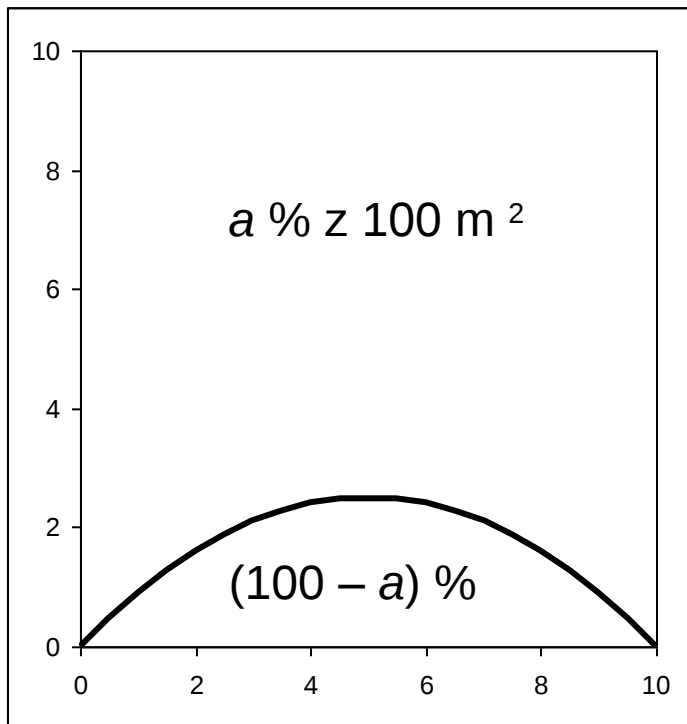


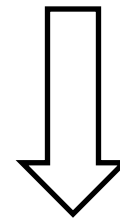
Neurčitý integrál.

Příklad.

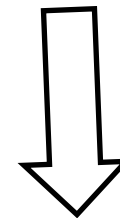
Na ploše 10 m x 10 m se vysazuje stejný typ rostlin ve 2 barvách. Obě barvy jsou odděleny křivkou $y = x(1 - 0.1x)$. Kolik procent celkové plochy tvoří jednotlivé barevné plochy.



Potřebujeme spočítat plochu pod křivkou



Princip výpočtů – neurčitý integrál



Plocha se počítá pomocí určitého integrálu

Nechť $F(x)$ je funkce, pro kterou platí $F'(x) = f(x)$. Pak **F je primitivní funkce** k funkci f .

Nechť F je primitivní funkce k f , tj. $F'(x) = f(x)$. Jestliže c je libovolná konstanta, pak $(F + c)'(x) = f(x)$, tedy $F + c$ je rovněž primitivní funkce k f .

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c, c \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)\} \quad \text{Stručněji píšeme} \quad \int f(x)dx = F(x) + c$$

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Integrace některých funkcí.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + c$$

Příklad.

$$\int \operatorname{tg}(x)dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = - \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = -\log|f(x)| + c = -\log|\cos x| + c = \log \frac{1}{|\cos x|} + c$$

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c, a > 0, a \neq 1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \operatorname{tg} x, x \neq (2k+1)\pi/2$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot gx, x \neq k\pi$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c, x \in (-1,1)$$

Neurčitý integrál z funkce f lze počítat pouze na množině, kde je f definována!!!

Integrace per partes.

Nechť f a g mají vlastní derivace v intervalu I .

Pak $f g'$ je integrovatelná v I právě tehdy, je-li $f'g$ integrovatelná v I , a platí

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx + c$$

Příklad.

$$\int x^2 \sin x dx$$

$$f'(x) = \sin x$$

$$g(x) = x^2, g'(x) = 2x$$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx + c$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$g(x) = x, g'(x) = 1$$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx + c = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

Příklad.

$$\int \log x dx$$

$$f'(x) = 1$$

$$g(x) = \log x, g'(x) = 1/x$$

$$\int \log x dx = x \log x - \int dx + c = x \log x - x + c, x > 0$$

Příklad.

Postup je stejný jako v předchozím případě.

Výsledek budeme potřebovat dále.

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx, n > 2. \quad f'(x) = 1, g(x) = (x^2 + 1)^{-n}, g'(x) = -\frac{2nx}{(x^2 + 1)^{n+1}}$$

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx = x(x^2 + 1)^{-n} + 2n \int x^2 (x^2 + 1)^{-(n+1)} dx = x(x^2 + 1)^{-n} + 2n \int (x^2 + 1)^{-n} dx - 2n \int (x^2 + 1)^{-(n+1)} dx$$

Označíme $I_n(x) = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$. Pak lze poslední rovnici přepsat:

$$I_n(x) = x(x^2 + 1)^{-n} + 2n I_n(x) - 2n I_{n+1}(x) \quad \text{Odtud} \quad I_{n+1}(x) = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \frac{2n - 1}{2n} I_n(x), n > 1.$$

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx = \frac{1}{2(n - 1)} \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2(n - 1)} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^{n-1}} dx, n > 2$$

Nechť f je funkce spojitá na intervalu (a, b) libovolného typu. Pak f má na tomto intervalu primitivní funkci F . Jestliže $a = -\infty$, nebo $b = +\infty$, definujeme $F(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x)$.

Substituce.

Nechť

- $z = f(x)$, $x \in A \subset D(f)$ a f má derivaci v pro každé $x \in A$
- $y = g(z)$, $z \in B \subset D(g)$ a existuje primitivní funkce $G(z)$ na B
- $f(A) \subset B$

Pak

$$\int g(z)dz = \int g(f(x)) f'(x)dx = G(f(x)) + c$$

Příklad.

$$\int \sin 5x dx$$

$$f(x) = 5x = z, f'(x) = 5,$$

$$g(z) = \sin z, G(z) = -\cos z + c$$

$$5 \int \sin 5x dx = \int \sin z dz = -\cos 5x + c$$

$$\int \sin 5x dx = \frac{-\cos 5x}{5} + K$$

Stručněji a jednodušeji

$$\int \sin 5x dx$$

$$5x = z$$

$$5dx = dz$$

$$dx = \frac{dz}{5}$$

$$\int \sin 5x dx = \int \sin z \frac{dz}{5} = -\frac{\cos 5x}{5} + c$$

Polynomy v $\mathbf{R}$.

Polynomem stupně n v $\mathbf{R}$ rozumíme funkci $P: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $D(P) = \mathbf{R}$ tvaru $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, kde koeficienty $a_i, i = 0, \dots, n$ jsou reálná čísla, $a_n \neq 0$.

Tvrzení.

Je-li P polynom stupně n (v $\mathbf{R}$), pak je možno psát

$$P(x) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_i)^{k_i}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_jx + q_j)^{l_j} .$$

Při tom

- $k_1 + k_2 + \dots + k_i \leq n$, $\sum_{m=1}^i k_i + \sum_{r=1}^j 2l_r = n$.
- diskriminant pro každý kvadratický člen $(x^2 + p_rx + q_r)^{l_r}$ rozkladu je menší než 0, $r = 1, \dots, j$.
- $\alpha_m, m = 1, \dots, i$ jsou kořeny polynomu P ,
- $k_m, m = 1, \dots, i$ jsou násobnosti kořenů $\alpha_m, m = 1, \dots, i$.

Poznámka.

Tvar rozkladu vyplývá z faktu, že kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ nemá v oboru reálných čísel řešení, je-li diskriminant menší než 0.

Racionální funkce v $\mathbf{R}$.

Nechť v oboru reálných čísel P a Q jsou polynomy.

Racionální funkci R definujeme $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Nechť $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je racionální funkce, st $P < \text{st } Q$.

Nechť $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x) \dots Q_n(x)$, kde $Q_j(x) = (a_jx + b_j)^{k_j}$,
nebo $Q_j(x) = (a_jx^2 + b_jx + c_j)^{k_j}$, $j = 1, \dots, n$.

➤ Funkci $R(x)$ lze pak vyjádřit jako součet racionálních funkcí

$$R(x) = R_1(x) + R_2(x) + \dots + R_n(x), \text{ kde } R_j(x) = \frac{P_j(x)}{Q_j(x)}, j = 1, \dots, n.$$

Tomuto rozkladu se říká **rozklad racionální funkce na parciální zlomky**.

➤ $P_j(x)$ je konstanta, nebo $P_j(x) = A_jx + B_j$, $j = 1, \dots, n$

➤ Jestliže se v rozkladu funkce Q vyskytuje $Q_j(x) = (a_jx + b_j)^{k_j}$, pak se v rozkladu racionální funkce R nacházejí členy $\frac{A_{1j}}{a_jx + b_j}, \frac{A_{2j}}{(a_jx + b_j)^2}, \dots, \frac{A_{k_jj}}{(a_jx + b_j)^{k_j}}$

➤ Jestliže se v rozkladu funkce Q vyskytuje $Q_j(x) = (a_jx^2 + b_jx + c_j)^{k_j}$, pak se v rozkladu racionální funkce R nacházejí členy

$$\frac{A_{1j}x + B_{1j}}{a_jx^2 + b_jx + c_j}, \frac{A_{2j}x + B_{2j}}{(a_jx^2 + b_jx + c_j)^2}, \dots, \frac{A_{k_jj}x + B_{k_jj}}{(a_jx^2 + b_jx + c_j)^{k_j}}.$$

Příklad.

Rozložte na parciální zlomky funkci $R(x) = \frac{5}{3x^2 - 9x + 6}$

$$R(x) = \frac{5}{3x^2 - 9x + 6} = \frac{5/3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{5/3}{(x-2)(x-1)} = \frac{5}{3} \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} \right)$$

Vynásobíme společným jmenovatelem $(x-2)(x-1)$ rovnici

$$\frac{5}{3x^2 - 9x + 6} = \frac{5}{3} \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} \right) \Rightarrow 1 = (A+B)x - (A+2B)$$

Na levé straně je koeficient u členu s x roven 0, tedy $A+B=0$,

na levé straně je absolutní člen roven 1, tedy $1 = -A - 2B$.

Řešením soustavy rovnic je $A=1$, $B=-1$.

$$R(x) = \frac{5}{3x^2 - 9x + 6} = \frac{5}{3} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right).$$

Příklad.

Rozložte na parciální zlomky funkci $R(x) = \frac{3}{(3x+2)^2(x-1)}$

$$R(x) = \frac{3x+1}{(3x+2)^2(x-1)} = \frac{A}{3x+2} + \frac{B}{(3x+2)^2} + \frac{C}{x-1}. \text{ Vynásobíme společným jmenovatelem.}$$

$$3x+1 = A(3x+2)(x-1) + B(x-1) + C(3x+2)^2$$

Stejně jako v předchozím případě roznásobíme a porovnáme koeficienty:

$$A = -12/25, B = 15/25, C = 4/25.$$

$$R(x) = \frac{3x+1}{(3x+2)^2(x-1)} = \frac{-12/25}{3x+2} + \frac{3/5}{(3x+2)^2} + \frac{4/25}{x-1}.$$

Příklad.

Rozložte na parciální zlomky funkci $R(x) = \frac{x+5}{(x^2+1)x^2}.$

$$R(x) = \frac{x+5}{(x^2+1)x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \text{ Vynásobíme společným jmenovatelem.}$$

$$x + 5 = Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2 \text{ Porovnáme koeficienty.}$$

$$A = 1, B = 5, C = -1, D = -5 \Rightarrow R(x) = \frac{x+5}{(x^2+1)x^2} = \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{x+5}{x^2+1}$$

Nechť $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je racionální funkce, st $P \geq$ st Q . Pak (dělením polynomů) lze psát

$R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$, kde st $P_2 <$ st Q . Rozklad racionální funkce $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ probíhá podle předchozího.

Příklad.

Rozložte na parciální zlomky $R(x) = \frac{3x^3 - x^2 - 18x - 10}{x^2 - 2x - 3}$

$$(3x^3 - x^2 - 18x - 10) : (x^2 - 2x - 3) = 3x + 5 + \frac{x + 5}{x^2 - 2x - 3} = 3x + 5 + R_1(x)$$

$$R_1(x) = \frac{x+5}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \quad \text{Poslední rovnost vynásobíme společným jmenovatelem.}$$

$$x + 5 = A(x - 3) + B(x + 1) \Rightarrow x + 5 = (A+B)x - 3A + B$$

$$1 = A + B, 5 = -3A + B \Rightarrow A = -1, B = 2.$$

$$R(x) = \frac{3x^3 - x^2 - 18x - 10}{x^2 - 2x - 3} = 3x + 5 - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-3}$$

Příklad.

Rozložte na parciální zlomky $R(x) = \frac{2x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2 x^2}$.

$$R(x) = \frac{2x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2 x^2} = \frac{2}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2 x^2} = \frac{2}{(x^2 + 1)^2} + R_1(x)$$

$$R_1(x) = -\frac{1}{(x^2 + 1)^2 x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 1)^2}$$

Postupujeme stejně jako v předchozím. $A = 2, B = -1, C = -2, D = 1, E = -2, F = -1$.

$$R(x) = \frac{2}{(x^2 + 1)^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2x-1}{x^2+1} - \frac{2x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2x-1}{x^2+1} - \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}.$$