Komplexní čísla

Příklady k procvičení

1. Zapište v algebraickém tvaru čísla:

   a) $(2+3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})-(2+\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})$ b) $\dfrac{2-\mathrm{i}}{-3+\mathrm{i}}-\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}$

2. Víte-li, že $\mathrm{i}^2=-1$, určete:

   $$\mathrm{i}^3,\quad \mathrm{i}^4,\quad \mathrm{i}^{11}$$

   (Pro mocniny komplexních čísel s přirozenými exponenty platí stejná pravidla jako pro mocniny čísel reálných: $z^m z^n = z^{m+n}$ atd.)

3. V $\mathbb{C}$ řešte rovnice:

   a) $|x|-x=1+2\mathrm{i}\,,$ b) $(3-4\mathrm{i})^2-2\overline{x}=x$

4. Vyjádřete v goniometrickém tvaru čísla

   a) $-5+5\mathrm{i},$ b) $-\pi,$ c) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$

5. V algebraickém tvaru vyjádřete čísla:

   a) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right),$ b) $\dfrac{1}{2}\left(\cos 193\pi+\mathrm{i}\sin 193\pi\right)$

6. Vypočítejte:

   $$(1-\mathrm{i})^{100}$$

7. V oboru komplexních čísel řešte rovnice:

   a) $7x^2+5=0,$ b) $3x^2-4x+2$

8. V $\mathbb{C}$ řešte následující rovnici a její kořeny znázorněte v Gaussově rovině:

   $$x^6-64=0$$

Výsledky:

1. a) $-6+10\mathrm{i}$, b) $-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$

2. $\mathrm{i}^3=\mathrm{i}^2\cdot\mathrm{i}=-\mathrm{i}$, $\quad \mathrm{i}^4=\mathrm{i}^2\cdot\mathrm{i}^2=1$, $\quad \mathrm{i}^{11}=\mathrm{i}^{4\cdot 2}\cdot\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$

3. $x=a+b\mathrm{i}\Rightarrow |x|=\sqrt{a^2+b^2}\,,\overline{x}=a-b\mathrm{i}$, rovnost komplexních čísel - musí se rovnat reálné a imaginární části
a) $\sqrt{a^2+b^2}-(a+b\mathrm{i})=1+2\mathrm{i}\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}-a=1\wedge -b\mathrm{i}=2\mathrm{i}$, po dořešení: $x=\frac{3}{2}-2\mathrm{i}$
b) postup obdobný, $x=-\frac{7}{3}+24\mathrm{i}$

4. a) $5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, b) $\pi\left(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi\right)$, c) $\cos\frac{5}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{4}\pi$

5. a) $\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$, b) $-\frac{1}{2}$

6. $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{7}{4}\pi\right)\right]^{100}=-2^{50}$ (Moivreova věta)

7. a) $x_{1,2}=\pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{5}{7}}$, b) $x_{1,2}=\frac{4\pm\mathrm{i}\sqrt{8}}{6}=\frac{2\pm\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}$

8. $x^6=64\left(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0\right)$, $x_k=2\left(\cos\frac{2k\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{6}\right)=2\left(\cos\frac{k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{3}\right)$
(obrazy těchto čísel v Gaussově rovině jsou ve vrcholech pravidelného šestiúhelníku vepsaného do kružnice s poloměrem 2 a středem v počátku)