# Řešené příklady z aplikované matematiky 2

(komplexní čísla, totální diferenciál,
skalární a vektorové pole, diferenciální rovnice)

***Vypracoval:*** **David Michálek**

# Komplexní čísla

## *Příklad 1*

Z výrazu $z=\dfrac{2-4j}{1+j}\cdot(3-2j)+(1+2j)\cdot j^7$ vypočtěte $|z|$:

$$z=\frac{2-4j}{1+j}\cdot(3-2j)+(1+2j)\cdot j^7=\frac{(2-4j)\cdot(3-2j)}{1+j}+(1+2j)\cdot(-j)=\frac{6-4j-12j+8j^2}{1+j}+\left(-j-2j^2\right)=$$

$$=\frac{-2-16j}{1+j}+(2-j)=\frac{-2-16j}{1+j}\cdot\frac{1-j}{1-j}+(2-j)=\frac{(-2-16j)\cdot(1-j)}{(1+j)\cdot(1-j)}+(2-j)=$$

$$=\frac{-2+2j-16j+16j^2}{1-j^2}+(2-j)=\frac{-18-14j}{1-(-1)}+(2-j)=\frac{-18-14j}{2}+(2-j)=$$

$$=\frac{-18}{2}-\frac{14j}{2}+2-j=-9-7j+2-j=\mathbf{-7-8j}$$

$$|z|=\sqrt{(-7)^2+(-8)^2}=\sqrt{49+64}=\sqrt{\mathbf{113}}$$

## *Příklad 2*

Převeďte komplexní číslo $d=-2\sqrt{3}+2j$ na goniometrický tvar:

$$|d|=\sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{4\cdot3+4}=\sqrt{16}=\mathbf{4}$$

$$\cos\varphi=\frac{a}{|d|}=\frac{-2-2\sqrt{3}}{4}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\;\Rightarrow\;\varphi=\mathbf{150°}=\mathbf{210°}$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{|d|}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\;\Rightarrow\;\varphi=\mathbf{30°}=\mathbf{150°}$$

$$d=|d|\cdot(\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi)=\mathbf{4\cdot(\cos150°+j\cdot\sin150°)}$$

## *Příklad 3*

Určete $c^8$ z čísla $c=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}j$:

$$|c|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=\mathbf{1}\qquad\cos\varphi=\frac{a}{|c|}=\frac{-\frac{1}{2}}{1}=-\mathbf{\frac{1}{2}}\;\Rightarrow\;\varphi=\mathbf{120}=\mathbf{240°}$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{|c|}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\;\Rightarrow\;\varphi=\mathbf{300°}=\mathbf{240°}\qquad c=|c|\cdot(\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi)=\mathbf{1\cdot(\cos240°+j\cdot\sin240°)}$$

$$c^n=|c|^n\cdot(\cos n\cdot\varphi+j\cdot\sin n\cdot\varphi)\;\Rightarrow\;c^8=1^8\cdot\left[\cos(8\cdot240°)+j\cdot\sin(8\cdot240°)\right]=$$

$$=1\cdot(\cos1920°+j\cdot\sin1920°)=\mathbf{1\cdot(\cos120°+j\cdot\sin120°)}=-\mathbf{\frac{1}{2}}+\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}j}$$

## Příklad 4

Je dáno komplexní číslo $z=\frac{5-3j}{8+2j}$. Určete jeho reálnou a imaginární část, vyjádřete toto číslo v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte $z^{26}$.

$$z=\frac{5-3j}{8+2j}=\frac{5-3j}{8+2j}\cdot\frac{8-2j}{8-2j}=\frac{40-10j-24j+6j^2}{64-4j^2}=\frac{34-34j}{68}=\frac{34}{68}-\frac{34}{68}j=\mathbf{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j}$$

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad \cos\varphi=\frac{a}{|z|}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad\Rightarrow\quad \varphi=\mathbf{45°}=\mathbf{315°}$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{|z|}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\mathbf{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad\Rightarrow\quad \varphi=\mathbf{225°}=\mathbf{315°} \qquad z=|z|\cdot(\cos\varphi+\mathrm{j}\cdot\sin\varphi)=\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot(\mathbf{\cos 315°+j\cdot\sin 315°})$$

$$z^{\mathrm{n}}=|z|^{\mathrm{n}}\cdot\left[\cos(\mathrm{n}\cdot\varphi)+\mathrm{j}\cdot\sin(\mathrm{n}\cdot\varphi)\right] \qquad z^{26}=|z|^{26}\cdot\left[\cos(26\cdot 315°)+\mathrm{j}\cdot\sin(26\cdot 315°)\right]=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{26}\cdot(\cos 8190°+\mathrm{j}\cdot\sin 8190°)=\left(\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{\mathbf{26}}\cdot(\mathbf{\cos 270°}+\mathrm{j}\cdot\sin\mathbf{270°})$$

## Příklad 5

Komplexní číslo $z=\frac{15-5j}{1+2j}-\frac{1-3j}{i}+3j-1$ vyjádřete v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte $z^6$.

$$z=\frac{15-5j}{1+2j}-\frac{1-3j}{j}+3j-1=\frac{(15-5j)\cdot(1-2j)}{(1+2j)\cdot(1-2j)}-\frac{(1-3j)\cdot(-j)}{j\cdot(-j)}+3j-1=$$

$$=\frac{15-30j-5j+10j^2}{1-4j^2}-\frac{-j+3j^2}{-j^2}+3j-1=\frac{5-35j}{1+4}-\frac{-3-j}{1}+3j-1=$$

$$=1-7j-(-3-j)+3j-1=1-7j+3+j+3j-1=\mathbf{3-3j}$$

$$|z|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\sqrt{9+9}=\mathbf{\sqrt{18}} \qquad \cos\varphi=\frac{a}{|z|}=\frac{3}{\sqrt{18}} \quad\Rightarrow\quad \varphi=\mathbf{45°}=\mathbf{315°}$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{|z|}=-\frac{3}{\sqrt{18}} \quad\Rightarrow\quad \varphi=\mathbf{225°}=\mathbf{315°} \qquad z=|z|\cdot(\cos\varphi+\mathrm{j}\cdot\sin\varphi)=\mathbf{\sqrt{18}}\cdot(\mathbf{\cos 315°+j\cdot\sin 315°})$$

$$z^{\mathrm{n}}=|z|^{\mathrm{n}}\cdot\left[\cos(\mathrm{n}\cdot\varphi)+\mathrm{j}\cdot\sin(\mathrm{n}\cdot\varphi)\right] \qquad z^6=\left(\sqrt{18}\right)^6\cdot\left[\cos(6\cdot 315°)+\mathrm{j}\cdot\sin(6\cdot 315°)\right]=$$

$$=5832\cdot(\cos 1890°+\mathrm{j}\cdot\sin 1890°)=\mathbf{5832}\cdot(\mathbf{\cos 90°+j\cdot\sin 90°})=\mathbf{0+5832j}$$

## Příklad 6

Je dáno komplexní číslo $z=\frac{1-3j}{2+j}+\frac{1+3j}{2-j}+\frac{2}{5j}$. Určete jeho reálnou a imaginární část, vyjádřete toto číslo v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte $z^8$.

$$z=\frac{1-3j}{2+j}+\frac{1+3j}{2-j}+\frac{2}{5j}=\frac{(1-3j)\cdot(2-j)}{(2+j)\cdot(2-j)}+\frac{(1+3j)\cdot(2+j)}{(2-j)\cdot(2+j)}+\frac{2\cdot(-5j)}{5j\cdot(-5j)}=$$

$$=\frac{2-j-6j+3j^2}{4-j^2}+\frac{2+j+6j+3j^2}{4-j^2}+\frac{-10j}{-25j^2}=\frac{2-j-6j+3j^2+2+j+6j+3j^2}{4-j^2}+\frac{-10j}{-25j^2}=$$

$$=\frac{-2}{4-(-1)}-\frac{10j}{25}=-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\mathbf{j} \qquad |z|=\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2+\left(-\frac{2}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{25}+\frac{4}{25}}=\sqrt{\frac{8}{25}}=\frac{\sqrt{\mathbf{8}}}{\mathbf{5}}$$

$$\cos\varphi=\frac{a}{|z|}=\frac{-\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{8}}{5}}=-\frac{10}{5\cdot\sqrt{8}}=-\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{8}}} \Rightarrow \varphi=\mathbf{135°}=\mathbf{225°}$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{|z|}=\frac{-\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{8}}{5}}=-\frac{10}{5\cdot\sqrt{8}}=-\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{8}}} \Rightarrow \varphi=\mathbf{315°}=\mathbf{225°}$$

$$z=|z|\cdot(\cos\varphi+\mathrm{j}\cdot\sin\varphi)=\frac{\sqrt{\mathbf{8}}}{\mathbf{5}}\cdot(\mathbf{cos\,225°+j\cdot sin\,225°}) \qquad z^{\mathrm{n}}=|z|^{\mathrm{n}}\cdot[\cos(\mathrm{n}\cdot\varphi)+\mathrm{j}\cdot\sin(\mathrm{n}\cdot\varphi)]$$

$$z^8=\left(-\frac{2}{\sqrt{8}}\right)^8\cdot[\cos(8\cdot225°)+\mathrm{j}\cdot\sin(8\cdot225°)]=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}\cdot(\mathbf{cos\,0°+j\cdot sin\,0°})=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}+\mathbf{0j}$$

## *Příklad 7*

Komplexní číslo $z=\frac{3-2j}{5+j}\cdot\frac{5-j}{5-j}$ vyjádřete v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte reálnou a imaginární část komplexního čísla $z^{16}$.

$$z=\frac{3-2j}{(5+j)}\cdot\frac{5-j}{5-j}=\frac{(3-2j)\cdot(5-j)}{(5+j)\cdot(5-j)}=\frac{15-3j-10j+2j^2}{25-j^2}=\frac{13-13j}{25-(-1)}=\frac{13-13j}{26}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{j}$$

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} \qquad \cos\varphi=\frac{a}{|z|}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \Rightarrow \varphi=\mathbf{45°}=\mathbf{315°}$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{|z|}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \Rightarrow \varphi=\mathbf{315°}=\mathbf{225°} \quad z=|z|\cdot(\cos\varphi+\mathrm{j}\cdot\sin\varphi)=\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\cdot(\mathbf{cos\,315°+j\cdot sin\,315°})$$

$$z^{\mathrm{n}}=|z|^{\mathrm{n}}\cdot[\cos(\mathrm{n}\cdot\varphi)+\mathrm{j}\cdot\sin(\mathrm{n}\cdot\varphi)] \qquad z^{16}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{16}\cdot[\cos(16\cdot315°)+\mathrm{j}\cdot\sin(16\cdot315°)]=$$

$$=\frac{1}{256}\cdot(\cos5040°+\mathrm{j}\cdot\sin5040°)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{256}}\cdot(\mathbf{cos\,0°+j\cdot sin\,0°})=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{256}}+\mathbf{0j}$$

## *Příklad 8*

Je dáno komplexní číslo $z=\frac{(1-j)^3-1}{(1+j)^3+1}+\frac{7}{5j}$. Určete jeho reálnou a imaginární část, vyjádřete toto číslo v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočtěte reálnou a imaginární část komplexního čísla $z^8$.

$$z=\frac{(1-j)^3-1}{(1+j)^3+1}+\frac{7}{5j}=\frac{1-3j+3j^2-j^3-1}{1+3j+3j^2+j^3+1}+\frac{7}{5j}\cdot\left(\frac{-5j}{-5j}\right)=\frac{-3-2j}{-1+2j}+\frac{-35j}{-25j^2}=$$

$$=\left(\frac{-3-2j}{-1+2j}\right)\cdot\left(\frac{-1-2j}{-1-2j}\right)-\frac{7}{5}j=\frac{3+6j+2j+4j^2}{1-4j^2}-\frac{7}{5}j=\frac{-1+8j}{5}-\frac{7}{5}j=$$

$$=-\frac{1}{5}+\frac{8}{5}j-\frac{7}{5}j=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\mathbf{j}\qquad |z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{25}}=\sqrt{\frac{2}{25}}=\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{5}}$$

$$\cos\varphi=\frac{a}{|z|}=\frac{-\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{5}}=-\frac{5}{5\sqrt{2}}=-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\Rightarrow\varphi=\mathbf{135°}=\mathbf{225°}\qquad \sin\varphi=\frac{b}{|z|}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{5}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\Rightarrow\varphi=\mathbf{45°}=\mathbf{135°}$$

$$z=|z|\cdot(\cos\varphi+\mathrm{j}\cdot\sin\varphi)=\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{5}}\cdot(\mathbf{cos\,135°+j\cdot sin\,135°})\qquad z^{\mathrm{n}}=|z|^{\mathrm{n}}\cdot[\cos(\mathrm{n}\cdot\varphi)+\mathrm{j}\cdot\sin(\mathrm{n}\cdot\varphi)]$$

$$z^8=\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^8\cdot[\cos(\mathrm{n}\cdot\varphi)+\mathrm{j}\cdot\sin(\mathrm{n}\cdot\varphi)]=\frac{2^4}{5^8}\cdot[\cos(8\cdot135°)+\mathrm{j}\cdot\sin(8\cdot135°)]=\frac{2^4}{5^8}\cdot[\cos1080°+\mathrm{j}\cdot\sin1080°]=$$

$$=\frac{\mathbf{2^4}}{\mathbf{5^8}}\cdot(\mathbf{cos\,0°+j\cdot sin\,0°})=\frac{\mathbf{2^4}}{\mathbf{5^8}}+\mathbf{0j}$$

## *Příklad 9*

Je dáno komplexní číslo $z=\frac{3+i}{1+i}-\frac{1-2i}{i}+4i$. Určete jeho reálnou a imaginární část, vyjádřete toto číslo v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte reálnou a imaginární část čísla $z^4$.

$$z=\frac{3+i}{1+i}-\frac{1-2i}{i}+4i=\frac{(3+i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}-\frac{(1-2i)\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}+4i=\frac{3-3i+i-i^2}{1-i^2}-\frac{2i^2-i}{-i^2}+4i=$$

$$=\frac{4-2i}{2}-(-2-i)+4i=2-i+2+5i=\mathbf{4+4i}\qquad z=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{\mathbf{32}}$$

$$\cos\varphi=\frac{a}{|z|}=\frac{4}{\sqrt{32}}=\frac{4}{\sqrt{16\cdot2}}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\Rightarrow\varphi=\mathbf{45°}=\mathbf{315°}$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{|z|}=\frac{4}{\sqrt{32}}=\frac{4}{\sqrt{16\cdot2}}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\Rightarrow\varphi=\mathbf{45°}=\mathbf{135°}$$

$$z=|z|\cdot(\cos\varphi+\mathrm{j}\cdot\sin\varphi)=\sqrt{\mathbf{32}}\cdot(\mathbf{cos\,45°+j\cdot sin\,45°})$$

$$z^{\mathrm{n}}=|z|^{\mathrm{n}}\cdot[\cos(\mathrm{n}\cdot\varphi)+\mathrm{j}\cdot\sin(\mathrm{n}\cdot\varphi)]\qquad z^4=\left(\sqrt{32}\right)^4\cdot[\cos(4\cdot45°)+\mathrm{j}\cdot\sin(4\cdot45°)]=$$

$$=\mathbf{1024}\cdot[\mathbf{cos\,180°+j\cdot sin\,180°}]=\mathbf{-1024+0j}$$

## *Příklad 10*

Komplexní číslo $z=\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}+2$ vyjádřete v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte reálnou a imaginární část čísla $z^6$.

$$z=\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}+2=\frac{(1+i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)}-\frac{(1-i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}+2=\frac{1+i+i+i^2}{1-i^2}-\frac{1-i-i+i^2}{1-i^2}+2=$$

$$=\frac{2i}{2}-\frac{-2i}{2}+2=i-(-i)+2=\mathbf{2+2i} \qquad z=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{\mathbf{8}}$$

$$\cos\varphi=\frac{a}{|z|}=\frac{2}{\sqrt{8}}=\frac{2}{\sqrt{4\cdot 2}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\Rightarrow\ \varphi=\mathbf{45°}=\mathbf{315°}$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{|z|}=\frac{2}{\sqrt{8}}=\frac{2}{\sqrt{4\cdot 2}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\ \Rightarrow\ \varphi=\mathbf{45°}=\mathbf{135°}$$

$$z=|z|\cdot(\cos\varphi+\mathrm{j}\cdot\sin\varphi)=\sqrt{\mathbf{8}}\cdot(\mathbf{cos\ 45°+j\cdot sin\ 45°})$$

$$z^{\mathrm{n}}=|z|^{\mathrm{n}}\cdot[\cos(\mathrm{n}\cdot\varphi)+\mathrm{j}\cdot\sin(\mathrm{n}\cdot\varphi)] \qquad z^6=\left(\sqrt{8}\right)^6\cdot[\cos(6\cdot 45°)+\mathrm{j}\cdot\sin(6\cdot 45°)]=$$

$$=\mathbf{512}\cdot[\mathbf{cos\ 270°+j\cdot sin\ 270°}]=\mathbf{0-512j}$$

## *Příklad 11*

Je dáno komplexní číslo $z=\frac{5-2i}{7+3i}\cdot\frac{7-3i}{7-3i}$. Určete jeho reálnou a imaginární část, vyjádřete toto číslo v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte reálnou a imaginární část čísla $z^{24}$.

$$z=\frac{5-2i}{7+3i}\cdot\frac{7-3i}{7-3i}=\frac{(5-2i)\cdot(7-3i)}{(7+3i)\cdot(7-3i)}=\frac{35-15i-14i+6i^2}{49-9i^2}=\frac{29-29i}{49+9}=\frac{29-29i}{58}=$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{i} \qquad |z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$$

$$\cos\varphi=\frac{a}{|z|}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{2\cdot\sqrt{2}}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \qquad \varphi=\mathbf{45°}=\mathbf{315°} \qquad \sin\varphi=\frac{b}{|z|}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{2}{2\cdot\sqrt{2}}=-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \qquad \varphi=\mathbf{225°}=\mathbf{315°}$$

$$z=|z|\cdot(\cos\varphi+\mathrm{j}\cdot\sin\varphi)=\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\cdot(\mathbf{cos\ 315°+j\cdot sin\ 315°}) \qquad z^{\mathrm{n}}=|z|^{\mathrm{n}}\cdot[\cos(\mathrm{n}\cdot\varphi)+\mathrm{j}\cdot\sin(\mathrm{n}\cdot\varphi)]$$

$$z^{24}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{24}\cdot[\cos(24\cdot 315°)+\mathrm{j}\cdot\sin(24\cdot 315°)]=\frac{2^{12}}{2^{24}}\cdot(\cos 7560°+\mathrm{j}\cdot\sin 7560°)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^{12}}}\cdot(\mathbf{cos\ 0°+j\cdot sin\ 0°})=$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^{12}}}+\mathbf{0j}$$

## *Příklad 12*

Komplexní číslo $z=\frac{5}{1+2i}+1$ vyjádřete v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte reálnou a imaginární část čísla $z^8$.

$$z=\frac{5}{1+2i}+1=\frac{5\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)}+1=\frac{5-10i}{1-4i^2}+1=\frac{5-10i}{1+4}+1=\frac{5-10i}{5}+1=1-2i+1=\mathbf{2+2i}$$

$$|z|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{\mathbf{8}} \qquad \cos\varphi=\frac{a}{|z|}=\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{8}}} \qquad \varphi=\mathbf{45°}=\mathbf{315°}$$

$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{8}}}$ $\quad \varphi = 45° = \mathbf{135°}$ $\quad z = |z|\cdot(\cos\varphi + \mathrm{j}\cdot\sin\varphi) = \sqrt{\mathbf{8}}\cdot(\mathbf{\cos 45° + j\cdot \sin 45°})$

$z^n = |z|^n\cdot[\cos(n\cdot\varphi) + \mathrm{j}\cdot\sin(n\cdot\varphi)]$ $\quad z^8 = \left(\sqrt{8}\right)^8\cdot[\cos(8\cdot 45°) + \mathrm{j}\cdot\sin(8\cdot 45°)] =$

$= 4096\cdot(\cos 360° + \mathrm{j}\cdot\sin 360°) = \mathbf{4096\cdot(\cos 0° + j\cdot\sin 0°) = 4096 + 0j}$

## Příklad 13

Komplexní číslo $\frac{i^{10}-1}{i^5+1}$ vyjádřete v goniometrickém tvaru:

$$\frac{i^{10}-1}{i^5+1} = \frac{-1-1}{i+1} = \frac{-2\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{-2+2i}{1-i^2} = \frac{-2+2i}{1-i^2} = \frac{-2+2i}{1+1} = \mathbf{-1+i}$$

$|z| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{\mathbf{2}}$ $\quad \cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{\mathbf{-1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \Rightarrow \varphi = 135° = \mathbf{225°}$

$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \Rightarrow \varphi = \mathbf{45°} = 135°$ $\quad z = |z|\cdot(\cos\varphi + \mathrm{j}\cdot\sin\varphi) = \sqrt{\mathbf{2}}\cdot(\mathbf{\cos 135° + j\cdot\sin 135°})$

## Příklad 14

Je dáno komplexní číslo $z = \frac{5-4i}{9+i}\cdot\frac{9-i}{9-i}$. Určete jeho reálnou a imaginární část, vyjádřete toto číslo v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte reálnou a imaginární část čísla $z^{28}$.

$$z = \frac{5-4i}{9+i}\cdot\frac{9-i}{9-i} = \frac{(5-4i)\cdot(9-i)}{(9+i)\cdot(9-i)} = \frac{45-5i-36i+4i^2}{81-i^2} = \frac{41-41i}{81+1} = \frac{41-41i}{82} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}$$

$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$ $\quad \cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \Rightarrow \varphi = 45° = \mathbf{315°}$

$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \Rightarrow \varphi = \mathbf{315°} = 225°$ $\quad z = |z|\cdot(\cos\varphi + \mathrm{j}\cdot\sin\varphi) = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\cdot(\mathbf{\cos 315° + j\cdot\sin 315°})$

$z^n = |z|^n\cdot[\cos(n\cdot\varphi) + \mathrm{j}\cdot\sin(n\cdot\varphi)]$ $\quad z^{28} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{28}\cdot[\cos(28\cdot 315°) + \mathrm{j}\cdot\sin(28\cdot 315°)] =$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{28}\cdot(\cos 8820° + \mathrm{j}\cdot\sin 8820°) = \left(\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{28}}\cdot(\mathbf{\cos 180° + j\cdot\sin 180°}) = -\left(\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{28}} + \mathbf{0j}$$

## Příklad 15

Je dáno komplexní číslo $z = \frac{3-2i}{5+i}$. Určete jeho reálnou a imaginární část, vyjádřete toto číslo v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte reálnou a imaginární část čísla $z^{30}$.

$$z=\frac{3-2i}{5+i}\cdot\frac{5-i}{5-i}=\frac{15-3i-10i+2i^2}{25-i^2}=\frac{13-13i}{26}=\mathbf{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}$$

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad \cos\varphi=\frac{a}{|z|}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad\Rightarrow\quad \varphi=\mathbf{45°}=\mathbf{315°}$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{|z|}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\mathbf{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad\Rightarrow\quad \varphi=\mathbf{315°}=\mathbf{225°} \qquad z=|z|\cdot(\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi)=\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot(\mathbf{\cos 315°+j\cdot\sin 315°})$$

$$z^n=|z|^n\cdot\left[\cos(n\cdot\varphi)+j\cdot\sin(n\cdot\varphi)\right] \qquad z^{30}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{30}\cdot\left[\cos(30\cdot 315°)+j\cdot\sin(30\cdot 315°)\right]=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{30}\cdot(\cos 9450°+j\cdot\sin 9450°)=\mathbf{\frac{2^{15}}{2^{30}}}\cdot(\mathbf{\cos 90°+j\cdot\sin 90°})=\mathbf{0+2^{-15}j}$$

## Příklad 16

Komplexní číslo $z=2+\frac{1-i}{1+i}-\frac{1+i}{1-i}$ vyjádřete v goniometrickém tvaru a pomocí Moivreovy věty vypočítejte reálnou a imaginární část čísla $z^6$.

$$z=2+\frac{1-i}{1+i}-\frac{1+i}{1-i}=2+\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}-\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=2+\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}-\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=$$

$$=2+\frac{1-2i+i^2-(1+2i+i^2)}{1-i^2}=2+\frac{1-2i+i^2-1-2i-i^2}{1+1}=2+\frac{0-4i}{2}=\mathbf{2-2i}$$

$$|z|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\mathbf{\sqrt{8}} \qquad \cos\varphi=\frac{a}{|z|}=\frac{2}{\sqrt{8}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad\Rightarrow\quad \varphi=\mathbf{45°}=\mathbf{315°}$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{|z|}=\frac{-2}{\sqrt{8}}=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\mathbf{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad\Rightarrow\quad \varphi=\mathbf{315°}=\mathbf{225°} \qquad z=|z|\cdot(\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi)=\mathbf{\sqrt{8}}\cdot(\mathbf{\cos 315°+j\cdot\sin 315°})$$

$$z^n=|z|^n\cdot\left[\cos(n\cdot\varphi)+j\cdot\sin(n\cdot\varphi)\right] \qquad z^6=\left(\sqrt{8}\right)^6\cdot\left[\cos(6\cdot 315°)+j\cdot\sin(6\cdot 315°)\right]=$$

$$=\left(\sqrt{8}\right)^6\cdot(\cos 1890°+j\cdot\sin 1890°)=\mathbf{512}\cdot(\mathbf{\cos 90°+j\cdot\sin 90°})=\mathbf{0+512j}$$

## Příklad 17

Určete $x$ z výrazu $x^6+729j=0$:

$x^6+729j=0$ jde o binomickou rovnici $z^n=a+bj$

$$x^6=-729j \qquad x=\sqrt[6]{-729j} \qquad z=0-729j$$

$$|z|=\sqrt{(-729)^2}=\mathbf{729} \qquad \cos\varphi=\frac{a}{|z|}=\frac{0}{729}=\mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \varphi=\mathbf{90°}=\mathbf{270°}$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{|z|}=-\frac{729}{792}=\mathbf{-1} \quad\Rightarrow\quad \varphi=\mathbf{270°} \qquad z=|z|\cdot(\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi)=\mathbf{729}\cdot(\mathbf{\cos 270°+j\cdot\sin 270°})$$

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \left\{|z| \cdot \left[\cos(\varphi + k\cdot 2\pi) + j\cdot \sin(\varphi + k\cdot 2\pi)\right]\right\}^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right) + j\cdot \sin\left(\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right)\right]$$

$$x = \sqrt[6]{z} = 729^{\frac{1}{6}} \cdot \left[\cos\left(\frac{270° + k\cdot 2\cdot 180°}{6}\right) + j\cdot \sin\left(\frac{270° + k\cdot 2\cdot 180°}{6}\right)\right] =$$

$$= \mathbf{3} \cdot \left[\mathbf{cos}\left(\frac{\mathbf{270°} + k\cdot \mathbf{2}\cdot \mathbf{180°}}{\mathbf{6}}\right) + \mathbf{j}\cdot \mathbf{sin}\left(\frac{\mathbf{270°} + k\cdot \mathbf{2}\cdot \mathbf{180°}}{\mathbf{6}}\right)\right]$$

## *Příklad 18*

V množině komplexních čísel řešte rovnici $x^3 - 1$:

$x^3 - 1$ jde o binomickou rovnici $z^n = a + bj$

$x^3 = 1 \quad x = \sqrt[3]{1} \quad z = 1 + 0j \quad |z| = \sqrt{1^2} = \mathbf{1} \quad z = |z|\cdot(\cos\varphi + \mathrm{j}\cdot \sin\varphi) = \mathbf{1}\cdot(\mathbf{cos\ 0°} + \mathbf{j}\cdot \mathbf{sin\ 0°})$

$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{1} = 1 \;\Rightarrow\; \varphi = \mathbf{0°} \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{0}{1} = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = \mathbf{0°}$

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right) + j\cdot \sin\left(\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right)\right]$$

$$x = \sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}} = 1^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\cos\left(\frac{0 + k\cdot 2\pi}{3}\right) + j\cdot \sin\left(\frac{0 + k\cdot 2\pi}{3}\right)\right] = \mathbf{1}\cdot \left[\mathbf{cos}\left(\frac{\mathbf{2k\pi}}{\mathbf{3}}\right) + \mathbf{j}\cdot \mathbf{sin}\left(\frac{\mathbf{2k\pi}}{\mathbf{3}}\right)\right], \text{ kde } k \in \{0,1,2\}$$

Odtud:

$$x_0 = \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + j\cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\cdot 0\cdot \pi}{3}\right) + j\cdot \sin\left(\frac{2\cdot 0\cdot \pi}{3}\right) = \cos 0 + j\cdot \sin 0 = \mathbf{1} + \mathbf{0j}$$

$$x_1 = \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + j\cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\cdot 1\cdot \pi}{3}\right) + j\cdot \sin\left(\frac{2\cdot 1\cdot \pi}{3}\right) = \cos\frac{2}{3}\pi + j\cdot \sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\mathbf{j}$$

$$x_2 = \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + j\cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\cdot 2\cdot \pi}{3}\right) + j\cdot \sin\left(\frac{2\cdot 2\cdot \pi}{3}\right) = \cos\frac{4}{3}\pi + j\cdot \sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\mathbf{j}$$

## *Příklad 19*

V množině komplexních čísel řešte rovnici $x^5 = j$:

$x^5 = j$ jde o binomickou rovnici $z^n = a + bj \quad |z| = \sqrt{1^2} = \mathbf{1} \quad \cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{0}{1} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \varphi = \mathbf{90°}$

$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{1} = \mathbf{1} \;\Rightarrow\; \varphi = \mathbf{90°} \quad z = |z|\cdot(\cos\varphi + \mathrm{j}\cdot \sin\varphi) = \mathbf{1}\cdot(\mathbf{cos\ 90°} + \mathbf{j}\cdot \mathbf{sin\ 90°})$

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right) + j\cdot \sin\left(\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right)\right]$$

$$x = \sqrt[5]{z} = z^{\frac{1}{5}} = 1^{\frac{1}{5}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi}{5}\right) + j\cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi}{5}\right)\right] = \mathbf{1}\cdot \left[\mathbf{cos}\frac{\boldsymbol{\pi}(\mathbf{1} + \mathbf{4k})}{\mathbf{10}} + \mathbf{j}\cdot \mathbf{sin}\frac{\boldsymbol{\pi}(\mathbf{1} + \mathbf{4k})}{\mathbf{10}}\right]$$

kde $k \in \{0,1,2,3,4\}$

Odtud:

$$x_0=\cos\frac{\pi(1+4k)}{10}+j\cdot\sin\frac{\pi(1+4k)}{10}=\cos\frac{\pi(1+4\cdot 0)}{10}+j\cdot\sin\frac{\pi(1+4\cdot 0)}{10}=\mathbf{\cos\frac{\pi}{10}+j\cdot\sin\frac{\pi}{10}}$$

$$x_1=\cos\frac{\pi(1+4k)}{10}+j\cdot\sin\frac{\pi(1+4k)}{10}=\cos\frac{\pi(1+4\cdot 1)}{10}+j\cdot\sin\frac{\pi(1+4\cdot 1)}{10}=\cos\frac{\pi}{2}+j\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\mathbf{0+j}$$

$$x_2=\cos\frac{\pi(1+4k)}{10}+j\cdot\sin\frac{\pi(1+4k)}{10}=\cos\frac{\pi(1+4\cdot 2)}{10}+j\cdot\sin\frac{\pi(1+4\cdot 2)}{10}=\mathbf{\cos\frac{9}{10}\pi+j\cdot\sin\frac{9}{10}\pi}$$

$$x_3=\cos\frac{\pi(1+4k)}{10}+j\cdot\sin\frac{\pi(1+4k)}{10}=\cos\frac{\pi(1+4\cdot 3)}{10}+j\cdot\sin\frac{\pi(1+4\cdot 3)}{10}=\mathbf{\cos\frac{13}{10}\pi+j\cdot\sin\frac{13}{10}\pi}$$

$$x_4=\cos\frac{\pi(1+4k)}{10}+j\cdot\sin\frac{\pi(1+4k)}{10}=\cos\frac{\pi(1+4\cdot 4)}{10}+j\cdot\sin\frac{\pi(1+4\cdot 4)}{10}=\mathbf{\cos\frac{17}{10}\pi+j\cdot\sin\frac{17}{10}\pi}$$

# Totální diferenciál

## *Příklad 1*

Určete totální diferenciál funkce $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$:

$$z=\frac{x^2+y^2}{2}=0,5x^2+0,5y^2$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{\partial\left(0,5x^2+0,5y^2\right)}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x+\frac{\partial\left(0,5x^2+0,5y^2\right)}{\partial y}\mathrm{d}y=$$

$$=(2\cdot 0,5x+0)\mathrm{d}x+(0+2\cdot 0,5y)\mathrm{d}y=\mathbf{x\cdot dx+y\cdot dy}$$

## *Příklad 2*

Určete totální diferenciál funkce $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$:

$z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ jde o fuknci složenou $(\operatorname{arctg} a)'=\dfrac{1}{1+a^2}$ $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{0\cdot x-y\cdot 1}{x^2}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{-y}{x^2}=\mathbf{\frac{-y}{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot x-y\cdot 0}{x^2}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{x}{x^2}=\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}=\mathbf{\frac{x}{x^2+y^2}}$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{-y}{x^2+y^2}\cdot\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\mathrm{d}y=\qquad /\text{ vytkneme }\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$=\mathbf{\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(-y\cdot dx+x\cdot dy)}$$

## *Příklad 3*

Určete totální diferenciál funkce $z = \sin(x+3y)$:

$z = \sin(x+3y)$ jde o fukci složenou $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\left[\sin(x+3y)\right]}{\partial x} = \cos(x+3y)\cdot(1+0) = \mathbf{\cos(x+3y)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial\left[\sin(x+3y)\right]}{\partial y} = \cos(x+3y)\cdot(0+3) = \mathbf{3\cdot\cos(x+3y)}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \mathbf{\cos(x+3y)\cdot dx + 3\cdot\cos(x+3y)\cdot dy}$$

## *Příklad 4*

Určete totální diferenciál funkce $z = \frac{x\cdot y}{x-y}$:

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x\cdot y}{x-y}$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$, $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

kde $u = x\cdot y$; $u' = \frac{\partial u}{\partial x} = x\cdot y = 1\cdot y = y$; $v = x-y$ $v' = \frac{\partial v}{\partial x} = 1-0 = 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x\cdot y}{x-y} = \frac{y\cdot(x-y) - x\cdot y\cdot 1}{(x-y)^2} = \frac{xy - y^2 - xy}{(x-y)^2} = \mathbf{\frac{-y^2}{(x-y)^2}}$$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\cdot y}{x-y}$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$,

kde $u = x\cdot y$; $u' = \frac{\partial u}{\partial y} = x\cdot y = x\cdot 1 = x$; $v = x-y$ $v' = \frac{\partial v}{\partial y} = 0-1 = -1$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\cdot y}{x-y} = \frac{x\cdot(x-y) - x\cdot y\cdot(-1)}{(x-y)^2} = \frac{x^2 - xy + xy}{(x-y)^2} = \mathbf{\frac{x^2}{(x-y)^2}}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \mathbf{\frac{-y^2}{(x-y)^2}\cdot dx + \frac{x^2}{(x-y)^2}\cdot dy}$$

## *Příklad 5*

Určete totální diferenciál funkce $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$:

$z = \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}$ $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}\cdot y^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}}=\mathbf{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\left(-\frac{1}{2}-1\right)}=-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{3}{2}}=-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2y^{\frac{3}{2}}}=-\mathbf{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}}}$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\mathbf{\frac{dx}{2\cdot\sqrt{x\cdot y}}-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}}dy}$$

## *Příklad 6*

Určete totální diferenciál funkce $z=\sqrt{x^3+y^3}$ :

$$z=\sqrt{x^3+y^3}=\left(x^3+y^3\right)^{\frac{1}{2}}\qquad\text{jde o funkci slouženou}\qquad \mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^3+y^3\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\left(x^3+y^3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(3x^2+0\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\left(x^3+y^3\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot x^2=\mathbf{\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^3+y^3\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\left(x^3+y^3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(0+3y^2\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\left(x^3+y^3\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot y^2=\mathbf{\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}}$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\cdot\mathrm{d}x+\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\cdot\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^3+y^3}}\cdot\mathrm{d}x+\frac{y^2}{\sqrt{x^3+y^3}}\cdot\mathrm{d}y\right)=$$

$$=\mathbf{\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2\cdot dx+y^2\cdot dy}{\sqrt{x^3+y^3}}}$$

# Skalární a vektorová pole

## *Příklad 1*

Je dána funkce $f=x^2yz+xy^2z+xyz^2$. Určete **div grad** $f$ v bodě **P**[1; 1; 1]:

$$f=x^2yz+xy^2z+xyz^2\qquad grad\ f=\left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y};\frac{\partial f}{\partial y}\right)\qquad div\,\vec{\mathbf{A}}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\mathbf{A}}=grad\ f=\left(2xyz+y^2z+yz^2;\,x^2z+2xyz+xz^2;\,x^2y+xy^2+2xyz\right)$$

$$div\,\vec{\mathbf{A}}=\frac{\partial\left(2xyz+y^2z+yz^2\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(x^2z+2xyz+xz^2\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(x^2y+xy^2+2xyz\right)}{\partial z}=$$

$$=\left(2yz+0+0\right)+\left(0+2xz+0\right)+\left(0+0+2xy\right)=\mathbf{2yz+2xz+2xy}$$

$$div\,\vec{\mathbf{A}}_{P[1;1;1]}=2\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1=2+2+2=\mathbf{6}$$

# Diferenciální rovnice

## *Příklad 1*

Řešte diferenciální rovnici $y' = \frac{x}{y}$ a najděte partikulární řešení pro bod $y_{(2)} = 1$:

$y' = \frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$ jde o součin 2 proměnných, řešíme separací proměnných

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x \cdot \frac{1}{y} \quad / \cdot y \cdot \mathrm{d}x \qquad y \cdot \mathrm{d}y = x \cdot \mathrm{d}x \qquad \int y \cdot \mathrm{d}y = \int x \cdot \mathrm{d}x$

$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \mathrm{c} \quad / \cdot 2 \qquad y^2 = x^2 + 2\mathrm{c} \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{\mathbf{x^2 + 2c}}$ obecné řešení

$y = \sqrt{x^2 + 2c}$ z tohoto výrazu máme najít partikulární řešení pro $y_{(2)} = 1 \;\Rightarrow\; y = \mathbf{1}$ a $x = \mathbf{2}$

$1 = \sqrt{2^2 + 2c} \quad /^2 \qquad 1 = 4 + 2c \qquad -3 = 2c \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

$y_{\mathrm{p}} = \sqrt{x^2 + 2c} = \sqrt{x^2 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = \sqrt{\mathbf{x^2 - 3}}$

## *Příklad 2*

Řešte diferenciální rovnici $y' = x \cdot y$:

$y' = x \cdot y$ jde o součin 2 proměných, řešíme separací proměnných

$\frac{dy}{dx} = x \cdot y \quad / : y \; / \cdot dx \qquad \frac{dy}{y} = x \cdot dx \qquad \int \frac{dy}{y} = \int x \cdot dx$

$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + c \qquad \ln|y| = \frac{x^2}{2} + \ln|\mathrm{c}| \qquad \ln|y| - \ln|\mathrm{c}| = \frac{x^2}{2}$

$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = \frac{x^2}{2} \qquad \frac{y}{c} = e^{\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad y = \boldsymbol{e}^{\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}}} \cdot \mathbf{c}$

## *Příklad 3*

Řešte diferenciální rovnici $y' - 2\sqrt{y} = 0$ pomocí metody separace pro $y_{(1)} = 0$:

$y' - 2\sqrt{y} = 0 \qquad y' = 2\sqrt{y} \qquad \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \qquad / : \left(\sqrt{y}\right) \; / \cdot dx$

$\frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\,dx \qquad y^{-\frac{1}{2}} \cdot dy = 2\,dx \qquad \int y^{-\frac{1}{2}} \cdot dy = \int 2\,dx \qquad \int y^{-\frac{1}{2}} \cdot dy = 2\int dx$

$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2x + c \qquad 2y^{\frac{1}{2}} = 2x + c \qquad 2\sqrt{y} = 2x + c \quad / : 2 \qquad \sqrt{y} = x + c \quad /^2 \qquad y = \left(\mathbf{x} + \mathbf{c}\right)^{\mathbf{2}}$ obecné řešení

$y = \left(x + c\right)^2$ z tohoto výrazu máme najít partikulární řešení pro $y_{(1)} = 0 \;\Rightarrow\; y = \mathbf{0}$ a $x = \mathbf{1}$

$0 = \left(1 + c\right)^2 \quad \Rightarrow \quad c = -1 \qquad y_{\mathrm{p}} = \left(x + c\right)^2 = \left(\mathbf{x} - \mathbf{1}\right)^{\mathbf{2}}$

## Příklad 4

Řešte diferenciální rovnici $y' = \sqrt[3]{y^2}$ pomocí metody separace pro $y_{(0)} = 1$:

$y' = \sqrt[3]{y^2} = y^{\frac{2}{3}}$ $\quad \frac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}} \quad /\cdot dx \;\; /: y^{\frac{2}{3}}$ $\quad \frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = dx$ $\quad y^{-\frac{2}{3}} \cdot dy = dx$

$\int y^{-\frac{2}{3}} \cdot dy = \int dx$ $\quad \frac{y^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = x + c$ $\quad 3y^{\frac{1}{3}} = x + c \;\; /:3$ $\quad y^{\frac{1}{3}} = \frac{x+c}{3} \quad /^3$ $\quad y = \left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{c}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{3}}$ obecné řešení

$y = \left(\frac{x+c}{3}\right)^3$ z tohoto výrazu máme najít partikulární řešení pro $y_{(0)} = 1 \;\Rightarrow\; y = \mathbf{1}$ a $x = \mathbf{0}$

$1 = \left(\frac{0+c}{3}\right)^3$ $\quad 1 = \left(\frac{c}{3}\right)^3$ $\quad 1 = \frac{c^3}{27} \quad /\cdot 27$ $\quad c^3 = 27 \;\Rightarrow\; c = \sqrt[3]{27} = \mathbf{3}$ $\quad y_{\mathrm{p}} = \left(\frac{x+c}{3}\right)^3 = \left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{3}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{3}}$

## Příklad 5

Řešte diferenciální rovnici $y' - 3\frac{y}{x} = 0$ pomocí metody separace pro $y_{(2)} = 4$:

$y' - 3\frac{y}{x} = 0$ $\quad y' = 3\frac{y}{x}$ $\quad \frac{dy}{dx} = 3\frac{y}{x} \quad /\cdot dx \;\; /: y$ $\quad \frac{dy}{y} = 3\frac{dx}{x}$

$\frac{1}{y}dy = 3\frac{1}{x}dx$ $\quad \int \frac{1}{y}dy = \int 3\frac{1}{x}dx$ $\quad \int \frac{1}{y}dy = 3\int \frac{1}{x}dx$

$\ln|y| = 3\ln|x| + c$ $\quad c$ je jakákoli konstanta, proto ji můžeme nahradit pro lepší počítání $\ln|\mathrm{c}|$

$\ln|y| = \ln|x^3| + \ln|c|$ $\quad \ln|y| = \ln|x^3 \cdot c|$ $\quad y = \mathbf{x^3} \cdot \mathbf{c}$ obecné řešení

$y = x^3 \cdot c$ z tohoto výrazu máme najít partikulární řešení pro $y_{(2)} = 4 \;\Rightarrow\; y = \mathbf{4}$ a $x = \mathbf{2}$

$4 = 2^3 \cdot c$ $\quad 4 = 8c \;\Rightarrow\; c = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ $\quad y_{\mathrm{p}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{x^3}$

## Příklad 6

Řešte diferenciální rovnici $x^2 y' - y = 0$ pomocí metody separace:

$x^2 y' - y = 0$ $\quad$ za $y'$ dosadíme $\frac{dy}{dx}$ $\;\Rightarrow\; x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = y \quad /\cdot dx \;\; /: x^2 \;\; /: y$

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}$ $\quad \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x^2}dx$ $\quad \ln|y| = \frac{x^{-1}}{-1} + c$ $\quad \ln|y| = -\frac{1}{x} + c$

$y = e^{-\frac{1}{x}+c} = e^{-\frac{1}{x}} \cdot e^c = \boldsymbol{e}^{-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}} \cdot \boldsymbol{c}$ $\qquad \boldsymbol{a}^{(x+y)} = \boldsymbol{a}^x \cdot \boldsymbol{a}^y$

## Použitá literatura

[1] Bušek, I: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, 2002
[2] Tesař, J.: Sbírka úloh z matematiky pro fyziky, PF JČU České Budějovice
[3] Kováčik, J, a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, 2004

# O B S A H