ČESKÁ ZEMĚDĚLSKÁ UNIVERZITA V PRAZE

INTEGRÁLNÍ POČET

Václav Slavík

Šárka Dvořáková

15	9	2	8
4	6	13	11
5	3	12	14
10	16	7	1

2007

INTEGRÁLNÍ POČET

Václav Slavík

Šárka Dvořáková

Praha 2007

Vydala Česká zemědělská univerzita v Praze a NAROMA, s. r. o., Praha

VK Olomouc
2650709765

VĚDECKÁ KNIHOVNA V OLOMOUCI
SIGN. 1-184.740

© Prof. RNDr. Václav Slavík, DrSc., Ing. Šárka Dvořáková, Ph.D.

ISBN 978-80-213-1625-6 (ČZU)

ISBN 978-80-903681-3-2 (NAROMA, s.r.o.)

OBSAH

Základem této publikace jsou přednášky z matematiky konané ve druhém semestru pro studenty bakalářských studijních oborů fakult FLE, PEF a TF. Z tohoto textu však mohou pochopitelně čerpat i další zájemci o doplnění znalostí matematiky. Probíraná látka je ilustrována řešenými příklady a doplněna i úlohami (včetně výsledků) určenými pro samostatné procvičování probíraných témat.

Další řešené příklady k probrané látce je možno nalézt ve skriptech Dvořáková, Wohlmuthová: Řešené příklady k Matematice II, Praha 2006.

Obrázky obsažené v této publikaci jsou vytvořeny za použití softwarového produktu Mathematica firmy Wolfram Research, Inc.

Upozorňujeme, že skripta obsahují pouze základní informace týkající se probíraných témat. Hlubší pochopení všech souvislostí nebo rozšíření probírané látky je možno získat z mnohé další literatury včetně cizojazyčné. V tomto případě je nutno dávat pozor na definice pojmů a používanou symboliku. To nemusí být u různých autorů zcela stejné a proto se některé formulace mohou i trochu lišit.

Tato skripta jistě obsahují jak tiskové chyby, tak i věcné nedostatky. Budeme proto *vděčni za každé upozornění, které přispěje k tomu, aby v případném dalším vydání mohly být tyto nedostatky odstraněny.*

Autoři

NEURČITÝ INTEGRÁL

V této první kapitole se budeme zabývat základními úvahami integrálního počtu. V diferenciálním počtu je známo, jak každé elementární funkci přiřadit její derivaci. Při řešení mnoha matematických, fyzikálních a technických problémů potřebujeme umět řešit problém obrácený; to jest k dané funkci nalézt takovou funkci, jejíž derivace je rovna dané funkci. A přesně toto je náplní první kapitoly těchto skript.

Primitivní funkce a neurčitý integrál

Definice. *Řekneme, že funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu I, jestliže pro všechna $x \in I$ je $F'(x) = f(x)$.*

Poznámka. Pokud se interval I *rovná definičnímu oboru funkce* $f(x)$ *nebo pokud interval* I *není v nějakém tvrzení podstatný nebo je ze souvislostí jasné, o jaký interval se jedná, budeme často hovořit krátce pouze o primitivní funkci k dané funkci. Jestliže interval* I *obsahuje nějaký krajní bod* a, *pak v rovnosti* $F'(a) = f(a)$ předpokládáme derivaci jednostrannou, to jest derivaci zprava či zleva podle toho, zda bod a je pravým či levým krajním bodem intervalu I.

Nyní se budeme zabývat otázkami, které po zavedení tohoto pojmu nutně vznikají, a to otázkami, zda je primitivní funkce určena touto definicí jednoznačně, ke kterým funkcím existuje, a případně jak nějakou primitivní funkci k dané funkci nalézt.

Máme-li například funkci $f(x) = \cos x$, tak jistě ihned čtenáře napadne, že funkce $F(x) = \sin x$ je k ní primitivní. Navíc vidíme, že funkce $F(x)$ není jediná s touto vlastností, protože například derivace funkce $G(x) = 3 + \sin x$ je také rovna $\cos x$, a tedy funkce $G(x)$ je primitivní k funkci $f(x)$.

V tomto příkladě se dvě nalezené primitivní funkce liší pouze o konstantu. Otázkou zůstává, zda to tak je vždy. Odpověď na tuto otázku je kladná. Stačí si vzpomenout na Lagrangeovu větu z diferenciálního počtu, která říká, že má-li spojitá funkce $f(x)$ derivaci na intervalu I a jsou-li $a, b \in I$, $a < b$, potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že je $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Z tohoto tvrzení ihned plyne, že funkce, která má na intervalu I derivaci rovnou 0, je na tomto intervalu konstantní. Jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ dvě primitivní funkce k téže funkci na nějakém intervalu I, pak zcela zřejmě je $(F(x) - G(x))' = 0$, a tedy $F(x) - G(x) = C$, kde C je nějaká konstanta. Toto tvrzení vzhledem k jeho významu zformulujeme jako větu.

Věta. *Je-li $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu I, potom každá primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu I je rovna $F(x) + C$ pro nějakou konstantu C.*

Částečné, ale dostatečně silné, řešení otázky existence primitivní funkce je obsaženo v následující větě, jejíž důkaz je naznačen v kapitole Určitý integrál.

Věta. *Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu I, potom k ní na intervalu I vždy existuje primitivní funkce.*

Množinu všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ (na intervalu I) budeme označovat symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

a nazývat neurčitým integrálem funkce $f(x)$ (na intervalu I). Skutečnost, že $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$, budeme symbolicky vyjadřovat takto:

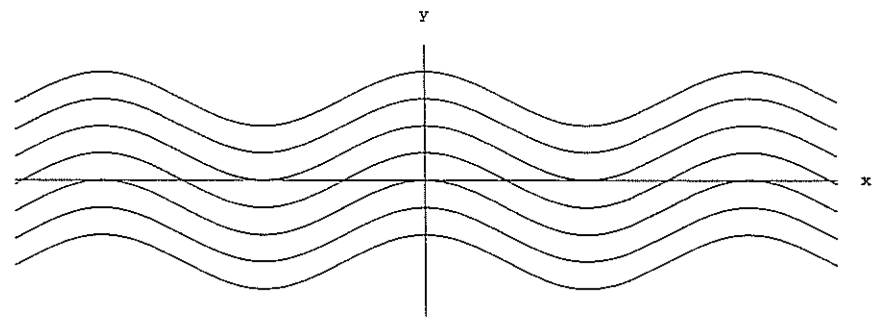
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Konstantu C nazýváme integrační konstantou. Slovo neurčitý budeme někdy vynechávat a hovořit pouze o integrálu.

Například skutečnost, že funkce $\sin x$ je primitivní funkcí k funkci $\cos x$, budeme vyjadřovat zápisem

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C.$$

Na obr. 1 je zobrazeno několik primitivních funkcí k funkci $f(x) = \cos x$.



Obr. 1: Primitivní funkce k funkci $f(x) = \cos x$

Poznámka. Pochopitelně, že stejnou skutečnost vyjadřuje i zápis $\int \cos u\,\mathrm{d}u = \sin u + C$ a i jiné zápisy lišící se pouze symbolem pro proměnnou. Poznamenejme, že symbol $\mathrm{d}x$ (případně $\mathrm{d}u$ atd.) v sobě obsahuje označení proměnné funkce $f(x)$, kterou integrujeme, a pochopitelně také funkce $F(x)$, kterou integrací získáme. Proto není možno v žádném případě tento symbol vynechávat. Je nedílnou součástí zavedené symboliky. Ve skutečnosti má symbol $\mathrm{d}x$ hlubší význam; o tom se zmíníme později.

V některých případech budeme používat trochu modifikované zápisy, například místo $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ můžeme použít zápis $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$, místo $\int 1\,\mathrm{d}x$ používáme zápis $\int \mathrm{d}x$. V žádném případě ovšem nelze používat místo $\int 0\,\mathrm{d}x$ zápis $\int$.

Nyní obraťme pozornost k problému, jak nalézt primitivní funkci k dané funkci a nebo, což je totéž, jak nalézt integrál dané funkce. Ačkoliv, jak již víme, ke každé spojité funkci existuje primitivní funkce, nemusí být (a také obvykle není) jednoduché ji nalézt. Dokonce primitivní funkce k elementární funkci (a elementární funkce jsou spojité) nemusí být elementární, a tedy ji nelze vyjádřit jako součty, násobky, podíly a skládání základních elementárních funkcí. Například je možno dokázat (což není jednoduché), že primitivní funkce k funkcím zadaným tak jednoduchým předpisem jako např. $y = \mathrm{e}^{-x^2}$, $y = \sin x^2$, $y = \frac{\sin x}{x}$ nejsou elementární. Hledání integrálů je tedy podstatně obtížnější než určování derivací funkcí. Nicméně v některých případech je tento problém poměrně snadno řešitelný. Upozorněme zde na velkou výhodu procesu integrování, kterou je možnost kontroly pomocí derivování nalezené primitivní funkce.

Obdobně jako jsme na základě znalosti faktu, že derivace funkce $\sin x$ je $\cos x$, dostali vztah $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$, můžeme dostat i některé další vztahy. Všechny tyto základní integrační vzorce si uvedeme v následující tabulce:

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1; \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C;$$
$$\int \mathrm{a}^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{a}^x}{\ln \mathrm{a}} + C; \qquad \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C;$$
$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C; \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C; \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C; \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C;$$
$$\int 0\,\mathrm{d}x = C; \qquad \int \mathrm{d}x = x + C.$$

Poznámka. U těchto vzorců jsme neuváděli intervaly, ve kterých vzorce platí. Jsou to intervaly, na kterých mají obě strany rovnic smysl. Například funkce $\arcsin x$ je primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na intervalu $(-1,1)$, funkce $\ln x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{x}$ na $(0,\infty)$ a funkce $\ln(-x)$ je primitivní k funkci $\frac{1}{x}$ na $(-\infty,0)$. Upozorňujeme, že platné jsou také vzorce

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{arccotg} x + C, \quad \text{resp.} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\arccos x + C.$$

Ověřte, že skutečně platí: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$, resp. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Bezprostředním důsledkem linearity derivování je platnost obdobných pravidel pro integrování. Za předpokladu, že existují integrály na pravé straně rovnice, platí:

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x;$$

obdobně pro libovolnou konstantu K je

$$\int K \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = K \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Výše uvedené základní vzorce pro integrování a tato dvě pravidla nám umožňují nalézt integrály některých dalších funkcí. Ukažme si to na několika příkladech.

Příklad. Určeme $\int \frac{x^3-6x+1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Nejprve si funkci, kterou máme integrovat, upravíme do tvaru vhodnějšího pro integrování, potom využijeme linearity integrování a pravidlo pro integrování mocniny x^α. Dostaneme

$$\int \frac{x^3-6x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int\left(x^2-6+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x - 6\int \mathrm{d}x + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}-6x+ + \ln|x| + C.$$

Všimněme si, že jsme integrační konstantu nepsali po každém integrování, ale připsali jsme ji až ke konečnému výsledku. Tuto drobnou nedůslednost budeme tolerovat i nadále. Integrační konstantu budeme zásadně připisovat až na závěr výpočtu. V dalších příkladech již řešení nebudeme komentovat. Zdůvodněte si podrobně jednotlivé kroky.

Příklad. Určeme $\int \frac{3x^2-2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{3x^2-2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3(x^2+1)-5}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 3\int \mathrm{d}x - 5\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 3\cdot x - 5\cdot \operatorname{arctg} x + C.$$

Příklad. Určeme $\int (x^4+3)^2\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^4+3)^2\,\mathrm{d}x = \int (x^8+6x^4+9)\,\mathrm{d}x = \int x^8\,\mathrm{d}x + 6\int x^4\,\mathrm{d}x + 9\int \mathrm{d}x = \frac{x^9}{9}+6\cdot\frac{x^5}{5}+9x+C.$$

Příklad. Určeme $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = -\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x + C.$$

Příklad. Určeme $\int \frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C.$$

Příklad. Určeme $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1-\cos x}{2}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2}\cdot\sin x + C.$$

Následující příklad je důležitý. Věnujte mu zvýšenou pozornost.

Příklad. Určeme $\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Procvičte si úpravu funkce na tvar vhodný pro tzv. přímé integrování na následujících příkladech.

Příklady k procvičení

Vypočtěte následující integrály:

1) $\int (8x^7+\sqrt[3]{x}-4)\,\mathrm{d}x$;
2) $\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)\mathrm{d}x$;
3) $\int \left(5x\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$;
4) $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,\mathrm{d}x$;
5) $\int x^2(2-x)^2\,\mathrm{d}x$;
6) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$;
7) $\int \frac{(1+x)^2}{x\cdot\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;
8) $\int \frac{5+x\cdot \mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$;
9) $\int \mathrm{e}^x\left(2+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^4}\right)\mathrm{d}x$;
10) $\int \frac{\mathrm{e}^{2x}+5\cdot\mathrm{e}^x}{6\cdot\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$;
11) $\int (2\cdot 3^x-3\cdot 2^x)\,\mathrm{d}x$;
12) $\int 9^x\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$;
13) $\int \frac{4^x}{5^x}\,\mathrm{d}x$;
14) $\int \frac{2^x-3^x}{6^x}\,\mathrm{d}x$;
15) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x}-3\cos x+1\right)\mathrm{d}x$;
16) $\int \left(5\sin x+\frac{1}{\sin^2 x}-2\right)\mathrm{d}x$;
17) $\int \frac{1}{\cos 2x-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$;
18) $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$;
19) $\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$;
20) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$;
21) $\int \frac{\sin 4x}{\cos 2x\cdot\sin x}\,\mathrm{d}x$;
22) $\int \left(12-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$;
23) $\int \sqrt{\frac{4}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$;
24) $\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$;
25) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$;
26) $\int \frac{3x-\sqrt{1-x^2}}{2x\cdot\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Výsledky

1) $x^8+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}-4x+C$;
2) $-\frac{1}{x}+2\cdot\sqrt{x}+x+C$;
3) $2\cdot\sqrt{x^5}-\frac{1}{\sqrt{x}}-\ln|x|+C$;
4) $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+x+C$;
5) $\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{x^5}{5}+C$;
6) $-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+C$;
7) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+4\cdot\sqrt{x}+\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}+C$;
8) $5\ln|x|+\mathrm{e}^x+C$;
9) $2\,\mathrm{e}^x-\frac{1}{3x^3}+C$;
10) $\frac{1}{6}\mathrm{e}^x+\frac{5}{6}x+C$;
11) $\frac{2}{\ln 3}3^x-\frac{3}{\ln 2}2^x+C$;
12) $\frac{1}{\ln 9+1}(9\mathrm{e})^x+C$;
13) $\frac{1}{\ln 4-\ln 5}\left(\frac{4}{5}\right)^x+C$;
14) $\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x-\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{3}\right)^x+C$;
15) $2\operatorname{tg} x-3\sin x+x+C$;
16) $-5\cos x-\operatorname{cotg} x-2x+C$;
17) $\operatorname{cotg} x+C$;
18) $x-\cos x+C$;
19) $-\operatorname{cotg} x-x+C$;
20) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+\frac{1}{2}x+C$;
21) $4\sin x+C$;
22) $12x+\operatorname{arccotg} x+C$;
23) $2\arcsin x+C$;
24) $x+\operatorname{arctg} x+C$;
25) $-\frac{1}{x}+\operatorname{arctg} x+C$;
26) $\frac{3}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}\ln|x|+C$.

Integrace metodou per partes

Dosavadní možnosti integrace, které využívaly pouze základní integrační vzorce a linearitu integrování, nám umožnily hledat integrály pouze pro značně omezený okruh funkcí. Jelikož neexistují pravidla analogická pravidlům pro derivování součinu, podílu funkcí či složené funkce, musíme nalézt nějaké jiné metody pro výpočet neurčitých integrálů. První taková metoda je založena na znalosti pravidla pro derivování součinu dvou funkcí $u(x)$, $v(x)$, které zní:

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

Za předpokladu, že funkce $u'(x)$, $v'(x)$ jsou spojité (pak funkce $u(x)$, $v(x)$ jsou také spojité; proč?), dostáváme rovnost

$$u'(x)\cdot v(x) = (u(x)\cdot v(x))' - u(x)\cdot v'(x),$$

která po integraci obou stran přechází v rovnost

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tuto rovnost budeme nazývat vzorcem pro integrování metodou per partes. Vzorec totiž umožňuje převést výpočet daného integrálu na výpočet integrálu jiného, který může být pro výpočet vhodnější či jednodušší. Proto se také tato metoda nazývá metodou integrování per partes (po částech). Její použití si nyní ukážeme na několika typických příkladech.

První typickou situací pro použití metody per partes je výpočet integrálů typu $\int x^\alpha\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$ pro libovolný exponent $\alpha \neq -1$. Pro $\alpha = -1$ je možno také použít metodu per partes, ale to vede k drobné komplikaci.

Příklad. Určeme $\int x^4\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$.

Nejprve je třeba zvolit nějaké funkce u a v tak, aby platila rovnost $u'\cdot v = x^4\cdot\ln x$. Přirozené volby, které se ihned nabízejí, jsou $u' = x^4$ a $v = \ln x$ nebo $u' = \ln x$ a $v = x^4$. Při první volbě vede použití metody per partes na výpočet integrálu $\int u\cdot v'\,\mathrm{d}x$, kde u je nějaká primitivní funkce k funkci $u' = x^4$, např. $u = \frac{x^5}{5}$, a $v' = \frac{1}{x}$. V druhém případě vede metoda na výpočet integrálu $\int u\cdot v'\,\mathrm{d}x$, kde u je nějaká primitivní funkce k funkci $\ln x$ a $v' = 4x^3$. Vidíme, že druhá volba by nám situaci neřešila, neboť doposud neumíme počítat $\int \ln x\,\mathrm{d}x$. Naopak při první volbě je výpočet požadovaného integrálu snadný. Budeme proto postupovat podle první volby. Dostaneme:

$$\int x^4\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5}\ln x - \int\frac{x^5}{5}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5}\ln x - \frac{1}{5}\int x^4\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5}\ln x - \frac{x^5}{25} + C.$$

V dalších příkladech již volby funkcí za u', resp. v nebudeme komentovat. Budeme však vždy používanou volbu za funkce u' a v psát do řešení příkladu ve formě jakési vsuvky, která bude také vždy znamenat následující rovnost

$$\left|\begin{matrix} u'=\dots & v=\dots \\ u=\dots & v'=\dots \end{matrix}\right| = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nyní si najdeme integrál z jedné ze základních elementárních funkcí, a to z funkce $\ln x$.

Příklad. Určeme $\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u'=1 & v=\ln x \\ u=x & v'=\frac{1}{x}\end{matrix}\right| = x\cdot\ln x - \int\frac{x}{x}\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln x - \int\mathrm{d}x = x\cdot\ln x - x + C.$$

Obdobně lze nalézt primitivní funkce ke všem logaritmickým funkcím $\log_a x$. Ukažme si to na příkladě dekadického logaritmu $\log x$.

Příklad. Určeme $\int \log x\,\mathrm{d}x$.

$$\int \log x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u'=1 & v=\log x \\ u=x & v'=\frac{1}{x\ln 10}\end{matrix}\right| = x\cdot\log x - \int\frac{x}{x\ln 10}\,\mathrm{d}x = x\cdot\log x - \frac{x}{\ln 10} + C.$$

Všimněte si obratu, který jsme při řešení předchozích dvou příkladů použili. Funkci $\ln x$, resp. $\log x$, jsme si vyjádřili ve tvaru $1\cdot\ln x$, resp. $1\cdot\log x$. Tento „trik" si zapamatujte, použijeme ho i později při výpočtu jiných integrálů.

Postup, který jsme použili při výpočtu integrálu $\int \ln x\,\mathrm{d}x$, je možno s malou modifikací použít i při výpočtu dalších podobných integrálů.

Příklad. Určeme $\int \ln(x+5)\,\mathrm{d}x$.

$$\int \ln(x+5)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u'=1 & v=\ln(x+5) \\ u=x+5 & v'=\frac{1}{x+5}\end{matrix}\right| = (x+5)\cdot\ln(x+5) - \int\frac{x+5}{x+5}\,\mathrm{d}x =$$
$$= (x+5)\cdot\ln(x+5) - x + C.$$

Zde jsme během výpočtu udělali další „trik". Za (nějakou) primitivní funkci k funkci $u' = 1$ jsme nevybrali $u = x$, ale vhodnější funkci $u = x+5$.

Druhou naprosto typickou situací pro použití metody per partes je výpočet integrálů typů $\int P(x)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$, $\int P(x)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$ a $\int P(x)\cdot a^x\,\mathrm{d}x$ (speciálně $\int P(x)\cdot e^x\,\mathrm{d}x$), kde $P(x)$ je libovolný polynom. Při výpočtu integrálů těchto typů se využívá skutečnosti, že se při derivování polynomu snižuje jeho stupeň. Metoda se používá tak dlouho, až se z polynomu stane konstanta.

Následující příklad vyžaduje použít metodu per partes dvakrát.

Příklad. Určeme $\int x^2\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$.

$$\int x^2\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u'=\sin x & v=x^2 \\ u=-\cos x & v'=2x\end{matrix}\right| = -x^2\cdot\cos x + \int 2x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -x^2\cdot\cos x + \left|\begin{matrix} u'=\cos x & v=2x \\ u=\sin x & v'=2\end{matrix}\right| = -x^2\cdot\cos x + 2x\cdot\sin x - \int 2\sin x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -x^2\cdot\cos x + 2x\cdot\sin x + 2\cos x + C.$$

Příklad. Určeme $\int x^3\cdot e^x\,\mathrm{d}x$.

$$\int x^3\cdot e^x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u'=e^x & v=x^3 \\ u=e^x & v'=3x^2\end{matrix}\right| = x^3\cdot e^x - \int 3x^2\cdot e^x\,\mathrm{d}x = x^3\cdot e^x - \left|\begin{matrix} u'=e^x & v=3x^2 \\ u=e^x & v'=6x\end{matrix}\right| =$$
$$= x^3\cdot e^x - \left(3x^2e^x - \int 6x\cdot e^x\,\mathrm{d}x\right) = x^3\cdot e^x - 3x^2\cdot e^x + \int 6x\cdot e^x\,\mathrm{d}x = x^3\cdot e^x - 3x^2\cdot e^x +$$

$$+\left|\begin{array}{ll} u'=e^x & v=6x \\ u=e^x & v'=6 \end{array}\right| = x^3\cdot e^x - 3x^2\cdot e^x + 6x\cdot e^x - \int 6e^x\,dx = x^3\cdot e^x - 3x^2\cdot e^x + 6x\cdot e^x - 6e^x + C.$$

Další typickou situací pro použití metody per partes je výpočet integrálů typů $\int a^x\cdot\sin x\,dx$, $\int a^x\cdot\cos x\,dx$, kde se integruje součin dvou funkcí, které se derivováním či integrováním příliš neliší. Nejprve si ukažme příklad.

Příklad. Určeme $\int e^x\cdot\sin x\,dx$.

$$\int e^x\cdot\sin x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u'=e^x & v=\sin x \\ u=e^x & v'=\cos x \end{array}\right| = e^x\cdot\sin x - \int e^x\cdot\cos x\,dx =$$
$$= e^x\cdot\sin x - \left|\begin{array}{ll} u'=e^x & v=\cos x \\ u=e^x & v'=-\sin x \end{array}\right| = e^x\cdot\sin x - e^x\cdot\cos x - \int e^x\cdot\sin x\,dx.$$

Výpočet původního integrálu jsme tedy převedli na výpočet úplně stejného integrálu, což by mohlo vést k domněnce o marnosti tohoto postupu. Postup však marný nebyl, podíváme-li se pouze na počátek a konec výpočtu. Dostáváme rovnost

$$\int e^x\cdot\sin x\,dx = e^x\cdot\sin x - e^x\cdot\cos x - \int e^x\cdot\sin x\,dx,$$

ze které snadno dostáváme rovnost

$$2\cdot\int e^x\cdot\sin x\,dx = e^x\cdot\sin x - e^x\cdot\cos x.$$

Odsud již bez problémů získáváme výsledek

$$\int e^x\cdot\sin x\,dx = \frac{1}{2}(e^x\cdot\sin x - e^x\cdot\cos x) + C,$$

o jehož správnosti se přesvědčte zkouškou.

Doporučujeme obdobným způsobem určit $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$, $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$, $\int \sin x\cdot\cos x\,dx$, $\int \sin^2 x\,dx$ a $\int \cos^2 x\,dx$. Při výpočtu posledních dvou integrálů použijte známou identitu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Výpočet integrálů metodou per partes si procvičte na následujících příkladech.

Příklady k procvičení

1) $\int (2x+1)\cdot e^x\,dx$;	2) $\int x^2\cdot e^x\,dx$;	3) $\int (1-x)\cdot 2^x\,dx$;
4) $\int 5x\cdot 3^x\,dx$;	5) $\int \sqrt{x}\cdot\ln x\,dx$;	6) $\int x\cdot\ln(x-1)\,dx$;
7) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$;	8) $\int \frac{3\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$;	9) $\int 6\ln x\,dx$;
10) $\int 2\ln^2 x\,dx$;	11) $\int (x^3+5x)\cdot\ln x^2\,dx$;	12) $\int x\cdot\sin x\,dx$;
13) $\int (2x+3)\cdot\cos x\,dx$;	14) $\int x^2\cdot\cos x\,dx$;	15) $\int (x^2+4x-5)\cdot\cos x\,dx$;
16) $\int \cos(\ln x)\,dx$;	17) $\int 2e^x\cdot\cos x\,dx$;	18) $\int 2x\cdot\operatorname{arctg} x\,dx$;
19) $\int x\cdot\operatorname{arccotg} x\,dx$;	20) $\int 12x^3\cdot\operatorname{arctg} x\,dx$.	

Výsledky

1) $(2x-1)\,e^x + C$;	2) $(x^2-2x+2)\,e^x + C$;
3) $\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{\ln 2}+1-x\right)2^x + C$;	4) $\frac{5}{\ln^2 3}(x\ln 3 - 1)\,3^x + C$;
5) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C$;	6) $\frac{x^2-1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{4}(x^2+2x) + C$;
7) $-\frac{\ln x+1}{x} + C$;	8) $6\cdot\sqrt{x}\cdot(\ln x - 2) + C$;
9) $6(x\ln x - x) + C$;	10) $2x\ln^2 x - 4x\ln x + 4x + C$;
11) $\left(\frac{1}{2}x^4+5x^2\right)\ln x - \frac{1}{8}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + C$;	12) $\sin x - x\cos x + C$;
13) $(2x+3)\sin x + 2\cos x + C$;	14) $x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$;
15) $(x^2+4x-7)\sin x + (2x+4)\cos x + C$;	16) $\frac{1}{2}x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$;
17) $e^x(\sin x + \cos x) + C$;	18) $(x^2+1)\operatorname{arctg} x - x + C$;
19) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arccotg} x + \frac{x}{2} + C$;	20) $(3x^4-3)\operatorname{arctg} x - x^3 + 3x + C$.

Integrace substitucí

Druhá integrační metoda, o které se zmíníme, je metoda substituční a je založena na znalosti derivování složené funkce. Jsou-li $F(t)$ a $g(x)$ funkce mající derivace a je-li definována složená funkce $F(g(x))$, pak platí: $(F(g(x)))' = F'(g(x))\cdot g'(x)$. Jinými slovy to lze vyjádřit následujícím způsobem.

Věta. *Nechť $F(t)$ je primitivní funkce k spojité funkci $f(t)$ na intervalu J, nechť $g(x)$ je spojitá funkce na intervalu I a nechť pro všechna $x\in I$ patří $g(x)$ do J. Potom funkce $F(g(x))$ je primitivní k funkci $f(g(x))\cdot g'(x)$ na intervalu I.*

Použijeme-li tuto větu při výpočtu integrálu, budeme říkat, že jsme použili substituci $g(x) = t$. Symbolicky lze tento postup znázornit takto:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \left|\begin{array}{c} g(x)=t \\ g'(x)\,dx=dt \end{array}\right| = \int f(t)\,dt = F(t) = F(g(x)) + C.$$

Při výpočtu nahrazujeme výraz $g(x)$ novou proměnnou t, výraz $g'(x)\,dx$, což je diferenciál funkce $g(x)$, výrazem dt, což je diferenciál proměnné t. Potom vypočteme $\int f(t)\,dt$, tj. získáme funkci $F(t)$, a nakonec, protože chceme mít výsledek ve stejných proměnných jako zadání, dosadíme zpět místo proměnné t výraz $g(x)$ a přidáme integrační konstantu.

Poznámka. Právě uvedený postup substituce při výpočtu neurčitého integrálu je možno také zobecnit na substituce tvaru $g(x) = h(t)$ (a odsud plynoucí rovnosti diferenciálů $g'(x)\,dx = h'(t)\,dt$) za předpokladu, že je možno provést poslední krok, kterým je vyjádření proměnné t pomocí x; toto je možné, je-li funkce $h(t)$ prostá. Potom je $t = h^{-1}(g(x))$. Symbolicky lze tento postup vyjádřit zápisem:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \left|\begin{array}{c} g(x)=h(t) \\ g'(x)\,dx=h'(t)\,dt \end{array}\right| = \int f(h(t))\cdot h'(t)\,dt = F(t) = F(h^{-1}(g(x))) + C.$$

Substituční metodu výpočtu integrálů je vhodné používat, pokud potřebujeme nalézt integrál funkce, která je až na násobek (který lze vytknout před integrál) součinem nějaké funkce argumentu $g(x)$ a derivace $g'(x)$. Pro lepší pochopení si tuto metodu ukážeme na několika ilustrativních příkladech.

Příklad. Vypočtěme $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$.

Jelikož diferenciál funkce $\sin x$ je $\cos x \, dx$, bude pro řešení tohoto příkladu vhodná substituce $\sin x = t$.

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{matrix} \right| = \int t^3 \, dt = \frac{t^4}{4} = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Příklad. Vypočtěme $\int 3x \cdot e^{x^2} \, dx$.

Jelikož je diferenciál funkce x^2 roven $2x \, dx$, povede k cíli substituce $x^2 = t$.

$$\int 3x \cdot e^{x^2} \, dx = \left| \begin{matrix} x^2 = t \\ 2x \, dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{3}{2} \int e^t \, dt = \frac{3}{2} e^t = \frac{3}{2} e^{x^2} + C.$$

Zkuste tento příklad vypočítat použitím substituce $e^{x^2} = t$.

Další tři příklady jsou typickou situací pro použití substituční metody při výpočtu integrálů typu $\int f(ax+b) \, dx$ za předpokladu, že umíme určit $\int f(t) \, dt$.

Příklad. Určeme $\int \sin 5x \, dx$.

$$\int \sin 5x \, dx = \left| \begin{matrix} 5x = t \\ 5 \, dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{5} \int \sin t \, dt = -\frac{\cos t}{5} = -\frac{\cos 5x}{5} + C.$$

Příklad. Určeme $\int (3x-7)^5 \, dx$.

$$\int (3x-7)^5 \, dx = \left| \begin{matrix} 3x - 7 = t \\ 3 \, dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{3} \int t^5 \, dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^6}{6} = \frac{1}{18} \cdot (3x-7)^6 + C.$$

Příklad. Určeme $\int \operatorname{tg}^2 \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) dx$.

$$\int \operatorname{tg}^2 \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \left| \begin{matrix} 2x - \frac{\pi}{4} = t \\ 2 \, dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int \operatorname{tg}^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \, dt = \frac{1}{2} \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} \, dt =$$
$$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} t - t) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - x + C.$$

Abychom ilustrovali, že určení vhodné substituce nemusí být jednoznačné, vypočítáme následující příklad třemi různými způsoby, které se liší použitou substitucí. Zdůvodněte si jednotlivé substituce a ověřte správnost všech tří, na první pohled různých, výsledků. Vypočtěte tento příklad také metodou per partes.

Příklad. Určeme $\int 2 \sin x \cos x \, dx$.

$$\int 2 \sin x \cos x \, dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{matrix} \right| = \int 2t \, dt = t^2 = \sin^2 x + C;$$

$$\int 2 \sin x \cos x \, dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \end{matrix} \right| = \int -2t \, dt = -t^2 = -\cos^2 x + C;$$

$$\int 2 \sin x \cos x \, dx = \int \sin 2x \, dx = \left| \begin{matrix} 2x = t \\ 2 \, dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\sin t}{2} \, dt = -\frac{\cos t}{2} = -\frac{\cos 2x}{2} + C.$$

Pokud máme integrovat funkci, která je rovna zlomku, jehož čitatel je (až na násobek) roven derivaci jmenovatele, můžeme postupovat tak, že položíme jmenovatel roven nové proměnné. Dostaneme:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \left| \begin{matrix} f(x) = t \\ f'(x) \, dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t} \, dt = \ln |t| = \ln |f(x)| + C.$$

Vzhledem k důležitosti tohoto výsledku doporučujeme si ho pamatovat jako vzorec

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C.$$

V následujících příkladech tento vzorec použijeme. Sledujte pozorně jednotlivé kroky výpočtů a použité algebraické a goniometrické úpravy.

Příklad. Určeme $\int \operatorname{cotg} x \, dx$.

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

Příklad. Vypočtěme $\int \frac{5x}{9 - x^2} \, dx$.

$$\int \frac{5x}{9-x^2} \, dx = -\frac{5}{2} \int \frac{-2x}{9 - x^2} \, dx = -\frac{5}{2} \ln |9 - x^2| + C.$$

V následujících třech příkladech se na první pohled zdá být použití vzorce nemožné, protože zcela evidentně není čitatel násobkem derivace jmenovatele. Jednoduchými algebraickými úpravami je však možno tohoto stavu dosáhnout.

Příklad. Určeme $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} \, dx$.

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x} \, dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \, dx = \ln |\ln x| + C.$$

Příklad. Určeme $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x} \, dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x} \, dx = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin x} \, dx = \ln |\arcsin x| + C.$$

Příklad. Vypočtěme $\int \frac{1}{1 + e^x} \, dx$.

$$\int \frac{1}{1+e^x} \, dx = \int \frac{1}{1+e^x} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \, dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} \, dx = -\int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} \, dx = -\ln (e^{-x}+1) + C.$$

Pokud bychom v nějakém příkladě dávali substituci za vše, co je pod nějakou odmocninou, potom doporučujeme udělat substituci za celou odmocninu, substituční rovnost umocnit a z této rovnosti počítat rovnost příslušných diferenciálů. Usnadní nám to poněkud práci. V čem? A nyní, jako obvykle, pár ilustrativních příkladů.

Příklad. Určeme $\int x \cdot \sqrt{4-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int x \cdot \sqrt{4-x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sqrt{4-x}=t \\ 4-x=t^2 \\ -\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int (4-t^2)\cdot t \cdot (-2t)\,\mathrm{d}t = -\int (8t^2-2t^4)\,\mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{8}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 = -\frac{8}{3}(\sqrt{4-x})^3 + \frac{2}{5}(\sqrt{4-x})^5 + C.$$

Příklad. Určeme $\int \sin x \cdot \sqrt{2-\cos x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \sin x \cdot \sqrt{2-\cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sqrt{2-\cos x}=t \\ 2-\cos x=t^2 \\ \sin x\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t \cdot 2t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^3 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2-\cos x}\right)^3 + C.$$

Příklad. Vypočtěme $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sqrt[3]{1+\ln x}=t \\ 1+\ln x=t^3 \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=3t^2\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t \cdot 3t^2\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}t^4 = \frac{3}{4}(\sqrt[3]{1+\ln x})^4 + C.$$

Nyní si vypočtěte substituční metodou integrály $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ a $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, jejichž výpočet jsme vám doporučovali na závěr části pojednávající o integraci metodou per partes. Porovnejte oba způsoby a uvědomte si, že substituční metodu je možno použít nejen pro výpočet těchto integrálů, ale i pro výpočet všech integrálů typu $\int \frac{\ln^\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$ a $\int \frac{\operatorname{arctg}^\alpha x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ pro libovolné reálné číslo α.

Další naprosto jasnou a typickou situací pro použití substituční metody je výpočet dvou následujících typů integrálů. Tyto integrály bychom bez správně volené substituce neurčili. Jsou to typy:

$$\int \frac{1}{a^2+b^2x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

kde a, b jsou nějaká kladná čísla. V obou případech použijeme při výpočtu substituci $bx = at$. Dostaneme

$$\int \frac{1}{a^2+b^2x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} bx=at \\ b\,\mathrm{d}x=a\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{ab}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a} + C;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} bx=at \\ b\,\mathrm{d}x=a\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{b}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b}\arcsin t = \frac{1}{b}\arcsin\frac{bx}{a} + C.$$

Tuto substituci si ještě procvičíme na dvou příkladech.

Příklad. Určeme $\int \frac{1}{9+4x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{9+4x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} 2x=3t \\ 2\,\mathrm{d}x=3\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{6}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + C.$$

Příklad. Určeme $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x=3t \\ \mathrm{d}x=3\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin t = \arcsin\frac{x}{3} + C.$$

Na závěr si ukažme ještě další typickou situaci pro možnost použití substituční metody při výpočtu integrálů. Ukažme si, jak je možno nalézt integrály typu

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x\,\mathrm{d}x, \quad \text{kde } n,\ m \text{ jsou celá nezáporná čísla,}$$

K řešení lze vždy dospět dodržováním následujícího návodu:
1. je-li n liché, použijeme substituci $\cos x = t$ a vzorec $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$;
2. je-li m liché, použijeme substituci $\sin x = t$ a vzorec $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$;
3. jsou-li obě čísla m, n sudá (nebo 0), používáme (případně opakovaně) vzorce

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{a} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

V případě, že jsou obě čísla n a m lichá, je možno postupovat dle bodu 1. i dle bodu 2.

Příklad. Určeme $\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x$.

$$\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x = \int \cos^4 x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x)^2 \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sin x=t \\ \cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$
$$= \int (1-t^2)^2\,\mathrm{d}t = \int (1-2t^2+t^4)\,\mathrm{d}t = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

Příklad. Určeme $\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$.

Nejprve si vyjádříme $\cos^4 x$ ve tvaru vhodnějším pro integrování. Je

$$\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right) = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right) =$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

Při výpočtu použijeme substituce $\left| \begin{array}{c} 2x=t \\ 2\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array} \right|$ a $\left| \begin{array}{c} 4x=z \\ 4\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}z \end{array} \right|$ a dostaneme:

$$\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\int \cos t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{32}\int \cos z\,\mathrm{d}z =$$
$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{32}\sin z = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Příklad. Určeme $\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x\,\mathrm{d}x$.

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x\,\mathrm{d}x = \int \sin^2 x \cdot \cos^5 x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)\cdot \cos^5 x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left| \begin{array}{c} \cos x=t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int (1-t^2)\cdot t^5 \cdot (-1)\,\mathrm{d}t = \int (t^7-t^5)\,\mathrm{d}t = \frac{t^8}{8} - \frac{t^6}{6} = \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\cos^6 x}{6} + C.$$

Zkuste řešit tento příklad za použití substituce $\sin x = t$.

Pochopitelně, máme-li nalézt neurčitý integrál k nějaké dané funkci, nelze tvrdit, že musíme použít metodu per partes nebo naopak, že musíme použít substituční metodu.

Některé typy lze počítat jak metodou per partes, tak metodou substituční. Integrace některých funkcí vyžaduje použít obě metody, ale také je možno se při integraci obejít bez obou těchto metod. Ukažme si na závěr této části pět příkladů, při jejichž výpočtu je nutno použít jak metodu per partes, tak substituci.

Příklad. Nalezněme $\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t\end{array}\right| = \int 2t\cdot\sin t\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{ll}u'=\sin t & v=2t\\ u=-\cos t & v'=2\end{array}\right| =$$
$$= -2t\cdot\cos t + \int 2\cos t\,\mathrm{d}t = -2t\cdot\cos t + 2\sin t = -2\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x} + 2\cdot\sin\sqrt{x} + C.$$

Příklad. Určeme $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll}u'=1 & v=\operatorname{arctg} x\\ u=x & v'=\frac{1}{1+x^2}\end{array}\right| = x\cdot\operatorname{arctg} x - \int\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Proč ve výsledku není $\ln|1+x^2|$?

Příklad. Určeme $\int \arcsin 2x\,\mathrm{d}x$.

$$\int \arcsin 2x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll}u'=1 & v=\arcsin 2x\\ u=x & v'=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\end{array}\right| = x\cdot\arcsin 2x - \int\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= x\cdot\arcsin 2x - \left|\begin{array}{c}\sqrt{1-4x^2}=t\\ 1-4x^2=t^2\\ -8x\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t\end{array}\right| = x\cdot\arcsin 2x + \int\frac{1}{t}\cdot\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = x\cdot\arcsin 2x + \frac{1}{2}\cdot t =$$
$$= x\cdot\arcsin 2x + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-4x^2} + C.$$

Příklad. Určeme $\int\frac{x+2}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

$$\int\frac{x+2}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{x}{x^2+4}+\frac{2}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x = \int\frac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x + \int\frac{2}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x +$$
$$+ \left|\begin{array}{c}x=2t\\ \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t\end{array}\right| = \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+4) + \int\frac{2\cdot2}{4(t^2+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+4) + \int\frac{1}{(t^2+1)}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+4) + \operatorname{arctg} t = \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+4) + \operatorname{arctg}\tfrac{x}{2} + C.$$

Příklad. Určeme $\int\frac{4-x}{\sqrt{16-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int\frac{4-x}{\sqrt{16-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{4}{\sqrt{16-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\right)\mathrm{d}x = \int\frac{4}{\sqrt{16-x^2}}\,\mathrm{d}x - \int\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left|\begin{array}{c}x=4t\\ \mathrm{d}x=4\,\mathrm{d}t\end{array}\right| + \left|\begin{array}{c}\sqrt{16-x^2}=u\\ 16-x^2=u^2\\ -2x\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u\end{array}\right| = \int\frac{4\cdot4}{4\cdot\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \int\frac{u}{u}\,\mathrm{d}u = 4\cdot\arcsin t + u =$$
$$= 4\cdot\arcsin\tfrac{x}{4} + \sqrt{16-x^2} + C.$$

Příklady k procvičení

1) $\int(2x-1)^9\,\mathrm{d}x$;	2) $\int\sqrt{3x+5}\,\mathrm{d}x$;	3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x}}$;
4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x-3)^5}$;	5) $\int \mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x$;	6) $\int 5\cdot2^{3-5x}\,\mathrm{d}x$;
7) $\int\cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$;	8) $\int\sin\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x$;	9) $\int\sin(4x-1)\,\mathrm{d}x$;
10) $\int\cos\sqrt{5-2x}\,\mathrm{d}x$;	11) $\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{\cos^2(2x+9)}$;	12) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin^2\frac{x}{2}}$;
13) $\int 2x\cdot\mathrm{e}^{x^2+1}\,\mathrm{d}x$;	14) $\int x\cdot\cos x^2\,\mathrm{d}x$;	15) $\int 5x^3\cdot\sin x^4\,\mathrm{d}x$;
16) $\int 2\mathrm{e}^x\cdot\cos\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$;	17) $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$;	18) $\int\cos^3 x\cdot\sin 2x\,\mathrm{d}x$;
19) $\int\sin^3 x\cdot\sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}x$;	20) $\int\frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$;	21) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\ln^7 x}$;
22) $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$;	23) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\cdot(3+\ln x)}$;	24) $\int\frac{\ln x}{x\cdot\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}x$;
25) $\int\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;	26) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\arcsin^3 x\cdot\sqrt{1-x^2}}$;	27) $\int\sqrt{\frac{\arccos x}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$;
28) $\int\operatorname{arctg}\sqrt{3x+5}\,\mathrm{d}x$;	29) $\int\frac{x^2}{2+x^3}\,\mathrm{d}x$;	30) $\int\operatorname{arccotg}\sqrt{3x-4}\,\mathrm{d}x$;
31) $\int 4x^2\cdot\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x$;	32) $\int\cos x\cdot\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x$;	33) $\int\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{(\mathrm{e}^x+4)^3}}\,\mathrm{d}x$;
34) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}}$;	35) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-x^2}}$;	36) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-8x^2}}$;
37) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-9x^2}}$;	38) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+16x^2}$;	39) $\int\frac{\mathrm{d}x}{9+x^2}$;
40) $\int\frac{\mathrm{d}x}{8x^2+4}$;	41) $\int\frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\,\mathrm{d}x$;	42) $\int\frac{2x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$;
43) $\int\frac{\mathrm{e}^x}{4+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$;	44) $\int\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^8}}\,\mathrm{d}x$;	45) $\int\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$;
46) $\int\frac{9\cos x}{\sqrt{9-\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$;	47) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\cdot(1+\ln^2 x)}$;	48) $\int x^5\cdot10^{3x^6+5}\,\mathrm{d}x$;
49) $\int\frac{1+2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$;	50) $\int\frac{\sqrt{1-\operatorname{cotg} x}}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$;	51) $\int\mathrm{e}^x\cdot\sqrt[3]{3\mathrm{e}^x-5}\,\mathrm{d}x$;
52) $\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x$;	53) $\int\operatorname{arctg}\sqrt{3-x}\,\mathrm{d}x$;	54) $\int\frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;
55) $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;	56) $\int\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;	57) $\int\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;
58) $\int\frac{1-2\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$;	59) $\int\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$;	60) $\int\operatorname{cotg}(3x+1)\,\mathrm{d}x$;
61) $\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x$;	62) $\int\cos^2 x\,\mathrm{d}x$;	63) $\int\sin^3 x\,\mathrm{d}x$;
64) $\int\cos^3 x\,\mathrm{d}x$;	65) $\int\sin^4 x\,\mathrm{d}x$;	66) $\int\sin^5 x\,\mathrm{d}x$;
67) $\int\sin^3 x\cdot\cos^4 x\,\mathrm{d}x$;	68) $\int\sin^2 x\cdot\cos^2 x\,\mathrm{d}x$;	69) $\int\sin^5 x\cdot\cos^3 x\,\mathrm{d}x$.

Při řešení následujících příkladů použijte libovolné dosud uvedené metody:

70) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; 71) $\int \sin x \cdot \sqrt{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$; 72) $\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}\,\mathrm{d}x$;

73) $\int x^3 \cdot \mathrm{e}^{3x^2}\,\mathrm{d}x$; 74) $\int x \cdot (\sin x + \sin x^2)\,\mathrm{d}x$; 75) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{x}}$;

76) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{6+x-x^2}}$; 77) $\int \left(2x+\frac{1}{x}\right)\cdot \ln x\,\mathrm{d}x$; 78) $\int \left(\frac{2}{\sin^2 x}+x\right)\cdot \cos x\,\mathrm{d}x$;

79) $\int (2+\operatorname{tg} x)^2\,\mathrm{d}x$; 80) $\int \operatorname{arccotg} x\,\mathrm{d}x$; 81) $\int \operatorname{arctg} 4x\,\mathrm{d}x$;

82) $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$; 83) $\int \arccos 3x\,\mathrm{d}x$; 84) $\int 2x \cdot \operatorname{arctg} x^2\,\mathrm{d}x$;

85) $\int \frac{x-5}{x^2+5}\,\mathrm{d}x$; 86) $\int \frac{1-x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$; 87) $\int \cos \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$.

Výsledky

1) $\frac{(2x-1)^{10}}{20}+C$; 2) $\frac{2}{9}\sqrt{(3x+5)^3}+C$;
3) $-2\sqrt{2-x}+C$; 4) $-\frac{1}{8(2x-3)^4}+C$;
5) $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-1}+C$; 6) $-\frac{2^{3-5x}}{\ln 2}+C$;
7) $3\sin\frac{x}{3}+C$; 8) $2\sin\sqrt{x+3}-2\cdot\sqrt{x+3}\cos\sqrt{x+3}+C$;
9) $-\frac{1}{4}\cos(4x-1)+C$; 10) $-\sqrt{5-2x}\sin\sqrt{5-2x}-\cos\sqrt{5-2x}+C$;
11) $\operatorname{tg}(2x+9)+C$; 12) $-\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+C$;
13) $\mathrm{e}^{x^2+1}+C$; 14) $\frac{1}{2}\sin x^2+C$;
15) $-\frac{5}{4}\cos x^4+C$; 16) $2\sin \mathrm{e}^x+C$;
17) $\frac{1}{\cos x}+C$; 18) $-\frac{2}{5}\cos^5 x+C$;
19) $\frac{2}{7}\cos^3 x\cdot\sqrt{\cos x}-\frac{2}{3}\cos x\cdot\sqrt{\cos x}+C$; 20) $\frac{1}{3}\ln^3 x+C$;
21) $-\frac{1}{6\ln^6 x}+C$; 22) $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C$;
23) $\ln|3+\ln x|+C$; 24) $\frac{2}{3}\sqrt{1+\ln x}(\ln x-2)+C$;
25) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x+C$; 26) $-\frac{1}{2\arcsin^2 x}+C$;
27) $-\frac{2}{3}\arccos x\cdot\sqrt{\arccos x}+C$; 28) $(x+2)\operatorname{arctg}\sqrt{3x+5}-\frac{1}{3}\sqrt{3x+5}+C$;
29) $\frac{1}{3}\ln|2+x^3|+C$; 30) $(x-1)\operatorname{arccotg}\sqrt{3x-4}+\frac{1}{3}\sqrt{3x-4}+C$;
31) $\frac{4}{3}\mathrm{e}^{x^3}+C$; 32) $\mathrm{e}^{\sin x}+C$;
33) $-\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}^x+4}}+C$; 34) $\frac{1}{2}\arcsin 2x+C$;
35) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C$; 36) $\frac{1}{\sqrt{8}}\arcsin(\sqrt{8}x)+C$;
37) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C$; 38) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}4x+C$;
39) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$; 40) $\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x)+C$;
41) $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+C$; 42) $\operatorname{arctg}x^2+C$;
43) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{e}^x}{2}+C$; 44) $\frac{1}{2}\arcsin x^4+C$;
45) $\operatorname{arccotg}(\cos x)+C$; 46) $9\arcsin\frac{\sin x}{3}+C$;
47) $\operatorname{arctg}(\ln x)+C$; 48) $\frac{1}{18\ln 10}10^{3x^6+5}+C$;
49) $\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}x)+C$; 50) $\frac{2}{3}\sqrt{(1-\operatorname{cotg}x)^3}+C$;
51) $\frac{1}{4}(3\mathrm{e}^x-5)\sqrt[3]{3\mathrm{e}^x-5}+C$; 52) $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\mathrm{e}^x)^3}-2\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+C$;
53) $\sqrt{3-x}-(4-x)\operatorname{arctg}\sqrt{3-x}+C$; 54) $2\sqrt{x}\arccos\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}+C$;
55) $-2\cos\sqrt{x}+C$; 56) $2x\sin\sqrt{x}+4\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-4\sin\sqrt{x}+C$;

57) $2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$; 58) $\frac{2-\cos x}{\sin x}+C$;
59) $-2\ln|\cos\frac{x}{2}|+C$; 60) $\frac{1}{3}\ln|\sin(3x+1)|+C$;
61) $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$; 62) $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$;
63) $\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C$; 64) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$;
65) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 66) $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$;
67) $\frac{\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^5 x}{5}+C$; 68) $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C$;
69) $\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+C$. 70) $x-2\sqrt{x}+\ln(1+\sqrt{x})^2+C$;
71) $-\frac{2}{3}\sqrt{(2+\cos x)^3}+C$; 72) $\frac{1}{8}\arcsin x^8+C$;
73) $\frac{1}{18}(3x^2-1)\mathrm{e}^{3x^2}+C$; 74) $\sin x-x\cos x-\frac{1}{2}\cos x^2+C$;
75) $\ln(1+2\cdot\sqrt{x})+C$; 76) $\arcsin\frac{2x-1}{5}+C$;
77) $x^2\ln x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln^2 x+C$; 78) $-\frac{2}{\sin x}+x\sin x+\cos x+C$;
79) $3x-4\ln|\cos x|+\operatorname{tg}x+C$; 80) $x\operatorname{arccotg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$;
81) $x\operatorname{arctg}4x-\frac{1}{8}\ln(1+16x^2)+C$; 82) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$;
83) $x\arccos 3x-\frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2}+C$; 84) $x^2\operatorname{arctg}x^2-\frac{1}{2}\ln(1+x^4)+C$;
85) $\frac{1}{2}\ln(x^5+5)-\sqrt{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C$; 86) $\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}+C$;
87) $3\cdot\sqrt[3]{x^2}\sin\sqrt[3]{x}+6\sqrt[3]{x}\cos\sqrt[3]{x}-6\sin\sqrt[3]{x}+C$.

Integrace racionálních funkcí

Závěrem kapitoly o neurčitých integrálech si ukážeme, jak hledat neurčité integrály k racionálním funkcím, které tvoří poměrně širokou třídu funkcí, k nimž lze vždy nalézt funkci primitivní.

Racionální funkcí $R(x)$ se rozumí funkce, která je definována jako podíl dvou polynomů; tj. $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy. Definičním oborem racionální funkce $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ jsou všechna reálná čísla x, pro která je $Q(x)\neq 0$.
Je-li stupeň polynomu $P(x)$ menší než stupeň polynomu $Q(x)$, nazýváme funkci $R(x)$ ryze racionální funkcí.

Pro výpočet integrálů racionálních funkcí má důležitý význam následující věta o polynomech.

Věta. *Každou racionální funkci lze vyjádřit jako součet polynomu a ryze racionální funkce, tj. platí:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=H(x)+\frac{S(x)}{Q(x)},$$

kde $H(x)$ a $S(x)$ jsou polynomy a stupeň polynomu $S(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$.

Důsledkem této věty je to, že stačí umět hledat integrály z ryze racionálních funkcí. Toto matematika zná a existuje návod, pomocí kterého lze nalézt primitivní funkce (nebo integrály) k libovolné ryze racionální funkci. Vyžaduje to ale umět najít všechny reálné kořeny polynomu $Q(x)$, což není zdaleka jednoduché a ani to není exaktně řešitelné. Proto se pro jednoduchost v tomto textu budeme zabývat pouze integrací racionálních funkcí $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde polynom $Q(x)$ je nejvýše druhého stupně ($\operatorname{st}Q(x)\leq 2$) a jako ukázku si ukážeme několik příkladů, kdy je $\operatorname{st}Q(x)>2$.

Nejprve uvažujme případ, kdy $\operatorname{st}Q(x)=1$, tj. $Q(x)=ax+b$ pro nějaká $a,b\in\mathrm{R}$, $a\neq 0$.

V tomto případě je nalézt $\int \frac{A}{ax+b}\,dx$, kde $A \in \mathbf{R}$, velmi jednoduché. Stačí totiž použít substituci $ax + b = t$ nebo, což je totéž, známý vzorec $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$. Dostaneme $\int \frac{A}{ax+b}\,dx = \frac{A}{a} \cdot \int \frac{a}{ax+b}\,dx = \frac{A}{a} \cdot \ln|ax+b|$. Tutéž substituci je teoreticky možno použít i při výpočtu integrálu z racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{ax+b}$. Mohli bychom ale mít potíže při výpočtu $P(\frac{t-b}{a})$. Ukažme si jeden jednoduchý příklad.

Příklad. Určeme $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$.
Nejprve příklad vyřešíme bez rozkladu funkce na polynom a ryze racionální funkci. Použijeme tedy ihned substituci $x + 2 = t, dx = t$.

$$\int \frac{x^3}{x+2}\,dx = \int \frac{(t-2)^3}{t}\,dt = \int \frac{t^3 - 6t^2 + 12t - 8}{t}\,dt = \int \left(t^2 - 6t + 12 - \frac{8}{t}\right)dt =$$
$$= \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 12t - 8\ln|t| = \frac{(x+2)^3}{3} - 3(x+2)^2 + 12(x+2) - 8\ln|x+2| + C.$$

Nyní budeme postupovat tak, že si nejprve rozložíme funkci $\frac{x^3}{x+2}$ na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce. Dělením polynomu x^3 polynomem $x + 2$ dostaneme $\frac{x^3}{x+2} = x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2}$. Je tedy

$$\int \frac{x^3}{x+2}\,dx = \int \left(x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2}\right)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8\ln|x+2| + C.$$

Posuďte sami, který postup je pohodlnější. Ověřte, že jsme při obou postupech dostali stejný výsledek.

Nyní uvažujme případ, kdy $\operatorname{st} Q(x) = 2$, tj. $Q(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ pro nějaká $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Ukažme si jak nalézt $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx$, kde $m, n \in \mathbf{R}$. Postup bude záviset na tom, zda a jaké reálné kořeny má polynom $Q(x) = ax^2 + bx + c$, což jak víme závisí na tom, zda je $b^2 - 4ac$ kladné, rovno 0 nebo záporné. Ve všech případech budeme postupovat tak, že si funkci $\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}$ rozložíme na součet dvou tzv. parciálních zlomků, jejichž následná integrace již bude snadná.

1. Je–li $b^2 - 4ac > 0$, má kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ dva různé reálné kořeny r_1 a r_2. V tomto případě je $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$ a existují reálná čísla A a B taková, že je

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-r_1} + \frac{B}{x-r_2}.$$

Proto je, jak ihned vidíme,

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{A}{x-r_1}\,dx + \int \frac{B}{x-r_2}\,dx = A\ln|x-r_1| + B\ln|x-r_2| + C.$$

2. Je–li $b^2 - 4ac = 0$, má kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ jeden dvojnásobný reálný kořen r. V tomto případě je $ax^2 + bx + c = a(x-r)^2$ a existují reálná čísla A a B taková, že je

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-r} + \frac{B}{(x-r)^2}.$$

Při výpočtu druhého integrálu použijeme substituci $x - r = t$ a dostaneme

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{A}{x-r}\,dx + \int \frac{B}{(x-r)^2}\,dx = A\ln|x-r| - \frac{B}{x-r} + C.$$

3. Je–li $b^2 - 4ac < 0$, pak kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nemá žádný reálný kořen. Nejprve si čitatele a jmenovatele zlomku vydělíme číslem a. Toto děláme jen proto, aby následující výklad byl co nejjednodušší. Máme najít primitivní funkci ke zlomku $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$. Využijeme toho, že je $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$ a že je $q - \frac{p^2}{4} > 0$. Ověřte to. Označme $R^2 = q - \frac{p^2}{4}$. Dále si ověřte, že je

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} = \frac{M}{2} \cdot \frac{2x+p}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \cdot \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + R^2}$$

U prvního zlomku je čitatel roven jmenovateli, a to integrovat umíme. Při integraci druhého zlomku použijeme substituci $x + \frac{p}{2} = Rt$ a nakonec dostaneme

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N - Mp}{2R} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+R}{2R}\right) + C.$$

Postup v obecném případě vypadá komplikovaně, ve skutečnosti zjistíme, že výpočty konkrétních integrálů nebudou nijak moc složité.

A nyní si ukážeme, jak teorii aplikovat na konkrétní případy.

Příklad. Určeme $\int \frac{x-10}{x^2-6x+8}\,dx$.
Nejprve si zlomek $\frac{x-10}{x^2-6x+8}$ vyjádříme jako součet dvou parciálních zlomků. Rovnice $x^2 - 6x + 8 = 0$ má dva různé reálné kořeny, a to $r_1 = 2$ a $r_2 = 4$. Je tedy $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$ a podle teorie existují reálná čísla A a B taková, že platí rovnost

$$\frac{x-10}{x^2-6x+8} = \frac{x-10}{(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4}.$$

Pokud obě strany poslední rovnosti vynásobíme výrazem $(x-2)(x-4)$, dostaneme rovnost $x - 10 = A(x-4) + B(x-2)$, která platí pro všechna reálná čísla x. Nyní si pravou stranu upravíme na tvar $x - 10 = (A+B)x + (-4A - 2B)$. Protože se dva polynomy sobě rovnají právě tehdy, když se rovnají koeficienty u jednotlivých mocnin, porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin a zjistíme, že musí platit: $(A+B) = 1$ a $(-4A - 2B) = -10$. Odsud dostaneme $A = 4$ a $B = -3$. Toto lze získat i jednodušeji tak, že do rovnosti $x - 10 = A(x-4) + B(x-2)$ dosadíme $x = 2$ a $x = 4$. Ihned tím z rovností $-8 = A\cdot(-2) + B\cdot 0$ a $-6 = A\cdot 0 + B\cdot(-2)$ získáme $A = 4$, $B = -3$ a rozklad $\frac{x-10}{x^2-6x+8} = \frac{4}{x-2} + \frac{-3}{x-4}$. To nám už umožňuje bez problémů dokončit výpočet.

$$\int \frac{x-10}{x^2-6x+8}\,dx = 4\int \frac{1}{x-2}\,dx - 3\int \frac{1}{x-4}\,dx = 4\ln|x-2| - 3\ln|x-4| + C.$$

Příklad. Určeme $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$.
Protože se nejedná o ryze racionální funkci, musíme nejprve provést potřebné dělení polynomu $x^2 + 1$ polynomem $x^2 - 1$. Dostaneme $\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$. Jmenovatel zlomku má dva reálné kořeny $r_1 = 1$ a $r_2 = -1$, a proto lze tento zlomek rozložit na součet dvou parciálních zlomků

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Odsud dostaneme rovnost $2 = A(x+1) + B(x-1)$, do které postupně dosadíme $x = 1$

a $x = -1$ a získáme $A = 1$, $B = -1$. Platí tedy: $\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}$. A nyní můžeme již bez problémů provést integraci.

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}\right) dx = \int 1\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx =$$
$$= x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C.$$

Příklad. Určeme $\int \frac{2x-5}{x^2-6x+9}\,dx$.

Opět si zlomek $\frac{2x-5}{x^2-6x+9}$ vyjádříme jako součet dvou parciálních zlomků. Rovnice $x^2-6x+9=0$ má jeden reálný kořen, a to $r=3$. Je tedy $x^2-6x+9=(x-3)^2$ a podle teorie existují reálná čísla A a B taková, že platí rovnost

$$\frac{2x-5}{x^2-6x+9} = \frac{2x-5}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}.$$

Vynásobíme-li obě strany druhé rovnosti výrazem $(x-3)^2$, dostaneme ihned rovnost $2x-5 = A(x-3)+B$. Z této rovnosti již snadno získáme, že je $A=2$ (porovnáme koeficienty u proměnné x) a $B=1$ (stačí do této rovnosti dosadit $x=3$). Je tedy $\frac{2x-5}{x^2-6x+9} = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2}$. Nyní snadno dostáváme

$$\int \frac{2x-5}{x^2-6x+9}\,dx = 2\int \frac{1}{x-3}\,dx + \int \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = 2\ln|x-3| + \left|\begin{matrix} x-3=t \\ dx=dt \end{matrix}\right| =$$
$$= 2\ln|x-3| + \int \frac{1}{t^2}\,dt = 2\ln|x-3| - \frac{1}{t} = 2\ln|x-3| - \frac{1}{x-3} + C.$$

Příklad. Určeme $\int \frac{x^3+2x^2+2x+3}{x^2+2x+1}\,dx$.

Protože se nejedná o ryze racionální funkci, musíme vydělit polynom x^3+2x^2+2x+3 polynomem x^2+2x+1. Dostaneme $\frac{x^3+2x^2+2x+3}{x^2+2x+1} = x + \frac{x+3}{x^2+2x+1}$. Jmenovatel zlomku $\frac{x+3}{x^2+2x+1}$ má jeden reálný kořen $r=-1$, a proto lze tento zlomek rozložit na součet dvou parciálních zlomků

$$\frac{x+3}{x^2+2x+1} = \frac{x+3}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}.$$

Odsud dostaneme rovnost $x+3 = A(x+1)+B$, ze které ihned plyne $A=1$ (porovnáním koeficientů u x). Dosadíme-li do této rovnosti $x=-1$, získáme $B=2$. Platí tedy: $\frac{x+3}{x^2+2x+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}$. A nyní můžeme již bez problémů provést integraci.

$$\int \frac{x^3+2x^2+2x+3}{x^2+2x+1}\,dx = \int \left(x + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx = \int x\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx +$$
$$+ \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C.$$

Příklad. Určeme $\int \frac{3x+5}{x^2-6x+12}\,dx$.

Zlomek $\frac{3x+5}{x^2-6x+12}$ si vyjádříme jako součet dvou zlomků. V tomto případě zjišťujeme, že rovnice $x^2-6x+12=0$ nemá žádný reálný kořen. V průběhu řešení úlohy využijeme ale rovnosti $x^2-6x+12=(x-3)^2+3$. Zlomek $\frac{3x+5}{x^2-6x+12}$ si vyjádříme jako součet násobků dvou zlomků, z nichž první má v čitateli derivaci jmenovatele a druhý má v čitateli 1. Dostaneme

$$\frac{3x+5}{x^2-6x+12} = \frac{3x}{x^2-6x+12} + \frac{5}{x^2-6x+12} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2x-6}{x^2-6x+12} + \frac{5-(-9)}{(x-3)^2+3} =$$
$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{2x-6}{x^2-6x+12} + 14\cdot\frac{1}{(x-3)^2+3}.$$

Nyní již můžeme provést výpočet integrálu.

$$\int \frac{3x+5}{x^2-6x+12}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+12}\,dx + 14\int \frac{1}{(x-3)^2+3}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2-6x+12)+$$
$$+\left|\begin{matrix} x-3=\sqrt{3}\cdot t \\ dx=\sqrt{3}\,dt \end{matrix}\right| = \frac{3}{2}\ln(x^2-6x+12) + 14\int \frac{\sqrt{3}}{3(t^2+1)}\,dt = \frac{3}{2}\ln(x^2-6x+12)+$$
$$+14\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} t = \frac{3}{2}\ln(x^2-6x+12) + 14\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{3}} + C.$$

Příklad. Určeme $\int \frac{x^2+4x+2}{x^2+2x+2}\,dx$.

Protože se nejedná o ryze racionální funkci, musíme vydělit polynom x^2+4x+2 polynomem x^2+2x+2. Dostaneme $\frac{x^2+4x+2}{x^2+2x+2} = 1 + \frac{2x}{x^2+2x+2}$. Všimněme si, že tento výsledek bylo možno získat i bez dělení. Proč? Polynom x^2+2x+2 nemá žádné reálné kořeny. Přesto si zlomek $\frac{2x}{x^2+2x+2}$ vyjádříme jako součet dvou zlomků, které budou vhodné pro integrování. Využijeme též, že je $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$. Získáme následující rozklad integrované funkce $\frac{x^2+4x+2}{x^2+2x+2} = 1 + \frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{-2}{(x+1)^2+1}$, což umožní snadnou integraci.

$$\int \frac{x^2+4x+2}{x^2+2x+2}\,dx = \int \left(1 + \frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{-2}{(x+1)^2+1}\right) dx = \int 1\,dx + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx +$$
$$+ \int \frac{-2}{(x+1)^2+1}\,dx = x + \ln(x^2+2x+2) + \left|\begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt \end{matrix}\right| = x + \ln(x^2+2x+2) +$$
$$+ \int \frac{-2}{t^2+1}\,dt = x + \ln(x^2+2x+2) - 2\operatorname{arctg} t = x + \ln(x^2+2x+2) - 2\operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Pro doplnění si ukážeme, jak lze nalézt integrál z racionálních funkcí, které mají ve jmenovateli polynom stupně vyššího než 2.

Příklad. Určeme $\int \frac{2-4x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$.

Jmenovatel zlomku $\frac{2-4x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ má tři reálné kořeny, a to $r_1=1$, $r_2=2$ a $r_3=3$. Proto ho lze vyjádřit jako součet tří parciálních zlomků s neznámými čitateli A, B a C a jmenovateli $x-1$, $x-2$ a $x-3$, tj. je

$$\frac{2-4x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-1}.$$

Po vynásobení obou stran rovnosti výrazem $(x-1)(x-2)(x-3)$ dostaneme rovnost $2-4x = A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$. Dosadíme-li do této rovnosti postupně $x=1$, $x=2$ a $x=3$, získáme $A=-1$, $B=6$ a $C=-5$. Výpočet integrálu je již snadný.

$$\int \frac{2-4x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{6}{x-2} + \frac{-5}{x-1}\right) dx = -\int \frac{1}{x-1}\,dx +$$
$$+6\int \frac{1}{x-2}\,dx - 5\int \frac{1}{x-3}\,dx = -\ln|x-1| + 6\ln|x-2| - 5\ln|x-3| + C.$$

Příklad. Určeme $\int \frac{3x-1}{x^4-x^2}\,dx$.

Jmenovatel zlomku má tři reálné kořeny, a to dvojnásobný kořen $r_1 = 0$ a dva jednonásobné kořeny $r_2 = 1$ a $r_3 = -1$. Funkci lze vyjádřit jako součet čtyř parciálních zlomků.

$$\frac{3x-1}{x^4-x^2} = \frac{3x-1}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1},$$

Po vynásobení obou stran rovnosti výrazem $x^4 - x^2$ dostaneme rovnost

$$3x - 1 = Ax(x-1)(x+1) + B(x-1)(x+1) + Cx^2(x+1) + Dx^2(x-1).$$

Neznámé koeficienty B, C, D dostaneme ihned postupným dosazením $x = 0$, $x = 1$ a $x = -1$ do rovnosti. Po dosazení dostáváme rovnice $-1 = -B$, $2 = 2C$, $-4 = -2D$, odkud plyne $B = 1$, $C = 1$ a $D = 2$. Dosadíme-li do rovnosti ještě například $x = 2$, dostaneme $5 = 6A + 3B + 12C + 4D$ a odsud získáme, že je $A = -3$. Výpočet integrálu je již snadný. Je

$$\int \frac{3x-1}{x^4-x^2}\,dx = \int \left(\frac{-3}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}\right) dx = -3\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx +$$
$$+2\int \frac{1}{x+1}\,dx = -3\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x-1| + 2\ln|x+1| + C.$$

Příklad. Určeme $\int \frac{3x^2-4x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$.

Jmenovatel zlomku je součinem dvou výrazů $(x-1)$ a (x^2+1), má jediný reálný kořen $r = 1$. Funkci lze vyjádřit jako součet dvou (později tří) parciálních zlomků. Výrazu $(x-1)$ odpovídá parciální zlomek $\frac{A}{x-1}$ a výrazu (x^2+1) odpovídá parciální zlomek $\frac{Bx+C}{x^2+1}$, je tedy $\frac{3x^2-4x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$. Po vynásobení obou stran rovnosti výrazem $(x-1)(x^2+1)$ dostaneme rovnost $3x^2 - 4x + 3 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$. Dosadíme-li do této rovnosti $x = 1$, dostaneme $2 = 2A$, tedy $A = 1$. Po dosazení $x = 0$ získáme $3 = A - C$ a následně $C = -2$. Dosadíme-li rovnosti ještě jednu hodnotu, např. $x = 2$, dostaneme rovnost $7 = 5A + 2B + C$ a následně $B = 2$. Tím jsme našli hledaný rozklad na dva zlomky. Je $\frac{3x^2-4x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2x-2}{x^2+1}$. Poslední zlomek ještě rozložíme na součet dvou zlomků a dostaneme rozklad vhodný pro integrování, $\frac{3x^2-4x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{-2}{x^2+1}$, a provedeme integraci.

$$\int \frac{3x^2-4x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{-2}{x^2+1}\right) dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx -$$
$$-2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \ln|x-1| + \ln(x^2+1) - 2\,\mathrm{arctg}\,x + C.$$

Na závěr si ukážeme ještě několik příkladů, jejichž výpočet bude brzy převeden na výpočet integrálů z racionálních funkcí.

Příklad. Nalezněme $\int \ln(x^2-1)\,dx$.

Výpočet začneme použitím metody per partes a poté uděláme rozklad na parciální zlomky. Dostaneme (ověřte)

$$\int \ln(x^2-1)\,dx = \left|\begin{matrix} u'=1 & v=\ln(x^2-1) \\ u=x & v'=\frac{2x}{x^2-1}\end{matrix}\right| = x\ln(x^2-1) - \int \frac{2x^2}{x^2-1}\,dx =$$
$$= x\ln(x^2-1) - \int \left(2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = x\ln(x^2-1) - 2x - \ln|x-1| + \ln|x+1| + C.$$

Příklad. Nalezněme $\int \frac{4e^x}{e^{2x}-4}\,dx$.

Výpočet začneme použitím substituce $e^x = t$ a poté uděláme rozklad na parciální zlomky. Dostaneme (ověřte)

$$\int \frac{4e^x}{e^{2x}-4}\,dx = \left|\begin{matrix} e^x=t \\ e^x\,dx=dt\end{matrix}\right| = \int \frac{4}{t^2-4}\,dt = \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right) dt = \ln|t-2| -$$
$$-\ln|t+2| = \ln|e^x-2| - \ln|e^x+2| + C.$$

Příklad. Nalezněme $\int \frac{2}{\sin x}\,dx$.

Nejprve provedeme vhodné algebraické a goniometrické úpravy a substituci $\cos x = t$. Tím dostaneme

$$\int \frac{2}{\sin x}\,dx = \int \frac{2\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{2\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx = \left|\begin{matrix} \cos x=t \\ -\sin x\,dx=dt\end{matrix}\right| = \int \frac{-2}{1-t^2}\,dt =$$
$$= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln|t-1| - \ln|t+1| = \ln|\cos x - 1| - \ln|\cos x + 1| + C.$$

Poznámka. Pokud někdy budete potřebovat nalézt neurčitý integrál funkce složitější nebo jiného typu než jsme poznali, je možno hledat pomoc v různých matematických příručkách, kde bývají uvedeny více či méně obsáhlé tabulky neurčitých integrálů. Existují i velmi obsáhlé monografie s názvy podobnými názvu Tabulky neurčitých integrálů. Například budeme-li potřebovat znát $\int \sqrt{x^2+4}\,dx$ podíváme se do zmíněných tabulek, kde lze nalézt vzorec $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\cdot\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right)$. Dosazením $a = 2$ získáme $\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\cdot\sqrt{x^2+4} + 4\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|\right) + C$.

Příklady k procvičení

Následující integrály vypočtěte užitím rozkladu na parciální zlomky:

1) $\int \frac{x}{x+5}\,dx$; 2) $\int \frac{3x-1}{x+2}\,dx$; 3) $\int \frac{9x^3}{3x+1}\,dx$;
4) $\int \frac{x+3}{x^2+4}\,dx$; 5) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$; 6) $\int \frac{x^3}{x^2+4}\,dx$;
7) $\int \frac{4}{x^2-4}\,dx$; 8) $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$; 9) $\int \frac{x+2}{x^2+x}\,dx$;
10) $\int \frac{5x-3}{x^2-5x+6}\,dx$; 11) $\int \frac{2x^3-3x+5}{x^2-1}\,dx$; 12) $\int \frac{4x^3-16x^2+20}{x^2-4x+3}\,dx$;
13) $\int \frac{2x^3+12x^2-34}{x^2+6x+8}\,dx$; 14) $\int \frac{x^3-4x^2+6}{x^2-4x+4}\,dx$; 15) $\int \frac{x^3-7x^2+8x+3}{x^2-7x+12}\,dx$;
16) $\int \frac{x^3+2x^2}{x^2+2x+1}\,dx$; 17) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$; 18) $\int \frac{4x+5}{x^2+4x+5}\,dx$;
19) $\int \frac{x^2+4x+3}{x^2+2x+2}\,dx$; 20) $\int \frac{2x+5}{x^2+2x+4}\,dx$; 21) $\int \frac{6x+6}{x^2+4x+8}\,dx$;

22) $\displaystyle\int \frac{6x-4}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$; 23) $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+2}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$; 24) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^3-4x}\,\mathrm{d}x$;

25) $\displaystyle\int \frac{4}{\cos x}\,\mathrm{d}x$; 26) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt{3x+1}}$; 27) $\displaystyle\int \ln(x^2+4)\,\mathrm{d}x$;

28) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin 4x}\,\mathrm{d}x$; 29) $\displaystyle\int \ln(x^2-x-2)\,\mathrm{d}x$; 30) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot(\ln^2 x+\ln x-6)}$.

Výsledky

1) $x-5\ln|x+5|+C$;
2) $3x-7\ln|x+2|+C$;
3) $x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}-\frac{1}{9}\ln|3x+1|+C$;
4) $\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$;
5) $\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C$;
6) $\frac{x^2}{2}-2\ln(x^2+4)+C$;
7) $\ln|x-2|-\ln|x+2|+C$;
8) $3\ln|x-2|-\ln|x-1|+C$;
9) $2\ln|x|-\ln|x+1|+C$;
10) $12\ln|x-3|-7\ln|x-2|+C$;
11) $x^2+2\ln|x-1|-3\ln|x+1|+C$;
12) $2x^2-8\ln|x-3|-4\ln|x-1|+C$;
13) $x^2-\ln|x+2|-15\ln|x+4|+C$;
14) $\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x-2}-4\ln|x-2|+C$;
15) $\frac{x^2}{2}+9\ln|x-3|-13\ln|x-4|+C$;
16) $\frac{x^2}{2}-\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+C$;
17) $\operatorname{arctg}(x+2)+C$;
18) $2\ln(x^2+4x+5)-3\operatorname{arctg}(x+2)+C$;
19) $x+\ln(x^2+2x+2)-\operatorname{arctg}(x+1)+C$;
20) $\ln(x^2+2x+4)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$;
21) $3\ln(x^2+4x+8)-3\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C$;
22) $4\ln|x|+\ln|x-1|-5\ln|x+1|+C$;
23) $3x+2\ln|x|-4\ln|x+1|+C$;
24) $\ln|x-2|-\ln|x|+C$.
25) $2\ln(\cos^2 x)+C$;
26) $\ln|\sqrt{3x+1}-1|-\ln(\sqrt{3x+1}+1)+C$;
27) $x\cdot\ln(x^2+4)-2x+4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$;
28) $-\frac{1}{8}\ln(\sin^2 4x)+C$;
29) $2x+2\ln|x-2|-\ln|x+1|+C$;
30) $\frac{1}{5}(\ln|\ln x-2|-\ln|\ln x+3|)+C$.

URČITÝ INTEGRÁL

Tato kapitola je věnována studiu prvních aplikací integrálního počtu. Budeme se zabývat pojmem určitý integrál a jeho použitím. Pojem určitý integrál není v matematice pojmem, který by byl svým názvem určen jednoznačně. Můžeme se totiž setkat s několika různými definicemi tohoto pojmu a tím i s různými určitými integrály. V literatuře je možno nalézt pojmy jako například Newtonův určitý integrál, Riemannův určitý integrál, Lebesgueův určitý integrál a další. Jejich odlišnost se projevuje pouze v extrémních situacích; platí totiž, že pokud existují určité integrály pro nějakou funkci a na nějakém intervalu podle dvou různých definic, pak se sobě rovnají. Nebudeme se zde zabývat odlišnostmi jednotlivých definic. Ukážeme si pouze dvě základní definice, Newtonovu a Riemannovu, a později i jejich částečné zobecnění.

Riemannův určitý integrál

Předpokládejme, že máme nějaký interval I a funkci $f(x)$, která splňuje následující podmínky:

(1) je spojitá ve všech bodech I s vyjímkou nejvýše konečně mnoha bodů v I, ve kterých existují obě jednostranné limity této funkce (tj. zprava a zleva), a jsou vlastní, ale alespoň jedna z nich se liší od funkční hodnoty funkce $f(x)$ v tomto bodě, nebo funkce $f(x)$ v něm není definována;

(2) funkce $f(x)$ je vzhledem k intervalu I ohraničená (někdy říkáme omezená), tj. existují reálná čísla K a M taková, že pro všechna $x \in I$, pro která je $f(x)$ definováno, je $K \le f(x) \le M$.

Poznámka. Pokud funkce $f(x)$ splňuje podmínku (1), budeme říkat, že je na intervalu I po částech spojitá. Je-li interval I konečné délky (tj. $I=\langle a,b\rangle$), potom vlastnost (1) (po částech spojitá) implikuje vlastnost (2) (omezenost funkce na I). Je to proto, že interval I lze rozdělit na konečně mnoho intervalů konečné délky, na kterých je funkce spojitá a v krajních bodech těchto intervalů má vlastní jednostranné limity.
Poznamenejme ještě, že funkce, která je po částech spojitá na intervalu $I=\langle a,b\rangle$, nemusí být v krajních bodech intervalu I a v několika vnitřních bodech definována. Například funkce $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ je po částech spojitá na intervalu $(-2,2)$, kdežto funkce $y=\frac{1}{x}$ na tomto intervalu není po částech spojitá. Vysvětlete.

Mějme funkci $f(x)$, která je na intervalu $\langle a,b\rangle$ po částech spojitá. Rozdělme interval $\langle a,b\rangle$ na n částečných intervalů $I_i=\langle x_i,x_{i+1}\rangle$ pro $i=1,2,...,n$, přičemž je

$$a=x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}=b,$$

a množina $D=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}\}$ obsahuje všechny body, ve kterých funkce $f(x)$ není definována nebo není spojitá. Množinu D budeme nazývat dělením intervalu $\langle a,b\rangle$.

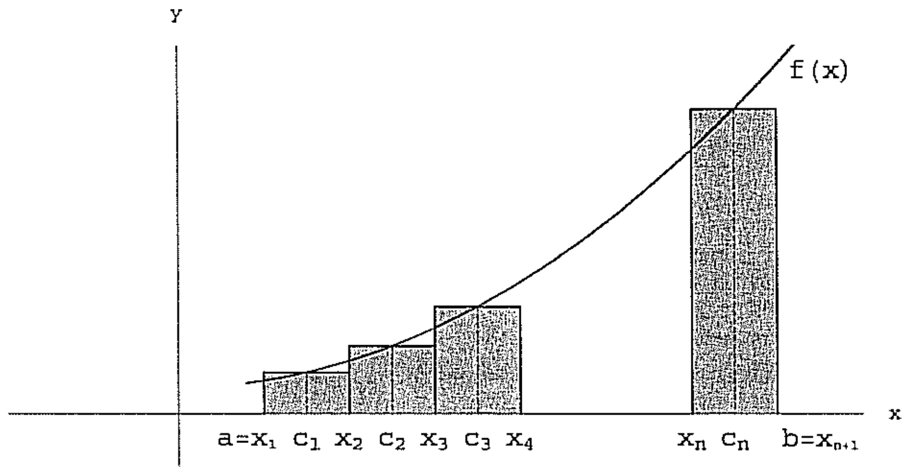
Normou tohoto dělení D budeme rozumět maximální číslo z množiny všech čísel $\{\Delta x_i=x_{i+1}-x_i; i=1,2,\ldots n\}$, které označíme $\nu(D)$.

Vybereme-li z každého intervalu I_j nějaké číslo c_j, můžeme vytvořit součet

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n,$$

který nazveme integrální součet příslušný dělení D.

Příklad dělení intervalu a tvorba integrálního součtu je znázorněna na obr. 2.



Obr. 2: Dělení intervalu a integrální součet

Nyní již konečně můžeme vyslovit definici Riemannova určitého integrálu.

Definice. *Řekneme, že funkce $f(x)$ má určitý integrál od a do b, který je roven reálnému číslu A, jestliže ke každému kladnému číslu ϵ existuje kladné číslo δ tak, že pro každý integrální součet dělení D, jehož norma je menší než δ, je*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - A\right| < \epsilon.$$

Tuto skutečnost budeme vyjadřovat zápisem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A.$$

V tomto případě, zejména není-li výsledek integrace podstatný, budeme říkat, že funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a,b\rangle$ integrovatelná. Čísla a a b nazýváme dolní mez a horní mez.

Doufáme, že vám tato definice připomněla definici limity; také někdy skutečně píšeme:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Je zřejmé, že pokud takovýto integrál existuje, pak je určen jednoznačně. Lze dokázat následující větu, která řeší částečně existenční otázku.

Věta. *Je-li funkce $f(x)$ po částech spojitá na intervalu konečné délky, potom je na tomto intervalu integrovatelná.*

Speciální případ po částech spojité funkce na intervalu konečné délky je funkce spojitá na uzavřeném intervalu. Proto platí:

Důsledek. *Každá funkce spojitá na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu integrovatelná.*

Ukažme si výpočet Riemannova integrálu pro jednu velmi jednoduchou funkci.

Příklad. Určeme Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$.
Zvolme rovnoměrné dělení intervalu $\langle 0,1\rangle$ na n dílů, tj. $x_i = \frac{i-1}{n}$ pro $1 \le i \le n+1$, v každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ zvolme $c_i = x_{i+1} = \frac{i}{n}$. Dostaneme následující integrální součet:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\cdot(1+2+3+\cdots+n) = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n}{2}(n+1) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right).$$

Nyní již snadno dostáváme

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Doposud jsme při definici Riemannova integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ využívali, že $a < b$. Definici si rozšíříme i pro případy $a > b$ a $a = b$ definováním

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{je-li } a > b, \quad \text{a} \quad \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Nyní předpokládejme, že máme funkci $f(x)$ spojitou na intervalu I a nechť $a \in I$. Pro každé $x \in I$ definujme funkci $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Vyšetřeme nyní rozdíl $F(x+\Delta x) - F(x)$. Pro jednoduchost předpokládejme, že $x > a$ a že Δx je kladné. Každé dělení D intervalu $\langle a,x\rangle$ rozšíříme snadno na dělení D' intervalu $\langle a, x+\Delta x\rangle$ tak, že k dělení D přidáme navíc přesně bod $x+\Delta x$. Je-li $S(x)$ nějaký integrální součet příslušný funkci $f(x)$ a intervalu $\langle a,x\rangle$ a $S(x+\Delta x)$ integrální součet příslušný téže funkci a dělení D' rozšířenému na interval $\langle a, x+\Delta x\rangle$, je, jak lze velmi snadno nahlédnout, $S(x+\Delta x) - S(x) = f(x+c)\cdot\Delta x$ pro nějaký bod $c \in \langle 0, \Delta x\rangle$. Pokud norma dělení D' konverguje k nule, pak také Δx konverguje k nule a my dostáváme

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x+c), \quad \text{a limitně} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Totéž je možno dokázat i bez (pro jednoduchost uvažovaných) omezujících předpokladů a dostáváme, že funkce $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$. Jako důsledek dostáváme nám již známý fakt, že ke každé spojité funkci (na intervalu I) existuje primitivní funkce (na intervalu I).

Newtonův určitý integrál

Příklad, ve kterém jsme našli určitý integrál pomocí limit integrálních součtů, nám ukázal, že obecně je tento způsob prakticky nepoužitelný. Poslední uvedená vlastnost Riemannova určitého integrálu nám naopak dává návod, jak tyto integrály počítat v případě spojitých funkcí. Na tom je také založena Newtonova definice určitého integrálu.

Definice. *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na otevřeném intervalu I, nechť a, $b \in I$. Předpokládejme, že $F(x)$ je nějaká funkce, která je k funkci $f(x)$ na intervalu I primitivní. Výraz $F(b) - F(a)$ nazveme Newtonovým integrálem funkce $f(x)$ od a do b (nebo na intervalu $\langle a, b\rangle$), což budeme symbolicky vyjadřovat zápisem*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Poznámka. Ověřte si, že tato definice je korektní, tj. že výsledek nezávisí na volbě příslušné primitivní funkce. Z toho potom plyne, že pro spojité funkce na otevřeném intervalu I obsahujícím body a a b, dávají obě definice stejný výsledek. Proto také není v symbolickém značení určitých integrálů žádný rozdíl závisející na způsobu definice. Domluvme se, že zápis $[m(x)]_a^b$ bude vždy znamenat „dosadit horní mez mínus dosadit dolní mez“, tedy $[m(x)]_a^b = m(b) - m(a)$ pro libovolnou funkci $m(x)$ a libovolná reálná čísla a, b.

Vlastnosti pojmu určitý integrál, které si nyní uvedeme, platí pro všechny určité integrály bez rozdílu způsobu jejich definice, i když bychom je museli dokazovat rozdílně. Uváděné vlastnosti a rovnosti platí vždy, pokud všechny integrály existují, což nastává například v případě spojitých funkcí na otevřeném intervalu obsahujícím meze všech integrálů.

Základní vlastnosti určitých integrálů

Věta. *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na intervalu I a nechť a, b, $c \in I$. Potom platí následující vztahy:*

1) $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$

2) $\displaystyle\int_a^b k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$ *kde k je libovolná konstanta;*

3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x;$

4) je-li $a < b$ a $f(x) \geq g(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, potom je $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$; *přitom rovnost nastává pouze v případě, že platí $f(x) = g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$.*

V diferenciálním počtu má velký teoretický význam tzv. věta o střední hodnotě, která říká, že má-li funkce $f(x)$ derivaci na intervalu I a a, $b \in I$, $a < b$, pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že je $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Důsledkem této věty je následující tvrzení, nazývané větou o střední hodnotě integrálního počtu, které má velký význam v aplikacích matematiky.

Věta. *Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že je*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hodnota $f(c)$ se nazývá střední hodnotou funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Poznámka. Předpoklad spojitosti funkce $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ je v této větě velice podstatný a nelze ho nahradit integrovatelností funkce na $\langle a, b\rangle$. Například funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle \\ 2 & \text{pro } x \in (1, 2\rangle \end{cases}$$

je na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ integrovatelná, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$, a v žádném bodě funkce nenabývá hodnotu 1.

Výpočet určitých integrálů

Nalezení hodnoty určitého integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ v případě spojitosti funkce $f(x)$ na intervalu I obsahujícím meze a, b je snadné, pokud umíme nalézt neurčitý integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Složitější situace je v případě, kdy funkce $f(x)$ není na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá, ale je pouze po částech spojitá. V tomto případě je vhodné výpočet rozdělit na několik částí. Je-li $a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n = b$, pak je, jak snadno dostaneme několikanásobným použitím pravidla 3) ze základních vlastností určitých integrálů,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{c_{n-1}}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pokud body c_1, c_2, …, c_{n-1} volíme tak, že jsou mezi nimi všechny body nespojitosti funkce $f(x)$ a body, ve kterých dochází ke změně definičního předpisu funkce $f(x)$, je problém výpočtu převeden na problém nalezení několika neurčitých integrálů a výpočet několika funkčních hodnot a jejich sčítání a odčítání.

Příklad. Určeme $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $f(x)$ je definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle \\ 4x & \text{pro } x \in (1, 2\rangle \\ 5 & \text{pro } x \in (2, 3\rangle. \end{cases}$$

Ke změně definičního předpisu funkce $f(x)$ dochází v bodech $x = 1$ a $x = 2$. Proto je nutno hledaný určitý integrál vyjádřit jako součet tří určitých integrálů.

$$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 4x\,\mathrm{d}x + \int_2^3 5\,\mathrm{d}x = [2x]_0^1 + [2x^2]_1^2 + [5x]_2^3 = 2 + 6 + 5 = 13.$$

Všimněte si, že funkce $f(x)$ není v bodech $x = 1$ a $x = 2$ spojitá.

Při výpočtu určitého integrálu funkce spojité na uzavřeném intervalu můžeme postupovat tak, že si nejprve nalezneme nějakou primitivní funkci, potom určíme její funkční hodnoty v horní mezi a dolní mezi a tyto hodnoty odečteme. Protože však při hledání primitivní funkce používáme metody jako per partes či substituci, je otázka, zda by nebylo vhodnější při tomto postupu již hledat přímo určité integrály. V mnoha případech tomu skutečně tak je, a proto si ukážeme, jak modifikovat metodu per partes a substituční metodu pro výpočet určitých integrálů.

Věta. *Jsou-li funkce $u'(x)$, $v'(x)$ spojité funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$, pak platí*

$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)\cdot v(x)\big]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Použití této věty při výpočtu si můžeme schematicky znázornit takto:

$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u'=\dots & v=\dots \\ u=\dots & v'=\dots \end{matrix}\right|_a^b = \big[u(x)\cdot v(x)\big]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Použití metody per partes při výpočtu určitého integrálu uvidíme v následujících třech řešených příkladech.

Příklad. Určeme $\int_1^e \ln^2 x\,\mathrm{d}x$.

Použijeme metodu per partes a dostaneme

$$\int_1^e \ln^2 x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u'=1 & v=\ln^2 x \\ u=x & v'=2\ln x\cdot\frac{1}{x} \end{matrix}\right|_1^e = \big[x\cdot\ln^2 x\big]_1^e - \int_1^e 2\ln x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \left|\begin{matrix} u'=2 & v=\ln x \\ u=2x & v'=\frac{1}{x} \end{matrix}\right|_1^e =$$

$$= \mathrm{e} - \left(\big[2x\cdot\ln x\big]_1^e - \int_1^e 2\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{e} - (2\mathrm{e} - [2x]_1^e) = \mathrm{e} - 2.$$

Příklad. Určeme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$.

Použijeme metodu per partes a dostaneme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u'=\sin x & v=x^2 \\ u=-\cos x & v'=2x \end{matrix}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \big[-x^2\cdot\cos x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x =$$

$$= 0 + \left|\begin{matrix} u'=\cos x & v=2x \\ u=\sin x & v'=2 \end{matrix}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \big[2x\cdot\sin x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\,\mathrm{d}x = \pi + \big[2\cos x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2.$$

Zkuste si tento určitý integrál spočít tak, že si nejprve naleznete $\int x^2\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$ a až poté vypočítáte hodnotu určitého integrálu. Který výpočet je kratší?

Příklad. Určeme $\int_1^2 (9x^2+1)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$.

Jedná se opět o typickou situaci na použití metody per partes.

$$\int_1^2 (9x^2+1)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u'=9x^2+1 & v=\ln x \\ u=3x^3+x & v'=\frac{1}{x} \end{matrix}\right|_1^2 = \big[(3x^3+x)\cdot\ln x\big]_1^2 - \int_1^2 (3x^2+1)\,\mathrm{d}x =$$

$$= 26\ln 2 - \big[x^3+x\big]_1^2 = 26\ln 2 - 8.$$

Věta. *Nechť $F(t)$ je primitivní funkce k spojité funkci $f(t)$ na intervalu J, nechť $g(x)$ je spojitá funkce na intervalu I, který obsahuje body a, b. Nechť pro všechna $x\in\langle a,b\rangle$ patří $g(x)$ do J. Potom je*

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Symbolicky lze postup při použití substituce $g(x)=t$ znázornit takto:

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} g(x)=t & a\to g(a) \\ g'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t & b\to g(b) \end{matrix}\right| = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \big[F(t)\big]_{g(a)}^{g(b)} =$$

$$= F(g(b)) - F(g(a)).$$

Poznámka. Všimněte si, že při použití substituce pro výpočet určitého integrálu musíme také navíc měnit meze. Odpadá nám ale poslední krok, který jsme dělali při použití substituce u neurčitého integrálu, a to je návrat k původní proměnné.

Použití substituční metody při výpočtu určitých integrálů si osvětlíme na několika příkladech, které nebudeme komentovat. Použitá substituce a změny mezí budou jasné z provedených výpočtů.

Příklad. Určeme $\int_1^e \frac{3+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_1^e \frac{3+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} 3+\ln x=t & 1\to 3 \\ \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t & \mathrm{e}\to 4 \end{matrix}\right| = \int_3^4 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_3^4 = \frac{7}{2}.$$

Příklad. Určeme $\int_0^1 (1-x)^8\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^1 (1-x)^8\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} 1-x=t & 0\to 1 \\ -\mathrm{d}x=\mathrm{d}t & 1\to 0 \end{matrix}\right| = \int_1^0 (-t^8)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^9}{9}\right]_1^0 = \frac{1}{9}.$$

Příklad. Vypočtěme $\int_0^\pi \cos x\cdot\sin^4 x\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^\pi \cos x\cdot\sin^4 x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} \sin x=t & 0\to 0 \\ \cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t & \pi\to 0 \end{matrix}\right| = 0.$$

Proč známe výsledek bez dokončení výpočtu?

Příklad. Určeme $\int_0^2 2x\cdot\ln(x^2+4)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^2 2x\cdot\ln(x^2+4)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} x^2+4=t & 0\to 4 \\ 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t & 2\to 8 \end{matrix}\right| = \int_4^8 \ln t\,\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} u'=1 & v=\ln t \\ u=t & v'=\frac{1}{t} \end{matrix}\right|_4^8 =$$

$$= \big[t\cdot\ln t\big]_4^8 - \int_4^8 \mathrm{d}t = 8\ln 8 - 4\ln 4 - \big[t\big]_4^8 = 8\ln 8 - 4\ln 4 - 4 = 16\ln 2 - 4.$$

Nevlastní integrály

Při definici určitého integrálu funkce $f(x)$ od a do b jsme mimo jiné potřebovali, aby integrační meze, tj. čísla a, b, byla reálná a aby funkce $f(x)$ byla mezi těmito mezemi omezená. V mnoha aplikacích je však nutné studovat případy, kdy jeden nebo oba z těchto předpokladů splněny nejsou. Proto si rozšíříme nyní definici určitého integrálu i na tyto případy a budeme hovořit o nevlastních integrálech.

Definice. *Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je integrovatelná na každém intervalu $\langle a, t\rangle$, $t \in \mathbb{R}$. Definujme $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$. Jestliže $\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ existuje a je vlastní, tj. $\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx = A \in \mathbb{R}$, definujeme $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx = A$ a říkáme, že je tento nevlastní integrál konvergentní k A (nebo že konverguje k A).*

Není-li $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergentní, hovoříme o divergentním integrálu. Poznamenejme ještě, že divergentní integrály jsou ty integrály, pro které je $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx = \pm\infty$ nebo pro které tato limita neexistuje.

Poznámka. Zcela analogicky se definuje nevlastní integrál $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$. Jestliže pro nějaké reálné číslo a jsou konvergentní oba integrály $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ a $\int_a^\infty f(x)\,dx$, pak říkáme, že integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ je konvergentní a definujeme

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx.$$

V tomto případě jsou pak také konvergentní nevlastní integrály $\int_{-\infty}^r f(x)\,dx$ a $\int_r^\infty f(x)\,dx$ pro jakékoliv reálné číslo r.

Toto rozšíření definice určitých integrálů si ještě proberme na několika příkladech.

Příklad. Vyšetřeme $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$.

Funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ je spojitá na intervalu $\langle 1, \infty)$, a proto má smysl vyšetřovat daný integrál. Dostaneme

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

Daný integrál konverguje k číslu 1.

Příklad. Vyšetřeme $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$.

Opět má smysl vyšetřovat daný integrál. Dostaneme

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} [\ln|x|]_1^t = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty.$$

Daný integrál je divergentní.

Příklad. Vyšetřeme $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Funkce $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ je evidentně spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$; vyšetřeme proto integrály $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ a $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$. Je

$$\lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} [\operatorname{arctg} x]_t^0 = \lim_{t\to-\infty} (-\operatorname{arctg} t) = \frac{\pi}{2}.$$

Zcela analogicky lze dostat $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \dfrac{\pi}{2}$. Daný integrál je proto konvergentní a platí:

$$\int_{-\infty}^\infty \tfrac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^0 \tfrac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^\infty \tfrac{1}{1+x^2}\,dx = \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2} = \pi.$$

Poznámka. Je-li funkce $f(x)$ spojitá na $(-\infty, \infty)$ a $F(x)$ funkce k ní primitivní, potom, jak si jistě sami zdůvodníte, nevlastní integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ je konvergentní, právě když jsou obě limity $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ a $\lim_{x\to\infty} F(x)$ vlastní (tj. jsou to reálná čísla). Za těchto předpokladů potom platí: $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$.

Nemusíme proto při konkrétním výpočtu používat definici s pomocným bodem a; musíme ale mít jistotu, že funkce $f(x)$ je skutečně spojitá na celém intervalu $(-\infty, \infty)$. Kdybychom tento předpoklad ignorovali, pak bychom mohli dojít ke špatnému závěru. Zkuste si to na příkladu funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ a integrační oblasti $(-\infty, \infty)$.

Obdobně postupujeme při rozšiřování definice určitého integrálu v případě, že funkce není na integračním oboru omezená.

Definice. *Mějme funkci $f(x)$, která je definována na intervalu $\langle a, b)$ a v okolí bodu b není omezená. Předpokládejme, že je funkce $f(x)$ integrovatelná na každém intervalu $\langle a, r\rangle$, kde $r < b$. Jestliže existuje vlastní limita $\lim_{r\to b^-} \int_a^r f(x)\,dx = A$, pak definujeme*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r\to b^-} \int_a^r f(x)\,dx = A$$

a říkáme, že je nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergentní (nebo, že konverguje k A). Ve všech ostatních případech říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ je divergentní.

Poznámka. Naprosto analogicky definujeme nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ v případě, že funkce $f(x)$ nesplňuje podmínku ohraničenosti v nějakém okolí bodu a. Předpokládejme nyní, že máme funkci $f(x)$, která je definována na intervalu (a,b) a která není omezená v nějakém okolí bodu a i v nějakém okolí bodu b. Jestliže existuje bod $c \in (a,b)$, takový, že oba nevlastní integrály $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jsou konvergentní, potom je konvergentní i nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, který definujeme předpisem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V tomto případě jsou pak také konvergentní nevlastní integrály $\int_a^r f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_r^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro jakékoliv reálné číslo $r \in (a,b)$. Není-li nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergentní, říkáme, že je divergentní. Obdobně je možno definovat $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ v případě, že funkce $f(x)$ nesplňuje podmínku ohraničenosti v nějakém bodě $c \in (a,b)$.

Opět si ukážeme několik ilustrativních příkladů.

Příklad. Vyšetřeme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ je na intervalu $(0,1\rangle$ definována, je na něm spojitá, a proto je integrovatelná na každém intervalu $\langle r,1\rangle$, kde $r > 0$. Protože je, jak jistě vidíme,

$$\lim_{r\to 0^+} \int_r^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_r^1 = \lim_{r\to 0^+} (2 - 2\sqrt{r}) = 2,$$

je daný integrál konvergentní a je $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2$.

Příklad. Vyšetřeme $\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$.

Opět se jedná o funkci, která je na intervalu $\langle 0,1)$ spojitá a která je integrovatelná na každém intervalu $\langle 0,r\rangle$, kde $r < 1$. Je

$$\lim_{r\to 1^-} \int_0^r \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to 1^-} \left[\ln|x-1|\right]_0^r = \lim_{r\to 1^-} \ln|r-1| = -\infty.$$

Daný nevlastní integrál je divergentní.

Příklad. Vyšetřeme $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Daná funkce je spojitá na intervalu $(-1,1)$. Vyšetřeme $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$. Je

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to -1^+} \int_r^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to -1^+} \left[\arcsin x\right]_r^0 = \lim_{r\to -1^+} (-\arcsin r) = \frac{\pi}{2}.$$

Ukažte, že je též $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. Závěrem můžeme konstatovat, že $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \pi$.

Příklad. Vyšetřeme $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x$.

Daná funkce nesplňuje podmínku ohraničenosti v okolí bodu $c = 1$; funkce je ale integrovatelná na intervalech $\langle 0,r\rangle$ pro každé $r \in (0,1)$ a na $\langle s,9\rangle$ pro každé $s \in (1,9)$. Výpočtem zjistíme

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to 1^-} \int_0^r \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to 1^-} \left[3\cdot\sqrt[3]{x-1}\right]_0^r =$$
$$= \lim_{r\to 1^-} (3\cdot\sqrt[3]{r-1} - 3\cdot\sqrt[3]{-1}) = 3,$$
$$\int_1^9 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 1^+} \int_s^9 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 1^-} \left[3\cdot\sqrt[3]{x-1}\right]_s^9 =$$
$$= \lim_{s\to 1^+} (3\cdot\sqrt[3]{8} - 3\cdot\sqrt[3]{s-1}) = 6.$$

Proto je $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x + \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = 3 + 6 = 9$.

Příklad. Vyšetřeme $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Daná funkce opět nesplňuje podmínku ohraničenosti v okolí bodu $c = 1$; funkce je ale integrovatelná na intervalech $\langle 0,r\rangle$ pro každé $r \in (0,1)$ a na $\langle s,2\rangle$ pro každé $s \in (1,2)$. Výpočtem zjistíme

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to 1^-} \int_0^r \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to 1^-} \left[\frac{-1}{x-1}\right]_0^r = \infty.$$

Obdobně je $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \infty$, a proto je $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ divergentní.

Poznámka. Obdobně jako u nevlastních integrálů, které mají za integrační obor interval $(-\infty,\infty)$, i zde platí, že je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$, která je spojitá na intervalu (a,b) a která nesplňuje podmínku omezenosti v obou krajních bodech, pak integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je konvergentní, právě když existují vlastní limity $\lim_{x\to a^+} F(x)$ a $\lim_{x\to b^-} F(x)$.

V tomto případě je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$.

Speciálně, je-li funkce $F(x)$ spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$(v bodě a zleva, v bodě b zprava) a je-li $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a,b)$, pak je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. Proto je možno psát např. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi$.

Poznámka. Samozřejmě se mohou vyskytnout určité integrály, které jsou nevlastní jednak kvůli nekonečné délce integračního intervalu a jednak kvůli neohraničenosti integrované funkce. Příkladem je divergentní integrál $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Příklady k procvičení

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{3x}+2}{e^x}\,dx$; 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$; 3) $\displaystyle\int_1^e \frac{x+2}{2x}\,dx$;

4) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} 2x\,dx$; 5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x\cdot\sin x\,dx$; 6) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x^2-3x}\,dx$;

7) $\displaystyle\int_0^3 \arcsin\frac{x}{3}\,dx$; 8) $\displaystyle\int_2^8 e^{\sqrt{2x}}\,dx$; 9) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$;

10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cdot\cos x\,dx$; 11) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\ln^3 x}$; 12) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\cdot\sin^3 x\,dx$;

13) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2x\cdot\cos 3x\,dx$; 14) $\displaystyle\int_1^2 x^2\cdot\ln(1+x^3)\,dx$; 15) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{4-\sin^2 x}\,dx$;

16) $\displaystyle\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x+9e^{-x}}$; 17) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^5 x}\,dx$; 18) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2+\cos x}\cdot\sin x\,dx$;

19) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$; 20) $\displaystyle\int_0^{\pi} (1-x^2)\cdot\cos x\,dx$; 21) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cdot\cos x\,dx$;

22) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4}{3+x^2}\,dx$; 23) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$; 24) $\displaystyle\int_{-1}^0 (2x+3)\cdot e^{-x}\,dx$.

Vypočtěte následující nevlastní integrály a zdůvodněte, proč jsou nevlastní:

25) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$; 26) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; 27) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{3x^2-2x}$;

28) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2}$; 29) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx$; 30) $\displaystyle\int_{-\infty}^2 \frac{x}{3x-2}\,dx$;

31) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 32) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln x}}$; 33) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin 2x\,dx$;

34) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$; 35) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$; 36) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

37) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\cdot\sqrt{1-x}}$; 38) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$; 39) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,dx$;

40) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4x^2+1}$; 41) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$; 42) $\displaystyle\int_0^{\infty} 2^{-x}\,dx$;

43) $\displaystyle\int_1^{\infty} x\cdot\ln^2 x\,dx$; 44) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{x}{\sqrt{2-x}}\,dx$; 45) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^x}{9+e^x}\,dx$;

46) $\displaystyle\int_0^1 \ln^2 x\,dx$; 47) $\displaystyle\int_1^{\infty} x\cdot e^{-2x}\,dx$; 48) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\cdot\cos x\,dx$;

49) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}\,dx$; 50) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}\,dx$; 51) $\displaystyle\int_1^{\infty} x\cdot\operatorname{arctg} x\,dx$.

Výsledky

1) $\frac{e^3+3e-4}{2e}$;	2) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$;	3) $\frac{e+1}{2}$;	4) 0;
5) 3;	6) $-\frac{5}{3}\ln 2$;	7) $\frac{3}{2}\pi-3$;	8) $3e^4-e^2$;
9) $-\frac{\ln 5}{12}$;	10) $\frac{1}{5}$;	11) $\frac{3}{8}$;	12) $\frac{4}{15}$;
13) $\frac{3\pi+2}{9}$;	14) $3\ln 9-\frac{2}{3}\ln 2-\frac{7}{3}$;	15) $-\frac{1}{2}\ln 3$;	16) $\frac{\pi}{36}$;
17) $\frac{15}{4}$;	18) $2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}$;	19) $\frac{32}{3}$;	20) 2π;
21) $\frac{e^{\pi}-2}{5}$;	22) $\frac{3\sqrt{3}\pi}{4}-2\sqrt{3}$;	23) $\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$;	24) $3e-5$.
25) $\frac{8}{3}$;	26) $\frac{51}{10}$;	27) $\ln\sqrt{3}$;	28) $\frac{\pi}{4}$;
29) diverguje;	30) diverguje;	31) $\frac{\pi^2}{8}$;	32) 2;
33) diverguje;	34) $\frac{\pi}{4}$;	35) 1;	36) π;
37) $\frac{\pi}{2}$;	38) -1;	39) diverguje;	40) $\frac{\pi}{2}$;
41) $\frac{3}{2}$;	42) $\frac{1}{\ln 2}$;	43) diverguje;	44) $\frac{8}{3}$;
45) diverguje;	46) 2;	47) $\frac{3}{4}e^{-2}$;	48) diverguje;
49) diverguje;	50) $\frac{\pi^4}{64}$;	51) diverguje.	

POUŽITÍ URČITÉHO INTEGRÁLU

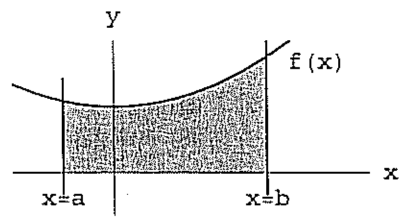
V této kapitole si ukážeme některá základní použití určitého integrálu. Použití určitých integrálů, která si ukážeme, budou skutečně jen základní a tvoří nepatrný zlomek známých aplikací.

Obsah rovinného obrazce

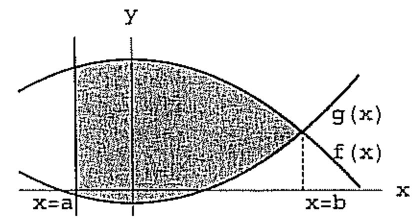
Vzpomeňme si na způsob, jakým jsme definovali Riemannův určitý integrál funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$. Představme si, že funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a, b\rangle$ nezáporná. Potom integrální součet příslušný dělení $D : a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b$, tj.

$$S(D) = f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + \cdots + f(c_n) \cdot \Delta x_n,$$

představuje součet obsahů obdélníků, které zhruba pokrývají obrazec ohraničený zleva přímkou o rovnici $x = a$, zprava přímkou o rovnici $x = b$, zdola osou x a shora grafem funkce $y = f(x)$. Je samozřejmé, že při jemnějším dělení je pokrývání přesnější. Limitním přechodem potom dostaneme následující základní geometrický význam určitého integrálu.



Obr. 2: Obsah obrazce



Obr. 3: Obsah obrazce

Věta. *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom obsah rovinného obrazce, který je zleva ohraničen přímkou o rovnici $x = a$, zprava přímkou o rovnici $x = b$, zdola přímkou o rovnici $y = 0$ (osou x) a shora křivkou o rovnici $y = f(x)$ (viz obr. 2), je*

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

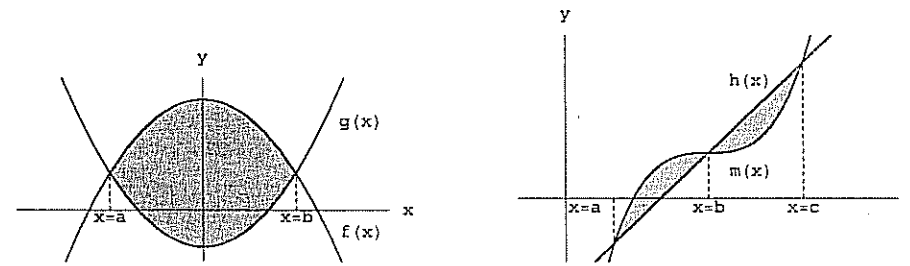
Snadným zobecněním uvedené věty je následující věta.

Věta. *Obsah rovinného obrazce, který je ohraničen křivkami o rovnicích $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ a $y = g(x)$, kde funkce $y = f(x)$ a $y = g(x)$ jsou spojité na $\langle a, b\rangle$ a $f(x) \geq g(x)$ na $\langle a, b\rangle$ (viz obr. 3), je*

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka. Ohraničení obrazce zleva či zprava může být i jednobodové, to jest může to být průsečík křivek $y = f(x)$ a $y = g(x)$, a to na jedné straně (viz obr. 3) nebo na obou stranách (viz obr. 4), případně se křivky mohou protínat i ve více bodech. Na obr. 4 vpravo se křivky o rovnicích $y = h(x)$ a $y = m(x)$ protínají ve třech bodech. Máme-li například určit obsah obrazce, který je ohraničen křivkami o rovnicích $y = f(x)$ a $y = g(x)$, pak integrační meze získáme řešením rovnice $f(x) = g(x)$. Pokud nevíme, která křivka je „horní" a která „dolní", pak to můžeme zjistit testováním v nějakém bodě mezi průsečíky křivek, nebo použijeme vzorec

$$P = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.$$



Obr. 4: Obsahy obrazců ohraničených křivkami

Příklad. Určeme obsah obrazce ohraničeného osou x a grafem funkce $y = \sin x$ pro $x \in \langle 0, \pi\rangle$.

Protože je $\sin x \geq 0$ na $\langle 0, \pi\rangle$, je obsah daného obrazce roven

$$P = \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \big[-\cos x\big]_0^\pi = 1 + 1 = 2.$$

Příklad. Určeme obsah obrazce ohraničeného osou x a grafem funkce $y = \cos x$ pro $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Protože je $\cos x \geq 0$ na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, je obsah daného obrazce roven

$$P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \big[\sin x\big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = 2.$$

Příklad. Určeme obsah obrazce ohraničeného křivkami o rovnicích $y = \frac{1}{1+4x^2}$ a $y = \frac{1}{2}$. Nejprve si určíme integrační meze. Řešením rovnice $\frac{1}{1+4x^2} = \frac{1}{2}$ je $x = \pm\frac{1}{2}$. Protože pro všechna $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ je $\frac{1}{1+4x^2} > \frac{1}{2}$, obsah obrazce je roven

$$P = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1+4x^2} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} 2x = t & -\frac{1}{2} \to -1 \\ 2\mathrm{d}x = \mathrm{d}t & \frac{1}{2} \to 1 \end{array} \right| - \left[\frac{x}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{2}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1)) - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 2}{4}.$$

Příklad. Určeme obsah kruhu o poloměru R.
Kruh o poloměru R umístíme do soustavy souřadné tak, aby jeho střed byl totožný s počátkem soustavy souřadné. Rovnice příslušné kružnice je $x^2 + y^2 = R^2$. Uvažujme polokruh ohraničený osou x a grafem funkce $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Graf této funkce protíná osu x v bodech $x = \pm R$. Obsah tohoto polokruhu je dán vzorcem $P = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$.
Při výpočtu použijeme substituci $x = R \cdot \sin t$, kde $t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Potom je $dx = R \cdot \cos t\, dt$; integrační meze $\pm R$ se při této substituci mění na $\pm\frac{\pi}{2}$. Je tedy

$$P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot R \cdot \cos t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cdot \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cdot |\cos t| \cdot \cos t\, dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cdot \cos^2 t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \frac{R^2}{2} \cdot \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{\pi R^2}{2}.$$

Promyslete si jednotlivé kroky. Proč je $|\cos t| = \cos t$? Výpočtem jsme zjistili obsah polokruhu o poloměru R. Proto obsah kruhu o poloměru R je πR^2.

Délka oblouku křivky

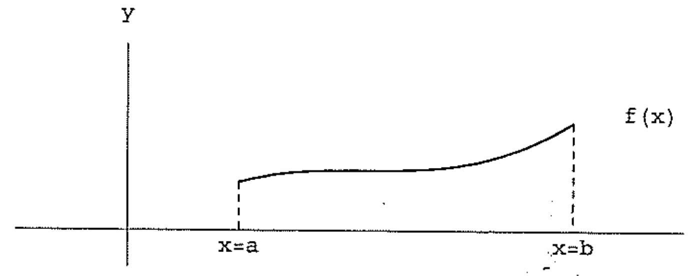
Předpokládejme, že máme funkci $y = f(x)$, která je definována na intervalu $\langle a, b \rangle$, a že potřebujeme znát délku oblouku grafu funkce $y = f(x)$. Jak bychom ji mohli zjistit? Zkusme nalézt nějakou aproximaci této délky. Interval $\langle a, b \rangle$ si rozdělme nějakým dělením $D : a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b$ na n dílů. Zkusme vyjádřit přibližně délku oblouku grafu funkce $y = f(x)$ na elementárním intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$. Víme z diferenciálního počtu, že je možno přírůstek funkce v malém okolí bodu x_i nahradit přírůstkem na tečně ke grafu funkce v dotykovém bodě $[x_i, f(x_i)]$, samozřejmě za předpokladu, že funkce má v tomto bodě tečnu, což je ekvivalentní s tvrzením, že má v bodě x_i derivaci. Předpokládejme tedy dále, že funkce $f(x)$ má v každém bodě intervalu $\langle a, b \rangle$ derivaci. Pak je délka oblouku křivky $y = f(x)$ na intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ rovna přibližně $dl_i = \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$. Označíme-li $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, dostaneme, že součet všech elementárních délek oblouků křivky, příslušný dělení D, je roven integrálnímu součtu

$$l(D) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \Delta x_i.$$

Odsud již snadno limitním přechodem ($n \to \infty$) dostáváme následující větu, která obsahuje vzorec pro výpočet délky oblouku křivky.

Věta. *Nechť funkce $f(x)$ má spojitou derivaci $f'(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom délka oblouku křivky dané rovnicí $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ (viz obr. 5) je rovna*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$



Obr. 5: Délka oblouku křivky

Použití vzorce pro výpočet délky oblouku křivky si ukážeme na následujících dvou příkladech.

Příklad. Jaká je délka oblouku křivky $y = x \cdot \sqrt{x}$ na intervalu $\langle 1, 5 \rangle$?
Daná funkce splňuje předpoklady věty, a proto použijeme uvedený vzorec. Určíme si nejprve derivaci funkce, dostaneme $y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$; odsud (po snadné úpravě) zjistíme, že je $\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 9x}$. Nyní už snadno dostaneme, že délka oblouku je

$$l = \frac{1}{2} \int_1^5 \sqrt{4 + 9x}\, dx = \frac{1}{9} \int_{\sqrt{13}}^{7} t^2\, dt = \frac{1}{27} \left[t^3 \right]_{\sqrt{13}}^{7} = \frac{343}{27} - \frac{13}{27}\sqrt{13}.$$

Jakou jsme použili substituci?

Příklad. Určeme délku kružnice o poloměru R.
Kružnice o poloměru R se středem v počátku soustavy souřadné je popsána rovnicí $x^2 + y^2 = R^2$. Uvažujme část kružnice nacházející se v prvním kvadrantu, která je popsána vztahem $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in \langle 0, R \rangle$. Derivace této funkce je $y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Tato funkce splňuje předpoklady věty na každém intervalu $\langle 0, a \rangle$, kde $a \in (0, R)$ a lze tedy pro tuto funkci a interval $\langle 0, a \rangle$ použít vzorec. Dosazením a úpravou dostáváme $\sqrt{1 + y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Délka uvažovaného oblouku funkce na intervalu $\langle 0, a \rangle$ je $l(a) = \int_0^a \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx$.
Při výpočtu použijeme substituční vztahy $x = Rt$, $dx = R\, dt$, $0 \to 0$, $a \to \frac{a}{R}$ a bez problémů dostaneme

$$l(a) = \int_0^{\frac{a}{R}} \frac{R}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt = R \cdot \left[\arcsin t \right]_0^{\frac{a}{R}} = R \cdot \arcsin \frac{a}{R}.$$

Limitním přechodem $a \to R$ určíme délku čtvrtiny kružnice $l(R) = R \cdot \arcsin 1 = R \cdot \frac{\pi}{2}$.
Délka kružnice o poloměru R je tedy rovna $l = 2\pi R$.

Objem rotačního tělesa

Mějme rovinný obrazec, který je zleva ohraničen přímkou $x = a$, zprava přímkou $x = b$, zdola osou x a shora grafem spojité funkce $y = f(x)$. Nechme nyní tento obrazec rotovat kolem osy x. Tím vzniká jakési těleso, jehož objem nás v tomto okamžiku zajímá. Pokusme se ho určit. Interval $\langle a, b \rangle$ si rozdělíme na n stejných (což ale není nutné) dílů dělením $D(n) : a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b$. Elementární objem dV_i tělesa, vznikajícího rotací obrazce ohraničeného osou x, přímkami $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ a $y = f(x)$

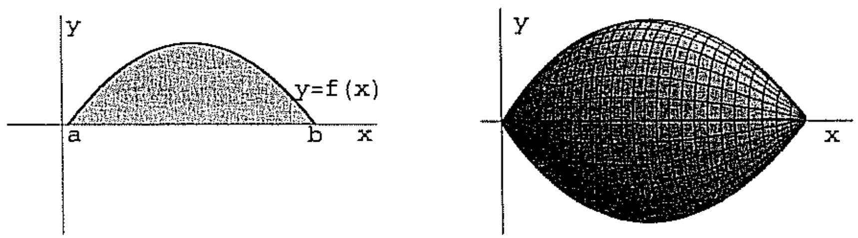
je přibližně roven $\pi(f(x_i))^2 \cdot (x_{i+1} - x_i)$. Sečteme-li všechny tyto elementární objemy, dostaneme, při označení $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, součet

$$V(n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(x_i)\Delta x_i.$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostaneme vzorec pro výpočet objemu tohoto tělesa.

Věta. *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom objem tělesa, které vzniká rotací rovinného obrazce, jehož ohraničení je dáno osou x, přímkami o rovnicích $x = a$ a $x = b$ a grafem funkce $y = f(x)$, kolem osy x (viz obr. 6), je*

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$



OBR. 6: Objem tělesa, které vzniká rotací plochy kolem osy x

Poznámka. Všimněte si, že ve formulaci věty bylo upuštěno od požadavku nezápornosti funkce $f(x)$. Je to proto, že stejné těleso vzniká, rotuje-li kolem osy x obrazec ohraničený přímkami $x = a$, $x = b$, osou x a grafem nezáporné funkce $y = |f(x)|$. Ověřte si toto na příkladu obrazce ohraničeného přímkami $x = 0$, $x = 2\pi$, osou x a grafem funkce $y = \cos x$.

A nyní dva příklady pro ilustraci.

Příklad. Určeme objem tělesa, které vzniká rotací obrazce ohraničeného grafem funkce $y = \sin x$, $x \in \langle 0, \pi\rangle$ a osou x.
Všechny předpoklady věty jsou splněny, proto můžeme ihned počítat. Dostaneme

$$V = \pi \cdot \int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \cdot \left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Příklad. Určeme objem koule o poloměru R.
Koule o poloměru R vzniká například rotací polokruhu ohraničeného osou x a grafem funkce $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ kolem osy x. Nyní již bez problémů určíme, že objem této koule je

$$V = \pi \cdot \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Plášť rotačního tělesa

Mějme oblouk grafu funkce $y = f(x)$, která je nezáporná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a která má v každém bodě tohoto intervalu spojitou derivaci. Rotuje-li tento oblouk kolem osy x, pak vzniká jakási rotační plocha, jejíž velikost nás teď zajímá. Chceme-li odvodit předpis pro výpočet velikosti této plochy, postupujeme následujícím, pro nás již obvyklým, způsobem. Interval $\langle a, b\rangle$ si pravidelným dělením $D(n) : a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b$ rozdělíme na n stejných dílů a určíme si velikost elementární plochy vznikající rotací elementárního oblouku křivky $y = f(x)$, $x \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle$. Tento oblouk křivky si můžeme nahradit, obdobně jako když jsme odvozovali délku oblouku křivky, tečnou ke grafu funkce $y = f(x)$ s dotykovým bodem $[x_i, f(x_i)]$. Tato elementární plocha je plocha pláště komolého rotačního kužele o poloměrech $r_1 = f(x_i)$, $r_2 = f(x_i) + \Delta x_i$ ($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$) a velikosti délky strany rotačního kužele $s = \sqrt{1 + (f'(x_i))^2}\Delta x_i$. Velikost pláště komolého rotačního kužele o poloměrech r_1, r_2 a délce strany rotačního kužele s je $S = \pi s\,(r_1 + r_2)$. Tento vzorec si můžete poměrně snadno odvodit, což doporučujeme, nebo nalézt v nějaké sbírce vzorců, například ve známé sbírce vzorců [1] ze seznamu literatury uvedeného na začátku skript. Použijeme ho a dostaneme

$$\mathrm{d}S_i = \pi \cdot \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \cdot (2f(x_i) + \Delta x_i) \cdot \Delta x_i = \pi \cdot \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \cdot (2f(x_i) \cdot \Delta x_i + (\Delta x_i)^2).$$

Při malém Δx_i lze zanedbat $(\Delta x_i)^2$ a používat

$$\mathrm{d}S_i = 2\pi \cdot f(x_i) \cdot \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \cdot \Delta x_i.$$

Samozřejmě, že v případě $f'(x_i) = 0$, se nejedná o komolý kužel, ale o válec; vzorec pro elementární plochu, jak jistě vidíte, zůstává i v tomto případě platný. Limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostaneme:

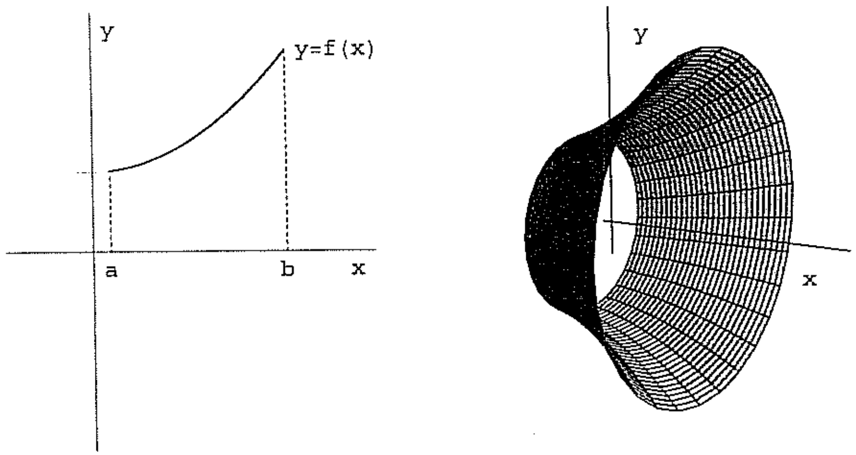
Věta. *Nechť funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a, b\rangle$ nezáporná a má na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitou derivaci $f'(x)$. Velikost plochy, která vzniká rotací oblouku křivky $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ kolem osy x (viz obr. 7) je dána vzorcem:*

$$S = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka. Nezápornost funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ je ve formulaci věty podstatná. Zkuste příklad $f(x) = x$, $x \in \langle -1, 1\rangle$. Plochu, jejíž velikost popisuje vzorec, nazýváme pláštěm rotačního tělesa. Je to jiný pojem než povrch rotačního tělesa, i když mohou nastat případy, kdy povrch a plášť rotačního tělesa mají stejnou velikost. V kterých případech to nastává?

A opět dva příklady pro ilustraci.

Příklad. Odvoďme vzorec pro výpočet obsahu kulové plochy o poloměru R.
Kulová plocha o poloměru R vzniká například rotací oblouku křivky $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ kolem osy x. V tomto případě je velikost povrchu koule rovna plášti. Předpoklady věty jsou splněny na každém intervalu $\langle -r, r\rangle$ pro $r \in (0, R)$. Použijeme již jednou odvozený vztah (viz část „Délka oblouku křivky") $\sqrt{1 + y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ a dostáváme, že velikost plochy, která vzniká rotací oblouku křivky $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in \langle -r, r\rangle$ je



Obr. 7: Plášť tělesa, které vzniká rotací oblouku křivky kolem osy x

$$S(r) = 2\pi \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x = 2\pi \cdot \int_{-r}^{r} R\, \mathrm{d}x = 2\pi \cdot \left[Rx\right]_{-r}^{r} = 4\pi \cdot R \cdot r.$$

Limitním přechodem $r \to R$ dostáváme, že povrch koule je $4\pi R^2$.

Příklad. Určeme velikost pláště paraboloidu, který vzniká rotací oblouku křivky $y = 2\sqrt{x}$, $x \in \langle 0, 1\rangle$ kolem osy x.
Křivka nesplňuje podmínky věty, nemá v bodě $x = 0$ derivaci. Obdobně jako v předcházejícím příkladě budeme proto vyšetřovat křivku na intervalu $\langle t, 1\rangle$ a zkusíme potom limitní přechod pro $t \to 0$.

$$S(t) = 2\pi \cdot \int_{t}^{1} 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\, \mathrm{d}x = 2\pi \cdot \int_{t}^{1} 2\sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = 2\pi \cdot \int_{t}^{1} 2\sqrt{1+x}\, \mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{4}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3\right]_t^1 = \frac{8}{3}\pi \cdot \left(2\sqrt{2} - \left(\sqrt{1+t}\right)^3\right).$$

Nyní již bez problémů dostáváme

$$S = \lim_{t\to 0} S(t) = \lim_{t \to 0} \frac{8\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - \left(\sqrt{1+t}\right)^3\right) = \frac{8\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

Závěrem kapitoly předkládáme soubor příkladů, na kterých si můžete procvičit probranou látku.

Příklady k procvičení

Vypočtěte obsah obrazce, který je ohraničen křivkami o rovnicích:

1) $y = x^2 - 4x + 3,\ x = 0,\ y = 0;$
2) $x \cdot y = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0;$
3) $y = \ln x,\ y = 0,\ x = \mathrm{e};$
4) $y = \operatorname{arctg} x,\ y = 0,\ x = 1;$
5) $y = \arcsin x,\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0;$
6) $y = \sqrt{x},\ y = \sqrt{4 - 3x},\ y = 0;$
7) $y = x^2,\ y = 4;$
8) $y = \mathrm{e}^x,\ y = \mathrm{e}^{-x},\ x = 1;$

9) $x \cdot y = 9,\ y = x,\ x = 9;$
10) $y = \operatorname{tg} x,\ y = 0,\ x = \frac{\pi}{4};$
11) $y = \sin x,\ y = \cos x,\ x = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{3\pi}{4};$
12) $y = 9 - x^2,\ y = 2x^2;$
13) $x \cdot y = 2,\ y = 2x^2,\ y = 8$ pro $x > 0;$
14) $y^2 = 2x + 1,\ y = x - 1;$
15) $y = x^3,\ y = 4x;$
16) $y^2 = 16x,\ x^2 = 2y;$
17) $y = \sin 2x,\ y = \sin x,\ x = \frac{\pi}{3},\ x = \pi;$
18) $y = x^2 - 2x + 2,\ y = 2 + 4x - x^2;$
19) $y = \ln(x + 2),\ y = 2\ln x,\ y = 0;$
20) $y = \frac{6}{9 + x^2},\ y = 0,\ x = -3,\ x = 3.$

Vypočtěte délku oblouku křivky, která je grafem zadané funkce:

21) $y = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}},\ x \in \langle 1, 8\rangle;$
22) $y = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x-1)^3},\ x \in \langle 1, 9\rangle;$
23) $y = \sqrt{2 - x^2},\ x \in \langle 0, 1\rangle;$
24) $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x},\ x \in \langle 1, 3\rangle;$
25) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x,\ x \in \langle 1, \mathrm{e}\rangle;$
26) $y^2 = (x + 1)^3,\ x \in \langle -1, 4\rangle;$
27) $y = \frac{1}{4x^2} + \frac{x^4}{8},\ x \in \langle 1, 2\rangle;$
28) $y = \sqrt{2x - x^2},\ x \in \langle \frac{1}{2}, 1\rangle;$
29) $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x,\ x \in \langle 0, \frac{9}{16}\rangle;$
30) $9y^2 = 4(3 - x)^3,\ x \in \langle 1, 3\rangle;$
31) $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x},\ x \in \langle 0, 1\rangle;$
32) $y = \frac{1}{3}(x - 3)\sqrt{x},\ x \in \langle 1, 4\rangle;$
33) $y = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x} - \frac{3}{10} \cdot \sqrt[3]{x^5},\ x \in \langle 1, 8\rangle;$
34) $y = 2 \cdot \sqrt{1 + \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}},\ x \in \langle \ln 9, \ln 64\rangle.$

Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce, ohraničeného křivkami o daných rovnicích, kolem osy x:

35) $xy = 2,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4;$
36) $y = x^2 - 2x,\ y = 0;$
37) $y = \sin x,\ y = 0,\ x = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{3\pi}{4};$
38) $y = \ln x,\ y = 0,\ x = \mathrm{e},\ x = \mathrm{e}^2;$
39) $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x} \cdot (x - 12),\ y = 0;$
40) $y = x^2,\ y^2 = x;$
41) $y = \arcsin x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1;$
42) $y = \sqrt{\frac{2x - 1}{2x + 1}},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2;$
43) $y = 2x,\ y = 2x^2,\ x = 1,\ x = 2;$
44) $y = 4x - x^2,\ y = x;$
45) $y = \sqrt{x} \cdot \mathrm{e}^{-x},\ y = 0,\ x = 1;$
46) $y = \frac{\ln x}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = \mathrm{e};$
47) $y = \mathrm{e}^{2x},\ y = \mathrm{e}^{-2x},\ y = \mathrm{e}^2;$
48) $y = \frac{1}{\cos 2x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{6};$
49) $y^2 = (4 - x)^3,\ x = 0;$
50) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 3}},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1;$
51) $y = \mathrm{e}^{2x},\ y = 6 + \mathrm{e}^x,\ x = 0;$
52) $y = 3 - x^2,\ y = 1 + x^2;$
53) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2;$
54) $y = x \cdot \mathrm{e}^{-x},\ y = 0,\ x = 2;$
55) $y = \sin 2x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2};$
56) $y = \frac{1}{\sqrt{x \cdot \ln x}},\ y = 0,\ x = \mathrm{e}^2,\ x = \mathrm{e}^3;$
57) $y = \sqrt{\frac{2x}{x - 1}},\ y = 0,\ x = 0,\ x = -1;$
58) $y = x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{8}},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2;$
59) $y = \sin^2 x,\ y = 3\sin x,\ x = 0,\ x = \pi;$
60) $y = 2^x,\ y = 2x - x^2,\ x = 0,\ x = 2;$
61) $y = \sqrt{2x - 3},\ y = \sqrt{4x - 7},\ y = 0;$
62) $y = x^2 - 6x + 9,\ y = x^2 - 4x + 7,\ x = 3.$

Vypočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotací grafu zadané funkce kolem osy x:

63) $y = \sqrt{2x},\ x \in \langle 0, \frac{3}{2}\rangle;$
64) $y = 4x - 1,\ x \in \langle 1, 2\rangle;$
65) $y = x^3,\ x \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle;$
66) $y = \sqrt{9 + x},\ x \in \langle -3, 3\rangle;$

67) $3y - x^3 = 0$, $x \in \langle 0, 1\rangle$;
68) $y^2 = x + 4$, $x \in \langle -\frac{1}{2}, 2\rangle$;
69) $y = 4 \cdot \sqrt{x}$, $x \in \langle 0, 5\rangle$;
70) $y = \sqrt{9 - x^2}$, $x \in \langle 1, 2\rangle$;
71) $y = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{x} \cdot (x - 3)$, $x \in \langle 0, 3\rangle$;
72) $x^2 + y^2 = 4$, $x \in \langle -2, 2\rangle$.

Výsledky

1) $\frac{4}{3}$;	2) $8 \ln 2$;	3) 1;	4) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$;
5) $\frac{\pi}{2} - 1$;	6) $\frac{8}{9}$;	7) $\frac{32}{3}$;	8) $\frac{e^2+1}{e} - 2$;
9) $36 - 9 \ln 3$;	10) $\ln \sqrt{2}$;	11) $\sqrt{2}$;	12) $12 \cdot \sqrt{3}$;
13) $\frac{28}{3} - \ln 16$;	14) $\frac{16}{3}$;	15) 8;	16) $\frac{32}{3}$;
17) $\frac{9}{4}$;	18) 9;	19) $\ln 16 - 1$;	20) π.
21) $5 \cdot \sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{2}$;	22) $\frac{52}{3}$;	23) $\frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}}$;	24) $\frac{14}{3}$;
25) $\frac{e^2+1}{4}$;	26) $\frac{670}{27}$;	27) $\frac{33}{16}$;	28) $\frac{\pi}{6}$;
29) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;	30) $4 \cdot \sqrt{3} - \frac{4}{3}$;	31) 2;	32) $\frac{10}{3}$;
33) $\frac{108}{10}$;	34) $2 + 2 \ln \frac{3}{2}$.	35) 3π;	36) $\frac{16\pi}{15}$;
37) $\frac{\pi}{4}(\pi + 2)$;	38) $\pi e(2e - 1)$;	39) 48π;	40) $\frac{3}{10}\pi$;
41) $\frac{\pi^3}{4} - 2\pi$;	42) $\pi(1 + \ln \frac{3}{5})$;	43) $\frac{232\pi}{15}$;	44) $\frac{108\pi}{5}$;
45) $\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4e^2}$;	46) $2\pi - \frac{5\pi}{e}$;	47) $\pi \frac{3e^4+1}{2}$;	48) $\pi \frac{\sqrt{3}}{2}$;
49) 64π;	50) $\pi(6 - 8 \ln 2)$;	51) $4\pi(2 + 9 \ln 3)$;	52) $\frac{32\pi}{3}$;
53) $\frac{\pi^2}{8}$;	54) $\pi \frac{e^4 - 13}{4e^4}$;	55) $\frac{\pi^2}{4}$;	56) $\pi \ln \frac{3}{2}$;
57) $2\pi(1 - \ln 2)$;	58) $\frac{4}{3}\pi \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$;	59) $\frac{33}{8}\pi^2$;	60) $\pi \left(\frac{15}{\ln 4} - \frac{16}{15}\right)$;
61) $\frac{\pi}{8}$;	62) 16π.	63) $\frac{14}{3}\pi$;	64) $10\pi \cdot \sqrt{17}$;
65) $\frac{61}{1728}\pi$;	66) $\frac{109}{3}\pi$;	67) $\frac{\pi}{9}\left(\sqrt{8} - 1\right)$;	68) $\frac{\pi}{6}\left(125 - 15 \cdot \sqrt{15}\right)$;
69) $\frac{304}{3}\pi$;	70) 6π;	71) 3π;	72) 16π.

POUŽITÍ NEVLASTNÍCH INTEGRÁLŮ

V této kapitole si ukážeme, že i nevlastní integrály mohou mít reálný význam. Ukážeme si pouze některá z mnoha možných použití těchto integrálů.

Obsah obrazce, délka oblouku křivky, objem a plášť rotačního tělesa

Vzorce pro obsah rovinného obrazce, délky oblouku křivky, objem a plášť rotačního tělesa, které byly odvozeny a formulovány v předcházející kapitole, zůstávají platné i v případech nevlastních integrálů na intervalech nekonečné délky a v případech neomezenosti funkcí na otevřeném nebo polootevřeném intervalu, což již víme z příkladů z minulé kapitoly. Je zřejmé, že reálný význam mají pouze v případech konvergence příslušných nevlastních integrálů.

Uveďme si pár příkladů.

Příklad. Určeme obsah obrazce ohraničeného shora křivkou $y = \frac{1}{x}$, zleva přímkou o rovnici $x = 1$ a zdola osou x.
Protože funkce $y = \frac{1}{x}$ je spojitá na $\langle 1, \infty)$, je

$$P = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t \to \infty} [\ln |x|]_1^t = \lim_{t \to \infty} \ln t = \infty.$$

Výsledek ukazuje, že obrazec má nekonečně velkou plochu.

Příklad. Určeme objem tělesa, které vzniká rotací obrazce z předcházejícího příkladu kolem osy x.
Snadným výpočtem získáme

$$V = \lim_{t \to \infty} \pi \cdot \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t \to \infty} \pi \cdot \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t \to \infty} \pi \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right) = \pi.$$

Objem tělesa je konečný a je roven π.

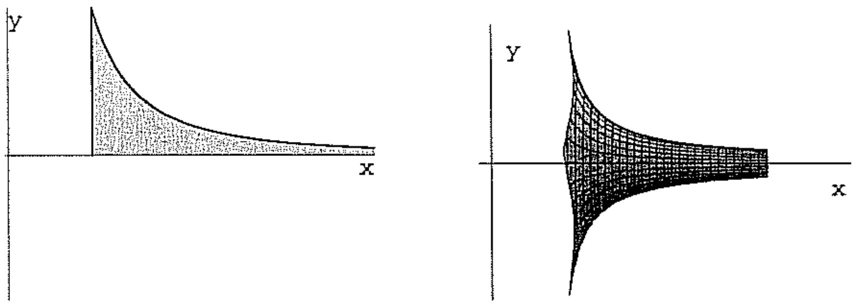
Získali jsme příklad tělesa, které má konečný objem a které vzniklo rotací obrazce o nekonečně velké ploše kolem osy x. Plocha i objem tohoto tělesa jsou znázorněny na obr. 8.

Příklad. Jaký je obsah pláště rotačního tělesa z předcházejícího příkladu?
V tomto příkladě nebudeme umět potřebný integrál určit; přesto dospějeme k výsledku.

$$S = \lim_{t \to \infty} 2\pi \cdot \int_1^t \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx \geq \lim_{t \to \infty} 2\pi \cdot \int_1^t \frac{1}{x}\, dx = 2\pi \cdot \lim_{t \to \infty} \ln t = \infty.$$

Vidíme, že těleso má nekonečně velký plášť. K tomu jsme využili výsledku předpředcházejícího příkladu. Nezdá se vám paradoxní, že existuje rotační těleso konečného objemu, jehož plášť a podélný řez jsou nekonečně velké?

Příklad. Určeme obsah obrazce ohraničeného shora křivkou $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, zleva přímkou o rovnici $x = 0$ (osou y), zprava přímkou o rovnici $x = 1$ a zdola osou x.
Protože funkce $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ je spojitá na $(0, 1\rangle$, je



OBR. 8: Těleso konečného objemu, které vzniká rotací nekonečné plochy kolem osy x

$$P = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+} \left[2\cdot\sqrt{x}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+} (2 - 2\cdot\sqrt{t}) = 2.$$

Výsledek ukazuje, že plocha obrazce je konečná a má velikost 2.

Příklad. Určeme objem tělesa, které vzniká rotací obrazce z předcházejícího příkladu kolem osy x.
Snadným výpočtem získáme

$$V = \lim_{t\to 0^+} \pi \cdot \int_t^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+} \pi\cdot[\ln x]_t^1 = \lim_{t\to 0^+} \pi\cdot(0-\ln t) = \infty.$$

Objem tohoto tělesa je nekonečně velký.
Známe tedy příklad tělesa nekonečného objemu, které vzniká rotací obrazce, jehož plocha je konečná.

Funkce gama a funkce beta

Velmi významné použití v matematice, technické praxi a zejména ve statistice mají funkce beta a gama, o kterých se nyní velmi stručně zmíníme. Funkci jedné reálné proměnné gama budeme značit $\Gamma(x)$ a funkci dvou reálných proměnných beta budeme značit $\mathrm{B}(x,y)$. Definičním oborem funkce Γ je interval $(0,\infty)$, definičním oborem funkce B je množina $(0,\infty)\times(0,\infty)$. Uveďme si jejich definice.

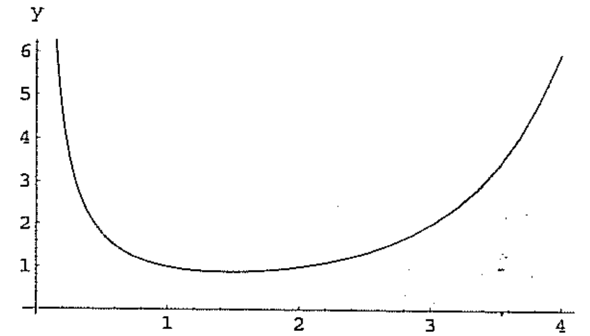
Definice. *Pro každé kladné reálné číslo x definujme*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\cdot \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Pro každou dvojici (x,y) kladných reálných čísel definujme

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

Je možno ukázat, že obě definice jsou korektní, tj. že oba integrály jsou konvergentní. Obě tyto funkce jsou na celém svém definičním oboru spojité, nabývají pouze kladných hodnot a mají všude derivace, resp. parciální derivace, všech řádů. Na obr. 9 je znázorněn graf funkce $\Gamma(x)$.



OBR. 9: Graf funkce $\Gamma(x)$

Příklad. Určeme $\Gamma(1)$ a $\Gamma(2)$.
Podle definice je

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1}\cdot \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{m\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^m = \lim_{m\to\infty}(-\mathrm{e}^{-m}+1) = 1.$$

Obdobně vypočteme

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty t\cdot \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{m\to\infty}\left[-t\,\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}\right]_0^m = \lim_{m\to\infty}(-m\,\mathrm{e}^{-m} - \mathrm{e}^{-m}+1) = 1.$$

Zajímavou vlastnost dostaneme použitím metody per partes pro výpočet integrálu. Je totiž (proveďte podrobně veškeré mezivýpočty)

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x\cdot \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{m\to\infty}\int_0^m t^x\cdot \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} u'=\mathrm{e}^{-t} & v=t^x \\ u=-\mathrm{e}^{-t} & v'=xt^{x-1}\end{matrix}\right|_0^m =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-t}\cdot t^x\right]_0^m + x\int_0^\infty t^{x-1}\cdot \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 + x\cdot\Gamma(x).$$

Jako důsledek dostáváme, že $\Gamma(n+1) = n!$ pro každé přirozené číslo n. Je tedy např. $\int_0^\infty x^4\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 4! = 24$. Toto a některé další důležité vlastnosti těchto funkcí si souhrnně uvedeme v následující větě.

Věta. *Pro všechna kladná reálná čísla x, y a každé přirozené číslo n platí:*

1) $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$;
2) $\Gamma(n) = (n-1)!$;
3) $\mathrm{B}(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \mathrm{B}(y,x)$;
4) $\mathrm{B}(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y}\cdot\mathrm{B}(x,y)$ *a* $\mathrm{B}(x,y+1) = \dfrac{y}{x+y}\cdot\mathrm{B}(x,y)$;
5) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Ukažme si nyní, jak je možno získat vztah $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Příklad. Vyjádřeme hodnotu $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ pomocí funkcí Γ a $\mathbf{B}$.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x = t^{\frac12} & 0 \to 0 \\ \mathrm{d}x = \frac12 t^{-\frac12}\mathrm{d}t & 1 \to 1 \end{matrix} \right| = \frac12 \int\limits_0^1 t^{-\frac12}\cdot(1-t)^{\frac12}\,\mathrm{d}t = \frac12 \int\limits_0^1 t^{\frac12-1}\cdot(1-t)^{\frac32-1}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac12 \cdot \mathbf{B}\left(\frac12, \frac32\right) = \frac12 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac12\right)\cdot\Gamma\left(\frac32\right)}{\Gamma\left(\frac12+\frac32\right)} = \frac12 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac12\right)\cdot\Gamma\left(\frac12+1\right)}{\Gamma(2)} = \frac14 \cdot \left(\Gamma\left(\frac12\right)\right)^2.$$

Jelikož $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ je roven jedné čtvrtině obsahu kruhu o poloměru 1, dostáváme rovnost $\frac{\pi}{4} = \frac14 \cdot \left(\Gamma\left(\frac12\right)\right)^2$. Odsud ihned plyne $\Gamma\left(\frac12\right) = \sqrt{\pi}$.

Funkce Γ a $\mathbf{B}$ nejsou elementární funkce. Hodnoty těchto funkcí je přesto možno určit v libovolném bodě s libovolnou, předem danou, přesností. Vzhledem k vlastnostem funkcí $\mathbf{B}$ a Γ stačí znát hodnoty funkce Γ na libovolném intervalu délky 1. Nejčastěji je možno v literatuře nalézt tabelované hodnoty funkce gama na intervalu $\langle 1, 2\rangle$.

Na závěr si vyjádříme hodnoty tří určitých integrálů pomocí funkcí gama a beta.

Příklad. Určeme $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Provedeme-li substituci $x = \sqrt{t}$, dostaneme

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x = t^{\frac12} & 0 \to 0 \\ \mathrm{d}x = \frac12 t^{-\frac12}\mathrm{d}t & \infty \to \infty \end{matrix} \right| = \frac12 \int\limits_0^\infty t^{\frac12-1}\cdot \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac12 \cdot \Gamma\left(\frac12\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Příklad. Určeme $\int\limits_0^\infty x^4 \cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Provedeme substituci $x = \sqrt{t}$ a dostaneme

$$\int\limits_0^\infty x^4\cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x = t^{\frac12} & 0 \to 0 \\ \mathrm{d}x = \frac12 t^{-\frac12}\mathrm{d}t & \infty \to \infty \end{matrix} \right| = \frac12 \int\limits_0^\infty t^{2-\frac12}\cdot \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac12 \int\limits_0^\infty t^{\frac52-1}\cdot \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac12\cdot\Gamma\left(\frac52\right) = \frac12\cdot\Gamma\left(\frac32+1\right) = \frac12\cdot\frac32\cdot\Gamma\left(\frac12+1\right) = \frac12\cdot\frac32\cdot\frac12\cdot\Gamma\left(\frac12\right) = \frac38\sqrt{\pi}.$$

Příklad. Určeme $\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{16-x^4}}\,\mathrm{d}x$.

Hodnotu integrálu vyjádříme pomocí funkce beta. Použijeme substituci $x = 2t^{\frac14}$. Dostaneme

$$\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{16-x^4}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} x = 2t^{\frac14} & 0 \to 0 \\ \mathrm{d}x = \frac12 t^{-\frac34}\mathrm{d}t & 2 \to 1 \end{matrix} \right| = \frac18 \int\limits_0^1 t^{-\frac34}\cdot(1-t)^{-\frac12}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac18 \int\limits_0^1 t^{\frac14-1}\cdot(1-t)^{\frac12-1}\,\mathrm{d}t = \frac18\cdot\mathbf{B}\left(\frac14, \frac12\right).$$

Příklady k procvičení

Vypočtěte obsah obrazce, který je ohraničen osou x a grafem funkce $y = f(x)$, je-li:

1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$, $x \in \left(-\frac13, 1\right\rangle$;
2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$;
3) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, $x \in (-\infty, 0\rangle$;
4) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x \in (1, 3\rangle$;
5) $f(x) = \dfrac{1}{9x^2+4}$;
6) $f(x) = |\mathrm{cotg}\,x|$, $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi\right)$;
7) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;
8) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x}$, $x \in \langle 1, \infty)$.

Vypočtěte objem tělesa, které vzniká rotací obrazce, který je ohraničen osou x a grafem funkce $f(x)$, kolem osy x je-li:

9) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}$, $x \in (0, 4\rangle$;
10) $f(x) = \mathrm{tg}\,x$, $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)$;
11) $f(x) = |\ln x|$, $x \in (0, 1\rangle$;
12) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$.

Vypočtěte následující integrály užitím funkcí gama nebo beta:

13) $\int\limits_0^\infty x^2\cdot\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; 14) $\int\limits_0^\infty \sqrt{x}\cdot\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$; 15) $\int\limits_0^\infty 3\,\mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x$; 16) $\int\limits_0^\infty 9x^6\cdot\mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x$;

17) $\int\limits_0^1 x^2\cdot\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$; 18) $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x^2-x^3}\,\mathrm{d}x$; 19) $\int\limits_0^3 \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$; 20) $\int\limits_0^1 \dfrac{15\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$.

Výsledky

1) $\frac43$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) 2; 4) ∞; 5) $\frac{\pi}{6}$; 6) ∞;
7) π; 8) $\ln 2$. 9) 16π; 10) ∞; 11) 2π; 12) $\frac{\pi}{2}$.
13) 2; 14) $\frac{\sqrt{\pi}}{4\cdot\sqrt{2}}$; 15) $\Gamma\left(\frac13\right)$; 16) $\frac43\Gamma\left(\frac13\right)$; 17) $\mathbf{B}\left(3, \frac32\right) = \frac{16}{105}$;
18) $\mathbf{B}\left(\frac53, \frac43\right) = \frac19\Gamma\left(\frac23\right)\Gamma\left(\frac13\right)$; 19) $\frac{9\pi}{4}$; 20) 32.

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Diferenciální rovnice tvoří jednu z nejdůležitějších partií matematické analýzy. Diferenciální rovnice mají velmi silné aplikace ve fyzice a technické praxi. Těmito rovnicemi se popisují téměř veškeré dynamické jevy v těchto oblastech. Dokonce se jimi popisují i jevy biologické a společenské. Uvidíme, že řešit diferenciální rovnice není vůbec jednoduché, že je to záležitost velice komplikovaná. Proto se seznámíme pouze se základy teorie diferenciálních rovnic a ukážeme si postupy řešení pouze u několika málo jednoduchých typů diferenciálních rovnic. Obecně za diferenciální rovnici považujeme každou rovnici

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

kde y je neznámá funkce jedné proměnné x. Řádem diferenciální rovnice rozumíme nejvyšší derivaci funkce y, která se v rovnici vyskytuje. Všechny derivace jsou derivace funkce jedné proměnné, a proto se tyto rovnice také nazývají obyčejné diferenciální rovnice. Matematika také studuje rovnice, ve kterých se vyskytují parciální derivace. Těm se říká parciální diferenciální rovnice. My se budeme zabývat výhradně obyčejnými diferenciálními rovnicemi a pro jednoduchost budeme slovo obyčejné vynechávat.

Typy řešení diferenciálních rovnic

Řešit diferenciální rovnici znamená najít a popsat všechna řešení, tj. nalézt všechny funkce, které po dosazení vyhovují dané rovnici. Situace je zde ale poněkud komplikovanější než například při řešení rovnic. Uveďme si příklad. Mějme diferenciální rovnici

$$y' = 2 \cdot \sqrt{y}.$$

Dosazením snadno ověříme, že každá funkce

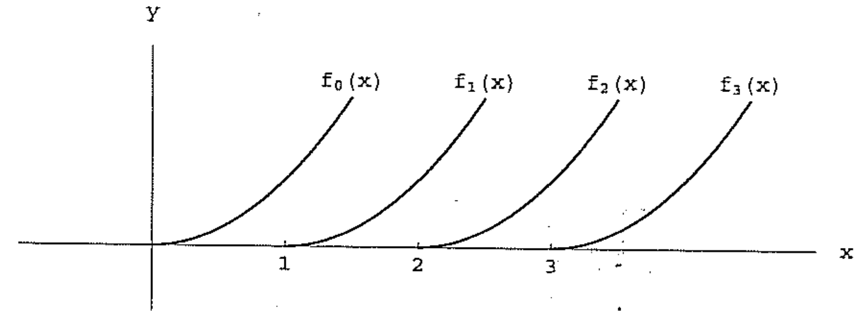
$$y = (x + C)^2, \quad x \in (-C, \infty),$$

kde C je nějaká konstanta, je řešením dané rovnice. Řešení tohoto tvaru budeme nazývat obecným řešením diferenciální rovnice. Dosadíme-li za konstantu C nějaké konkrétní reálné číslo, dostáváme již konkrétní funkce, které budeme nazývat partikulární řešení. Partikulárním řešením diferenciální rovnice $y' = 2 \cdot \sqrt{y}$ jsou tedy všechny funkce definované vztahem: $f(x) = (x + C)^2$, $x \in (-C, \infty)$, kde C je libovolné reálné číslo. Partikulárním řešením naší diferenciální rovnice jsou tedy i následující čtyři funkce $f_0(x) = x^2$, $x \in (0, \infty)$, $f_1(x) = (x-1)^2$, $x \in (1, \infty)$, $f_2(x) = (x-2)^2$, $x \in (2, \infty)$, a $f_3(x) = (x-3)^2$, $x \in (3, \infty)$, které jsou zobrazeny na obr. 10.

To ale nejsou ještě všechna řešení. Funkce daná předpisem $y = 0$ je také (jak snadno ověříme dosazením) řešením dané rovnice a přitom ji nelze získat z obecného řešení žádnou speciální volbou konstanty. Toto řešení budeme nazývat třeba výjimečné. Výčet řešení ale ještě nekončí. Můžeme totiž vytvářet další funkce (použitím partikulárních řešení a výjimečného řešení) předpisem

$$f_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, C\rangle \\ (x+C)^2 & \text{pro } x \in (-C, \infty), \end{cases}$$

které po dosazení vyhovují dané diferenciální rovnici.



OBR. 10: Některá partikulární řešení diferenciální rovnice $y' = 2 \cdot \sqrt{y}$

Matematika také rozlišuje řešení regulární a singulární. Za regulární řešení se považuje funkce, jejímž grafem je taková křivka v rovině, která splňuje v každém svém bodě podmínku jednoznačnosti, tj. každý bod má tu vlastnost, že v nějakém jeho okolí neexistuje jiná křivka procházející tímto bodem, která by byla grafem funkce, jež je řešením dané diferenciální rovnice. Naopak za singulární řešení se považují takové funkce, které v každém svém bodě porušují podmínku jednoznačnosti.

V případě diferenciální rovnice $y' = 2 \cdot \sqrt{y}$ jsou její partikulární řešení řešeními regulárními a výjimečné řešení je řešením singulárním (každým bodem $[C, 0]$ procházejí řešení $y = 0$ a $y = f_C(x)$). My se dále těmito otázkami nebudeme zabývat, omezíme se pouze na obecná, partikulární a výjimečná řešení. Poznamenejme závěrem, že každé obecné řešení diferenciální rovnice řádu n musí obsahovat n volitelných konstant. Tyto konstanty obecně nemusí být volitelné libovolně, proto raději uvádějme i obory možné volby těchto konstant.

Diferenciální rovnice prvního řádu řešitelné separací proměnných

Za nejjednodušší typ diferenciálních rovnic prvního řádu je možno považovat rovnice $y' = f(x)$, kde $f(x)$ je nějaká spojitá funkce. Řešením této rovnice jsou všechny funkce tvaru $F(x) + C$, kde $F(x)$ je nějaká primitivní funkce k funkci $f(x)$ a C libovolná konstanta. Řešením tedy je $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Z tohoto důvodu se také někdy můžeme setkat s pojmem integrál diferenciální rovnice, partikulární integrál apod. Vzhledem k tomu, že (jak již víme) nalézt integrál dané funkce je obecně velmi obtížný problém, je problém nalézt řešení diferenciální rovnice daleko obtížnější. Obecnější typ diferenciálních rovnic, které jsou teoreticky snadno řešitelné, je typ

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

kde $f(x)$ a $g(y)$ jsou nějaké spojité funkce (na nějakých intervalech). O rovnicích tohoto typu říkáme, že jsou řešitelné separací proměnných, tj. lze je (alespoň teoreticky) řešit následujícím způsobem.

Rovnici převedeme do diferenciálního tvaru, tj. y' nahradíme výrazem $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a zároveň separujeme (oddělíme rovnítkem) proměnné x a y. Dostaneme

$$\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x.$$

Z rovnosti diferenciálů plyne rovnost funkcí (až na konstantu) a dostáváme

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V posledním kroku vyjádříme (pokud to lze) z této rovnice proměnnou y jako nějakou funkci proměnné x.

Příklad. Najděme obecné řešení diferenciální rovnice $xy' - 2y = 0$.
Nejprve rovnici vyjádříme ve tvaru

$$x\,\mathrm{d}y = 2y\,\mathrm{d}x,$$

provedeme separaci proměnných, čímž dostaneme rovnici

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Nyní provedeme integraci obou stran rovnice a dostaneme

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x,$$

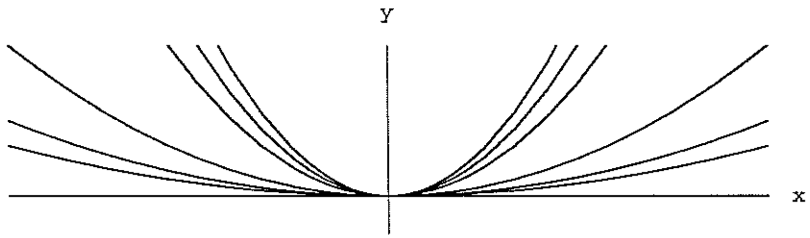
odkud ihned získáme rovnost

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln C.$$

Zde jsme na jednu stranu rovnice přidali integrální konstantu, kterou jsme vyjádřili, a to bez ztráty obecnosti, ve tvaru $\ln C$. Promyslete si důkladně tento krok. Využitím pravidel pro počítání s logaritmy a toho, že logaritmické funkce jsou prosté, dostáváme ihned $|y| = C \cdot x^2$. Jelikož ale $|y| = y$ nebo $|y| = -y$, je vždy $y = Kx^2$, kde K je nějaká nenulová konstanta. Během výpočtu jsme dělili výrazem y a tím vyloučili možnost $y = 0$. Tato funkce, jak snadno zjistíme dosazením, je také řešením rovnice. Závěrem tedy lze konstatovat, že obecné řešení dané rovnice $xy' - 2y = 0$ je

$$y = K \cdot x^2, \text{ kde } K \in \mathbf{R} \text{ (tj. } K \text{ je libovolná reálná konstanta).}$$

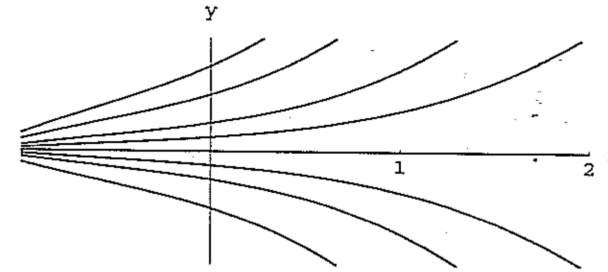
Několik příkladů partikulárních řešení této rovnice je zobrazeno na obr. 11.



Obr. 11: Některá partikulární řešení diferenciální rovnice $xy' - 2y = 0$

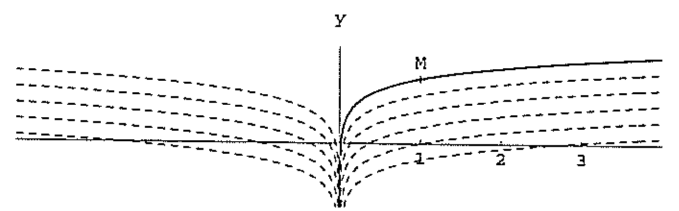
Příklad. Které funkce se derivováním nemění?
Jinými slovy řečeno, máme nalézt funkce y, které vyhovují diferenciální rovnici $y' = y$.
Opět si nejprve y' vyjádříme jako $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a provedeme separaci proměnných. Tím dostaneme rovnici $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}x$, která po integraci přejde v rovnici $\ln|y| = x + C$. Z této rovnice dostaneme $|y| = \mathrm{e}^{x+C} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^C$ a následně, nahrazením $\pm\mathrm{e}^C = K$, obecné řešení dané diferenciální rovnice $y = K \cdot \mathrm{e}^x$, kde K je libovolná konstanta. Případ $K = 0$ ověříme přímo dosazením do vyšetřované diferenciální rovnice.

Závěrem konstatujeme, že funkce, které se derivováním nemění, jsou právě všechny funkce dané předpisem $y = K \cdot \mathrm{e}^x$, kde K je libovolné reálné číslo.
Několik příkladů partikulárních řešení této rovnice (tj. funkcí, které se derivováním nemění) je zobrazeno na obr. 12.



Obr. 12: Grafy některých funkcí, které se derivováním nemění

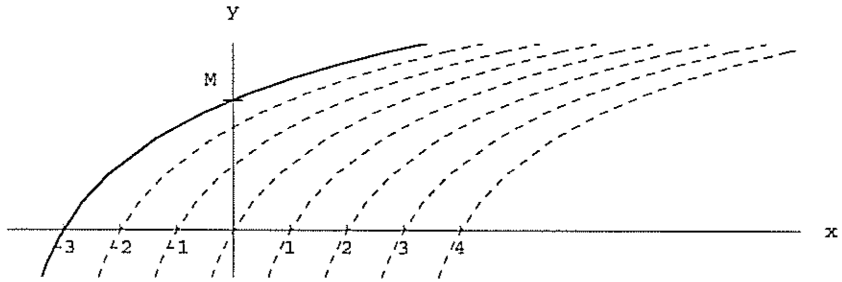
Příklad. Určeme to řešení diferenciální rovnice $x \cdot y' - 1 = 0$, které prochází bodem $M = [1, 4]$.
Opět si nejprve y' vyjádříme jako $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a provedeme separaci proměnných. Tím dostaneme rovnici $\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. Integrací získáme obecné řešení $y = \ln|x| + C$. Chceme-li určit konstantu C tak, aby řešení procházelo daným bodem, dosadíme bod M do obecného řešení a dostaneme rovnici $4 = \ln 1 + C$ a odsud požadovanou hodnotu volitelné konstanty. V našem případě dostáváme $C = 4$. Proto funkce $y = \ln|x| + 4$ vyhovuje podmínkám naší úlohy. Na obr. 12. je zobrazeno několik partikulárních řešení dané diferenciální rovnice. Za řešení, které prochází daným bodem $M = [1, 4]$ považujeme v tomto případě ale pouze funkci $y = \ln x + 4$ a nikoliv funkci $y = \ln|x| + 4$, která vlastně popisuje dvě funkce, a to funkci $y = \ln x + 4$ (s definičním oborem $(0, \infty)$) a funkci $y = \ln(-x) + 4$ (s definičním oborem $(-\infty, 0)$). Hledaná funkce je na obr. 13 znázorněna plně, ostatní partikulární řešení rovnice jsou znázorněna přerušovanou čarou.



Obr. 13: Grafy některých funkcí, které jsou řešením diferenciální rovnice $xy' - 1 = 0$

Příklad. Určeme to partikulární řešení diferenciální rovnice $\mathrm{e}^y \cdot y' - 1 = 0$, které prochází bodem $M = [0, \ln 4]$.
Opět si nejprve y' vyjádříme jako $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a provedeme separaci proměnných. Tím dostaneme rovnici $\mathrm{e}^y \cdot \mathrm{d}y = \mathrm{d}x$. Integrací získáme rovnici $\mathrm{e}^y = x + C$, ze které vyjádříme funkci y a získáme obecné řešení rovnice $y = \ln(x + C)$. Dosadíme-li do obecného řešení bod $M = [0, \ln 4]$, dostaneme rovnici $\ln 4 = \ln C$. Je tedy $C = 4$. Proto funkce $y = \ln(x + 4)$

vyhovuje podmínkám naší úlohy. Na obr. 14 je zobrazeno několik partikulárních řešení naší diferenciální rovnice. Funkce $y = \ln(x+4)$ je na obr. 14 znázorněna plně, ostatní partikulární řešení rovnice jsou znázorněna přerušovanou čarou.



OBR. 14: Grafy některých funkcí, které jsou řešením diferenciální rovnice $e^y \cdot y' - 1 = 0$

Příklad. Určeme řešení diferenciální rovnice $y \cdot y' + x = 0$, které prochází bodem $[0, 2]$. Separací proměnných převedeme danou rovnici na rovnici $y\,dy = -x\,dx$. Integrací získáme obecné řešení $y^2 = -x^2 + C$. Povšimněme si, že integrační konstantu obecného řešení této diferenciální rovnice lze volit pouze z kladných čísel. Chceme-li určit konstantu C tak, aby řešení procházelo daným bodem, dosadíme tento bod do obecného řešení a dostaneme požadovanou hodnotu volitelné konstanty. V našem případě dostáváme $C = 4$. Hledaná funkce je dána implicitně vztahem $y^2 = 4 - x^2$. Odsud snadno dostáváme, že funkce $y = \sqrt{4 - x^2}$ je řešením naší úlohy.

Homogenní diferenciální rovnice prvního řádu

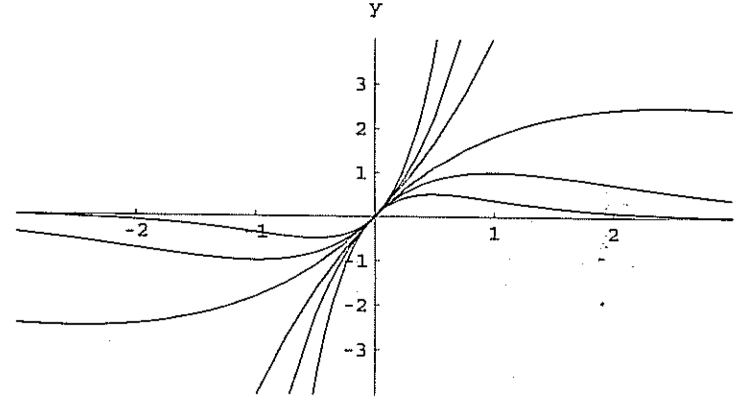
Diferenciální rovnice prvního řádu, které lze vyjádřit ve tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

kde f je nějaká spojitá funkce, nazýváme homogenní. Tyto rovnice lze převést substitucí na rovnice řešitelné separací proměnných. Tento převod zajišťuje substituce $\frac{y}{x} = z$. Protože je $y = x \cdot z$, je $y' = z + xz'$, což využijeme při této substituci..

Postup si ilustrujme na příkladě.

Příklad. Najděme obecné řešení diferenciální rovnice $xy' = y\,(\ln y - \ln x)$.
Protože lze rovnici vyjádřit ve tvaru $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$, jedná se o homogenní diferenciální rovnici, a proto použijeme substituci $z = \frac{y}{x}$. Dostaneme rovnici $z + xz' = z \ln z$, kterou lze separovat. Po separaci proměnných dostaneme $\dfrac{dz}{z\,(\ln z - 1)} = \dfrac{dx}{x}$; integrací obou stran rovnice získáme vztah $\ln|\ln z - 1| = \ln|x| + \ln C$; odsud plyne, že je $|\ln z - 1| = C|x|$, a tedy $\ln z = 1 + Kx$. Nyní již snadno dostaneme $z = e^{1+Kx}$ a konečně $y = x \cdot e^{1+Kx}$, kde K je libovolná konstanta. Platnost pro případ $K = 0$ ověříme přímo dosazením funkce $y = ex$ do původní rovnice. Obecné řešení naší diferenciální rovnice je možno také vyjádřit ve tvaru $y = x \cdot e \cdot M^x$, kde M je libovolné kladné číslo. Stačí si uvědomit,



OBR. 15: Některá partikulární řešení diferenciální rovnice $xy' = y\,(\ln y - \ln x)$.

že je $y = x \cdot e^{1+Kx} = x \cdot e \cdot e^{Kx} = x \cdot e \cdot (e^K)^x = x \cdot e \cdot M^x$. Některá partikulární řešení této rovnice jsou zobrazena na obr. 15

Příklad. Najděme to řešení diferenciální rovnice $x^2 y' = y^2 + xy$, které splňuje počáteční podmínku $y = -1$ pro $x = 1$.
Protože lze rovnici vyjádřit ve tvaru $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$, použijeme substituci $\frac{y}{x} = z$. Tím naše rovnice přejde v rovnici $xz' = z^2$. Separací proměnných dostaneme rovnici $\dfrac{dz}{z^2} = \dfrac{dx}{x}$, jejíž obě strany integrujeme a dostaneme $-\dfrac{1}{z} = \ln|x| + C$; odsud snadnou úpravou dospějeme k obecnému řešení $y = \dfrac{-x}{\ln|x| + C}$. Z počáteční podmínky $y(-1) = 1$ plyne, že musí být $1 = \dfrac{1}{\ln 1 + C}$. Z toho ihned určíme, že je $C = 1$. Hledané řešení diferenciální rovnice je tedy funkce $y = \dfrac{-x}{1 + \ln|x|}$.

Poznámka. Podobným způsobem lze také řešit diferenciální rovnice typu

$$y' = f(ax + by + c),$$

kde a, $b \neq 0$, c jsou nějaké konstanty a f nějaká spojitá funkce. Použijeme substituci $ax + by + c = z$ (a následně $y' = \frac{z' - a}{b}$); ta převede tuto rovnici na rovnici, kterou lze řešit separací proměnných.

Příklad. Najděme obecné řešení diferenciální rovnice $y' = (x + y)^2$.
Po provedení substituce $z = x + y$, dostaneme $z' = 1 + z^2$. Po separaci proměnných a integraci dostaneme $\operatorname{arctg} z = x + C$. Z tohoto vztahu ihned získáme $x + y = \operatorname{tg}(x + C)$, a tedy $y = \operatorname{tg}(x + C) - x$, kde C je libovolná reálná konstanta. Poznamenejme, že tímto postupem získaná funkce má definiční obor $(-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C)$; proč? Ve skutečnosti je řešením diferenciální rovnice $y' = (x + y)^2$ každá funkce $y = \operatorname{tg}(x + C) - x$. Přesvědčte se o tom dosazením této funkce do původní diferenciální rovnice.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Za lineární diferenciální rovnice prvního řádu považujeme rovnice typu

$$y' + y \cdot f(x) = g(x),$$

kde $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce spojité na nějakém intervalu. Tyto rovnice lze řešit způsobem, který je v podstatě vhodnou substitucí. Jaká substituce je vhodná si ale musíme určit pomocným výpočtem. Tento způsob řešení se nazývá metoda variace konstanty. V prvním kroku řešíme pomocnou diferenciální rovnici

$$y' + y \cdot f(x) = 0$$

a obecné řešení této rovnice si vyjádříme ve tvaru $y = K \cdot h(x)$. Toto je (alespoň teoreticky) vždy možné. Rovnici $y' + y \cdot f(x) = 0$ lze řešit separací proměnných. Dostaneme postupně $\frac{dy}{y} = -f(x)\,dx$, $\ln|y| = F(x)+C$, kde $F(x)$ je nějaká primitivní funkce k funkci $-f(x)$, a tedy

$$y = \pm e^{F(x)+C} = K \cdot e^{F(x)}.$$

V druhém kroku provedeme substituci

$$y = k(x) \cdot e^{F(x)},\ y' = k'(x) \cdot e^{F(x)} + k(x) \cdot e^{F(x)} \cdot F'(x).$$

Jinými slovy, konstantu K jsme nahradili funkcí $k(x)$; proto metoda variace konstanty. Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$k'(x) \cdot e^{F(x)} - k(x) \cdot e^{F(x)} \cdot f(x) + k(x) \cdot e^{F(x)} \cdot f(x) = g(x);$$

uvědomme si, že je $F'(x) = -f(x)$. Odsud určíme

$$k(x) = \int \frac{g(x)}{e^{F(x)}}\,dx = m(x) + C$$

a následně

$$y = k(x) \cdot e^{F(x)} = (m(x) + C) \cdot e^{F(x)} = m(x) \cdot e^{F(x)} + C \cdot e^{F(x)}.$$

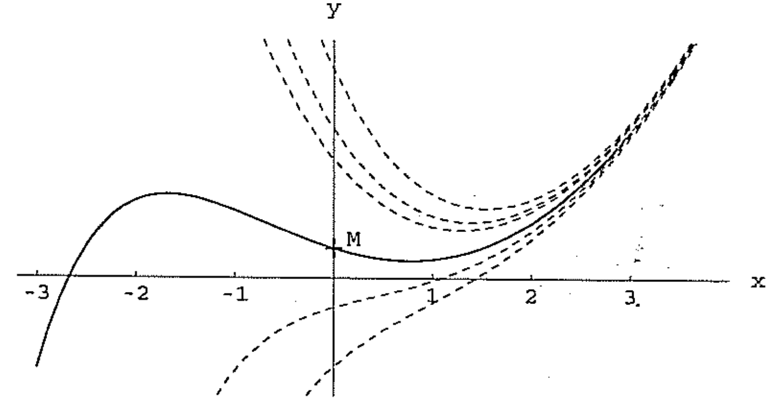
Postup si opět budeme ilustrovat na příkladech.

Příklad. Nalezněme obecné řešení diferenciální rovnice $y' + y = x^2$. Poté nalezněme to partikulární řešení rovnice, které prochází bodem $M = [0, 1]$.
Nejprve řešme rovnici $y' + y = 0$. Obecné řešení této rovnice je $y = K \cdot e^{-x}$. (Ověřte si.) Použijeme nyní substituci $y = k(x) \cdot e^{-x}$ a $y' = k'(x) \cdot e^{-x} - k(x) \cdot e^{-x}$. Po dosazení těchto vztahů do původní rovnice dostaneme $k'(x) \cdot e^{-x} - k(x) \cdot e^{-x} + k(x) \cdot e^{-x} = x^2$. Z této rovnice si vypočteme $k(x)$.

$$k(x) = \int k'(x)\,dx = \int x^2 \cdot e^x\,dx = (x^2 - 2x + 2)\,e^x + C.$$

Získaný výsledek dosadíme zpět do substituce a získáme obecné řešení rovnice.

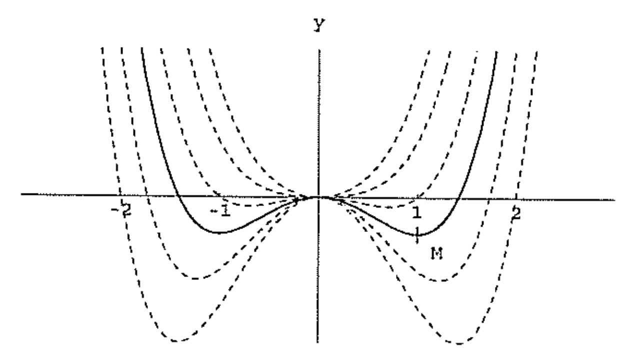
$y = \left((x^2 - 2x + 2)\,e^x + C\right) \cdot e^{-x} = x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x}$. Z počáteční podmínky (prochází bodem $M = [0, 1]$, tj. $y(0) = 1$ nebo-li $2 + C = 1$) nyní určíme, že $C = -1$. Hledané partikulární řešení rovnice je $y = x^2 - 2x + 2 - e^{-x}$. Na obr. 16 jsou zobrazena některá partikulárních řešení diferenciální rovnice. Partikulární řešení $y = x^2 - 2x + 2 - e^{-x}$ je na



OBR. 16: Některá partikulární řešení diferenciální rovnice $y' + y = x^2$

obr. 16 znázorněno plně, ostatní partikulární řešení rovnice jsou znázorněna přerušovanou čarou.

Příklad. Určeme partikulární řešení diferenciální rovnice $xy' = 2(y + x^4)$, které prochází bodem $[1, -1]$.
Nejprve si ujasníme, že se jedná o lineární diferenciální rovnici. Skutečně ji lze vyjádřit ve tvaru $y' - y \cdot \frac{2}{x} = 2x^3$. Proto si nejprve nalezneme obecné řešení diferenciální rovnice $y' - \frac{2y}{x} = 0$. Zjistíme, že je to $y = Kx^2$. Substituce $y = k(x) \cdot x^2$, $y' = k'(x) \cdot x^2 + 2k(x) \cdot x$ nám po dosazení do původní rovnice dává $x(k'(x) \cdot x^2 + 2k(x) \cdot x) = 2k(x) \cdot x^2 + 2x^4$; po úpravě $k'(x) = 2x$; odsud snadno $k(x) = x^2 + C$. Obecné řešení dané rovnice je $y = (x^2 + C)\,x^2 = x^4 + Cx^2$. Z počáteční podmínky nyní určíme, že $C = -2$. Hledané partikulární řešení diferenciální rovnice $xy' = 2(y + x^4)$ je tedy funkce $y = x^4 - 2x^2$. Na obr. 17 je zobrazeno několik partikulárních řešení naší diferenciální rovnice. Funkce $y = x^4 - 2x^2$ je na obr. 17 znázorněna plně, ostatní partikulární řešení rovnice jsou znázorněna přerušovanou čarou.



OBR. 17: Některá partikulární řešení diferenciální rovnice $xy' = 2(y + x^4)$

Na závěr si ukažme řešení alespoň jednoho příkladu z technické praxe.

Příklad. Do prostředí o konstantní teplotě 20°C je dodáno těleso, jehož teplota je 100°C. Určeme teplotu tělesa v závislosti na čase, víme-li, že po 20 minutách je jeho teplota 60°C. Kdy dosáhne těleso teploty 30°C?
Z fyziky víme, že rychlost ochlazování tělesa je úměrná rozdílu teplot. Označíme-li teplotu tělesa T a čas t, pak tento zákon lze popsat rovnicí $\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - 20)$. Separací proměnných dostaneme rovnici $\frac{dT}{T-20} = k dt$, kterou integrujeme a získáme vztah $\ln(T-20) = kt + C$, odkud ihned dostaneme vztah $T(t) = 20 + e^{C+kt} = 20 + e^C \cdot (e^k)^t = 20 + M \cdot R^t$. Z toho, že $T(0) = 100$, plyne $M = 80$. Dále z toho, že $T\left(\frac{1}{3}\right) = 60$ (čas měříme v hodinách), dostaneme $R = \frac{1}{8}$. Závislost teploty tělesa na čase je tedy dána vztahem $T(t) = 20 + 80\left(\frac{1}{8}\right)^t$. Snadno již určíme, že těleso dosáhne teploty 30°C v čase $t = 1$ hod.

Příklady k procvičení

Užitím metody separace proměnných najděte obecné řešení daných diferenciálních rovnic:

1) $y' = 3 \cdot \sqrt{x} - e^{-x}$; 2) $y' = \dfrac{y}{x}$; 3) $y' = \dfrac{y}{\operatorname{tg} x}$;
4) $(x+1) \cdot y' = y - 2$; 5) $x \cdot y' - 3y = 0$; 6) $x \cdot y \cdot y' = y^2 + 1$;
7) $y' = e^{x-y}$; 8) $\dfrac{y'}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$; 9) $x \cdot y' - y' = 2y$;
10) $x y' = (1 + y^2) \operatorname{arctg} y$; 11) $y' = y \cdot \ln^2 y$; 12) $\dfrac{y}{x} \cdot y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$.

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice, které splňuje danou počáteční podmínku:

13) $x y' = 4y$, $y(1) = 2$; 14) $x y' = 1 + y^2$, $y(1) = 0$; 15) $(x+1) y' + x y = 0$, $y(0) = 1$;
16) $y' = -\dfrac{x}{y+1}$, $y(0) = 0$; 17) $y' = y \cdot \cos x$, $y(\pi) = 1$; 18) $(1 + e^x) y \cdot y' = e^x$, $y(0) = 1$.

Vypočtěte obecné řešení daných homogenních diferenciálních rovnic:

19) $y' = \dfrac{2x + y}{x}$; 20) $x \cdot y' = x + 2y$; 21) $x + x \cdot y' = y$;
22) $x^2 y' = y^2 + x \cdot y$; 23) $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$; 24) $y' - \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$;
25) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$; 26) $x \cdot y' = y \cdot \ln \dfrac{y}{x}$; 27) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Vypočtěte obecné řešení lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu:

28) $y' - y = e^x$; 29) $x \cdot y' - 3y = x^2$; 30) $y' + 2y = e^{-2x} \cdot \cos x$;
31) $y' + 2x \cdot y = x^3$; 32) $(2x+1) \cdot y' + y = x$; 33) $y' - \dfrac{2}{x} \cdot y = x^2 \cdot \sin x$;
34) $y' + y \cdot \cos x = \sin 2x$; 35) $x \cdot y' - 2y = x \cdot \ln x$; 36) $(x+1) y' - 2y = (x+1)^4$;
37) $y' - y = 4x \cdot e^{-x}$; 38) $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = 2 \sin x$; 39) $x \cdot y' + y = (2 - \ln x) \cdot x$;
40) $(1 - x^2) y' + x \cdot y = 3x$; 41) $y' + y \cdot \operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{\sin x}$; 42) $y' + \dfrac{x \cdot y}{1 - x^2} = \arcsin x$.

Vypočtěte partikulární řešení diferenciální rovnice, splňující danou počáteční podmínku:

43) $y' - y = e^{2x}$, $y(0) = 4$; 44) $y' + 3y = x$, $y(\frac{1}{3}) = 1$;
45) $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$; 46) $y' + x^2 \cdot y = x^2$, $y(2) = 1$.

Výsledky

Určování podmínek existence řešení přenecháváme čtenáři jako samostatnou práci.

1) $y = 2x \cdot \sqrt{x} + e^{-x} + C$; 2) $y = Cx$; 3) $y = C \sin x$;
4) $y = 2 + C(x+1)$; 5) $y = Cx^3$; 6) $y^2 = Cx^2 - 1$;
7) $y = \ln(e^x + C)$; 8) $y = (C - \sqrt{x})^2$; 9) $y = C(x-1)^2$;
10) $y = \operatorname{tg}(Cx)$; 11) $y = e^{\frac{1}{C-x}}$; 12) $y^2 = C(1 + x^2) - 1$.
13) $y = 2x^4$; 14) $y = \operatorname{tg}(\ln|x|)$; 15) $y = (x+1)\, e^{-x}$;
16) $(y+1)^2 = 1 - x^2$; 17) $y = e^{\sin x}$; 18) $y^2 = 1 - \ln 4 + 2\ln(1 + e^x)$.
19) $y = x \ln(Cx^2)$; 20) $y = x(Cx - 1)$; 21) $y = x \ln\left|\frac{C}{x}\right|$;
22) $y = \frac{x}{C - \ln|x|}$; 23) $y = x \cdot \ln(\ln|Cx|)$; 24) $y = x \cdot \arcsin Cx$;
25) $y^2 = x^2 \ln(Cx^2)$; 26) $y = x\, e^{1+Cx}$; 27) $y = x \cdot \operatorname{tg} \ln \sqrt{C(x^2+y^2)}$.
28) $y = (x + C)\, e^x$; 29) $y = Cx^3 - x^2$; 30) $y = (C + \sin x)\, e^{-2x}$;
31) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + C e^{-x^2}$; 32) $y = \frac{x-1}{3} + \frac{C}{\sqrt{|2x+1|}}$; 33) $y = x^2 (C - \cos x)$;
34) $y = C e^{-\sin x} + 2 \sin x - 2$; 35) $y = Cx^2 - x(\ln x + 1)$;
36) $y = C(x+1)^2 + \frac{1}{2}(x+1)^4$; 37) $y = C e^x - (2x+1)\, e^{-x}$;
38) $y = \frac{C}{\cos x} - \cos x$; 39) $y = \frac{C}{x} + \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}x \ln x$;
40) $y = C \cdot \sqrt{1 - x^2} + 3$; 41) $y = \frac{C}{\sin x} + \frac{x}{\sin x}$;
42) $y = C \cdot \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2} \arcsin^2 x$. 43) $y = e^{2x} + 3 e^x$;
44) $y = e^{1-3x} + \frac{3x-1}{9}$; 45) $y = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$;
46) $y = 1$.

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

Lineárními diferenciálními rovnicemi druhého řádu s konstantními koeficienty rozumíme diferenciální rovnice tvaru

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

kde $a \neq 0$, b, c jsou nějaké konstanty a $f(x)$ spojitá funkce. Homogenními diferenciálními rovnicemi druhého řádu rozumíme rovnice tvaru

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

kde $a \neq 0$, b, a c jsou konstanty. Nejprve si ukažme, jak souvisí řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s řešením příslušné homogenní diferenciální rovnice. Tato souvislost není překvapivá, je ji možno vypozorovat ve všech podobných lineárních úlohách, např. při řešení soustav lineárních rovnic.

Věta. *Nechť $u(x)$ je nějaké řešení diferenciální rovnice*

(1) $$ay'' + by' + cy = f(x).$$

Potom řešením rovnice (1) jsou právě všechny funkce y, které lze vyjádřit jako součet $y = u(x) + v(x)$, kde $v(x)$ je nějaké řešení příslušné homogenní diferenciální rovnice

(2) $$ay'' + by' + cy = 0.$$

Důkaz tohoto tvrzení je velmi snadný. Je-li v nějaké řešení rovnice (2), pak $a(u+v)'' + b(u+v)' + c(u+v) = (au'' + bu' + cu) + (av'' + bv' + cv) = f(x) + 0 = f(x)$. Funkce $u + v$ je tedy řešením rovnice (1). Naopak, je-li funkce y řešením rovnice (1), je $y = u + (y - u)$ a funkce $v = y - u$ je řešením (2), jak si snadno ověříte.

Jinak řečeno, k popisu všech řešení rovnice (1) stačí znát jedno nějaké řešení rovnice (1) a všechna řešení rovnice (2). Jinými slovy je možno toto formulovat takto: je-li $u(x)$ nějaké řešení rovnice (1), pak lze obecné řešení rovnice (1) popsat vztahem obecné řešení (1)=$u(x)$ + obecné řešení (2).

Proto si nejprve ukažme, jak nalézt obecné řešení libovolné homogenní diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Toto bude záležet pouze na koeficientech a, b, c. Nebudeme zde odvozovat kroky, které vedou k nalezení těchto řešení; spokojíme se pouze s konstatováním výsledku. Doporučujeme ověřit si platnost následujících tvrzení zkouškou.

Řešení homogenní diferenciální rovnice

Charakteristickou rovnicí příslušnou homogenní diferenciální rovnici

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2}$$

rozumíme kvadratickou rovnici

$$ak^2 + bk + c = 0. \tag{3}$$

Věta. *Pro diferenciální rovnici (2) a charakteristickou rovnici (3) platí:*
1. *Je-li k reálným kořenem rovnice (3), pak je funkce $y = e^{kx}$ řešením rovnice (2);*
2. *Je-li k dvojnásobným reálným kořenem rovnice (3), pak jsou obě následující funkce $y = e^{kx}$ a $y = x \cdot e^{kx}$ řešením rovnice (2);*
3. *Je-li komplexní číslo $p + iq$ kořenem rovnice (3), pak jsou obě následující funkce $y = e^{px} \cdot \cos qx$ a $y = e^{px} \cdot \sin qx$ řešením rovnice (2).*

Vzhledem k tomu, že obecné řešení diferenciální rovnice (2) je vždy lineární kombinací dvou lineárně nezávislých (tj. jedno není násobkem druhého) řešení rovnice (2), platí následující věta.

Věta. *Nechť $ak^2+bk+c=0$ je charakteristická rovnice homogenní diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty $ay'' + by' + cy = 0$. Potom platí:*
1. *Má-li charakteristická rovnice dva reálné kořeny k_1 a k_2, pak obecné řešení diferenciální rovnice je $y = C_1 \cdot e^{k_1x} + C_2 \cdot e^{k_2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$;*
2. *Má-li charakteristická rovnice jeden dvojnásobný reálný kořen k, pak obecné řešení diferenciální rovnice je $y = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot x \cdot e^{kx}$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$;*
3. *Má-li charakteristická rovnice komplexní kořeny $p \pm iq$, pak obecné řešení diferenciální rovnice je $y = C_1 \cdot e^{px} \cdot \cos qx + C_2 \cdot e^{px} \cdot \sin qx$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.*

Příklad. Určeme obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 5y' + 6y = 0$.
Charakteristická rovnice $k^2 - 5k + 6 = 0$ má řešení $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, a proto obecné řešení dané rovnice je $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

Příklad. Určeme obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 4y' + 4y = 0$.
Charakteristická rovnice $k^2 - 4k + 4 = 0$ má řešení $k_1 = k_2 = 2$, a proto obecné řešení dané rovnice je $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

Příklad. Určeme obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 4y' + 8y = 0$.
Charakteristická rovnice $k^2 - 4k + 8 = 0$ má řešení $k_1 = 2 + 2i$, $k_2 = 2 - 2i$, a proto obecné řešení dané rovnice je $y = C_1e^{2x}\cos 2x + C_2e^{2x}\sin 2x$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

Příklad. Určeme obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + 9y = 0$.
Charakteristická rovnice $k^2 + 9 = 0$ má dva komplexně sdružené kořeny, a to kořeny $k_1 = 3i$, $k_2 = -3i$. Obecné řešení dané diferenciální rovnice je $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

Řešení nehomogenní diferenciální rovnice se speciální pravou stranou

Nyní se můžeme zabývat otázkou, jak nalézt nějaké (libovolné) řešení diferenciální rovnice $ay'' + by' + cy = f(x)$. Tento problém není jednoduchý, umíme ho však řešit v případě, že pravá strana rovnice, tj. funkce $f(x)$, je dostatečně „rozumná" v tom smyslu, že se podstatně nemění derivováním. Tuto „rozumnou" vlastnost mají funkce polynomické, exponenciální a goniometrické. Ukažme si několik základních situací, jak nalézt nějaké řešení diferenciální rovnice $ay'' + by' + cy = f(x)$.

Věta. *Mějme diferenciální rovnici $ay'' + by' + cy = f(x)$. Platí:*
1) Je-li $f(x) = e^{px} \cdot P(x)$, kde $P(x)$ je nějaký polynom, potom řešením dané diferenciální rovnice je funkce $u(x) = x^r \cdot e^{px} \cdot Q(x)$, kde číslo r udává kolikanásobným kořenem příslušné charakteristické rovnice je číslo p (tj. $r \in \{0, 1, 2\}$) a $Q(x)$ je vhodný jednoznačně určený polynom stupně stejného jako je stupeň polynomu $P(x)$;
2) Je-li $f(x) = e^{px} \cdot (P(x)\cos qx + Q(x)\sin qx)$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou nějaké polynomy, potom řešením dané diferenciální rovnice je funkce $u(x) = x^r \cdot e^{px} \cdot (R(x)\cos qx + S(x)\sin qx)$, kde číslo r udává kolikanásobným kořenem příslušné charakteristické rovnice je komplexní číslo $p + iq$ (tj. $r \in \{0, 1\}$) a $R(x)$ a $S(x)$ jsou vhodné jednoznačně určené polynomy, jejichž stupeň je menší nebo roven maximu ze stupňů polynomů $P(x)$ a $Q(x)$.

Ukažme si nyní na příkladech jak tuto větu využít pro hledání nějakých řešení diferenciální rovnice.

Příklad. Najděme obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 4y' + 3y = -4xe^x$.
Snadno zjistíme, že charakteristická rovnice $k^2 - 4k + 3 = 0$ má kořeny $k_1 = 1$ a $k_2 = 3$. Víme také, že obecné řešení dostaneme jako součet nějakého řešení diferenciální rovnice a všech možných lineárních kombinací funkcí e^x a e^{3x}. Podle předchozí věty víme, že funkce $u(x) = x \cdot e^x(Ax + B)$ bude, pro vhodné jednoznačně určené konstanty A a B, hledaným řešením dané diferenciální rovnice. Zatím neznámé konstanty A, B zjistíme tak, že dosadíme funkci $v(x)$ do původní rovnice a porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin polynomů na obou stranách rovnice. Jestliže dosadíme do rovnice $y'' - 4y' + 3y = -4xe^x$ místo y, y', y'' výrazy $v(x) = e^x(Ax^2 + Bx)$, $v'(x) = e^x(Ax^2 + (2A + B)x + B)$ a $v''(x) = e^x(Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)$, dostaneme (po nezbytných úpravách) $A = 1$ a $B = 1$. Obecné řešení naší diferenciální rovnice tedy je $y = (x^2 + x)e^x + C_1e^x + C_2e^{3x}$, kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Ověřte všechny kroky výpočtu.

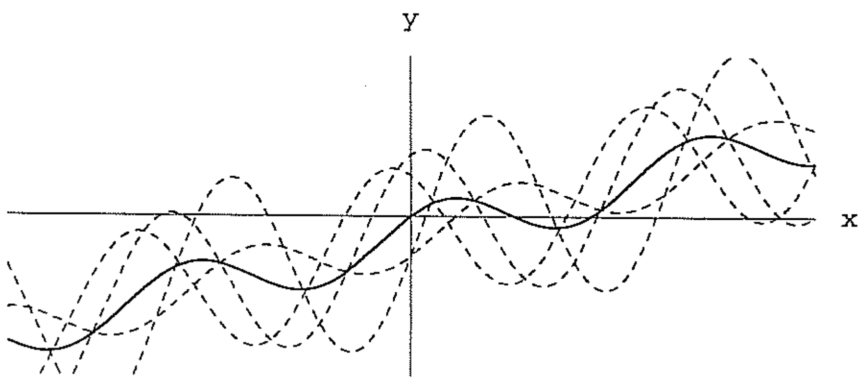
Příklad. Najděme obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 4y = 8x^2$.
Charakteristická rovnice $k^2 + 4k + 4 = 0$ má jeden dvojnásobný kořen $k = -2$. Víme, že funkce $u(x) = Ax^2 + Bx + C$ bude, pro vhodné konstanty A, B, C, řešením dané rovnice. Dosazením funkce $v(x)$ do rovnice a porovnáním koeficientů dostanete, že $A = 2$, $B = -4$ a $C = 3$. Obecným řešením naší rovnice je $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + 2x^2 - 4x + 3$, kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Příklad. Určeme obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 3y' + 2y = 10\sin x$.
Charakteristická rovnice $k^2 - 3k + 2 = 0$ má dva reálné kořeny $k_1 = 1$ a $k_2 = 2$. Řešením rovnice je, pro vhodné konstanty, funkce $u(x) = A\cos x + B\sin x$. Dosadíme-li tuto funkci $v(x)$ do původní rovnice, dostaneme $(A - 3B)\cos x + (3A + B)\sin x = 10\sin x$. Porovnáním koeficientů u funkcí $\sin x$ a $\cos x$ dostaneme dvě rovnice $A - 3B = 0$ a $3A + B = 10$; řešením této soustavy rovnic je $A = 3$ a $B = 1$. Obecné řešení naší diferenciální rovnice je $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 3\cos x + \sin x$, kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Poznámka. Vzhledem k linearitě řešení těchto diferenciálních rovnic, je možno nacházet nějaká řešení i v případě, že pravá strana rovnice je součtem dvou nebo více funkcí typu, ke kterým již umíme nějaké řešení nalézt. Máme-li například diferenciální rovnici $y'' - y = 2e^x + x^2 + 2\sin x$, potom nějaké řešení této diferenciální rovnice lze nalézt ve tvaru $u(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x)$, kde $u_1(x)$ je nějaké řešení rovnice $y'' - y = 2e^x$, $u_2(x)$ je nějaké řešení rovnice $y'' - y = x^2$ a $u_3(x)$ je nějaké řešení rovnice $y'' - y = 2\sin x$. Ověřte si, že obecné řešení této rovnice je $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + xe^x - x^2 - 2 - \sin x$, kde $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu obsahuje vždy dvě volitelné konstanty C_1 a C_2. Budeme–li chtít jednoznačně určit nějaké partikulární řešení diferenciální rovnice druhého řádu, musíme mít k dispozici dvě počáteční podmínky, které povedou na jednoznačně řešitelnou soustavu dvou rovnic o proměnných C_1 a C_2. Ukažme si jeden příklad.

Příklad. Určeme to partikulární řešení $p(x)$ diferenciální rovnice $y'' + 4y = 4x - 4$, pro které platí: $p(0) = 0$ a $p'(0) = 3$.
Nejprve najdeme obecné řešení. Charakteristická rovnice $k^2 + 4 = 0$ má dva komplexně sdružené kořeny, a to kořeny $k_1 = 2i$ a $k_2 = -2i$. Obecné řešení naší rovnice tedy bude $y = C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x + u(x)$, kde C_1 a C_2 jsou libovolně volitelné konstanty a $u(x)$ je nějaké řešení naší diferenciální rovnice. Víme, že existuje řešení rovnice ve tvaru $u(x) = x^0 \cdot e^0 \cdot (Ax + B)$ pro nějaké konstanty A, B. Je–li $u(x) = Ax + B$, pak je $u'(x) = A$ a $u''(x) = 0$. Po dosazení $u(x)$ a $u''(x)$ do rovnice dostaneme $0 + 4(Ax + B) = 4x - 4$. Z tohoto vztahu snadno zjistíme, že musí být $A = 1$ a $B = -1$. Obecné řešení naší rovnice tedy je $y = C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x + x - 1$. Má–li funkce y splňovat podmínky $y(0) = 0$ a $y'(0) = 3$, musí být $C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + 0 - 1 = 0$ a $-2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0 + 1 = 3$. Konstanty C_1 a C_2 musí vyhovovat rovnicím $C_1 - 1 = 0$ a $2C_2 + 1 = 3$. Těmto rovnicím vyhovuje $C_1 = 1$ a $C_2 = 1$. Hledané partikulární řešení je $p(x) = \cos 2x + \sin 2x + x - 1$. Na obr. 18 je zobrazeno několik partikulárních řešení rovnice. Partikulární řešení $p(x)$ je na tomto obrázku zobrazeno plnou čarou, ostatní funkce jsou zobrazeny čarou přerušovanou.



OBR. 18: Některá partikulární řešení diferenciální rovnice $y'' + 4y = 4x - 4$

Metoda variace konstant

Způsob řešení diferenciálních rovnic, který jsme si ukázali v předcházející části, je docela pohodlný a nenáročný (vystačíme s derivováním, úpravami a řešením soustav lineárních rovnic). Bohužel je možno ho používat pouze za dosti omezujících předpokladů na pravou stranu rovnice (1). Ukážeme si nyní i další možnost řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, která je sice pracnější, ale také obecnější. Způsob řešení, kterým se budeme zabývat, je zobecněním metody „variace konstanty", kterou lze řešit lineární diferenciální rovnice prvního řádu a nazývá se „metoda variace konstant". Odvoďme si tuto metodu.

Uvažujme diferenciální rovnici $ay'' + by' + cy = f(x)$. Nechť y_1 a y_2 jsou dvě lineárně nezávislé funkce, které jsou řešením příslušné homogenní rovnice $ay'' + by' + cy = 0$. Obecné řešení této homogenní rovnice je $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$. Hledejme nyní řešení původní diferenciální rovnice ve tvaru $y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2$, kde $C_1(x)$ a $C_2(x)$ jsou nějaké funkce. Potom je

$$y' = C_1'(x) \cdot y_1 + C_1(x) \cdot y_1' + C_2'(x) \cdot y_2 + C_2(x) \cdot y_2'.$$

Zvolme si dodatečnou podmínku $C_1'(x) \cdot y_1 + C_2'(x) \cdot y_2 = 0$. Za tohoto předpokladu je

$$y' = C_1(x) \cdot y_1' + C_2(x) \cdot y_2' \quad \text{a} \quad y'' = C_1'(x) \cdot y_1' + C_1(x) \cdot y_1'' + C_2'(x) \cdot y_2' + C_2(x) \cdot y_2''.$$

Po dosazení těchto vztahů do původní diferenciální rovnice a jednoduchých úpravách dostaneme:

$$a \cdot C_1'(x) \cdot y_1' + C_1(x) \cdot (ay_1'' + by_1' + cy_1) + a \cdot C_2'(x) \cdot y_2' + C_2(x) \cdot (ay_2'' + by_2' + cy_2) = f(x).$$

Využijeme nyní, že funkce y_1 a y_2 jsou řešením příslušné homogenní rovnice; dostaneme $a \cdot C_1'(x) \cdot y_1' + a \cdot C_2'(x) \cdot y_2' = f(x)$. Vidíme, že pro to, aby funkce $y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2$ byla řešením naší diferenciální rovnice, stačí aby platilo:

$$C_1'(x) \cdot y_1 + C_2'(x) \cdot y_2 = 0 \quad \text{a} \quad C_1'(x) \cdot y_1' + C_2'(x) \cdot y_2' = \frac{f(x)}{a}.$$

Toto je soustava dvou rovnic o dvou neznámých $C_1'(x)$ a $C_2'(x)$, která má právě jedno řešení (což je důsledek lineární nezávislosti funkcí y_1 a y_2). Integrací funkcí $C_1'(x)$ a $C_2'(x)$ dostaneme, za předpokladu, že jsme schopni tuto integraci provést, hledané funkce $C_1(x)$ a $C_2(x)$. Poznamenejme, že obě tyto funkce obsahují integrační konstantu.

V literatuře je tento výsledek obvykle formulován s využitím Cramerova pravidla pro určování řešení soustav lineárních rovnic pomocí determinantů. Nám stačí jenom vědět, co znamená symbol $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Je to $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$. Označme

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{f(x)}{a} & y_2' \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{f(x)}{a} \end{vmatrix}.$$

Potom obecné řešení diferenciální rovnice $ay'' + by' + cy = f(x)$ je

$$y = y_1 \cdot \int \frac{W_1(x)}{W(x)}\,dx + y_2 \cdot \int \frac{W_2(x)}{W(x)}\,dx.$$

Následující dva příklady nám ozřejmí tuto metodu.

Příklad. Najděme obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + y = \operatorname{tg} x$.
Řešením charakteristické rovnice $k^2 + 1 = 0$ je $k = \pm i$. Funkce $y = \cos x$ a $y = \sin x$ jsou dvě lineárně nezávislá řešení příslušné homogenní rovnice. V našem případě je

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1, \quad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \operatorname{tg} x & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x},$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = \sin x.$$

Určeme $C_1(x)$ a $C_2(x)$. Je

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos x\,dx = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt =$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1}\right) dt = t + \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| =$$

$$= \sin x + \frac{1}{2}\ln|\sin x - 1| - \frac{1}{2}\ln|\sin x + 1| + K_1,$$

$$C_2(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x + K_2.$$

Obecné řešení naší rovnice tedy je
$y = \cos x \cdot (\sin x + \frac{1}{2}\ln|\sin x - 1| - \frac{1}{2}\ln|\sin x + 1| + K_1) + \sin x \cdot (-\cos x + K_2) =$
$= K_1 \cos x + K_2 \sin x + \frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot \ln|\sin x + 1| - \frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot \ln|\sin x - 1|$.

Příklad. Najděme obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$.
Charakteristická rovnice $k^2 - 2k + 1 = 0$ má jeden dvojnásobný kořen $k = 1$. Funkce $y_1 = e^x$ a $y_2 = xe^x$ jsou lineárně nezávislá řešení příslušné homogenní rovnice. Dále je $W(x) = e^{2x}$, $W_1(x) = \frac{-xe^{2x}}{x^2+1}$ a $W_2(x) = \frac{e^{2x}}{x^2+1}$. Dále určíme $C_1(x)$ a $C_2(x)$. Je
$C_1(x) = \int \dfrac{-x}{x^2+1}\,dx = -\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + K_1$ a $C_2(x) = \int \dfrac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + K_2$.
Po jednoduché úpravě dostaneme: $y = K_1 e^x + K_2 x \cdot e^x - \frac{1}{2}e^x \cdot \ln(x^2+1) + x \cdot e^x \cdot \operatorname{arctg} x$. Ověřte pečlivě všechny provedené výpočty.

Poznámka. Teorie řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty řádu tři a více je velice podobná teorii řešení těchto rovnic řádu dvě. Opět zde hrají roli kořeny charakteristické rovnice, opět platí věta o popisu všech řešení jako součtu nějakého řešení a všech řešení příslušné homogenní rovnice, opět je možno, alespoň v některých případech, hledat nějaké řešení metodou neurčitých koeficientů a opět existuje metoda variace konstant, která dává analogické výsledky.

Získané znalosti o řešení lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu si nejlépe uchováte tím, že si je procvičíte při výpočtu následujících příkladů.

Příklady k procvičení

Vypočtěte obecné řešení homogenních diferenciálních rovnic druhého řádu:

1) $y'' + 3y' - 10y = 0$; 2) $y'' - 4y' = 0$; 3) $3y'' + 2y' - y = 0$;
4) $y'' - 4y' + 4y = 0$; 5) $4y'' - 4y' + y = 0$; 6) $y'' - 4y' + 13y = 0$;
7) $y'' + y = 0$; 8) $y'' + 2y' + 3y = 0$; 9) $9y'' + y = 0$.

Určete partikulární řešení daných rovnic, které splňují dané počáteční podmínky:

10) $y'' + y' - 2y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;
11) $y'' + 4y = 0$; $y(\frac{\pi}{4}) = 4$, $y'(\frac{\pi}{4}) = -4$;
12) $16y'' - 8y' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Nalezněte obecné řešení nehomogenní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Použijte metodu „odhadem" nějakého řešení:

13) $y'' - 3y' + 2y = 3\,e^{-x}$; 14) $y'' - 3y' + 2y = e^x$;
15) $y'' - 2y' + 5y = (4x + 3) \cdot e^x$; 16) $y'' + y' - 2y = (2x + 1) \cdot e^{3x}$;
17) $y'' - 7y' + 10y = (6x + 7) \cdot e^{2x}$; 18) $y'' + 4y' - 5y = 1$;
19) $y'' - 5y' + 6y = x + 1$; 20) $y'' - y' - 6y = 3x^2 + 2x$;
21) $y'' + y = x^2$; 22) $y'' + 3y' = 9x$;
23) $y'' - 2y' = x^2 - x$; 24) $y'' - 4y = 8x^3$;
25) $y'' - 3y' + 2y = 9\sin x + 3\cos x$; 26) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$;
27) $9y'' - 6y' + y = \sin\dfrac{x}{3}$; 28) $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x$;
29) $y'' + 2y' - 3y = x^2 \cdot e^x$; 30) $y'' - 2y' + 2y = e^x \cdot \cos x$.

U dalších příkladů určete partikulární řešení splňující dané počáteční podmínky:

31) $2y'' + y' - y = 2\,e^x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$;
32) $y'' + 4y = \sin x$, $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
33) $y'' + 6y' + 9y = (2x + 1) \cdot e^x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = \frac{1}{8}$;
34) $y'' - y = 6 - x^2$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$.

U následujících příkladů nalezněte obecné řešení. Použijte metodu variace konstant:

35) $y'' - y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^3}$; 36) $y'' - 2y' = \dfrac{1 + 2x}{x^2}$;
37) $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$; 38) $2y'' + 8y = \dfrac{1}{\sin^3 2x}$.

Nalezněte obecné řešení diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Úlohu řešte jak metodou „odhadem", tak metodou variace konstant:

39) $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$; 40) $y'' - 4y' + 4y = x^2$; 41) $y'' - 2y' + 2y = x \cdot e^x$.

Výsledky

1) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x}$; 2) $y = C_1 + C_2 e^{4x}$;
3) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{3}}$; 4) $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$;
5) $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 x e^{\frac{x}{2}}$; 6) $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$;
7) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; 8) $y = e^{-x}(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x)$;
9) $y = C_1 \cos\frac{x}{3} + C_2 \sin\frac{x}{3}$. 10) $y = \frac{5}{3}e^x + \frac{1}{3}e^{-2x}$;
11) $y = 2\cos 2x + 4\sin 2x$; 12) $y = 2x\,e^{\frac{x}{4}}$.
13) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-x}$; 14) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x - x\,e^x$;
15) $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\,e^x + (\frac{3}{4} + x)\,e^x$; 16) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + (\frac{1}{5}x - \frac{1}{25})\,e^{3x}$;
17) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{2x} - (x^2 + 3x)\,e^{2x}$; 18) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - \frac{1}{5}$;
19) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}x + \frac{11}{36}$; 20) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} - \frac{5}{36}$;
21) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x^2 - 2$; 22) $y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$;
23) $y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{x^3}{6}$; 24) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 2x^3 - 3x$;

25) $y = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{2x} + 3\cos x$;
26) $y = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{6x} + \frac{1}{74}\,(7\cos x + 5\sin$
27) $y = C_1\,e^{\frac{x}{3}} + C_2 x\,e^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$;
28) $y = C_1\,e^{-x}\cos 2x + C_2\,e^{-x}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin 2x$;
29) $y = C_1\,e^{-3x} + C_2\,e^{x} + \left(\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16} + \frac{x}{32}\right)\,e^{x}$;
30) $y = C_1\,e^{x}\sin x + C_2\,e^{x}\cos x + \frac{1}{2}\,e^{x} x \sin$
31) $y = 2\,e^{-x} + e^{x}$;
32) $y = -\frac{\sqrt{2}}{6}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{3}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x$;
33) $y = 5\,e^{-3x} + 15x\,e^{-3x} + \frac{1}{8}x\,e^{x}$;
34) $y = 5\,e^{x} + 3\,e^{-x} + x^2 - 4$.
35) $y = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{-x} - \frac{1}{x}$;
36) $y = C_1 + C_2\,e^{2x} - \ln|x|$;
37) $y = C_1\,e^{2x} + C_2 x\,e^{2x} - e^{2x}\ln|x|$;
38) $y = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x + \frac{2\cos^2 2x - 1}{16\sin 2x}$
39) $y = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{2x} + \frac{1}{12}\,e^{5x}$;
40) $y = C_1\,e^{2x} + C_2 x\,e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$
41) $y = C_1\,e^{x}\sin x + C_2\,e^{x}\cos x + x\,e^{x}$.

VĚDECKÁ KNIHOVNA

Název: Integrální počet

Autor: Prof. RNDr. Václav Slavík, DrSc., Ing. Šárka Dvořáková, Ph.D.

Vydavatel: Česká zemědělská univerzita v Praze, Kamýcká 129, Praha 6

a NAROMA, s.r.o., Milíčova 516, Praha 3

Tisk: GULIVER, s.r.o., Praha

Náklad: 1000

Vydání: první

Počet stran: 72

Doporučená cena: 70,- Kč

ISBN 978-80-213-1625-6 (ČZU)

ISBN 978-80-903681-3-2 (NAROMA, s.r.o.)

36