

Funkce více proměnných.

Základní pojmy.

$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R} = \{[x_1, x_2, \dots, x_n], x_i \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, n\}$.

Pro každé 3 prvky $u, v, w \in \mathbf{R}_n$, $u = [u_1, \dots, u_n]$, $v = [v_1, \dots, v_n]$, $w = [w_1, \dots, w_n]$ definujeme:

- $u \pm v = [u_1 \pm v_1, \dots, u_n \pm v_n]$
- $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$
- pro $c \in \mathbf{R}$ je $cu = [cu_1, \dots, cu_n]$

Dále platí

- $u + v = v + u$
- $(u + v) + w = u + (v + w)$
- pro $c \in \mathbf{R}$ je $c(u + v) = cu + cv$
- pro $c, d \in \mathbf{R}$ je $(c + d)u = cu + du$
- pro $c, d \in \mathbf{R}$ je $(cd)u = c(du)$
- existuje prvek $0 \in \mathbf{R}_n$, tak že $u + 0 = u$
- ke každému u existuje prvek $-u$ tak, že $u + (-u) = 0$ (prvek opačný)
- $1 \cdot u = [u_1, \dots, u_n]$
- $u = v \Leftrightarrow u_i = v_i, i = 1, \dots, n$

$\mathbf{R}_n$ lze chápat jako lineární vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{R}$.

V $\mathbf{R}_n$ lze definovat vzdálenost mnoha způsoby. Například pro $u, v \in \mathbf{R}_n$

➤ $|u - v| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$ eukleidovská vzdálenost

➤ $|u - v| = |u_1 - v_1| + \dots + |u_n - v_n|$ kosočtvercová vzdálenost

➤ $|u - v| = \max\{|u_1 - v_1|, \dots, |u_n - v_n|\}$ čtvercová vzdálenost

Pokud $v = 0$, píšeme $\|u\|$ a mluvíme o normě u . V tomto smyslu je $\|u - v\|$ vzdálenost $u - v$ od 0, neboli norma $u - v$.

$\mathbf{R}_n$ je tedy možno chápat jako normovaný lineární prostor.

Nechť $a \in \mathbf{R}_n$. Pak

$U(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}_n \text{ takových, že } \|x - a\| < \varepsilon\}$ se nazývá ε -okolí bodu a .

$P(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}_n \text{ takových, že } 0 < \|x - a\| < \varepsilon\}$ se nazývá prstencové ε -okolí bodu a .

Nechť $M \subset \mathbf{R}_n$.

$x \in M$ je **vnitřním bodem** množiny $M \Leftrightarrow$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $U(x, \varepsilon) \subset M$.

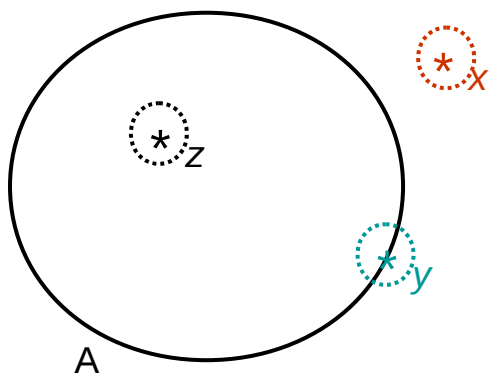
Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá **vnitřek množiny M** .

$x \in M$ je **hraničním bodem** množiny $M \Leftrightarrow$ pro každé $\varepsilon > 0$ je $U(x, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$.

Množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá **hranice množiny M** .

$x \in \mathbf{R}_n$ je **hromadným bodem** množiny $M \Leftrightarrow$ pro každé $\varepsilon > 0$ je $P(x, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$.

$x \in M$ je **izolovaným bodem** množiny $M \Leftrightarrow$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $P(x, \varepsilon) \cap M = \emptyset$.



$M = A \cup \{x\}$.

x je **izolovaný bod** množiny M

y je **hraniční bod** množiny M

z je **vnitřní bod** množiny M

Přiřazení f , které každému bodu $x \in \mathbf{R}_n$ přiřadí nejvýše jedno $y \in \mathbf{R}_k$ nazveme **funkce z $\mathbf{R}_n$ do $\mathbf{R}_k$** .

Definiční obor funkce f je $D(f) = \{x \in \mathbf{R}_n \text{ takových, že existuje } y \in \mathbf{R}_k \text{ tak, že } f(x) = y\}$.

Obor hodnot funkce f je $H(f) = \{y \in \mathbf{R}_k \text{ takových, že existuje } x \in \mathbf{R}_n \text{ tak, že } f(x) = y\}$.

Grafem funkce f je $G(f) = \{[x, y] \in \mathbf{R}_n \times \mathbf{R}_k \text{ takových, že } f(x) = y\}$.

Příklad.

Určete definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

$x > -1$ a současně $x^2 + y^2 < 4$.

Příklad.

Určete definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{y \sin(x)}$.

($y \geq 0$ a současně $\sin(x) \geq 0$) nebo ($y \leq 0$ a současně $\sin(x) \leq 0$) $\Leftrightarrow$

($y \geq 0$ a současně $x \in (0, \pi) + 2k\pi$) nebo ($y \leq 0$ a současně $x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi$).

Graf funkcí více proměnných.

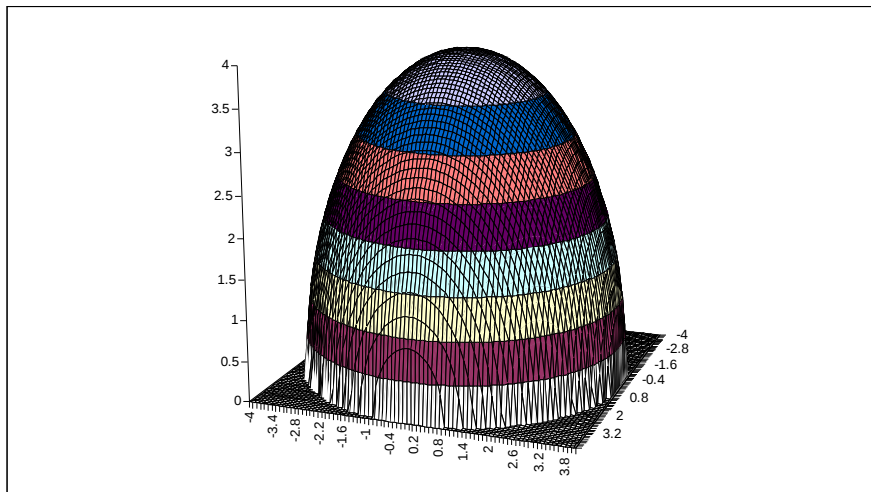
Speciálně se bude jednat o grafy funkcí $\mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}$.

Příklad.

Určete definiční obor a nakreslete graf funkce $f(x, y) = \sqrt{16-x^2-y^2}$.

Definiční obor: $x^2 + y^2 \leq 4$, neboli vnitřek a hranice kružnice se středem v bodě $[0, 0]$ a poloměrem 2.

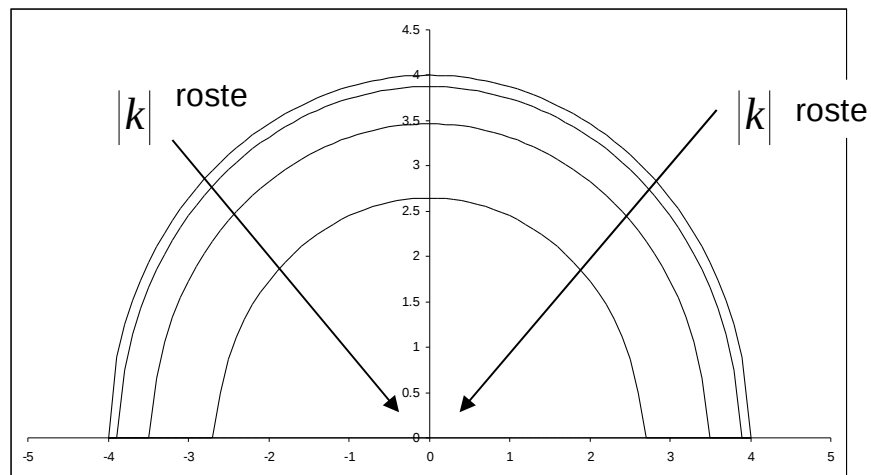
Graf je definován jako $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}_3, z = \sqrt{16-x^2-y^2}\}$, neboli jako podmnožina $\mathbf{R}_3$:



Častěji se však používají pro představu grafu řezy.

Řezy je nutno použít, jestliže definiční obor je podmnožinou $\mathbf{R}_n$, kde $n > 2$.

1. x je konstantní $z = \sqrt{16 - k^2 - y^2}$, $|k| \leq 4$, $z \geq 0$



2. Analogický graf dostaneme pro y konstantní.

3. z konstantní, $z = k$: grafem jsou kružnice se středem v bodě $[0, 0]$ a poloměrem 4. Odtud $0 \leq k \leq 4$.

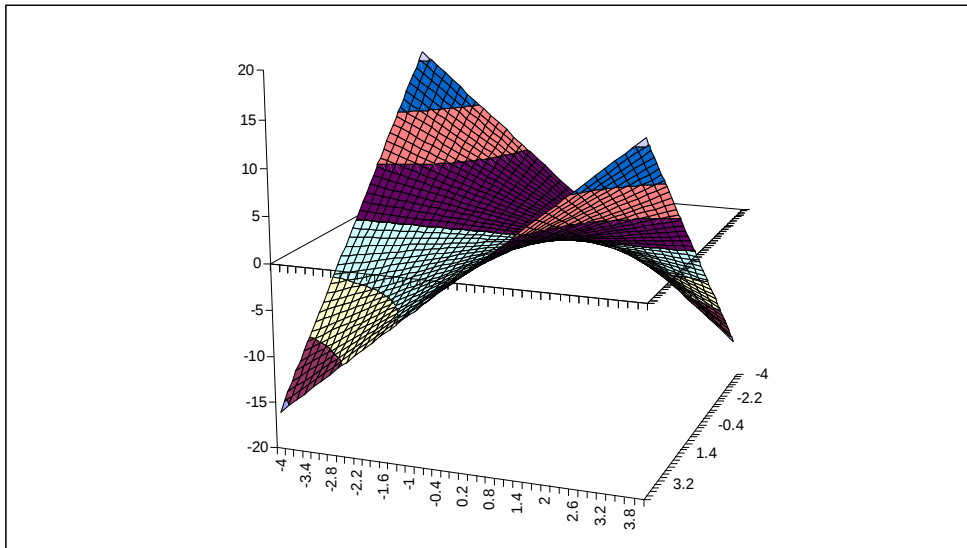
Zákonitosti z vrstevnicových grafů dávají dohromady 3-rozměrný graf. V případě, že nezávislých proměnných je více než 2, máme k dispozici pouze jednotlivé řezy jako podmnožiny $\mathbf{R}_2$.

Příklad.

Určete definiční obor a graf funkce $z = xy$.

Definičním oborem je $\mathbf{R}_2$.

Jestliže $x = k$ je konstanta, grafy jsou přímky procházející počátkem. Podobná situace nastane pro $y = k$. Jestliže $z = k$, pak $y = k/x$, pro $x \neq 0$. $x = 0$ má smysl pouze pro $k = 0$, pak y je libovolné. Pro $k = 0$ jsou x a y libovolné.



Limita a spojitost.

Nechť $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Jestliže existují $\lim_{x \rightarrow a_+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a_-} f(x)$ a obě se rovnají A , pak $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

V tomto případě máme pouze 2 možnosti: $x \rightarrow a_+$, nebo $x \rightarrow a_-$.

Jestliže ale $f: \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}_k$, pak x se blíží nejen po ose x , ale v jakémkoliv směru $\Rightarrow$ výpočet limit je obtížný.

Příklad.

Vypočítejte $\lim_{[x,y] \rightarrow [1,1]} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

Bod $[1, 1]$ lze do výrazu dosadit, aniž bychom dostali jako výsledek neurčitý výraz.

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [1,1]} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 1$$

Příklad.

Vypočítejte $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

Do výrazu nelze bod $[0, 0]$ dosadit, výsledkem by byl neurčitý výraz „0/0“.

Dosaďme speciální dvojice $[x, y] = [x, kx]$, tj k bodu $[0, 0]$ se blížíme po přímkách, které se liší směrnici k . Tím převedeme problém do jedné dimenze:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{2k}{1 + k^2}$ Pro různá k bude tedy limita různá. Protože pokud limita existuje, je určena jednoznačně,

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \text{ neexistuje.}$$

Definice.

Nechť $f : M \subset \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}_k$, nechť a je hromadný množiny M .

Řekneme, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí:

$$x \in P(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon).$$

Jestliže navíc $A = f(a)$, řekneme, že f je spojitá v a .

Zápis limity a spojitosti je stejný jako pro $n = k = 1$, avšak, jak vyplývá z předchozího příkladu, interpretace je jiná.

Definice.

Nechť speciálně $f : M \subset \mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}$, nechť $a = [a_1, a_2]$ je hromadný množiny M .

$\lim_{x \rightarrow a_1} \lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y)$, nebo $\lim_{x \rightarrow a_2} \lim_{y \rightarrow a_1} f(x, y)$ nazýváme dvojnásobné limity.

Tvrzení.

Nechť $f : M \subset \mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}$, nechť $a = [a_1, a_2]$ je hromadný množiny M .

1. Necht' $\lim_{[x,y] \rightarrow [a_1,a_2]} f(x,y)$ existuje a $\lim_{x \rightarrow a_1} \lim_{y \rightarrow a_2} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow a_2} \lim_{y \rightarrow a_1} f(x,y) = A$. Pak $\lim_{[x,y] \rightarrow [a_1,a_2]} f(x,y) = A$.
2. Necht' $\lim_{[x,y] \rightarrow [a_1,a_2]} f(x,y) = A$. Pak $\lim_{x \rightarrow a_1} \lim_{y \rightarrow a_2} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow a_2} \lim_{y \rightarrow a_1} f(x,y) = A$.

Poznámka.

Jestliže existují obě dvojnásobné limity a rovnají se, neplyne z toho existence limity.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 0. \text{ Přesto jsme v předchozím ukázali, že } \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \text{ neexistuje.}$$

Proto ukázat existenci limity v $\mathbf{R}_n$ je obtížné, někdy se podaří prokázat její neexistenci.

Příklad.

Vypočítejte $\lim_{[x,y] \rightarrow [1,2]} \frac{x^2 y^2 - 4}{x^4 + y^4 - 17}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\lim_{y \rightarrow 2} \frac{x^2 y^2 - 4}{x^4 + y^4 - 17} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{x^2 + 1} = 2 \quad \lim_{y \rightarrow 2} \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 y^2 - 4}{x^4 + y^4 - 17} \right) = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{1}{y^2 + 4} = \frac{1}{8}$$

Dvojnásobné limity se nerovnají $\Rightarrow \lim_{[x,y] \rightarrow [1,2]} \frac{x^2 y^2 - 4}{x^4 + y^4 - 17}$ neexistuje.

Příklad.

Vypočítejte $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x(y+1)}{2x+3y}$.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(y+1)}{2x+3y} \right) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x(y+1)}{2x+3y} \right) = \frac{1}{2}$$

Dvojnásobné limity se nerovnají $\Rightarrow$ limita neexistuje.

Příklad.

Vypočítejte $\lim_{[x,y] \rightarrow [-1,4]} \frac{x^3 + 1}{y(x+1)}$.

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [-1,4]} \frac{x^3 + 1}{y(x+1)} = \lim_{[x,y] \rightarrow [-1,4]} \frac{x^2 - x + 1}{y} = \frac{3}{4}$$

Příklad.

Vypočítejte $\lim_{[x,y] \rightarrow [1,4]} \frac{x^2 - 1}{y - 4}$.

Položíme $y - 4 = k(x - 1)$, tedy $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{k} = \frac{2}{k}$. Pro různá k je limita různá $\Rightarrow \lim_{[x,y] \rightarrow [1,4]} \frac{x^2 - 1}{y - 4}$ neexistuje.

Derivace.

Derivace ve směru.

V dalším budeme předpokládat, že funkce jsou definovány v prostoru $\mathbf{R}_n$. Obor hodnot je v $\mathbf{R}$.

Definice.

Nechť funkce $f: \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}$ je definována v otevřené množině $G \subset \mathbf{R}_n$, $a \in G$. Derivace funkce f ve směru $h \in \mathbf{R}_n$ se definuje jako

$$\partial_h f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

Poznámka.

$$\partial_0 f(a) = 0$$

V praxi hrají roli zejména derivace ve směru standardní báze prostoru $\mathbf{R}_n$, $e = (e_1, \dots, e_n)$, kde $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 na i -tém místě). Těmto derivacím se říká parciální derivace (podle i -té proměnné)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

Vektor $\text{grad}(f(a)) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ se nazývá gradient funkce f v bodě a .

Algebraické operace s parciálními derivacemi.

Nechť f a g jsou funkce $\mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}$, průnik definičních oborů je neprázdný. Nechť existují parciální derivace obou funkcí v bodě a patřícímu tomuto průniku. Pak pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$ je

$$\frac{\partial(f \pm g)}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \pm \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$$

$$\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)g(a) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)f(a)$$

$$\frac{\partial(f / g)}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)g(a) - \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)f(a)}{g^2(a)}$$

Je možno parciální derivace znovu derivovat, dostaneme parciální derivace 2. řádu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a))$.

Při tom $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)$.

Pro $i \neq j$ se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ nazývají smíšené a platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Definice.

Nechť funkce $f: \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}$ je definována v otevřené množině $G \subset \mathbf{R}_n$, $a \in G$.

Funkce f je **diferencovatelná v bodě a** , jestliže existují čísla $A_1, \dots, A_n$ taková že

$$\lim_{[t_1, \dots, t_n] \rightarrow [0, \dots, 0]} \frac{f(a_1 + t_1, \dots, a_n + t_n) - f(a_1, \dots, a_n) - A_1 t_1 - \dots - A_n t_n}{|t|} = 0, \text{ při tom } .$$

Výraz $\sum_{i=1}^n A_i t_i$ se nazývá **totální diferenciál**. Označujeme ho $df(A)$.

➤ Je-li funkce f v bodě a diferencovatelná, je v tomto bodě spojitá.

➤ Jsou-li $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ pro všechna $i = 1, \dots, n$ spojité, je funkce f diferencovatelná, a tedy spojitá,

$$df(a) = \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$$

Nadrovina $\sum_{i=1}^n A_i t_i + C$ se nazývá tečná nadrovina ke grafu funkce $f: \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}$ v bodě a , jestliže platí

$$\lim_{[t_1, \dots, t_n] \rightarrow [0, \dots, 0]} \frac{f(a_1 + t_1, \dots, a_n + t_n) - A_1 t_1 - \dots - A_n t_n - C}{|t|} = 0$$

Jsou-li všechny parciální derivace spojité, pak $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i = 1, \dots, n$.

$f(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)$. Chyba této aproximace je úměrná $|x - a|$.

Poslední výraz lze přepsat do tvaru obecné rovnice nadroviny $0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)x_i - f(x_1, \dots, x_n) + A(a, f(a))$.

Směr kolmý k rovině vyjadřuje normálový vektor $n = \text{grad } f(a)$

Normálová přímka v bodě $[a, f(a)]$ má v $\mathbf{R}_n$ parametrický tvar:

$$X_i = a_i + \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)t, i = 1, \dots, n$$

$$Z = f(a) - t$$

Nechť funkce $f : \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}$ je $(m + 1)$ -krát spojitě diferencovatelná v bodě a a na nějakém jeho okolí.

Pak pro x z tohoto okolí platí

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^m \frac{d^i f(a)}{i!} + R_m. \text{ Tento výraz se nazývá } \textbf{Taylorův rozvoj} \text{ funkce } f \text{ na okolí bodu } a.$$

$$T_m(a) = f(a) + \sum_{i=1}^m \frac{d^i f(a)}{i!} \text{ se nazývá } \textbf{Taylorův polynom } m\text{-tého řádu funkce } f \text{ v bodě } a \text{ a } R_m \text{ se nazývá}$$

Lagrangeův zbytek. R_m je úměrný $d^{(m+1)} f(a)$.

Příklad.

Je dána funkce $f(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2$$

Tečná nadrovina k funkci f v bodě $[-1, 1]$:

$$z = 0 + \frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1)(x + 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1)(y - 1)$$

$$z = -4(x + 1) - 4(y - 1) = -4x - 4y$$

Příklad.

Vypočítejte přibližně hodnotu funkce $f(x) = x^3 + 4y^3$ v bodě $[1.11, 0.58]$ pomocí hodnot v bodě $[1, 0.5]$.

$$f(1, 0.5) = 1.5, \quad x - x_0 = 1.11 - 1 = 0.11, \quad y - y_0 = 0.58 - 0.5 = 0.08.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0.5) = 3 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 12y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0.5) = 12 \cdot 0.5^2 = 3$$

$$f(1.11, 0.58) \approx 1.5 + 3 \cdot 0.11 + 3 \cdot 0.08 = 2.07$$

Při tom $f(1.11, 0.58) = 2.148079$. Rozdíl je dán pohybem po lineární tečné nadrovině při aproximaci.

Lokální extrémy funkcí.

Jedná se o funkce $\mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}$.

Nechť funkce $f: \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}$ má definiční obor $D(f)$. Jestliže existuje okolí bodu $a \in D(f)$ takové, že pro každé x z tohoto okolí je

- $f(x) \geq f(a)$, pak a je lokální minimum funkce f .
- $f(x) > f(a)$, pak a je ostré lokální minimum funkce f .
- $f(x) \leq f(a)$, pak a je lokální maximum funkce f .
- $f(x) < f(a)$, pak a je ostré lokální maximum funkce f .

Nechť funkce $f: \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}$ má definiční obor $D(f)$. Nechť $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, i = 1, \dots, n$.

Pak a je stacionární bod funkce f .

Nechť funkce $f: \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}$ má definiční obor $D(f)$. Nechť existují všechny parciální derivace funkce f v bodě a .
Nechť a je lokální extrém funkce f . Pak a je stacionární bod funkce f .

Speciálně pro $f: \mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}$. Necht' existují spojité alespoň 2 parciální derivace v okolí bodu $a \in D(f)$.

Označme $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{vmatrix}$.

Je-li a stacionárním bodem funkce f , pak

- jestliže $D_1 > 0$ a současně $D_2 > 0$, je a lokálním minimem.
- jestliže $D_1 < 0$ a současně $D_2 > 0$, je a lokálním maximem.
- jestliže $D_2 < 0$, lokální extrém neexistuje.
- jestliže $D_2 = 0$, nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout jinak, než z chování funkce na okolí bodu a .

Příklad.

Vypočítejte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 - 3xy + 3y^2$.

1. $D(f) = \mathbf{R}_2$

2. stacionární body

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6y - 3x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \text{ a současně } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \text{ právě, když } [x, y] = [0, 0] \text{ nebo } [x, y] = [0.5, 0.25]$$

3. Druhé parciální derivace

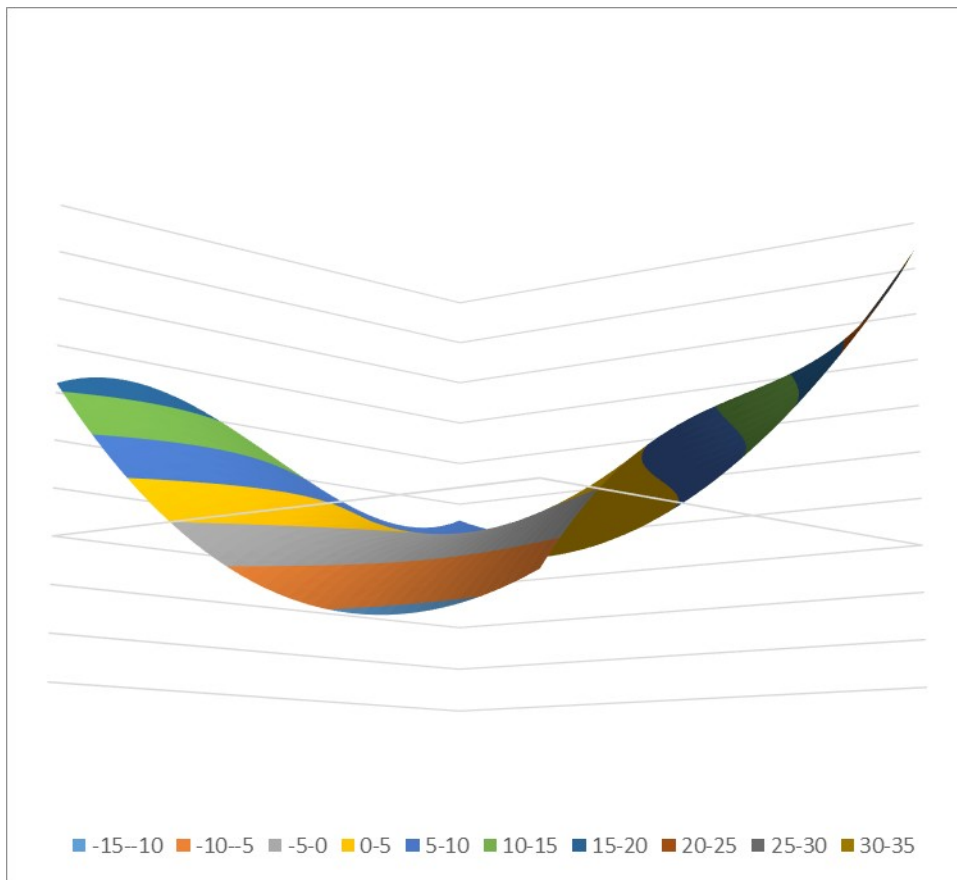
$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -3, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6$$

4. D_1 a D_2 ve stacionárních bodech

$$D_1(0, 0) = 0, D_2(0, 0) = -9 < 0 \Rightarrow \text{bod } [0, 0] \text{ není bodem lokálního extrému.}$$

$$D_1(0.5, 0.25) = 3 > 0, D_2(0.5, 0.25) > 0 \Rightarrow \text{bod } [0.5, 0.25] \text{ je bodem lokálního minima.}$$

5. $f(0, 0) = 0$, $f(0.5, 0.25) = -1/16$.



Analogicky pro funkci $f: \mathbf{R}_3 \rightarrow \mathbf{R}$:

Nechť $a \in D(f)$ je stacionární bod funkce f a necht' na okolí tohoto bodu jsou alespoň druhé parciální derivace spojité. Definujeme

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z), D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

Pak jestliže

- $D_1 > 0$ a $D_2 > 0$ a $D_3 > 0$, je a bodem ostrého lokálního minima.
- $D_1 < 0$ a $D_2 > 0$ a $D_3 < 0$, je a bodem ostrého lokálního maxima.
- $D_2 < 0$ není v a lokální extrém.

Obecně.

Definujeme Hessův determinant D funkce $f: \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}$ v bodě $a \in D(f)$. Necht' v okolí bodu a existují spojité 2. parciální derivace.

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{vmatrix}$$

Označme $D_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(a) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \end{vmatrix}$, speciálně $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)$, $D_n = D$.

Nechť $f: \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}$, $a \in D(f)$ je stacionární bod funkce f . Nechť na okolí bodu a existují všechny 2. parciální derivace a jsou spojité.

Pak jestliže

- pro každé sudé i je $D_i > 0$ a zároveň pro každé liché i je $D_i < 0$, f má v bodě a **lokální maximum**.
- pro každé sudé i je $D_i < 0$ a zároveň pro každé liché i je $D_i > 0$, f má v bodě a **lokální minimum**.
- v ostatních případech f může a nemusí mít v bodě a lokální extrém.

Příklad.

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2)$

$$D(f) = \mathbf{R}_2$$

Stacionární body:

$$\frac{df}{dx}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Leftrightarrow 2xe^{-x^2-y^2}(-2y^2 - x^2 + 1) = 0 \text{ a současně}$$

$$2ye^{-x^2-y^2}(-2y^2 - x^2 + 2) = 0.$$

Stacionární body jsou $[0,0]$, $[0,1]$, $[0,-1]$, $[1,0]$, $[-1,0]$.

Druhé parciální derivace ve stacionárních bodech:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = e^{-x^2-y^2}((2 - 4x^2)(-2y^2 - x^2 + 1) - 4x^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4xye^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 3),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = e^{-x^2-y^2}((2 - 4y^2)(-2y^2 - x^2 + 2) - 8y^2)$$

Bod [0,0]

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0, D_1 = 2 > 0 \Rightarrow \text{ostré lokální minimum, } f(0,0) = 0.$$

Bod [0,1]

$$D_2 = \begin{vmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -8e^{-1} \end{vmatrix} = 16e^{-2} > 0, D_1 = -2e^{-1} < 0 \Rightarrow \text{ostré lokální maximum, } f(0,1) = 2e^{-1}.$$

Bod [0,-1]

$$D_2 = \begin{vmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -8e^{-1} \end{vmatrix} = 16e^{-2} > 0, D_1 = -2e^{-1} < 0 \Rightarrow \text{ostré lokální maximum, } f(0,1) = 2e^{-1}.$$

Bod [1,0]

$$D_2 = \begin{vmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{vmatrix} = -8e^{-2} < 0, D_1 = -4e^{-1} < 0 \Rightarrow \text{není lokální extrém.}$$

Bod [-1,0]

$$D_2 = \begin{vmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{vmatrix} = -8e^{-2} < 0, D_1 = -4e^{-1} < 0 \Rightarrow \text{není lokální extrém}$$

