $k \in \mathbb{R}$.

(c) Jestliže pro každé $[x,y] \in \Omega$ platí $f(x,y) \le g(x,y)$, pak

$$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(d) $|f| \in \mathcal{R}(\Omega)$ *a platí*

$$\left| \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \leq \iint\limits_{\Omega} |f(x,y)|\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(e) Jestliže pro každé $[x,y] \in \Omega$ *platí že* $|f(x,y)| \leq M$, *pak*

$$\left| \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \leq \iint\limits_{\Omega} |f(x,y)|\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq M\mu(\Omega).$$

(f) Jestliže $\operatorname{int}\Omega_1 \cap \operatorname{int}\Omega_2 = \emptyset$, $f \in \mathcal{R}(\Omega_1)$ *a* $f \in \mathcal{R}(\Omega_2)$, *pak je funkce* f *integrovatelná na* $\Omega_1 \cup \Omega_2$ *a platí*

$$\iint\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Omega_2} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(g) $f \cdot g \in \mathcal{R}(\Omega)$.

(h) Jestliže je funkce f *spojitá na* $\overline{\Omega}$, *pak existuje bod* $[\xi,\eta] \in \overline{\Omega}$ *tak, že*

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\,\mu(\Omega).$$

Poznámka 1.5. Symbolem $\mu(\Omega)$ budeme v této kapitole rozumět míru (obsah) elementární oblasti Ω.
Symbolem $\operatorname{int}\Omega$ značíme tzv. *vnitřek množiny* Ω. Je to zjednodušeně řečeno ,,množina Ω uvažovaná bez své hranice".
Symbolem $\overline{\Omega}$ značíme tzv. *uzávěr množiny* Ω. Je to zjednodušeně řečeno ,,množina Ω uvažovaná spolu se svou hranicí".

Úkol pro vás: Ukažte, že z tvrzení *h*) Věty 1.5 plyne následující jednoduchý důsledek:

$$\mu(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Cvičení 1.2. Graficky znázorněte obory integrace a spočtěte integrály:

1. $\iint\limits_{M} |x|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y,\ 4x^2 + y^2 < 12\right\}$; $\left[4\sqrt{3} - \frac{10}{3}\right]$
2. $\iint\limits_{M} e^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y > 1,\ y < 2,\ x > 0,\ y > \sqrt{x}\right\}$; $\left[e^2 - \frac{3}{2}\right]$

3. $\displaystyle\iint\limits_M \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x < 3,\ \dfrac{1}{x} < y < 4x\right\}$; $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{5}{12} - \ln 2\right)\right]$

4. $\displaystyle\iint\limits_M \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < y,\ y^2 < 2x\right\}$. $\left[\frac{1}{2}\left(5 \ln 2 - 3 \ln 3\right)\right]$

1.4 Transformace dvojného integrálu

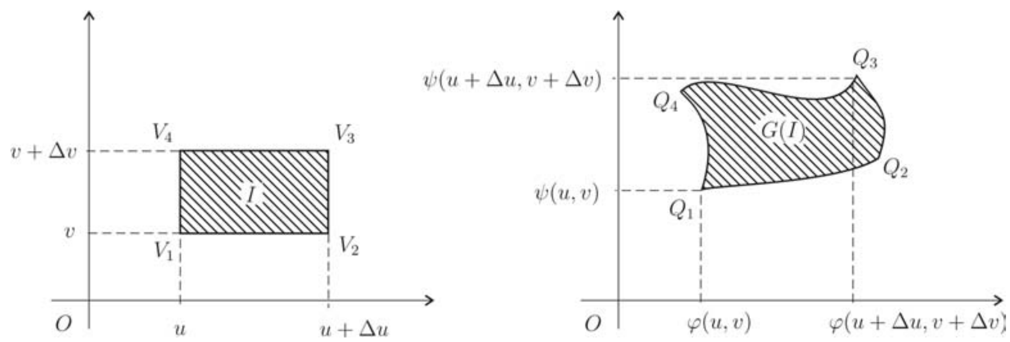
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Uvažujme funkce $\varphi, \psi :\ \Omega \to \mathbb{R}$ a $G :\ \Omega \to \mathbb{R}^2$, $G = (\varphi, \psi)$ takové, že:

a) $\varphi, \psi \in C^1(\Omega)$, tj. φ, ψ jsou spojitě diferencovatelné na Ω;

b) $G = (\varphi, \psi)$ je prosté zobrazení, tj. pro všechna $[u_0, v_0], [u_1, v_1] \in \Omega$ platí: Jestliže $[u_0, v_0] \neq [u_1, v_1]$, pak $G(u_0, v_0) \neq G(u_1, v_1)$.

Uvažujme libovolný dvojrozměrný interval (tj. obdélník) $I \subset \Omega$ o vrcholech V_1, V_2, V_3 a V_4 a stranách délky Δu, Δv. Transformací $G = (\varphi, \psi)$ se zobrazí obdélník I na „křivočarý obdélník" $I^* = G(I)$ o vrcholech Q_1, Q_2, Q_3 a Q_4:

$$\begin{array}{lcl}
V_1 = [u, v] & \mapsto & Q_1 = [\varphi(u,v), \psi(u,v)], \\
V_2 = [u + \Delta u, v] & \mapsto & Q_2 = [\varphi(u + \Delta u, v), \psi(u + \Delta u, v)], \\
V_3 = [u + \Delta u, v + \Delta v] & \mapsto & Q_3 = [\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), \psi(u + \Delta u, v + \Delta v)], \\
V_4 = [u, v + \Delta v] & \mapsto & Q_4 = [\varphi(u, v + \Delta v), \psi(u, v + \Delta v)].
\end{array}$$



V dalším se pokusíme alespoň přibližně spočítat obsah obrazce $G(I)$.

S použitím Taylorovy věty máme:

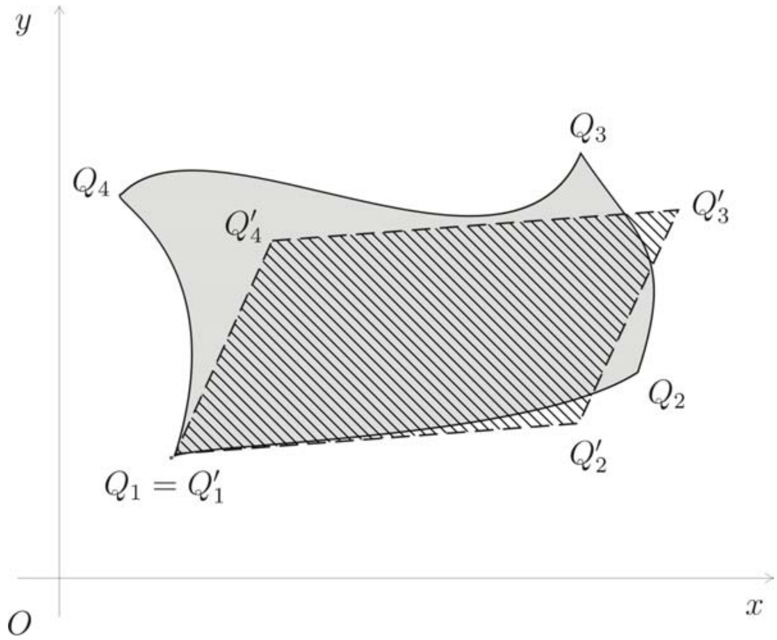
$$\begin{aligned}
\varphi(u + \Delta u, v) &= \varphi(u,v) + \varphi'_u(u,v) \cdot \Delta u + R, \\
\varphi(u, v + \Delta v) &= \varphi(u,v) + \varphi'_v(u,v) \cdot \Delta v + R, \\
\psi(u + \Delta u, v) &= \psi(u,v) + \psi'_u(u,v) \cdot \Delta u + R, \\
\psi(u, v + \Delta v) &= \psi(u,v) + \psi'_v(u,v) \cdot \Delta v + R, \\
\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v) &= \varphi(u,v) + \varphi'_u(u,v) \cdot \Delta u + \varphi'_v(u,v) \cdot \Delta v + R, \\
\psi(u + \Delta u, v + \Delta v) &= \psi(u,v) + \psi'_u(u,v) \cdot \Delta u + \psi'_v(u,v) \cdot \Delta v + R,
\end{aligned}$$

kde $R = R((\Delta u)^2, (\Delta v)^2, \Delta u \Delta v)$ jsou zbytky v Taylorově vzorci, které označíme ve všech předešlých výrazech stejně.

Všechny zbytky v naší úvaze zanedbáme a budeme uvažovat pouze body

$$
\begin{aligned}
&Q'_1 = Q_1,\\
&Q'_2 = Q_1 + [\varphi'_u(u,v)\cdot\Delta u,\ \psi'_u(u,v)\cdot\Delta u]\,,\\
&Q'_3 = Q_1 + [\varphi'_u(u,v)\cdot\Delta u + \varphi'_v(u,v)\cdot\Delta v,\ \psi'_u\Delta u + \psi'_v(u,v)\cdot\Delta v]\,,\\
&Q'_4 = Q_1 + [\varphi'_v(u,v)\cdot\Delta v,\ \psi'_v(u,v)\cdot\Delta v]\,.
\end{aligned}
$$

Obsah křivočarého lichoběžníka $G(I)$ je přibližně roven obsahu rovnoběžníka $Q'_1Q'_2Q'_3Q'_4$ o stranách $Q'_1Q'_2$ a $Q'_1Q'_4$.



Obsah tohoto rovnoběžníka je roven dvojnásobku obsahu $\Delta Q'_1Q'_2Q'_4$, což z analytické geometrie je absolutní hodnota z determinantu

$$
\left| det \begin{pmatrix} x'_2 - x'_1 & y'_2 - y'_1 \\ x'_4 - x'_1 & y'_4 - y'_1 \end{pmatrix} \right|,
$$

kde $Q'_1 = [x'_1, y'_1]$, $Q'_2 = [x'_2, y'_2]$, $Q'_4 = [x'_4, y'_4]$. Po dosazení máme

$$
\begin{aligned}
\left| det \begin{pmatrix} \varphi'_u(u,v)\cdot\Delta u, & \psi'_u(u,v)\cdot\Delta u \\ \varphi'_v(u,v)\cdot\Delta v, & \psi'_v(u,v)\cdot\Delta v \end{pmatrix} \right| &= \left| det \begin{pmatrix} \varphi'_u(u,v)\cdot\Delta u, & \varphi'_v(u,v)\cdot\Delta v \\ \psi'_u(u,v)\cdot\Delta u, & \psi'_v(u,v)\cdot\Delta v \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| det \begin{pmatrix} \varphi'_u, & \varphi'_v \\ \psi'_u, & \psi'_v \end{pmatrix} \right| |\Delta u|\,|\Delta v|\,.
\end{aligned}
$$

Matice

$$\mathcal{J}(u,v) = \begin{pmatrix} {\varphi'}_u(u,v), & {\varphi'}_v(u,v) \\ {\psi'}_u(u,v), & {\psi'}_v(u,v) \end{pmatrix}$$

se nazývá *Jacobiho matice* transformace $G = (\varphi, \psi)$. Determinant

$$J(u,v) = det\, \mathcal{J}(u,v)$$

z této matice se nazývá *jakobián* této transformace.

Dospěli jsme k jedné z nejdůležitějších vět této kapitoly:

Věta 1.6. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $G = (\varphi, \psi) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je prosté zobrazení takové, že φ, $\psi \in C^1(\Omega)$ a jakobián $J(u,v) \neq 0$ v každém bodě $[u,v] \in \Omega$. Nechť $K \subset \Omega$ je uzavřená množina, která je sjednocením konečného počtu elementárních oblastí prvního nebo druhého druhu, a funkce f je spojitá na $G(\Omega)$. Pak platí*

$$\iint\limits_{G(K)} f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{K} f(\varphi(u,v), \psi(u,v))\, |J(u,v)|\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Poznámka 1.6. Věta zůstane v platnosti, pokud zobrazení G nebude prosté, nebo jakobián bude roven nule na podmnožinách množiny K uvedených v Poznámce 1.4, budou-li jejich obrazy při zobrazení G opět množiny uvedených typů v $G(K)$. Pokud funkce f bude ohraničená na $G(K)$, pak také stačí, aby f byla spojitá na $G(K)$ s výjimkou množin uvedených v Poznámce 1.4.

Poznámka 1.7. Účelem transformace je zjednodušit integrační obor nebo integrovanou funkci. Nejlepší alternativou je, když se podaří zlepšit obojí.

Příklad 1.4. S použitím transformace

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{uv} \equiv \varphi(u,v)\,, \\ y &= \sqrt{\tfrac{u}{v}} \equiv \psi(u,v) \end{aligned}$$

vypočtěte integrál

$$\iint\limits_{\Omega} \operatorname{arctg}(xy)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $\Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 1/x < y < 2/x,\ 2y < x < 3y,\ x > 0,\ y > 0\}$.
Rešení: Funkce $\operatorname{arctg}(xy)$ je spojitá a ohraničená na Ω a podle Věty 1.4 integrál existuje.
Daná transformace $G(\varphi, \psi)$ zobrazuje množinu $(a,b) \times (c,d)$, $0 < a < b$, $0 < c < d$ vzájemně jednoznačně na množinu $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : a < xy < b, c < x/y < d\}$.

Spočtěme jakobián transformace G:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \\ \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2v}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2v}.$$

Úplný vzor množiny Ω je množina

$$\Omega^* = \left\{[u,v] \in \mathbb{R}^2 : 1 < u < 2,\ 2 < v < 3\right\}.$$

Potom podle předchozí věty máme:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Omega} \operatorname{arctg}(xy)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \left(\int\limits_2^3 \frac{\operatorname{arctg} u}{v}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\left[u \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\left(2\operatorname{arctg} 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{2}{5} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Průvodce studiem
Předchozí příklad ukázal, že při zavádění transformačních vztahů se fantazii meze nekladou.
Ve vaší budoucí inženýrské praxi se ale budete pravděpodobně potkávat s daleko prozaičtějšími transformacemi. Proto je čas uvést ty nejdůležitější a naučit se s nimi dokonale pracovat.

Nejdůležitější typy transformací:

Posunutí. Je dáný bod $[u_0, v_0]$. Transformace $G = (\varphi, \psi)$ daná vztahy

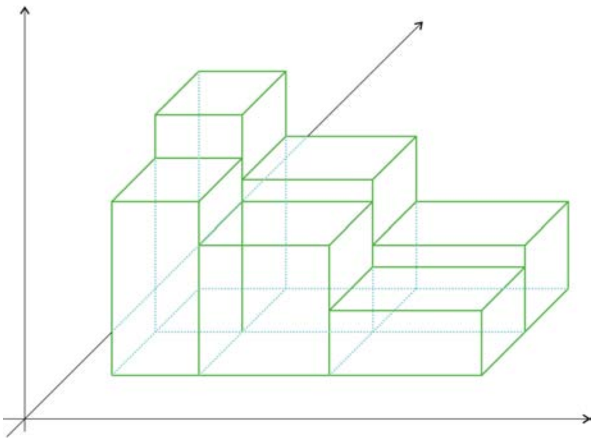
$$\begin{aligned} x &= u_0 + u \equiv \varphi(u,v), \\ y &= v_0 + v \equiv \psi(u,v) \end{aligned}$$

posouvá bod $[x,y]$ o orientovanou vzdálenost u_0 ve směru souřadnicové osy x a o orientovanou vzdálenost ve směru souřadnicové osy y.

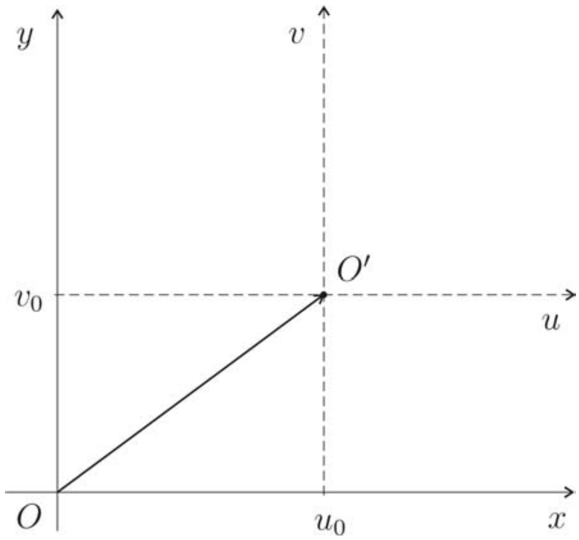
Úkol pro vás: Spočtete jakobián transformace posunutí.

Řešení:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$



Obrázek 2: Integrální součet.



Obrázek 3: Transformace posunutí.

Zobecněné polární souřadnice. Jsou dány konstanty a, $b > 0$.

Transformace do zobecněných polárních souřadnic je dána vztahy:

$$\begin{aligned} x &= ar\cos t \equiv \varphi\left(r,t\right), \\ y &= br\sin t \equiv \psi\left(r,t\right). \end{aligned}$$

$$J\left(r,t\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial r} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial\psi}{\partial r} & \frac{\partial\psi}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos t & -ar\sin t \\ b\sin t & br\cos t \end{vmatrix} = abr.$$

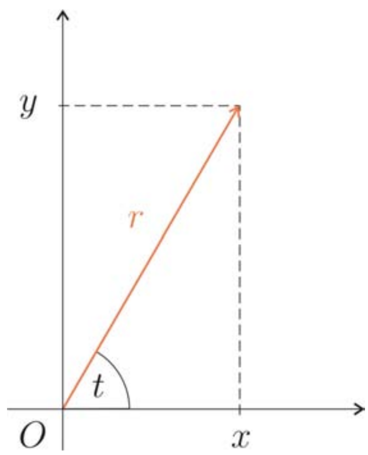
Tato transformace $G = (\varphi, \psi)$ zobrazuje množinu $(0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ vzájemně jednoznačně na množinu $\mathbb{R}^2 \setminus \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \le 0, y = 0\}$.

Inverzní zobrazení G^{-1} je dáno vztahy

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$t = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} & x \le 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} & x \le 0, y < 0 \end{cases}$$

Poznámka 1.8. Speciální případ nastává pro volbu parametrů $a = b = 1$. V takovém případě mluvíme o polárních souřadnicích (vypouštíme přívlastek zobecněné). Geometrický význam polárních souřadnic je popsán na Obrázku 4.



Obrázek 4: Polární souřadnice.

Příklad 1.5. S použitím transformace do polárních souřadnic vypočtěte integrál

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\ln\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $\Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : r_1^2 < x^2 + y^2 < r_2^2,\ x > 0,\ y > 0\}$, $0 < r_1 < r_2$.
Řešení: Funkce $\ln(x^2+y^2)/(x^2+y^2)$ je spojitá a ohraničená na Ω a podle Věty 1.4 integrál existuje. Použijeme transformace do polárních souřadnic podle Věty 1.6. Vzor množiny Ω je množina $\{[r,t] \in \mathbb{R}^2 : r_1 < r < r_2, 0 < t < \pi/2\}$.

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{\Omega} \frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int\limits_{r_1}^{r_2}\left(\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\ln r^2}{r}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{\ln r}{r}\,\mathrm{d}r \\
&= \left|\begin{array}{ll} \ln r = s & r = r_1 | r_2 \\ \frac{1}{r}\,dr = ds & s = \ln r_1 | \ln r_2 \end{array}\right| = \pi \int\limits_{\ln r_1}^{\ln r_2} s\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\ln^2 r_2 - \ln^2 r_1\right) = \frac{\pi}{2}\ln\left(r_1 r_2\right)\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).
\end{aligned}
$$

Průvodce studiem
Ze své předchozí početní praxe víte, že při výpočtu určitého integrálu užitím substitučních metod jste často museli substituovat opakovaně. Transformace dvojného integrálu, jak s ní v této kapitole pracujeme, je jenom jistou vícerozměrnou analogií substituční metody pro výpočet určitého integrálu funkce jedné proměnné. Proto se dá čekat, že při řešení některých úloh se setkáme s nutností vhodně kombinovat transformace různých typů.

Příklad 1.6. Kombinací transformace posunutím a převedením do polárních souřadnic spočtěte integrál

$$I = \iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $\Omega = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 < 2x\right\}$.
Řešení: S daným oborem integrace jste se setkali už ve Cvičení 1.1. Jedná se o otevřený kruh se středem v bodě $[1,0]$ a poloměrem $R = 1$.
Pokud si připomeneme tvrzení z Úkolu 1.3 v předchozí části tohoto modulu, hned vidíme, že $I = \pi$. Takže už víme, jaký výsledek vyjde, a mohli bychom s počítáním skončit. Ale neskončíme, protože si chceme procvičit transformování dvojných integrálů.

V první kroku transformujeme náš posunutý kruh na kruh symetrický podle počátku souřadnicového systému:

$$
\begin{aligned}
x &= 1 + u, \\
y &= v.
\end{aligned}
$$

Potom podle Věty 1.6

$$I = \iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega^*} \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

kde $\Omega^* = \Big\{[u,v] \in \mathbb{R}^2 : \ u^2+v^2<1\Big\}$.
Přechodem do polárních souřadnic v dalším kroku převedeme jednotkový kruh na dvojrozměrný interval (obdélník):

$$\begin{aligned} &u = r\cos t\\ &v = r\sin t\\ &|J(u,v)| = |r| = r \quad \text{pro r} \in (0,\infty) \end{aligned}$$

a tedy podle Věty 1.6

$$I = \iint\limits_{\Omega^{**}} r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}t,$$

kde $\Omega^{**} = \Big\{[r,t] \in \mathbb{R}^2 : \ 0<r<1, \ -\pi<t<\pi\Big\}$. Potom s využitím výsledku z Poznámky 1.2 máme hodnotu integrálu

$$I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \ \cdot \ \int\limits_{0}^{1} r\,\mathrm{d}r = 2\pi\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^1 = \pi.$$

Cvičení 1.3. Graficky znázorněte obory integrace a užitím vhodných transformací spočtěte integrály:

1. $\iint\limits_M \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2<ax\Big\}$; $\left[\frac{a^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)\right]$
2. $\iint\limits_M |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2<a^2\Big\}$; $\left[\frac{1}{2}a^4\right]$
3. $\iint\limits_M \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ x>0, y>0, x^2+y^2<1\Big\}$; $\left[\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}\right]$
4. $\iint\limits_M (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2<1\Big\}$. $\left[\pi\left(1-\frac{2}{e}\right)\right]$

1.5 Geometrické a fyzikální aplikace dvojného integrálu

V dalším budeme předpokládat, že Ω může být sjednocením konečného počtu elementárních oblastí prvního nebo druhého druhu.

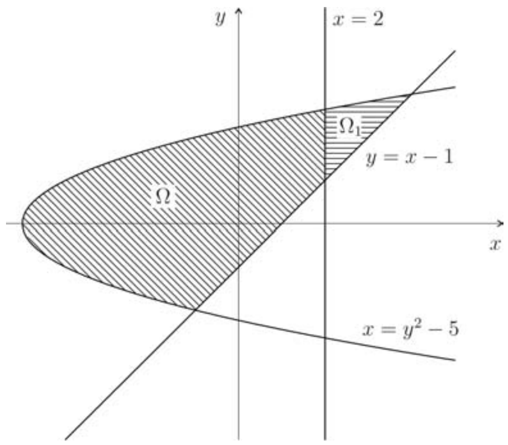
1.5.1 *Obsah rovinného obrazce*

Obsah rovinného obrazce $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se spočte s použitím vzorce:

$$\mu\left(\Omega\right) = \iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Příklad 1.7. Vypočtěte obsah množiny

$$\Omega = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 :\ y^2 - x - 5 < 0,\ y > x - 1,\ x < 2\right\}.$$



Řešení: Vyjádříme-li např. množinu $\Omega_2 = \Omega + \Omega_1$ (viz obr. **??**), pak platí

$$\begin{aligned}
\mu\left(\Omega_2\right) &= \iint\limits_{\Omega_2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-2}^{3} \left(\int\limits_{y^2-5}^{y+1} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_{-2}^{3} \left(y - y^2 + 6\right) \mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 + 6y\right]_{-2}^{3} = \frac{125}{6}\,[m^2].
\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}
\mu\left(\Omega_1\right) &= \iint\limits_{\Omega_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{2}^{4} \left(\int\limits_{x-1}^{\sqrt{x+5}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{2}^{4} \left(\sqrt{x+5} - x + 1\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+5)^3} - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{2}^{4} = 14 - \frac{14}{3}\sqrt{7}\,[m^2].
\end{aligned}$$

Odtud

$$\mu\left(\Omega\right) = \mu\left(\Omega_2\right) - \mu\left(\Omega_1\right) = \frac{41}{6} + \frac{14}{3}\sqrt{7}\,[m^2].$$

Příklad 1.8. Vypočtěte obsah množiny

$$\Omega = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2-6y<0, \; x^2+y^2-2y>0, \; x<y<\sqrt{3}x\right\}.$$

Řešení: Použijeme transformace do polárních souřadnic podle Věty 1.6. Vzor množiny Ω je množina $\{[r,t] \in \mathbb{R}^2 : 2\sin t < r < 6\sin t, \pi/4 < t < \pi/3\}$.

$$\begin{aligned}
\mu(\Omega) &= \iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\int\limits_{2\sin t}^{6\sin t} r \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{2\sin t}^{6\sin t} \mathrm{d}t \\
&= 16 \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \sin^2 t \,\mathrm{d}t = 8 \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} (1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t = 8 \left[t - \frac{1}{2}\sin 2t \right]_{\pi/4}^{\pi/3} \\
&= \frac{2}{3}\pi - 2\sqrt{3} + 4\,[m^2].
\end{aligned}$$

Cvičení 1.4. Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah rovinné desky

$$A = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \; xy < a^2, \; x^2 > ay, \; y < 2a, \; x > 0\right\}, \quad a > 0.$$

Výsledek: $\mu(A) = a^2 \left(\frac{2}{3} + \ln 2\right)$.

1.5.2 *Objem válcového tělesa $K \subset \mathbb{R}^3$.*

Mějme dáno těleso

$$K = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : [x,y] \in \Omega, g(x,y) < z < f(x,y)\right\},$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, f, g jsou spojité a ohraničené na Ω. Pak objem tohoto tělesa je dán vzorcem

$$V(K) = \iint\limits_{\Omega} \Big(f(x,y) - g(x,y) \Big) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Příklad 1.9. Vypočtěte objem tělesa

$$K = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : [x,y] \in \Omega, \; 0 \le z \le x^2+y^2\right\},$$

kde $\Omega = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < \sqrt{x}\right\}$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
V(K) &= \iint\limits_{\Omega} \left(f(x,y) - g(x,y)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^1 \left(x^{5/2} + \frac{1}{3} x^{3/2} - x^4 - \frac{1}{3} x^6 \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{2}{7} x^{7/2} + \frac{2}{15} x^{5/2} - \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{21} x^7 \right]_0^1 = \frac{6}{35}\, [m^3]
\end{aligned}$$

Cvičení 1.5. Pomocí dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa:

1. $\Omega_1 = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ z > 0,\ z < x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 > x,\ x^2 + y^2 < 2x\right\}$;
2. $\Omega_2 = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ z > 2(x^2 + y^2),\ z < 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$;
3. $\Omega_3 = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < z < 4 - y^2,\ y > \frac{1}{2} x^2\right\}$;

Výsledky: $\mu(\Omega_1) = \frac{45}{32}\pi$, $\mu(\Omega_2) = \frac{5}{48}\pi$, $\mu(\Omega_3) = \frac{256}{21}$.

1.5.3 *Obsah plochy*

Obsah části plochy

$$S = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y),\ [x,y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2\right\},$$

kde $f \in C^1(\overline{\Omega})$ je dán vzorcem

$$P(S) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Příklad 1.10. Vypočtěte obsah části plochy

$$S = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ x^2/4 + y^2 < 1,\ -1 < x < 1\right\}.$$

Řešení: Označme $\Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \; x^2/4 + y^2 < 1\}$.

$$
\begin{aligned}
P(S) &= \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2-y^2} + \frac{y^2}{4-x^2-y^2}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 8\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2/4}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= 8\int\limits_0^1 \left[\arcsin \frac{y}{\sqrt{4-x^2}} \right]_0^{\sqrt{1-x^2/4}} \mathrm{d}x = 8 \arcsin \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi\, [m^2].
\end{aligned}
$$

Cvičení 1.6. Pomocí dvojného integrálu vypočtěte:

1. Obsah části plochy paraboloidu $z = x^2 + y^2$ za podmínky $0 < z < a$, kde $a > 0$ je konstanta; $\left[\frac{\pi}{6}\left[(1+4a)\sqrt{1+4a} - 1\right]\right]$

2. Obsah části plochy $x^2 + z^2 = 1$ ohraničený rovinami $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$. $[2\pi]$

1.5.4 *Hmotnost tenké rovinné desky $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.*

Plošnou hustotou rovinné desky Ω rozumíme funkci dvou proměnných $\sigma(x,y)$, která je definována vztahem

$$
\lim_{r \to 0+} \frac{m\left(U_r(x_0,y_0) \cap \Omega\right)}{\mu\left(U_r(x_0,y_0) \cap \Omega\right)} = \sigma(x_0,y_0)
$$

pro každé $[x_0,y_0] \in \Omega$. Hmotnost tenké rovinné desky o plošné hustotě $\sigma(x,y)$ je dána vztahem

$$
m(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \sigma(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad [kg].
$$

Příklad 1.11. *Vypočtěte hmotnost rovinného obrazce*

$$
A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \; 4 < x^2 + y^2 < 9, \; x > 0, \; y > 0\},
$$

je-li $\sigma(x,y) \equiv \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ $[kg \cdot m^{-2}]$ *plošná hustota.*

Řešení: $m(A) = \iint\limits_{A} \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. *Podle Příkladu 1.5 pak máme*

$$
m(A) = \frac{\pi}{2} \ln 6 \,(\ln 3 - \ln 2)\; [kg].
$$

1.5.5 *Statický moment tenké rovinné desky*

Statický moment tenké rovinné desky $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s plošnou hustotou $\sigma(x,y)$ vzhledem k přímce p je

$$S_p = \iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}\left([x,y],p\right) \cdot \sigma\left(x,y\right)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \; [kg \cdot m],$$

kde $\mathrm{d}\left([x,y],p\right)$ je orientovaná vzdálenost bodu $[x,y]$ od přímky p.
Speciální případ vzhledem k souřadnicovým osám x a y.

$$S_x = \iint\limits_{\Omega} y \cdot \sigma\left(x,y\right)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad S_y = \iint\limits_{\Omega} x \cdot \sigma\left(x,y\right)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

1.5.6 *Těžiště* tenké rovinné desky $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$$T = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m}\right].$$

Příklad 1.12. Uvažujme obrazce

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \; k_1 x \le y \le k_2 x, \; x \ge 0, \; y \ge 0\right\}, \\ \Omega_2 &= \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \; x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1, \; x^2/k^2a^2 + y^2/k^2b^2 \ge 1\right\}, \end{aligned}$$

kde $0 < k < 1$, $0 \le k_1 < k_2$.
Vypočtěte těžiště tenké homogenní rovinné desky $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ s plošnou hustotou $\sigma\left(x,y\right) \equiv 1$ $[kg \cdot m^{-2}]$.
Řešení: Použijeme transformace do zobecněných polárních souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= ar\cos t = \varphi\left(r,t\right), \\ y &= br\sin t = \psi\left(r,t\right). \end{aligned}$$

Jacobián $J = abr$. Z těchto rovnic dostáváme

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} t.$$

Z této rovnice dostáváme, že $t_1 = \operatorname{arctg}(ak_1/b) \le t \le \operatorname{arctg}(ak_2/b) = t_2$.

$$\begin{aligned} m &= \iint\limits_{\Omega} \sigma\left(x,y\right)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = ab \int\limits_{k}^{1} \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} r \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}r \\ &= ab\left(t_2 - t_1\right) \int\limits_{k}^{1} r\, \mathrm{d}r = \frac{1}{2} ab \left(1 - k^2\right)\left(t_2 - t_1\right) \quad kg. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_x &= \iint_\Omega y\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ab^2\int_k^1\left(\int_{t_1}^{t_2} r^2\sin t\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}r \\
&= ab^2(\cos t_1-\cos t_2)\int_k^1 r^2\,\mathrm{d}r = \frac{1}{3}ab^2\left(1-k^3\right)(\cos t_1-\cos t_2)\quad [kg\cdot m].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_y &= \iint_\Omega x\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a^2b\int_k^1\left(\int_{t_1}^{t_2} r^2\cos t\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}r \\
&= a^2b(\sin t_2-\sin t_1)\int_k^1 r^2\,\mathrm{d}r = \frac{1}{3}a^2b\left(1-k^3\right)(\sin t_2-\sin t_1)\quad [kg\cdot m].
\end{aligned}
$$

$$
T=\left[\frac{2a\left(k^2+k+1\right)(\sin t_2-\sin t_1)}{3(k+1)(t_2-t_1)},\frac{2b\left(k^2+k+1\right)(\cos t_1-\cos t_2)}{3(k+1)(t_2-t_1)}\right].
$$

Cvičení 1.7. Vypočtěte těžiště homogenní rovinné desky:

1. $\Omega_1=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ (x-1)^2+(y-1)^2<1,\ x>0,\ y>0\right\};$ $\quad\left[T=[1,1]\right]$
2. $\Omega_2=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<1,\ y<x+1,\ y>0\right\};$ $\quad\left[T=\left[\frac{2}{3(\pi+2)},\frac{2}{\pi+2}\right]\right]$
3. $\Omega_3=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ xy>a^2,\ y^2<8ax,\ x<2a\right\},\ a>0;$
4. $\Omega_4=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ b^2x^2+a^2y^2<a^2b^2,\ x>0,\ y>0\right\}.$ $\quad\left[T=\left[\frac{4a}{3\pi},\frac{4b}{3\pi}\right]\right]$

1.5.7 *Moment setrvačnosti tenké rovinné desky*

Moment setrvačnosti tenké rovinné desky $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ s plošnou hustotou $\sigma(x,y)$ vzhledem k přímce p je

$$
I_p=\iint_\Omega \mathrm{d}^2([x,y],p)\cdot\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ [kg\cdot m^2],
$$

kde $\mathrm{d}([x,y],p)$ je vzdálenost bodu $[x,y]$ od přímky p.
Speciální případ vzhledem k souřadnicovým osám x a y.

$$
I_x=\iint_\Omega y^2\cdot\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad I_y=\iint_\Omega x^2\cdot\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
$$

Příklad 1.13. Vypočtěte momenty setrvačnosti I_x, I_y homogenní tenké rovinné desky

$$\Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - 3x + y < 0,\ y + x > 0\}$$

s konstantní hustotou $\sigma(x,y) \equiv \sigma\ [kg \cdot m^{-2}]$.

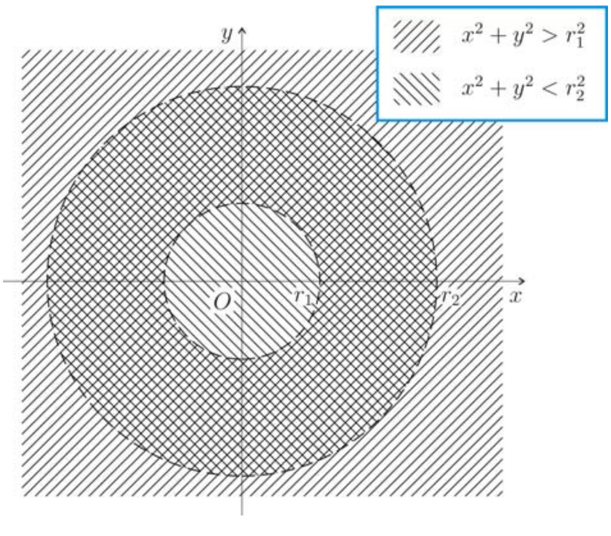
Řešení:

$$\begin{aligned}
I_y &= \iint\limits_{\Omega} x^2 \cdot \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sigma \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{-x}^{-2x^2+3x} x^2\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \sigma \int\limits_0^2 x^2\,[y]_{-x}^{-2x^2+3x}\,\mathrm{d}x = \sigma \int\limits_0^2 \left(-2x^4 + 4x^3\right) \mathrm{d}x = \sigma \left[-\frac{2}{5}x^5 + x^4 \right]_0^2 \\
&= \frac{16}{5}\,\sigma\,[kg \cdot m^2]. \\
I_x &= \iint\limits_{\Omega} y^2 \cdot \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sigma \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{-x}^{-2x^2+3x} y^2\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \sigma \int\limits_0^2 \left[\frac{1}{3}y^3 \right]_{-x}^{-2x^2+3x} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sigma \int\limits_0^2 \left(-8x^6 + 36x^5 - 54x^4 + 28x^3\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\sigma \left[-\frac{8}{7}x^7 + 6x^6 - \frac{54}{5}x^5 + 7x^4 \right]_0^2 = \frac{144}{105}\,\sigma\,[kg \cdot m^2].
\end{aligned}$$

Příklad 1.14. Vypočtěte momenty setrvačnosti I_x, I_y homogenní tenké rovinné desky

$$\Omega = \left\{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ r_1^2 < x^2 + y^2 < r_2^2 \right\},$$

kde $0 \le r_1 < r_2$, s konstantní hustotou $\sigma(x,y) \equiv \sigma\,[kg \cdot m^{-2}]$.



Řešení:

Vzhledem k symetrii platí, že $I_x = I_y$ a můžeme počítat kterýkoliv z nich.

$$\begin{aligned} I_x &= \iint\limits_{\Omega} y^2 \sigma(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sigma \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_{r_1}^{r_2} r^3 \sin^2 t \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\sigma \left(r_2^4 - r_1^4\right) \int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{8}\left(r_2^4 - r_1^4\right) \sigma \left[t - \frac{1}{2}\sin 2t \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4}\pi\sigma \left(r_2^4 - r_1^4\right) \; [kg \cdot m^2]. \end{aligned}$$

Často se v technické praxi může využít následující tvrzení:

Věta 1.7. (Steinerova věta.) *Jestliže máme dvě rovnoběžné přímky p a p', h je jejich kolmá vzdálenost a první z nich prochází těžištěm desky, pak momenty setrvačnosti vzhledem k těmto přímkám jsou svázány vztahem*

$$I_{p'}(\Omega) = I_p(\Omega) + h^2 m(\Omega),$$

kde $m(\Omega)$ je hmotnost desky.

Příklad 1.15. Vypočtěte momenty setrvačnosti I_x, I_y homogenní tenké rovinné desky

$$\Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 > r_1^2, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r_2^2\},$$

$0 \le r_1 < r_2$ s konstantní hustotou $\sigma(x,y) = \sigma$.

Řešení: Vzhledem k symetrii a homogenitě desky víme, že těžiště je v bodě $[x_0, y_0]$ a můžeme využít předešlou větu:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x'} + y_0^2 m = \frac{1}{4}\pi\sigma\left(r_2^4 - r_1^4\right) + \pi\sigma\left(r_2^2 - r_1^2\right) y_0^2 \\ &= \frac{1}{4}\pi\sigma\left(r_2^2 - r_1^2\right)\left(r_2^2 + r_1^2 + 4y_0^2\right) \quad kgm^2, \end{aligned}$$

kde x' je přímka procházející bodem $[x_0, y_0]$ rovnoběžná s osou x.

$$\begin{aligned} I_y &= I_{y'} + x_0^2 m = \frac{1}{4}\pi\sigma\left(r_2^4 - r_1^4\right) + \pi\sigma\left(r_2^2 - r_1^2\right) x_0^2 \\ &= \frac{1}{4}\pi\sigma\left(r_2^2 - r_1^2\right)\left(r_2^2 + r_1^2 + 4x_0^2\right) \quad kgm^2. \end{aligned}$$

kde y' je přímka procházející bodem $[x_0, y_0]$ rovnoběžná s osou y.

Cvičení 1.8. Vypočítejte moment setrvačnosti vzhledem k ose x daného homogennho segmentu:

1. $S_1 = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \; y < -\dfrac{h}{b^2}x^2 + h, y > 0\right\}$, kde $h > 0$, $b > 0$; $\left[\frac{32}{105}bh^3\right]$

2. $S_2 = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < r^2, |y| < a\right\}$, kde $0 < a \le r$ jsou konstanty .

Průvodce studiem
Právě jste ukončili studium první kapitoly této studijní opory. Než přejdete studiu dalšího učiva, je důležité, aby jste si dosud probranou látku zažili a získali početní praxi. Pokud jste úspěšně vyřešili všechny úlohy, které byly průběžně zadávány na konci každé podkapitoly, bylo by dobré vzít si některou dostupnou sbírku příkladů a dále počítat.

1.6 Kontrolní otázky, autotest

Otázky pro vás:

- Co je to Riemannův integrální součet funkce dvou proměnných na dvojrozměrném intervalu?
- Jaká je postačující vlastnost funkce pro to, aby byla na dvojrozměrném intervalu integrovatelná?
- Co jsou oblasti 1. a 2. druhu v $\mathbb{R}^2$? Zformulujte Fubiniovu větu pro dvojný integrál.
- K čemu ji používáme?
- Uveďte základní vlastnosti dvojného integrálu.
- Jak je definován jakobián zobrazení $G(\varphi, \psi)$, kde $G: \ A \to \mathbb{R}^2$, $A \subset \mathbb{R}^2$, přičemž $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$.
- Uveďte větu o transformaci dvojného integrálu.
- Jak se definují transformace posunutí a transformace do zobecněných polárních souřadnic v $\mathbb{R}^2$?
- Jaké znáte geometrické a fyzikální aplikace dvojného integrálu? Uveďte vztahy pro jejich výpočet.

Autotest

Vzorové zadání kontrolního testu.

Matematika, 2. semestr	Zpracoval:
Test č. 3	Jméno: ....
	Adresa: ....

A. Načrtněte obory D a vypočtěte integrály:

1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, je-li $D = \langle 3,4\rangle \times \langle 1,2\rangle$;

2) $\displaystyle\iint_D x^2 y\cos\left(xy^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, je-li $D = \left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle \times \langle 0,2\rangle$;

3) $\displaystyle\iint_D \left(x^2+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, je-li $D = \left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ y\ge x^2,\ y^2\le x\right\}$;

4) $\displaystyle\iint_D |(x-1)y|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, je-li $D = \left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ y\le 2-x,\ y+1\ge 0,\ x\ge 0\right\}$;

B. Načrtněte obory D a vypočtěte integrály transformací do polárních nebo zobecněných polárních souřadnic:

5) $\displaystyle\int_0^4\left(\int_0^{\sqrt{16-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$;

6) $\displaystyle\iint_D \sqrt{r^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, je-li $D = \left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le rx\right\}$, $r>0$;

7) $\displaystyle\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, je-li $D = \left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x^2+y^2\le 9,\ x\le y\sqrt{3}\le 3x\right\}$, $r>0$;

8) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, je-li $D = \left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ b^2x^2+a^2y^2\le a^2b^2\right\}$, kde $a>0$, $b>0$;

C. Načrtněte rovinný obrazec A a vypočtěte jeho obsah:

9) $A = \left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ (x-1)^3\le y\le x^2+1,\ 0\le x\le 3-y\right\}$;

10) $A = \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x + y \geq 2\Big\}$;

D. Načrtněte plochu S a vypočtěte její obsah:

11) $S = \Big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ 6x + 3y + 2z = 12,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\Big\}$;

12) $S = \Big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 = 2z,\ x^2 + y^2 \leq 1\Big\}$;

E. Načrtněte rovinný obrazec A a vypočtěte souřadnice (souřadnici) těžiště tohoto obrazce, je-li $\sigma(x,y) \equiv x$ plošná hustota daného obrazce:

13) x_T rovinného obrazce $A = \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^{:}\ x^2 + y^2 \leq r^2,\ 0 \leq x \leq y\Big\}$, kde $r > 0$;

14) T rovinného obrazce $A = \Big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ 4x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\Big\}$.

př.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$	opravil(a)
max. bodů	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	14	
zís. bodů																

2 Trojný integrál

2.1 Úvod

2.1.1 Cíle kapitoly

Následující odstavce vás předběžně seznámí s obsahem této kapitoly a přestaví vám studijní cíle, kterých máte dosáhnout:

- Na základě integrálních součtů je podaná definice trojného integrálu. Po zavedení oblastí prvního, druhého a třetího druhu je uvedena Fubiniova věta. Měli byste ji umět zformulovat pro všechny tři zavedené druhy oblastí a zejména zvládnout řešit příklady na základě této věty. Jde o základní výpočtovou metodu a je proto nezbytné získat dostatečné zkušenosti na základě početní praxe. Projděte si proto pozorně vyřešené příklady a spočítejte si samostatně příklady ze cvičení. Podobně jako pro dvojný integrál jsou zde uvedeny také vlastnosti trojného integrálu.

- Zavedení jakobiánu pro zobrazení určené třemi funkcemi tří proměnných nám umožní rozšířit větu o transformaci také pro trojný integrál. Je zapotřebí umět odvodit jakobiány transformací do zobecně-ných cylindrických a sférických souřadnic a znát geometrický význam těchto souřadnic. Protože jde o zásadní problematika, která nám umož-ňuje zjednodušit výpočet trojných integrálů, jejichž přímý výpočet pomocí Fubiniovy věty by byl příliš komplikovaný, je vhodné získat praktické početní zkušenosti vyřešením dostatečným počtem příkladů.

- Je podán přehled základních geometrických a fyzikálních aplikací trojného integrálu. Opět byste měli umět vztahy pro výpočet vysvětlit na základě integrálních součtů a vlastností trojného integrálu.

2.1.2 Požadované znalosti

Pro zvládnutí trojných integrálů je nezbytné dobře zvládnout problematiku dvojných integrálů a umět rovnice a grafy základních ploch v prostoru R^3.

2.1.3 Doba potřebná ke studiu

Přibližně lze odhadnout potřebnou dobu ke studiu trojného integrálu na 20 hodin. Pro získání zkušeností a zručnosti ve výpočtu bude ještě zřejmě zapotřebí další čas závislý na dosavadní početní praxi studenta.

2.1.4 Klíčová slova

Dělení trojrozměrného intervalu, norma dělení, Riemannův integrální součet, trojný Riemannův integrál, oblast prvního, druhého a třetího druhu v R^3, Fubiniho věta, Jacobiho matice, věta o transformaci trojného integrálu, zobecněné cylindrické souřadnice, zobecněné sférické souřadnice, geometrické a fyzikální aplikace trojného integrálu.

2.2 Trojný integrál na trojrozměrném intervalu

Uvažujme interval $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \langle e, f\rangle \subset \mathbb{R}^3$.
Nechť D_m^x, resp. D_n^y, resp. D_l^z je dělení $\langle a, b\rangle$ resp. $\langle c, d\rangle$, resp. $\langle e, f\rangle$ s dělicími body $x_0, x_1, \ldots, x_m$ a $y_0, y_1, \ldots, y_n$ resp. $\langle e, f\rangle$ s dělicími body $z_0, z_1, \ldots, z_l$.
Uspořádanou trojici $D_{mnl} = (D_m^x,\ D_n^y,\ D_l^z)$ nazýváme *dělením intervalu* I. Každý interval

$$I_{ijk} = \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle \times \langle z_{k-1}, z_k\rangle \subset I$$

pro $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ a $k = 1, 2, \ldots, l$ nazýváme *částečným intervalem dělení* D_{mnl}.
Objem (míru) I_{ijk} definujeme jako

$$\mu(I_{ijk}) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) \cdot (z_k - y_{k-1}).$$

Výraz

$$\nu(D) = \max\left\{\nu(D_m^x), \nu(D_n^y), \nu(D_l^z)\right\}$$

nazýváme *normou dělení*.

Definice 2.1. Nechť f je ohraničená funkce na I, D_{mnl} dělení I s dělicími body $x_0, x_1, \ldots, x_m$, $y_0, y_1, \ldots, y_n$, $z_0, z_1, \ldots, z_l$. Označme $N(D_{mnl})$ množinu všech mnl-tic bodů $M_{ijk} \in I_{ijk}$. íslo

$$S\left(f, D_{mnl}, N(D_{mnl})\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} f\left(M_{ijk}\right)\mu(I_{ijk})$$

nazýváme *Riemannovým integrálním součtem* funkce f příslušným dělení D_{mnl} a mnl-tici bodů z $N(D_{mnl})$.

V dalším se samozřejmě budeme ptát, zda existuje

$$\lim_{\nu(D_{mnl})\to 0} S\left(f, D_{mnl}, N(D_{mnl})\right).$$

Definice 2.2. Řekneme, že funkce f má na I trojný Riemannův integrál právě tehdy, když existuje konečná limita

$$\lim_{\nu(D)\to 0} S\left(f, D_{mnl}, N(D_{mnl})\right),$$

která nezávisí jak na volbě posloupnosti (D_{mnl}), tak na výběru mnl-tic bodů z $N(D_{mnl})$. Tuto limitu značíme

$$\iiint\limits_I f\left(x,y,z\right)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Jestliže integrál existuje, řekneme, že funkce f je *integrabilní* (*integrovatelná*) na intervalu I.

Následující věta nám zaručuje existenci integrálu.

Věta 2.1. *Každá funkce spojitá na intervalu $I \subset \mathbb{R}^3$ je integrovatelná na I.*

2.3 Trojný integrál na elementární oblastech v $\mathbb{R}^3$

Oblast I. druhu je množina

$$\Omega_I = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ [x,y] \in \Omega_{xy} \subset \mathbb{R}^2,\ g_1(x,y) < z < h_1(x,y)\right\},$$

kde Ω_{xy} je oblast I. nebo II. druhu v rovině xy, g_1, h_1 jsou spojité funkce na Ω_{xy} a $g_1(x,y) \leq h_1(x,y)$ pro každé $[x,y] \in \Omega_{xy}$;

Oblast II. druhu je množina

$$\Omega_{II} = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ [x,z] \in \Omega_{xz}, \subset \mathbb{R}^2,\ g_2(x,z) < y < h_2(x,z)\right\},$$

kde Ω_{xz}, je oblast I. nebo II. druhu v rovině xz, g_2, h_2 jsou spojité funkce na Ω_{xz} a $g_2(x,z) \leq h_2(x,z)$ pro každé $[x,z] \in \Omega_{xz}$

Oblast III. druhu je množina

$$\Omega_{III} = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ [y,z] \in \Omega_{yz}, \subset \mathbb{R}^2,\ g_3(y,z) < x < h_3(y,z)\right\},$$

kde Ω_{yz}, je oblast I. nebo II. druhu v rovině yz, g_3, h_3 jsou spojité funkce na Ω_{yz} a $g_3(y,z) \leq h_3(y,z)$ pro každé $[y,z] \in \Omega_{yz}$.

Nyní můžeme formulovat analogicky, jak pro dvojný integrál, Fubiniho větu pro trojný integrál.

Věta 2.2. (Fubiniho věta)

(a) *Nechť funkce f je integrovatelná na množině Ω_I. Jestliže pro každé $[x,y] \in \Omega_{xy}$ je funkce $f(x,y,z)$ (nyní proměnné z) integrovatelná na intervalu $\langle g_1(x,y), h_1(x,y)\rangle$, pak funkce*

$$F_1(x,y) = \int\limits_{g_1(x,y)}^{h_1(x,y)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}z$$

je integrovatelná na Ω_{xy} a platí

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\Omega_I} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint\limits_{\Omega_{xy}} F_1(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{\Omega_{xy}} \left(\int\limits_{g_1(x,y)}^{h_1(x,y)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

(b) *Nechť funkce f je integrovatelná na množině Ω_{II}. Jestliže pro každé $[x,z] \in \Omega_{xz}$ je funkce $f(x,y,z)$ (nyní proměnné y) integrovatelná na intervalu $\langle g_2(x,z), h_2(x,z)\rangle$, pak funkce*

$$F_2(x,z) = \int\limits_{g_2(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}y$$

je integrovatelná na Ω_{xz} a platí

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\Omega_{II}} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint\limits_{\Omega_{xz}} F_2(x,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ &= \iint\limits_{\Omega_{xz}} \left(\int\limits_{g_2(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

(c) *Nechť funkce f je integrovatelná na množině Ω_{III}. Jestliže pro každé $[y,z] \in \Omega_{yz}$ je funkce $f(x,y,z)$ (nyní proměnné x) integrovatelná na intervalu $\langle g_3(y,z), h_3(y,z)\rangle$, pak funkce*

$$F_3(y,z) = \int\limits_{g_3(y,z)}^{h_3(y,z)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x$$

je integrovatelná na Ω_{yz} a platí

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\Omega_{III}} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint\limits_{\Omega_{yz}} F_3(y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iint\limits_{\Omega_{yz}} \left(\int\limits_{g_3(y,z)}^{h_3(y,z)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Věta 2.3. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je elementární oblast prvního, druhého nebo třetího druhu a nechť funkce f je na množině Ω spojitá a ohraničená. Pak je funkce f na Ω integrabilní.*

Poznámka 2.1. Integrovatelnost a hodnota trojného integrálu nezávisí na chování funkce v konečném počtu bodů integračního oboru, v sjednocení konečného počtu křivek konečné délky, nebo v konečném sjednocení jednoduchých ploch konečného obsahu. Je tedy v předešlých větách nepodstatné, jestli integrujeme přes otevřený integrační obor, nebo jestli přidáme k tomuto oboru jakoukoliv část hranice oboru.

Příklad 2.1. Vypočtěte integrál

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \frac{x}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

na $\Omega = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : 6x+3y+2z < 12, z > 3, x > 0, y > 0\}$.
Řešení: Množina Ω je oblast prvního druhu v $\mathbb{R}^3$ a funkce $f(x,y,z) = x/(z-2)^3$ je spojitá a ohraničená na Ω a podle Věty 2.3 integrál existuje a můžeme použít Větu 2.2.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} \left(\int_3^{6-3x-3y/2} \frac{x}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} x \left[\frac{1}{(z-2)^2} \right]_3^{6-3x-3y/2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} \left(\frac{x}{\left(4-3x-\frac{3}{2}y\right)^2} - x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3} \int_0^1 \left[\frac{x}{4-3x-\frac{3}{2}y} - xy \right]_0^{2-2x} \mathrm{d}x = -\frac{1}{3} \int_0^1 \left(-x + 2x^2 + \frac{x}{3x-4} \right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3} \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{4}{9} \ln|3x-4| \right]_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{8}{27} \ln 2.
\end{aligned}$$

Příklad 2.2. Vypočtěte integrál

$$I = \iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

na $\Omega = \left\{ [x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : z > 0, x^2+y^2 < R^2, z < \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} \right\}$, $h > 0$, $R > 0$ jsou dané konstanty.

Řešení: Množina Ω je oblast prvního druhu v $\mathbb{R}^2$ a funkce $f(x,y,z) = z$ je spojitá a ohraničená na Ω a podle Věty 2.3 integrál existuje a můžeme použít Větu 2.2.

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{\Omega_{xy}} \left(\int\limits_{g(x,y)}^{h(x,y)} z \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega_{xy}} \left(\int\limits_{0}^{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}} z \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{h^2}{2R^2} \iint\limits_{\Omega_{xy}} \left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

kde $\Omega_{xy} = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < R^2\}$. Na poslední integrál použijeme transformaci do polárních souřadnic.

$$\iint\limits_{\Omega_{xy}} \left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^R \left(\int\limits_0^{2\pi} r^3 \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}r = \frac{\pi h^2}{R^2} \int\limits_0^R r^3 \, \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\pi R^4.$$

Celkem

$$I = \frac{1}{4}\pi h^2 R^2.$$

Věta 2.4. (Základní vlastnosti trojného integrálu) *Nechť Ω, Ω_1, Ω_2 jsou oblasti prvního nebo druhého druhu a f, $g \in \mathcal{R}(\Omega)$. Pak platí:*

(a)

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{\Omega} (f \pm g)(x,y,z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ = &\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \pm \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

(b)

$$\iiint\limits_{\Omega} kf(x,y,z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = k \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

(c) Jestliže pro každé $[x,y,z] \in \Omega$ platí $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$, pak

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \leq \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(d) $|f| \in \mathcal{R}(\Omega)$ a platí

$$\left| \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \right| \leq \iiint\limits_{\Omega} |f(x,y,z)| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(e) *Jestliže pro každé* $[x, y, z] \in \Omega$ *platí že* $|f(x, y, z)| \leq M$*, pak*

$$\left|\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right| \leq \iiint\limits_{\Omega} |f(x, y, z)|\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \leq M\mu(\Omega).$$

(f) *Jestliže* $\operatorname{int}\Omega_1 \cap \operatorname{int}\Omega_2 = \emptyset$*,* $f \in \mathcal{R}(\Omega_1)$ *a* $f \in \mathcal{R}(\Omega_2)$*, pak je funkce* f *integrovatelná na* $\Omega_1 \cup \Omega_2$ *a platí*

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ = &\iiint\limits_{\Omega_1} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega_2} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

(g) $fg \in \mathcal{R}(\Omega)$.

(h) *Jestliže je funkce* f *spojitá na* $\overline{\Omega}$*, pak existuje bod* $[\xi, \eta, \zeta] \in \overline{\Omega}$ *tak, že*

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = f(\xi, \eta, \zeta)\, \mu(\Omega).$$

Cvičení 2.1. Graficky znázorněte obory integrace a spočtěte integrály:

1. $\iiint\limits_{\Omega} x\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde

$$\Omega = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 :\ x + 2y + z < 1,\ x > 0,\ y > 0\right\}.$$

2. $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{1}{(1 + x + y + z)^3}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde

$$\Omega = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 :\ x + y + z < 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\right\}.$$

3. $\iiint\limits_{\Omega} z \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde

$$\Omega = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 < 2x,\ y > 0,\ 0 < z < a\right\},$$

kde $a > 0$ je konstanta.

4. $\iiint\limits_{\Omega} y \cos(x + z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde

$$\Omega = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < y < \sqrt{x},\ 0 < z < \frac{\pi}{2} - x\right\}.$$

5. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde

$$\Omega = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2} < z < h \right\},$$

kde $h > 0, \ R > 0$.

6. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{1 + x + y} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde

$$\Omega = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z < 1, \ x > 0, \ y > 0, \ z > 0 \right\}.$$

Výsledky:

1. $\frac{1}{48}$;	2. $\frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right)$;	3. $\frac{8}{9}a^2$;
4. $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)\Big)$;	5. $\frac{\pi}{4}R^2h^2$;	6. $\frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right)$.

2.4 Transformace trojného integrálu

Uvažujme na otevřené množině $A \subset \mathbb{R}^3$ tři funkce $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$, takové, že $\varphi, \ \psi, \ \chi \in C^1(A)$ a zobrazení $G = (\varphi, \psi, \chi) : A \to \mathbb{R}^3$ je prosté. Matice

$$\mathcal{J}(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial \varphi}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial \psi}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial \chi}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial \chi}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial \chi}{\partial w}(u, v, w) \end{pmatrix}$$

se nazývá *Jacobiho matice*. Determinant $J(u, v, w) = |\mathcal{J}(u, v, w)|$ z této matice se nazývá *jakobián*.

Věta 2.5. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina, zobrazení $G = (\varphi, \psi, \chi) : A \to \mathbb{R}^3$ je prosté na A takové, že $\varphi, \ \psi, \ \chi \in C^1(A)$ a jakobián $J(u, v, w) \neq 0$ v každém bodě $[u, v, w] \in A$. Nechť $K \subset A$ je uzavřená množina, která je sjednocením konečného počtu elementárních oblastí prvního, druhého, nebo třetího druhu a funkce f je spojitá na $G(K)$. Pak platí*

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{G(K)} f(x, y, z) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iiint\limits_{K} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) \, |J(u, v, w)| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \end{aligned}$$

Poznámka 2.2. Věta zůstane v platnosti, pokud zobrazení G nebude prosté, nebo jakobián bude roven nule na podmnožinách množiny K uvedených v Poznámce 2.1, budou-li jejich obrazy při zobrazení G opět množiny uvedených typů v $G(K)$. Pokud funkce f bude ohraničená na $G(K)$, pak také stačí, aby f byla spojitá na $G(K)$ s vyjímkou množin uvedených v Poznámce 2.1.

Důležité typy transformací:

Posunutí. Je dán bod $[u_0, v_0, w_0] \in \mathbb{R}^3$. Transformační rovnice jsou

$$\begin{aligned} x &= u_0 + u = \varphi(u, v, w), \\ y &= v_0 + v = \psi(u, v, w), \\ z &= w_0 + w = \chi(u, v, w) \end{aligned}$$

a jakobián

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial w} \\ \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Zobecněné cylindrické souřadnice. Nechť jsou dány konstanty a, $b > 0$. Transformační rovnice jsou

$$\begin{aligned} x &= ar\cos t = \varphi(r, t, z), \\ y &= br\sin t = \psi(r, t, z), \\ z &= z = \chi(r, t, z), \end{aligned} \tag{3}$$

kde $0 < r < \infty$, $-\pi < t < \pi$, $z \in \mathbb{R}$ a jakobián

$$J(r, t, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial r} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi}{\partial r} & \frac{\partial\psi}{\partial t} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \\ \frac{\partial\chi}{\partial r} & \frac{\partial\chi}{\partial t} & \frac{\partial\chi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos t & -ar\sin t & 0 \\ b\sin t & br\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = abr.$$

Tato transformace je prosté zobrazení množiny $(0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^3$.

> Volíme-li v transformačních rovnicích (3) $a = b = 1$, dostáváme speciální případ zobecněných cylindrických souřadnic, tzv. *cylindrické souřadnice* (vypouštíme přívlastek zobecněné). Tyto souřadnice mají názorný geometrický význam - viz Obrázek 5.

Zobecněné sférické souřadnice. Nechť jsou dány konstanty a, b, $c > 0$. Transformační rovnice jsou

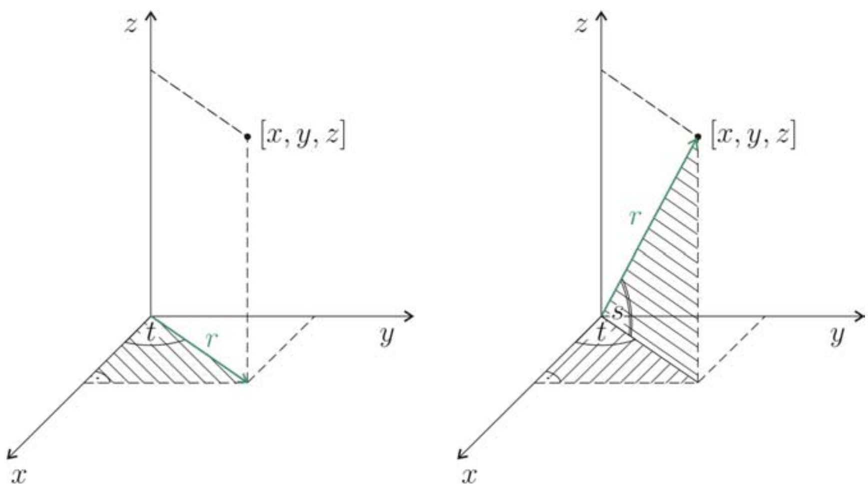
$$\begin{aligned} x &= ar\cos t\cos s = \varphi(r, t, s), \\ y &= br\sin t\cos s = \psi(r, t, s), \\ z &= cr\sin s = \chi(r, t, s), \end{aligned} \tag{4}$$

kde $0 < r < \infty$, $0 < t < 2\pi$, $-\pi/2 < s < \pi/2$ a jakobián

$$
\begin{aligned}
J(r,t,s) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial r} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} & \frac{\partial\varphi}{\partial s} \\ \frac{\partial\psi}{\partial r} & \frac{\partial\psi}{\partial t} & \frac{\partial\psi}{\partial s} \\ \frac{\partial\chi}{\partial r} & \frac{\partial\chi}{\partial t} & \frac{\partial\chi}{\partial s} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a\cos t\cos s & -ar\sin t\cos s & -ar\cos t\sin s \\ b\sin t\cos s & br\cos t\cos s & -br\sin t\sin s \\ c\sin s & 0 & cr\cos s \end{vmatrix} \\
&= c\sin s \begin{vmatrix} -ar\sin t\cos s & -ar\cos t\sin s \\ br\cos t\cos s & -br\sin t\sin s \end{vmatrix} \\
&+ cr\cos s \begin{vmatrix} a\cos t\cos s & -ar\sin t\cos s \\ b\sin t\cos s & br\cos t\cos s \end{vmatrix} \\
&= abcr^2(\sin^2 t\sin s\cos s + \cos^2 t\sin s\cos s)\sin s \\
&+ abcr^2(\cos^2 t\cos^2 s + \sin^2 t\cos^2 s)\cos s \\
&= abcr^2(\sin^2 s + \cos^2 s)\cos s = abcr^2\cos s.
\end{aligned}
$$

Tato transformace je prosté zobrazení množiny $(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(-\pi/2,\pi/2) \to \mathbb{R}^3$.

Volíme-li v transformačních rovnicích (4) $a = b = c = 1$, dostáváme speciální případ zobecněných sférických souřadnic, tzv. *sférické souřadnice* (v sousloví zobecněné sférické souřadnice vypouštíme přívlastek zobecněné). Tyto souřadnice mají názorný geometrický význam – viz Obrázek 5.



Obrázek 5: Geometrický význam cylindrických a sférických souřadnic.

Příklad 2.3. Vypočtěte integrál

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

na $\Omega = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x>0, y>0, z>0, x^2+y^2+z^2<R^2\}$, $R>0$.
Řešení: Funkce $1/(1+x^2+y^2+z^2)$ je spojitá a ohraničená na množině Ω a podle Věty 2.1 integrál existuje. Použijeme transformace do sférických souřadnic.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^R \left(\int\limits_0^{\pi/2} \left(\int\limits_0^{\pi/2} \frac{r^2\cos s}{1+r^2}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^R \left(\int\limits_0^{\pi/2} \frac{r^2\cos s}{1+r^2}\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{2} \int\limits_0^R \frac{r^2}{1+r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^R \left(1 - \frac{1}{1+r^2}\right) \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\left[r - \operatorname{arctg} r\right]_0^R \\ &= \frac{1}{2}\pi\left(R - \operatorname{arctg} R\right). \end{aligned}$$

Cvičení 2.2. Načrtněte dané obory a vhodnými transformacemi vypočtěte integrály:

1. $\displaystyle\iiint\limits_{D} \frac{1}{4x^2+4y^2+3z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde

   $$D = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ 2z \le x^2+y^2+z^2 \le 4z,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2},\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\};$$

2. $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{4+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde

   $$\Omega = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ 2+\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4-\sqrt{x^2+y^2},\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\};$$

3. $\displaystyle\iiint\limits_{B} y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde

   $$B = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 4z,\ 4z-x^2-y^2 \ge 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\};$$

Výsledky:
1. $\frac{\pi}{2}\ln\frac{7}{6}$; 2. $-\frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{2}+3\ln\frac{4}{5}-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) \doteq 0.1519$; 3. $\frac{7}{5}\pi$.

2.5 Geometrické a fyzikální aplikace trojného integrálu

V dalším budeme předpokládat, že Ω je oblast některého typu uvedeného za Větou 2.1.

2.5.1 *Objem tělesa* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

$$\mu(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Příklad 2.4. Vypočtěte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 < 4z, \ x^2+y^2+z < 4\right\}.$$

Řešení: Plochy se protnou v kružnici $x^2+y^2=3$ ležící v rovině $z=1$. Pravoúhlým průmětem tělesa Ω do roviny xy je kruh $x^2+y^2 \le 3$. Transformací do cylindrických souřadnic dostaneme

$$\begin{aligned}
\mu(\Omega) &= \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(\int\limits_{2-\sqrt{4-r^2}}^{4-r^2} r\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}t \\
&= 2\pi\int\limits_0^{\sqrt{3}} r\left(2-r^2+\sqrt{4-r^2}\right)\mathrm{d}r = 2\pi\left[r^2-\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{3}\sqrt{(4-r^2)^3}\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{37}{6}\pi\ m^3.
\end{aligned}$$

Cvičení 2.3. Vypočtěte objem tělesa Ω, je-li

1. $\Omega = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ 0<x<a, \ 0<y<a, \ 0<z<a-x-y\right\}$; $\left[\frac{1}{6}a^3\right]$
2. $\Omega = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x^2+y^2} < z < 6-x^2-y^2\right\}$; $\left[\frac{32}{3}\pi\right]$
3. $\Omega = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ 0<z<2, \ 1-z<x^2+y^2<4\right\}$; $\left[\frac{15}{2}\pi\right]$
4. $\Omega = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2<1, \ 0<z<e^{-x^2-y^2}\right\}$; $\left[\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)\right]$
5. $\Omega = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ 0<z<x^2+y^2, \ 1<y<2x, \ x+y<6\right\}$; $\left[\frac{1247}{32}\right]$
6. $\Omega = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x}<y<2\sqrt{x}, \ 0<z<4-x\right\}$. $\left[\frac{128}{15}\right]$

2.5.2 *Hmotnost tělesa* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Objemovou hustotou tělesa Ω rozumíme funkci tří proměnných $\varrho(x,y,z)$, která je definována vztahem

$$\lim_{r\to 0+}\frac{m\left(U_r(x_0,y_0,z_0)\cap\Omega\right)}{\mu\left(U_r(x_0,y_0,z_0)\cap\Omega\right)} = \varrho(x_0,y_0,z_0)$$

pro každé $[x_0, y_0, z_0] \in \Omega$, kde m je hmotnost a μ je objem množiny v $\mathbb{R}^3$. Hmotnost tělesa Ω o hustotě $\varrho(x,y,z)$ je dána vztahem

$$m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \varrho(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad [kg].$$

Cvičení 2.4. Vypočtěte hmotnost homogenního tělesa Ω, je-li

1. $\Omega = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 < a^2,\ x^2+y^2 < ax\right\}$, kde $a > 0$ je konstanta;
2. $\Omega = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 < 1,\ z > \sqrt{x^2+y^2},\ x > 0,\ y > 0\right\}$.

Výsledky, kde ϱ je objemová hustota tělesa Ω:
1. $\frac{2}{9}(3\pi - 4)\, a^3 \cdot \varrho\ [kg]$; 2. $\frac{1}{12}\left(2-\sqrt{2}\right)\pi \cdot \varrho\ [kg]$.

Cvičení 2.5. Vypočtěte hmotnost nehomogenního tělesa

$$\Omega = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ 1 < x^2+y^2 < 4-z,\ x>0,\ y>0,\ z>0\right\},$$

je-li dána objemová hustota $\rho(x,y,z) = xy[kg \cdot m^{-3}]$. $\left[\frac{9}{4}[kg]\right]$

2.5.3 *Statický moment*

Uvažujme těleso $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ s danou objemovou hustotou $\varrho(x,y,z)$. Potom statický moment tělesa Ω vzhledem k rovině τ je

$$S_\tau = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}\left([x,y.z],\tau\right) \cdot \sigma(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad [kg \cdot m],$$

kde $\mathrm{d}([x,y,z],\tau)$ je orientovaná vzdálenost bodu $[x,y,z]$ od roviny τ.
Speciální případ vzhledem k souřadnicovým rovinám xy, xz a yz:

- $S_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z \cdot \varrho(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$
- $S_{xz} = \iiint\limits_{\Omega} y \cdot \varrho(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$
- $S_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} x \cdot \varrho(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

2.5.4 *Těžiště tělesa*

Mějme dáno tělesu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Potom souřadnice těžiště T tělesa Ω jsou dány vzorcem:

$$T = \left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m}, \frac{S_{xy}}{m}\right].$$

Příklad 2.5. Vypočtěte těžiště homogenního tělesa

$$\Omega = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ (x-a)^2 + y^2 < a^2, z < x^2 + y^2, z > 0\right\},$$

kde $a > 0$ je daná konstanta, je-li daná objemová hustota tělesa Ω $\varrho(x, y, z) \equiv \varrho\ [kg \cdot m^{-3}]$.
Řešení: Při výpočtu využijeme toho, že těleso je symetrické vzhledem k rovině xz a tedy $S_{xz} = 0$. Hmotnost je dána vztahem

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \iiint\limits_{\Omega} \varrho(x, y, z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \varrho \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \varrho \iint\limits_{\Omega_{xy}} \left(\int\limits_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \varrho \iint\limits_{\Omega_{xy}} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

a statické momenty

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \iiint\limits_{\Omega} z\varrho(x, y, z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \varrho \iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \varrho \iint\limits_{\Omega_{xy}} \left(\int\limits_0^{x^2+y^2} z\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\varrho \iint\limits_{\Omega_{xy}} \left(x^2 + y^2\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ S_{yz} &= \iiint\limits_{\Omega} x\varrho(x, y, z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \varrho \iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \varrho \iint\limits_{\Omega_{xy}} \left(\int\limits_0^{x^2+y^2} x\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \varrho \iint\limits_{\Omega_{xy}} x\left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

kde $\Omega_{xy} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + y^2 < a^2\}$ je kolmý průmět tělesa Ω do roviny xy. Ve všech předešlých dvojných integrálech použijeme následující transformaci s jakobiánem $J = r$.

$$\begin{aligned} x &= a + r\cos t, \\ y &= r\sin t. \end{aligned}$$

Transformaci takového typu už dobře znáte z Příkladu 1.6. Vzor množiny Ω_{xy} je množina $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < a, 0 < t < 2\pi\}$.

$$
\begin{aligned}
m(\Omega) &= \varrho \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} r \left(a^2 + 2ar\cos t + r^2 \right) \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}r \\
&= \varrho \int_0^a r \left[\left(a^2 + r^2 \right) t + 2ar \sin t \right]_0^{2\pi} \mathrm{d}r = 2\pi\varrho \int_0^a \left(a^2 r + r^3 \right) \mathrm{d}r \\
&= 2\pi\varrho \left[\frac{1}{2} a^2 r^2 + \frac{1}{4} r^4 \right]_0^a = \frac{3}{2}\pi\varrho a^4 \; [kg];
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{xy}(\Omega) &= \frac{1}{2}\varrho \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} r \left(a^2 + 2ar\cos t + r^2 \right)^2 \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2}\varrho \int_0^a r \left[\left(a^2 + r^2 \right)^2 t + 4ar \left(a^2 + r^2 \right) \sin t \right. \\
&\quad \left. + 2a^2 r^2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \right]_0^{2\pi} dr \\
&= \pi\varrho \int_0^a r \left(\left(a^2 + r^2 \right)^2 + 2a^2 r^2 \right) \mathrm{d}r = \pi\varrho \left[\frac{1}{2} a^4 r^2 + a^2 r^4 + \frac{1}{6} r^6 \right]_0^a \\
&= \frac{5}{3}\pi\varrho a^6 \; [kg \cdot m];
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{yz}(\Omega) &= \varrho \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} r(a + r\cos t) \left(a^2 + 2ar\cos t + r^2 \right) \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}r \\
&= \varrho \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} ar(a^2 + r^2) + r^2(r^2 + 3a^2)\cos t + 2ar^3 \cos^2 t \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}r \\
&= \varrho \int_0^a \left[ar(a^2 + r^2)t + r^2(r^2 + 3a^2)\sin t + ar^3 \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right) \right]_0^{2\pi} \mathrm{d}r \\
&= 2\pi a\varrho \int_0^a (a^2 r + 2r^3) \, \mathrm{d}r = \pi a \varrho \left[a^2 r^2 + r^4 \right]_0^a = 2\pi\varrho a^5 \; [kg \cdot m].
\end{aligned}
$$

Nakonec dostáváme

$$
T = \left[\frac{S_{yz}}{m}, 0, \frac{S_{xy}}{m} \right] = \left[\frac{4}{3} a, 0, \frac{10}{9} a^2 \right].
$$

Cvičení 2.6. Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního tělesa Ω, je-li

1. $\Omega = \left\{ [x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 < 4, \; z > \sqrt{3(x^2+y^2)} \right\};$ $\quad \left[T = \left[0, 0, \frac{3}{8(2-\sqrt{3})} \right] \right]$

2. $\Omega = \left\{ [x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 < 8, \ -2z > x^2+y^2 \right\}$. $\qquad \left[T = \left[0, 0, \frac{7}{7-8\sqrt{2}}\right] \right]$

2.5.5 *Moment setrvačnosti tělesa*

Mějme dáno těleso $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ s objemovou hustotou $\varrho(x,y,z)$ $[kg \cdot m^{-3}]$. Moment setrvačnosti tělesa Ω vzhledem k přímce p se spočte s použitím vzorce:

$$I_p = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}^2\left([x,y,z],p\right) \cdot \varrho\left(x,y,z\right) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde $\mathrm{d}\left([x,y,z],p\right)$ je kolmá vzdálenost bodu $[x,y,z]$ od přímky p.
Speciální případ vzhledem *k souřadnicovým osám* x, y a z:

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint\limits_{\Omega} \left(y^2+z^2\right) \cdot \varrho\left(x,y,z\right) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \\ I_y &= \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+z^2\right) \cdot \varrho\left(x,y,z\right) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \\ I_z &= \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+y^2\right) \cdot \varrho\left(x,y,z\right) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Příklad 2.6. Vypočtěte moment setrvačnosti homogeního tělesa

$$\Omega = \left\{ [x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 - x < 0, \ z - x^2 < 0, \ x < 1, \ z > 0 \right\},$$

vzhledem k ose z, je-li dána objemová hustota $\varrho\left(x,y,z\right) \equiv \varrho$ $[kg \cdot m^{-3}]$.
Řešení: Integrační obor Ω je oblast I. druhu, integrál existuje a pro výpočet použijeme Fubiniho větu.

$$\begin{aligned} I_z(\Omega) &= \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+y^2\right) \varrho\left(x,y,z\right) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \varrho \int_{-1}^{1} \left(\int_{y^2}^{1} \left(\int_{0}^{x^2} \left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \varrho \int_{-1}^{1} \left(\int_{y^2}^{1} \left[\left(x^2+y^2\right) z \right]_0^{x^2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \varrho \int_{-1}^{1} \left(\int_{y^2}^{1} \left(x^4 + x^2y^2\right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \varrho \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3y^2 \right]_{y^2}^{1} \mathrm{d}y = \varrho \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{5}y^{10} - \frac{1}{3}y^8 \right) \mathrm{d}y \\ &= \varrho \left[\frac{1}{5}y + \frac{1}{9}y^3 - \frac{1}{55}y^{11} - \frac{1}{27}y^9 \right]_{-1}^{1} = \frac{152}{297}\,\varrho \ kgm^2. \end{aligned}$$

Cvičení 2.7. Vypočítejte moment setrvačnosti nehomogenní koule o poloměru R vzhledem k ose x, je-li objemová hustota přímo úměrná vzdálenosti bodu $[x, y, z]$ o středu s danou konstantou úměrnosti k.

Výsledek: $\frac{4}{9}k\pi R^6$, kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti.

2.6 Kontrolní otázky, autotest

Otázky pro vás:

- Co je to norma dělení trojrozměrného intervalu?
- Kdy řekneme o limitě posloupnosti integrálních součtů, že je trojným integrálem?
- Popište oblasti prvního, druhého a třetího druhu v $\mathbb{R}^3$.
- Zformulujte Fubiniovu větu pro trojný integrál.
- Co nazýváme jakobiánem zobrazení $G(\varphi, \psi, \chi)$, kde φ, ψ, χ jsou funkcemi proměnných u, v, w.
- Uveďte větu o transformaci trojného integrálu.
- Odvoďte jakobián pro transformaci do cylindrických souřadnic.
- Geometricky znázorněte cylindrické souřadnice bodu v prostoru.
- Odvoďte jakobián pro transformaci do zobecněných sférických souřadnic a vysvětlete, co rozumíme sférickými souřadnicemi bodu v prostoru.
- Jaké znáte geometrické a fyzikální aplikace trojného integrálu. Uveďte a vysvětlete vzaty pro jeho výpočet.

Vzorové zadání kontrolního testu.

Matematika, 2. semestr Zpracoval:
Test č. 4 Jméno: ....

Adresa: ....

A. Načrtněte obory W a vypočtěte integrály:

1) $\displaystyle\iiint_W (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, je-li $W = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle \times \langle 0,3\rangle$;

2) $\displaystyle\iiint_W \frac{1}{\sqrt{x+y+z+1}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, je-li $W = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$;

3) $\displaystyle\iiint_W \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, je-li

$$W = \Big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\Big\};$$

4) $\displaystyle\iiint_W xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, je-li

$$W = \Big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1,\ 0 \leq z \leq x^2+y^2+1\Big\};$$

B. Načrtněte obory W a transformací do cylindrických nebo sférický souřadnic vypočtěte integrály:

5) $\displaystyle\iiint_W (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, je-li $W = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ \dfrac{x^2+y^2}{2} \leq z \leq 2\right\}$;

6) $\displaystyle\iiint_W 3z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, je-li $W = \Big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \leq z \leq 2-x^2-y^2\Big\}$;

7) $\displaystyle\iiint_W x^2yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, je-li

$$W = \Big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \leq 0,\ 4x^2+y^2+z^2 \leq 1\Big\}, \qquad r > 0;$$

8) $\displaystyle\iiint_W xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, je-li

$$W = \Big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2-4z \leq 0,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2}\Big\};$$

C. Načrtněte těleso W a vypočtěte jeho objem:

9) $W = \Big\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \le 4, \ x^2 + y^2 \le 3z\Big\}$;

10) $W = \Big\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le z \le x^2 + y^2, \ y \ge 1, \ y \le 2x, \ y \le 6 - x\Big\}$;

D. Načrtněte těleso W a vypočtěte souřadnice těžiště T tělesa W, za předpokladu, že těleso W je homogenní:

11) $W = \Big\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x} \le y2\sqrt{x}, \ 0 \le z \le 1 - x\Big\}$;

12) $W = \Big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \ 4x^2 + y^2 \le 4, \ x \ge 0, \ y \ge 0\Big\}$.

př.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$	opravil(a)
max. bodů	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	
zís. bodů														

3 Studijní prameny.

[1] Brabec, J., Hrůza, B.: *Matematická analýza* II., SNTL, Praha 1986.

[2] Drábek, P., Míka, S.: *Matematická analýza* II., FAV, Plzeň 1997, 2. vydání.

[3] Fichtěngolc G.M.: *Kurs diferencialnovo i integralnovo isčislenija* III., Nauka, Moskva 1966, 4. vydání.

[4] Rektorys, K. a kol.: *Přehled užité matematiky* I., Prometheus, Praha 1995, 6. přepracované vydání.

[5] Škrášek, J., Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky* II., SNTL, Praha 1986.