UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM

Fakulta sociálně ekonomická

SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

Ondřej Moc

UNIVERZITA JANA EVANGELISTY PURKYNĚ
V ÚSTÍ NAD LABEM

FAKULTA SOCIÁLNĚ EKONOMICKÁ

SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY

INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

ONDŘEJ MOC

Ústí nad Labem 2009

SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY
INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

Recenze: Doc. PaedDr. Petr Eisenmann, CSc., RNDr. Jana Šimsová, Ph.D.
Počet stran: 98
ISBN: 978-80-7414-183-6

Obsah

Předmluva

Tato skripta jsou poslední z trojice sbírek příkladů určených pro studenty Fakulty sociálně ekonomické UJEP v prezenční i kombinované formě studia k procvičení učiva předmětu Matematika I.

Pro připomenutí jsou na začátku každé kapitoly uvedeny výchozí definice a věty. Poté následují vzorově vyřešené úlohy, které by měly pomoci s osvojením správných výpočetních postupů. Na konci kapitol jsou uvedeny neřešené úlohy s výsledky. Celkem skripta obsahují 356 příkladů, z toho téměř 200 jich je vzorově vyřešeno. Některé příklady jsou převzaty z tradičních sbírek, část úloh je vlastních. V seznamu literatury na konci skript jsou uvedeny knihy, ze kterých jsem čerpal náměty při tvorbě této sbírky.

Jak již bylo řečeno, skripta navazují na dříve vydané sbírky úloh. Přebírám proto značení, které bylo použito v [11]. V řadě úloh se odkazujeme na pojmy jako jsou definiční obor funkce, spojitost funkce, sudost a lichost funkce, atd. Všechny tyto pojmy jsou zavedeny a procvičeny v skriptech [11].

Při psaní jsem dodržoval některé konvence o zápisu matematických výrazů. V některých případech je výhodnější zapsat matematický výraz do jednoho řádku. Z tohoto důvodu někdy píšu výraz ve formě A/B namísto $\frac{A}{B}$. Při zápisů matematických výrazů do jednoho řádku vždy dodržuji pravidlo o přednosti početních operací, konkrétně: násobení má při zápisu přednost před sčítáním a mocnění má přednost před násobením. To se projeví např. tak, že výraz $2/x+4$ znamená $\frac{2}{x}+4$, nikoliv $\frac{2}{x+4}$, atd. Druhý uvedený zlomek by byl zapsán ve tvaru $2/(x+4)$. V sbírce jsou uvedeny i některé obtížnější úlohy, které mají za úkol „potěšit" zvídavější studenty. Tyto úlohy jsou označeny hvězdičkou a nebudou obsahem zápočtu, ani zkoušky. V některých úlohách budeme počítat obsahy jistých ploch. Obsah, jakožto geometrická veličina, by měl být vyjádřen v měrných jednotkách. Pokud zadání úlohy neumožňuje určit „přirozené" jednotky, uvádíme velikost obsahu plochy znakem „jednotka čtvereční" a symbolem j^2. U většiny úloh by měl být uveden obor integrovatelnosti. Pokud tento není uveden, potom je funkce integrovatelná na množině $\mathbb{R}$.

Při přípravě na cvičení, k zápočtu i ke zkoušce je nutné si uvědomit, že tato sbírka není učebnicí teorie. Je proto vhodné, aby se studenti seznámili s odpovídající teorií v některé z doporučených knih ze seznamu povinné, či doporučené literatury v sylabu předmětu Matematika I. Během řešení úloh se v textu občas vyskytne dotaz ve tvaru (Proč?). Pokuste se na tyto otázky poctivě odpovědět, pomůže vám to při pochopení látky. Pokud si neumíte na tyto otázky odpovědět, snažte se najít odpověď v příslušných učebnicích, nebo na konzultaci u vyučujícího.

Na závěr bych chtěl poděkovat oběma recenzentům za pečlivé prostudování rukopisu a poskytnutí mnoha námětů ke zlepšení této sbírky. Doufám, že se podařilo odstranit většinu nepřesností. Pokud přesto naleznete při čtení těchto skript nějaké nepřesnosti, budu vděčný za upozornění zaslané na adresu *ondrej.moc@ujep.cz*. Seznam nalezených (a opravených) chyb bude zveřejněn na webové adrese

`http://fse.ujep.cz/~moc/sbmatdif/opravnik.htm.`

Ústí nad Labem
září 2008
Ondřej Moc

0.1 Předmluva k druhému vydání

V tomto druhém vydání nedošlo k výrazným změnám v textu, pouze byly opraveny zjištěné chyby. Tímto bych chtěl poděkovat všem kolegům a studentům, kteří mě na tyto nedostatky upozornili.

Ústí nad Labem
listopad 2009
Ondřej Moc

Kapitola 1

Neurčitý integrál

1.1 Základní vlastnosti

Definice 1.1.1. Funkci $F(x)$, definovanou na otevřeném intervalu I, nazýváme *primitivní funkcí k funkci* $f(x)$, jestliže pro všechna $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

1.1. Funkce $F(x) = x^2 + 3x + 10$, definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = 2x + 3$ na intervalu $(-\infty, \infty)$, neboť pro každé $x \in (-\infty, \infty)$ je

$$F'(x) = (x^2 + 3x + 10)' = 2x + 3 = f(x).$$

1.2. Funkce $F(x) = 5 + 10x - \operatorname{tg} x$, definovaná na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = 10 - \frac{1}{\cos^2 x}$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, neboť pro všechna $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je

$$F'(x) = (5 + 10x - \operatorname{tg} x)' = 10 - \frac{1}{\cos^2 x} = f(x).$$

Je-li funkce $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na otevřeném intervalu I, potom i každá funkce ve tvaru $F(x) + C$, kde $C \in \mathbb{R}$, je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na otevřeném intervalu I, neboť je $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$, pro každé $x \in I$.

Definice 1.1.2. Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I nazýváme *neurčitým integrálem funkce* f a značíme ji symbolem $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Funkci f nazýváme integrand.

Věta 1.1.3. *Je-li funkce $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na otevřeném intervalu I, potom je*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \qquad x \in I,\ C \in \mathbb{R},$$

kde číslo C nazýváme integrační konstanta.

Věta 1.1.4. *Jsou-li $c_1, c_2, \ldots, c_n$ libovolné reálné konstanty a existují-li na otevřeném intervalu I neurčité integrály funkcí $f_1, f_2, \ldots, f_n$, potom na intervalu I existuje i neurčitý integrál funkce $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n$ a platí*

$$\int (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n)\,\mathrm{d}x = c_1 \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int f_2(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + c_n \int f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vzorce pro derivování elementárních funkcí (resp. jejich modifikace) dávají důležité základní vzorce pro integrování. Neurčité integrály v následujících vzorcích často nazýváme *tabulkové integrály*. Nejsou-li v následujících vzorcích uvedeny podmínky pro proměnnou x nebo pro příslušné konstanty, pak tyto vzorce platí bez omezení.

1. $\displaystyle\int 0\,\mathrm{d}x = C$

2. $\displaystyle\int 1\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$

3. Pro $n \neq -1$ platí
$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$
na každém otevřeném intervalu I, na kterém je funkce x^n definovaná.

4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C,\ x \neq 0.$

5. $\displaystyle\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C.$

6. $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = a^x \frac{1}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1.$

7. $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$

8. $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,\ x \neq (2k+1)\tfrac{1}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

10. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

11. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2,\ |x| < 1.$

12. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-1)}} = \ln|x + \sqrt{(x^2-1)}| + C,\ |x| > 1.$

13. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)}} = \ln|x + \sqrt{(x^2+1)}| + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C_1 = -\operatorname{arccotg} x + C_2.$

15. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C,\ |x| \neq 1.$

Poznámka 1.1.5. Při použití Věty **1.1.4** často jeden neurčitý integrál vyjádříme jako lineární kombinaci několika neurčitých integrálů. U každého z nich by měla být uvedena integrační konstanta C a výsledek by měl obsahovat součet integračních konstant. Tento součet bude opět nějaká konstanta ve smyslu libovolného reálného čísla. Na tomto místě učiníme dohodu, že příslušné konstanty budeme (pro zkrácení zápisu) uvádět pouze na konci výpočtu.

1.2 Přímá integrace

Při přímé integraci hledáme vyjádření neurčitých integrálů pouze pomocí algebraických úprav integrandů, resp. Věty **1.1.4** a vzorců pro tabulkové integrály.

Řešené úlohy

1.3. Vypočtěte integrál
$$\int x^2\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Je
$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C.$$

1.4. Vypočtěte integrál
$$\int t^2\,\mathrm{d}t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Řešení: V tomto případě jsme proměnnou veličinu označili písmenem t. Nic jiného se nezměnilo. Proto je
$$\int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + C.$$

1.5. Vypočtěte integrál
$$\int t^2\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$$

Řešení: V tomto případě integrujeme podle proměnné x. Výraz t^2 proto představuje konstantu a platí
$$\int t^2\,\mathrm{d}x = t^2 \int \mathrm{d}x = t^2 x + C.$$

1.6. Vypočtěte integrál
$$\int 7x^5\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Řešení: Je
$$\int 7x^5\,\mathrm{d}x = 7\int x^5\,\mathrm{d}x = 7\cdot\frac{x^6}{6} = \frac{7x^6}{6} + C.$$

1.7. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$
Řešení: Je
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int x^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} + C.$$

1.8. Vypočtěte integrál
$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$
Řešení: Je
$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C.$$

1.9. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$
Řešení: Je
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + C.$$

1.10. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^4}}, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$
Řešení: Je
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^4}} = \int x^{-4/5}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{1/5}}{\frac{1}{5}} = 5\sqrt[5]{x} + C.$$

1.11. Vypočtěte integrál
$$\int 6x^2 + 5x^4\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Řešení: Podle Věty **1.1.4** je
$$\int 6x^2 + 5x^4\,\mathrm{d}x = 6\int x^2\,\mathrm{d}x + 5\int x^4\,\mathrm{d}x = 6\cdot\frac{x^3}{3} + 5\cdot\frac{x^5}{5} = 2x^3 + x^5 + C.$$

1.12. Vypočtěte integrál
$$\int x^7 - \frac{3}{2}x + 5\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Řešení: Podle Věty **1.1.4** je
$$\int x^7 - \frac{3x}{2} + 5\,\mathrm{d}x = \int x^7\,\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\int x\,\mathrm{d}x + 5\int \mathrm{d}x = \frac{x^8}{8} - \frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + 5x = \frac{x^8}{8} - \frac{3x^2}{4} + 5x + C.$$

1.13. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{x}{4}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$
Řešení: Podle Věty **1.1.4** je
$$\int \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{x}{4}\,\mathrm{d}x = 5\int\frac{\mathrm{d}x}{x} + 3\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \frac{1}{4}\int x\,\mathrm{d}x = 5\int\frac{\mathrm{d}x}{x} + 3\int x^{-2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int x\,\mathrm{d}x =$$
$$= 5\ln|x| + 3\cdot\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2} = 5\ln|x| - \frac{3}{x} - \frac{x^2}{8} + C.$$

Dále již nebudeme uvádět, že k zjednodušení výpočtu používáme Větu **1.1.4** (i když to třeba bude pravda). Snažte se sami poznat, která úprava byla použita a zkuste se zamyslet nad tím, proč byla použita.

1.14. Vypočtěte integrál
$$\int 5\sin x - 2\cdot 5^x + 3x\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Řešení: Je
$$\int 5\sin x - 2\cdot 5^x + 3x\,\mathrm{d}x = 5\int \sin x\,\mathrm{d}x - 2\int 5^x\,\mathrm{d}x + 3\int x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -5\cos x - 2\cdot\frac{5^x}{\ln 5} + \frac{3x^2}{2} + C.$$

1.15. Vypočtěte integrál
$$\int 5\sqrt{x} - \frac{2}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$
Řešení: Je
$$\int 5\sqrt{x} - \frac{2}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 5\int x^{1/2}\,\mathrm{d}x - 2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = 5\cdot\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - 2\cdot(-\operatorname{cotg} x) =$$
$$= \frac{10\sqrt{x^3}}{3} + 2\operatorname{cotg} x + C.$$

1.16. Vypočtěte integrál

$$\int 5\sqrt[3]{x^2} + 3x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

Řešení: Je

$$\int 5\sqrt[3]{x^2} + 3x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 5\int x^{2/3}\,\mathrm{d}x + 3\int x^{5/2}\,\mathrm{d}x = 5\cdot\frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} + 3\cdot\frac{x^{7/2}}{\frac{7}{2}} =$$
$$= 3\sqrt[3]{x^5} + \frac{6\sqrt{x^7}}{7} + C.$$

1.17. Vypočtěte integrál

$$\int (2x^3+5)^3\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Pomocí vzorce $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ upravíme integrand do tvaru

$$(2x^3+5)^3 = 8x^9 + 60x^6 + 150x^3 + 125.$$

Potom platí

$$\int (2x^3+5)^3\,\mathrm{d}x = 8\int x^9\,\mathrm{d}x + 60\int x^6\,\mathrm{d}x + 150\int x^3\,\mathrm{d}x + 125\int \mathrm{d}x =$$
$$= 8\cdot\frac{x^{10}}{10} + 60\cdot\frac{x^7}{7} + 150\cdot\frac{x^4}{4} + 125x = \frac{4x^{10}}{5} + \frac{60x^7}{7} + \frac{75x^4}{2} + 125x + C.$$

1.18. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{3^x + 4^x}{6^x}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Řešení: Integrand nejprve upravíme na „integrovatelné" funkce. Je

$$\frac{3^x+4^x}{6^x} = \frac{3^x}{6^x} + \frac{4^x}{6^x} = \left(\frac{3}{6}\right)^x + \left(\frac{4}{6}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

Nyní již můžeme integrál (1.1) snadno vypočítat. Je

$$\int \frac{3^x+4^x}{6^x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x\mathrm{d}x + \int\left(\frac{2}{3}\right)^x\mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} + C.$$

1.19. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{6^{x+1}+4^x}{2^{x-1}}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Nejprve upravíme integrand. Je

$$\frac{6^{x+1}+4^x}{2^{x-1}} = \frac{6\cdot 6^x + 4^x}{\frac{1}{2}\cdot 2^x} = 2\cdot\left(6\cdot\frac{6^x}{2^x} + \frac{4^x}{2^x}\right) = 2\cdot\left[6\cdot\left(\frac{6}{2}\right)^x + \left(\frac{4}{2}\right)^x\right] = 12\cdot 3^x + 2\cdot 2^x.$$

Pro zadaný integrál potom platí

$$\int \frac{6^{x+1}+4^x}{2^{x-1}}\,\mathrm{d}x = 12\int 3^x\,\mathrm{d}x + 2\int 2^x\,\mathrm{d}x = \frac{12\cdot 3^x}{\ln 3} + \frac{2\cdot 2^x}{\ln 2} + C.$$

1.20. Vypočtěte integrál

$$\int \sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

Řešení: Nejprve opět upravíme integrand. Je

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x}}} = \left(\left(x^{1/2}\right)^{1/3}\right)^{1/4} = x^{1/2\cdot 1/3\cdot 1/4} = x^{1/24}.$$

Proto je

$$\int \sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \int x^{1/24}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{25/24}}{\frac{25}{24}} = \frac{24x\sqrt[24]{x}}{25} + C.$$

1.21. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{3x^3+6x^2}{x+2}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}.$$

Řešení: Upravíme integrand. Pro všechna $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ je

$$\frac{3x^3+6x^2}{x+2} = \frac{3x^2(x+2)}{x+2} = 3x^2.$$

Proto je

$$\int \frac{3x^3+6x^2}{x+2}\,\mathrm{d}x = 3\int x^2\,\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{x^3}{3} = x^3 + C.$$

1.22. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{x^3+x^2-2x}{x-1}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

Řešení: Upravíme integrand. Pro všechna $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ je

$$\frac{x^3+x^2-2x}{x-1} = \frac{x(x^2+x-2)}{x-1} = \frac{x(x-1)(x+2)}{x-1} = x^2+2x.$$

Proto je

$$\int \frac{x^3+x^2-2x}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x + 2\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + x^2 + C.$$

1.23. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Integrand upravíme následujícím způsobem

$$\frac{x^4}{x^2+1} = \frac{x^4-1+1}{x^2+1} = \frac{x^4-1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}.$$

Proto je

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C.$$

1.24. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi/2\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Řešení: Při výpočtu použijeme goniometrickou identitu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Je

$$\frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Proto je

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C.$$

1.25. Vypočtěte integrál

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi/2\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Řešení: Při výpočtu použijeme goniometrické vzorce $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Je

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Proto je

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} - \int \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Neřešené úlohy

V následujících úlohách vypočtěte zadané neurčité integrály.

1.26. $\int \mathrm{d}u$

1.27. $\int 10\,\mathrm{d}x$

1.28. $\int 10\,\mathrm{d}t$

1.29. $\int 8t^3\,\mathrm{d}t$

1.30. $\int 8t^3\,\mathrm{d}x$

1.31. $\int 12x^5 + 6x^2\,\mathrm{d}x$

1.32. $\int 5x^{-1}\,\mathrm{d}x$

1.33. $\int \frac{2x^3 - x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

1.34. $\int \frac{x^3 e^x - 2x}{x^3}\,\mathrm{d}x$

1.35. $\int \frac{1 - xe^x}{x}\,\mathrm{d}x$

1.36. $\int \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

1.37. $\int \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{6}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

1.38. $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}\,\mathrm{d}x$

1.39. $\int \frac{x^2}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$

1.40. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

1.41. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\,\mathrm{d}x$

1.42. $\int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

1.43. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

1.44. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \cos 2x}$

1.45. $\int \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}\,\mathrm{d}x$

Výsledky

1.26 $u + C$ **1.27** $10x + C$ **1.28** $10t + C$ **1.29** $2t^4 + C$ **1.30** $8t^3 x + C$ **1.31** $2x^6 + 2x^3 + C$ **1.32** $5\ln|x| + C$ **1.33** $x^2 - \ln|x| + C$ **1.34** $e^x + 2/x + C$ **1.35** $\ln|x| - e^x + C$ **1.36** $1/x - 2/\sqrt{x} + C$ **1.37** $15\sqrt[3]{x^2}/2 - 12\sqrt{x} + C$ **1.38** $x + \ln|x| + C$ **1.39** $x - \operatorname{arctg} x + C$ **1.40** $x/2 + (\sin x)/2 + C$ **1.41** $\sin x - \cos x + C$ **1.42** $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C$ **1.43** $-\operatorname{cotg} x - 2x + C$ **1.44** $(\operatorname{tg} x)/2 + C$ **1.45** $2\sqrt{x^3}/3 - x + C$

1.3 Substituční metoda

Integrace pomocí substituční metody je založena na následující větě.

Věta 1.3.1. *Nechť funkce $f(t)$ je spojitá v intervalu (a, b). Nechť funkce $\varphi(x)$ má v intervalu (α, β) derivaci $\varphi'(x)$ a pro všechna $x \in (\alpha, \beta)$ je $\varphi(x) \in (a, b)$. Potom pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ je*

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

Formální použití Věty **1.3.1** je snadné. Obtíže většinou působí pouze nalezení správné substituce $t = \varphi(x)$. Výpočet potom probíhá formálně tak, že ve vzorci (1.2) dosadíme za t podle rovnosti

$$t = \varphi(x) \tag{1.3}$$

a za symbol $\mathrm{d}t$ podle rovnosti

$$\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

Vzorec (1.2) lze použít dvěma způsoby. Jestliže máme za úkol vypočítat neurčitý integrál ve tvaru $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ a známe primitivní funkci $F(t)$ k funkci $f(t)$, potom s využitím rovnosti (1.3) postupujeme podle schématu

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) = F(\varphi(x)). \tag{1.5}$$

Výraz mezi rovnými závorkami představuje mezivýpočet, kterým přejdeme z vyjádření používající proměnnou x k zápisu s proměnnou t. Tento popis přechodu mezi proměnnými budeme používat i v následujících řešených úlohách.

Druhý způsob použití vzorce (1.2) spočívá ve výpočtu integrálu ve tvaru $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ pomocí integrálu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$, který může být za jistých okolností snažší k výpočtu. Je-li mezi proměnnými x a t vztah (1.3) a funkce $\varphi(x)$ je monotónní na intervalu (α, β), existuje k ní na tomto intervalu inverzní funkce, kterou označíme $\psi(t)$, a platí $x = \psi(t)$, resp. $\mathrm{d}x = \psi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Pokud jsou splněny požadavky Věty **1.3.1**, lze v některých případech použít oba druhy substituce. Nejprve položíme $\varphi(x) = t$ a potom $t = \psi(s)$. Tím vlastně dostaneme substituci $\varphi(x) = t = \psi(s)$. Přitom platí „převodní" vztah

$$\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t = \psi'(s)\mathrm{d}s.$$

Řešené úlohy

1.46. Vypočtěte integrál
$$\int (x^2+5)^3\, 2x\,\mathrm{d}x.$$
Řešení: Snadno vidíme, že je $(x^2+5)' = 2x$. Položením $t = \varphi(x) = x^2+5$ a $f(t) = t^3$ dostaneme dosazením do schématu (1.5) rovnosti
$$\int (x^2+5)^3\, 2x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x^2+5 = t \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^3\,\mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} = \frac{(x^2+5)^4}{4} + C.$$

1.47. Vypočtěte integrál
$$\int (x^3-10)^2\, 3x^2\,\mathrm{d}x.$$
Řešení: Pro funkci $\varphi(x) = x^3 - 10$ je $(x^3-10)' = 3x^2$. Proto je
$$\int (x^3-10)^2\, 3x^2\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x^3-10 = t \\ 3x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} = \frac{(x^3-10)^3}{3} + C.$$

1.48. Vypočtěte integrál
$$\int (3x^2+7)^5\, 5x\,\mathrm{d}x.$$
Řešení: Vidíme, že je $(3x^2+7)' = 6x$. Integrand proto upravíme tak, aby obsahoval výraz $(3x^2+7)^5\, 6x$. Je
$$\int (3x^2+7)^5\, 5x\,\mathrm{d}x = \int \frac{5}{6}(3x^2+7)^5\, 6x\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\int (3x^2+7)^5\, 6x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} 3x^2+7 = t \\ 6x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$
$$= \frac{5}{6}\int t^5\,\mathrm{d}t = \frac{5}{6}\cdot\frac{t^6}{6} = \frac{5(3x^2+7)^6}{36} + C.$$

1.49. Vypočtěte integrál
$$\int (x^3+x+5)^7 (3x^2+1)\,\mathrm{d}x.$$
Řešení: Vidíme, že je $(x^3+x+5)' = 3x^2+1$. Potom je
$$\int (x^3+x+5)^7 (3x^2+1)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x^3+x+5 = t \\ (3x^2+1)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^7\,\mathrm{d}t = \frac{t^8}{8} = \frac{(x^3+x+5)^8}{8} + C.$$

1.50. Vypočtěte integrál
$$\int \sqrt{x+10}\,\mathrm{d}x.$$
Řešení: Je $(x+10)' = 1$ a proto
$$\int \sqrt{x+10}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x+10 = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \int t^{1/2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{(x+10)^3}}{3} + C.$$

1.51. Vypočtěte integrál
$$\int \left(\sqrt{x^2+1}\right) x\,\mathrm{d}x.$$
Řešení: Je $(x^2+1)' = 2x$. Proto je
$$\int \left(\sqrt{x^2+1}\right) x\,\mathrm{d}x = \int \left(\sqrt{x^2+1}\right) \frac{2}{2}\, x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(\sqrt{x^2+1}\right) 2x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x^2+1 = t \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$
$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int t^{1/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3} + C.$$

1.52. Vypočtěte integrál
$$\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$
Řešení: Je $(-x)' = (-1)$. Proto volíme substituci $-x = t$ a integrand upravíme tak, aby obsahoval výraz $\mathrm{e}^{-x}(-1)$. Je
$$\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-x}(-1)(-1)\,\mathrm{d}x = (-1)\int \mathrm{e}^{-x}(-1)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} -x = t \\ (-1)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = (-1)\int \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= (-1)\cdot \mathrm{e}^{t} = -\mathrm{e}^{-x} + C.$$

1.53. Vypočtěte integrál
$$\int \mathrm{e}^{-3x}(-5)\,\mathrm{d}x.$$
Řešení: Je
$$\int \mathrm{e}^{-3x}(-5)\,\mathrm{d}x = \int \frac{5}{3}\,\mathrm{e}^{-3x}(-3)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} -3x = t \\ (-3)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{5}{3}\int \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{5}{3}\cdot \mathrm{e}^{t} = \frac{5\mathrm{e}^{-3x}}{3} + C.$$

1.54. Vypočtěte integrál
$$\int \mathrm{e}^{x^2} x\,\mathrm{d}x.$$
Řešení: Je
$$\int \mathrm{e}^{x^2} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{t} = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2} + C.$$

1.55. Vypočtěte integrál
$$\int \mathrm{e}^{4x^3+5} x^2\,\mathrm{d}x.$$
Řešení: Je
$$\int \mathrm{e}^{4x^3+5} x^2\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{12}\cdot \mathrm{e}^{4x^3+5}\cdot 12x^2\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} 4x^3+5 = t \\ 12x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{12}\int \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{12}\cdot \mathrm{e}^{t} =$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{4x^3+5}}{12} + C.$$

1.56. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+10}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{-10\}.$$

Řešení: Je $(x+10)' = 1$. Proto volíme substituci $t = x+10$. Tím dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+10} = \left| \begin{array}{c} x+10 = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln|x+10| + C.$$

1.57. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{2}{5-x}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{5\}.$$

Řešení: Je $(5-x)' = -1$. Proto volíme substituci $t = 5-x$ a integrand upravíme tak, aby v čitateli byl výraz $(-1)\,\mathrm{d}x$. Tím dostaneme

$$\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{5-x} = \int (-2)\frac{(-1)\,\mathrm{d}x}{5-x} = \left| \begin{array}{c} 5-x = t \\ (-1)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = -2\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -2\ln|t| = -2\ln|5-x| + C.$$

1.58. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{2x}{(x^2+5)^3}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Je $(x^2+5)' = 2x$. Proto volíme substituci $t = x^2+5$. Je

$$\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+5)^3} = \left| \begin{array}{c} x^2+5 = t \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \int t^{-3}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2t^2} = -\frac{1}{2(x^2+5)^2} + C.$$

1.59. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{5x}{(5x^2+3)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Je $(5x^2+3)' = 10x$. Proto volíme substituci $t = 5x^2+3$ a integrand upravíme tak, aby v čitateli obsahoval výraz $10x\,\mathrm{d}x$. Je

$$\int \frac{5x\,\mathrm{d}x}{(5x^2+3)^2} = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{10x\,\mathrm{d}x}{(5x^2+3)^2} = \left| \begin{array}{c} 5x^2+3 = t \\ 10x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{2}\int t^{-2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-1}}{-1} =$$

$$= -\frac{1}{2t} = -\frac{1}{2(5x^2+3)} + C.$$

1.60. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^7}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Je $(x^2+2x+3)' = 2x+2$. Proto volíme substituci $t = x^2+2x+3$ a integrand upravíme tak, aby čitatel obsahoval výraz $(2x+2)\,\mathrm{d}x$. Je

$$\int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^7} = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^7} = \left| \begin{array}{c} x^2+2x+3 = t \\ (2x+2)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^7} = \frac{1}{2}\int t^{-7}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-6}}{-6} = -\frac{1}{12t^6} = -\frac{1}{12(x^2+2x+3)^6} + C.$$

1.61. Vypočtěte integrál

$$\int \cos(x+2)\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Je $(x+2)' = 1$. Proto zvolíme $t = x+2$. Je

$$\int \cos(x+2)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x+2 = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t = \sin(x+2) + C.$$

1.62. Vypočtěte integrál

$$\int \cos(3x)\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Je $(3x)' = 3$. Proto zvolíme $t = 3x$ a integrand upravíme tak, aby obsahoval člen $3\,\mathrm{d}x$. Je

$$\int \cos(3x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3}\cos(3x)3\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} 3x = t \\ 3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\sin t = \frac{1}{3}\sin(3x) + C.$$

1.63. Vypočtěte integrál

$$\int x^2 \sin x^3\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Je $(x^3)' = 3x^2$. Položíme $t = x^3$ a integrand upravíme tak, aby obsahoval člen $3x^2\,\mathrm{d}x$. Je

$$\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3}(\sin x^3)3x^2\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x^3 = t \\ 3x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\cos t =$$

$$= -\frac{\cos x^3}{3} + C.$$

1.64. Vypočtěte integrál

$$\int x\cdot\sin(3x^2+5)\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Je $(3x^2+5)' = 6x$. Položíme $t = 3x^2+5$ a integrand upravíme tak, aby obsahoval člen $6x\,\mathrm{d}x$. Potom je

$$\int x\cdot\sin(3x^2+5)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{6}\sin(3x^2+5)\cdot 6x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} 3x^2+5 = t \\ 6x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{6}\int \sin t\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{6}\cos t = -\frac{\cos(3x^2+5)}{6} + C.$$

1.65. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(2x)}, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi/2\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Řešení: Položíme $t = 2x$, potom je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(2x)} = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}x}{\sin^2(2x)} = \left| \begin{array}{c} 2x = t \\ 2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg} t = -\frac{\operatorname{cotg}(2x)}{2} + C.$$

1.66. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in (0,\infty).$$

Řešení: Je $(\ln x)' = 1/x$, proto položíme $t = \ln x$. Tím dostaneme

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \ln x & = & t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

1.67. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{1+\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in (0,\infty).$$

Řešení: Opět položíme $t = \ln x$. Potom je

$$\int \frac{1+\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \int (1+\ln^2 x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \ln x & = & t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int 1+t^2\,\mathrm{d}t = t + \frac{t^3}{3} =$$
$$= \ln x + \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

1.68. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in (0,1)\cup(1,\infty).$$

Řešení: Položíme $t = \ln x$. Potom je

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \ln x & = & t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| = \ln|\ln x| + C.$$

1.69. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Je $(e^x)' = e^x$. Proto položíme $t = e^x$. Tím dostaneme

$$\int \frac{e^x}{e^x+1} = \int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{e^x+1} = \left| \begin{array}{rcl} e^x & = & t \\ e^x\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \left| \begin{array}{rcl} t+1 & = & s \\ \mathrm{d}t & = & \mathrm{d}s \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}s}{s} = \ln|s| =$$
$$= \ln|t+1| = \ln(e^x+1) + C.$$

1.70. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Opět položíme $t = e^x$. Tím dostaneme

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{1+(e^x)^2} = \left| \begin{array}{rcl} e^x & = & t \\ e^x\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg}(e^x) + C.$$

1.71. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Řešení: Je $(-1/x)' = 1/x^2$, proto se vyplatí použít substituci $t = -1/x$. Je

$$\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int e^{-1/x}\cdot\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} -\frac{1}{x} & = & t \\ \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int e^t\,\mathrm{d}t = e^t = e^{-1/x} + C.$$

1.72. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+5}}\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Opět položíme $t = e^x$. Je

$$\int \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+5}} = \int \frac{2e^x\cdot e^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(e^x)^2+5}} = \left| \begin{array}{rcl} e^x & = & t \\ e^x\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+5}} = \left| \begin{array}{rcl} t^2+5 & = & s \\ 2t\,\mathrm{d}t & = & \mathrm{d}s \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s}} =$$
$$= \int s^{-1/2}\,\mathrm{d}s = \frac{s^{1/2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{t^2+5} = 2\sqrt{e^{2x}+5} + C.$$

Druhá substituce je zvolena vzhledem k rovnosti $(t^2+5)' = 2t$. Poznamenejme, že celý příklad je možné vypočítat pomocí jediné substituce $e^{2x}+5 = w$. Ověřte výpočtem!

1.73. Vypočtěte integrál

$$\int \sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Je $(\sin x)' = \cos x$. Proto položíme $\sin x = t$. Je

$$\int \sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \sin x & = & t \\ \cos x\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^3\,\mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

1.74. Vypočtěte integrál

$$\int \sin^3 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Je $(\sin x)' = \cos x$. Opět položíme $\sin x = t$. Potom je

$$\int \sin^3 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int \sin^3 x\cos^2 x\cos x\,\mathrm{d}x = \int \sin^3 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left| \begin{array}{rcl} \sin x & = & t \\ \cos x\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^3\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t = \int t^3 - t^5\,\mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} =$$
$$= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

Při výpočtu jsme použili goniometrickou identitu $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

1.75. Vypočtěte integrál
$$\int \cos^4 x \sin x \,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Je $(\cos x)' = -\sin x$. Proto položíme $\cos x = t$ a integrand upravíme tak, aby obsahoval člen $(-1)\sin x$. Je

$$\int \cos^4 x \sin x \,\mathrm{d}x = (-1)\int (\cos^4 x)(-1)\sin x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \cos x &=& t \\ (-1)\sin x\,\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int t^4 \,\mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{t^5}{5} = -\frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

1.76. Vypočtěte integrál
$$\int \cos^5 x \,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Integrand upravíme na součin funkcí $\sin x$ a $\cos x$. Úpravu přitom provedeme tak, aby integrand obsahoval člen $\cos x\,\mathrm{d}x$. (Proč?)

$$\int \cos^5 x \,\mathrm{d}x = \int \cos^4 x \cos x \,\mathrm{d}x = \int (\cos^2 x)^2 \cos x \,\mathrm{d}x = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \,\mathrm{d}x =$$
$$= \left| \begin{array}{rcl} \sin x &=& t \\ \cos x\,\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int (1-t^2)^2 \,\mathrm{d}t = \int 1 - 2t^2 + t^4 \,\mathrm{d}t = t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} =$$
$$= \sin x - 2\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Neřešené úlohy

V následujících úlohách vypočtěte zadané neurčité integrály.

1.77. $\int (3x-7)^3 \,\mathrm{d}x$

1.78. $\int (5-2x)^5 \,\mathrm{d}x$

1.79. $\int (6x+2)^7 \,\mathrm{d}x$

1.80. $\int 2x(x^2+5)^3 \,\mathrm{d}x$

1.81. $\int \frac{x^2}{x^3-8} \,\mathrm{d}x$

1.82. $\int \frac{3x^2}{(4-x^3)} \,\mathrm{d}x$

1.83. $\int \sqrt{10-x} \,\mathrm{d}x$

1.84. $\int 5x\sqrt{10+3x^2} \,\mathrm{d}x$

1.85. $\int \frac{3x}{\sqrt{5+x^2}} \,\mathrm{d}x$

1.86. $\int \frac{5}{\sqrt{x+5}} \,\mathrm{d}x$

1.87. $\int 10\,e^{4x} \,\mathrm{d}x$

1.88. $\int 5\,e^{1-x} \,\mathrm{d}x$

1.89. $\int 3\cdot 5^{6x} \,\mathrm{d}x$

1.90. $\int (-x)e^{5+x^2} \,\mathrm{d}x$

1.91. $\int \sin(5-x) \,\mathrm{d}x$

1.92. $\int 2x\cos(x^2+10) \,\mathrm{d}x$

1.93. $\int e^x \sin(e^x+10) \,\mathrm{d}x$

1.94. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}$

1.95. $\int \frac{\ln x}{x(1+\ln x)} \,\mathrm{d}x$

1.96. $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \,\mathrm{d}x$

1.97. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}} \,\mathrm{d}x$

1.98. $\int \frac{\mathrm{tg}\, x}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$

1.99. $\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x$

1.100. $\int \sin^3 x \cos^4 x \,\mathrm{d}x$

Výsledky

1.77 $(3x-7)^4/12+C$ **1.78** $-(5-2x)^6/12+C$ **1.79** $(6x+2)^8/48+C$ **1.80** $(x^2+5)^4/4+C$ **1.81** $(1/3)\ln|x^3-8|+C$, $x \neq 2$ **1.82** $-\ln|4-x^3|+C$, $x \neq \sqrt[3]{4}$ **1.83** $-2\sqrt{(10-x)^3}/3+C$, $x \in (-\infty, 10)$ **1.84** $5\sqrt{(10+3x^2)^3}/9+C$ **1.85** $3\sqrt{5+x^2}+C$ **1.86** $10\sqrt{x+5}+C$ **1.87** $5e^{4x}/2+C$ **1.88** $-5\,e^{1-x}+C$ **1.89** $5^{6x}/(2\ln 5)+C$ **1.90** $(-1)e^{5+x^2}/2+C$ **1.91** $\cos(5-x)+C$ **1.92** $\sin(x^2+10)+C$ **1.93** $-\cos(e^x+10)+C$ **1.94** $\mathrm{arctg}(\ln x)+C$, $x \in (0,\infty)$ **1.95** $\ln x - \ln|1+\ln x| + C$, $x \in (0,1/e)\cup(1/e,\infty)$ **1.96** $\ln|e^x-e^{-x}|+C$, $x \neq 0$ **1.97** $2\sqrt{e^x+e^{-x}}+C$ **1.98** $(\mathrm{tg}^2 x)/2+C$, $x \neq (2k-1)\pi/2_{k\in\mathbb{Z}}$ **1.99** $(\cos^3 x)/3 - \cos x + C$ **1.100** $(\cos^7 x)/7 - (\cos^5 x)/5 + C$

1.4 Metoda per partes

Věta 1.4.1. *Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ spojité derivace na intervalu I, potom na intervalu I platí vzorec*

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1.6}$$

resp. stručněji

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x. \tag{1.7}$$

Princip metody spočívá v převedení integrálu ve tvaru $\int uv'\,\mathrm{d}x$ na integrál ve tvaru $\int u'v\,\mathrm{d}x$, jehož výpočet může být jednodušší.

Řešené úlohy

1.101. Vypočtěte integrál
$$\int x\,e^x \,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: V zadané úloze položíme $u = x$ a $v' = e^x$. Potom je $u' = 1$ a $v = e^x$. Použitím vzorce (1.7) dostaneme

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'} \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x, & v' = e^x \\ u' = 1, & v = e^x \end{array} \right| = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{e^x}_{v} \,\mathrm{d}x = x\,e^x - \int e^x \,\mathrm{d}x =$$
$$= x\,e^x - e^x + C.$$

1.102. Vypočtěte integrál
$$\int x \sin x \,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: V zadané úloze položíme $u = x$ a $v' = \sin x$. Potom je $u' = 1$ a $v = \cos x$. Je

$$\int x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x, & v' = \sin x \\ u' = 1, & v = -\cos x \end{array} \right| = x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -x\cos x + \int \cos x \,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C.$$

1.103. Vypočtěte integrál
$$\int x^2 \cos x \,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Položíme $u = x^2$ a $v' = \cos x$. Potom je
$$\int x^2 \cos x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x^2, & v' = \cos x \\ u' = 2x, & v = \sin x \end{matrix} \right| = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \,\mathrm{d}x =$$
$$= x^2 \sin x - 2\int x \sin x \,\mathrm{d}x = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

Při výpočtu jsme použili výsledek příkladu **1.102**. Pokud bychom neměli tento výsledek k dispozici, museli bychom dvakrát použít metodu per partes.

1.104. Vypočtěte integrál
$$\int x \ln x \,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

Řešení: V zadané úloze položíme $u = \ln x$ a $v' = x$.
$$\int x \ln x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & v' = x \\ u' = \frac{1}{x}, & v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

1.105. Vypočtěte integrál
$$\int \ln x \,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

Řešení: Přestože integrand není ve tvaru součinu, lze jej převést na součin dvou výrazů pomocí úpravy $\ln x = 1 \cdot \ln x$. Potom lze zvolit $u = \ln x$ a $v' = 1$. Pak je
$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x}, & v = x \end{matrix} \right| = x \ln x - \int \frac{1}{x} x \,\mathrm{d}x = x \ln x - \int \mathrm{d}x =$$
$$= x \ln x - x + C$$

1.106. Vypočtěte integrál
$$\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Integrand není ve tvaru součinu, opět použijeme úpravu $\operatorname{arctg} x = 1 \cdot \operatorname{arctg} x$.
$$\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x, & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{1+x^2}, & v = x \end{matrix} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$$

Platí
$$\int \frac{x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \frac{2x \,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \left| \begin{matrix} 1 + x^2 = t \\ 2x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C,$$

proto je
$$\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$

1.107. Vypočtěte integrál
$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Zřejmě bude $u = \sin x$ a $v' = \sin x$. Je
$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \sin x, & v' = \sin x \\ u' = \cos x, & v = -\cos x \end{matrix} \right| = \sin x(-\cos x) - \int \cos x(-\cos x) \,\mathrm{d}x =$$
$$= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x \tag{1.8}$$

Nyní určíme hodnotu integrálu $\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$. Je
$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \cos x, & v' = \cos x \\ u' = -\sin x, & v = \sin x \end{matrix} \right| = \cos x \sin x - \int \sin x(-\sin x) \,\mathrm{d}x =$$
$$= \sin x \cos x + \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x.$$

Dosazením do (1.8) dostaneme
$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = -\sin x \cos x + \sin x \cos x + \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x, \quad \text{tedy} \quad 0 = 0.$$

Tento postup nás k cíli nepřivedl, proto zkusíme integrál $\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$ vyřešit jiným způsobem. Využijeme goniometrickou identitu $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Tím dostaneme
$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int 1 - \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = x - \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x.$$

Dosazením do (1.8) dostaneme
$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x.$$

Nyní k oběma stranám rovnice přičteme výraz $\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$. Tím dostaneme
$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x + \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x &= x - \sin x \cos x \\ 2 \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x &= x - \sin x \cos x \\ \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x &= \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C. \end{aligned}$$

1.108. Vypočtěte integrál
$$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Položíme $u = \sin x$ a $v' = e^x$. Je
$$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \sin x, & v' = e^x \\ u' = \cos x, & v = e^x \end{matrix} \right| = \sin x \, e^x - \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x. \tag{1.9}$$

Pro výpočet integrálu $\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$ opět použijeme metodu per partes. Je

$$\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \cos x, & v' = e^x \\ u' = -\sin x, & v = e^x \end{array} \right| = \cos x \, e^x + \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Dosazením do (1.9) dostaneme

$$\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x = \sin x \, e^x - \left(\cos x \, e^x + \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x \right) = \sin x \, e^x - \cos x \, e^x - \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x.$$

K oběma stranám rovnosti přičteme integrál $\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x$. Tím dostaneme

$$\begin{aligned} 2 \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x &= e^x \sin x - e^x \cos x, \\ \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x &= \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C. \end{aligned}$$

V některých příkladech je vhodné použít jak substituční metodu, tak i metodu per partes, viz následující dvě úlohy.

1.109. Vypočtěte integrál

$$\int \cos \sqrt{x} \, \mathrm{d}x, \qquad x \in (0, \infty).$$

Řešení: Nejprve integrand upravíme pro použití substituční metody. Je

$$\int \cos \sqrt{x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} \, \mathrm{d}x = \int \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x} \, \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{rl} \sqrt{x} &= t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} &= 2 \, \mathrm{d}t \end{array} \right| = 2 \int t \cos t \, \mathrm{d}t$$

Nyní použijeme metodu per partes. Položíme $u = t$ a $v' = \cos t$. Potom je

$$\begin{aligned} 2 \int t \cos t \, \mathrm{d}t &= \left| \begin{array}{ll} u = t, & v' = \cos t \\ u' = 1, & v = \sin t \end{array} \right| = 2 \left(t \sin t - \int \sin t \, \mathrm{d}t \right) = 2t \sin t - 2(-\cos t) = \\ &= 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

1.110. Vypočtěte integrál

$$\int x^3 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x &= \int x^2 e^{-x^2} x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} -x^2 &= t \\ -2x \, \mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x \, \mathrm{d}x &= -\frac{\mathrm{d}t}{2} \end{array} \right| = \int (-t) e^t \left(-\frac{\mathrm{d}t}{2} \right) = \frac{1}{2} \int t \, e^t \, \mathrm{d}t = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = t, & v' = e^t \\ u' = 1, & v = e^t \end{array} \right| = \frac{1}{2} \left(t \, e^t - \int e^t \, \mathrm{d}t \right) = \frac{1}{2} \left(t \, e^t - e^t \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(-x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} \right) = \frac{-1}{2e^{x^2}} \left(x^2 + 1 \right) + C. \end{aligned}$$

1.111. Nalezněte rekurentní vzorec pro

$$I_n = \int x^n e^x \, \mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Řešení: Poznamenejme, že v hledaném vzorci značí index n mocninu u proměnné x. Je tedy např.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int x^2 e^x \, \mathrm{d}x, \\ I_1 &= \int x^1 e^x \, \mathrm{d}x = \int x \, e^x \, \mathrm{d}x, \\ I_0 &= \int x^0 e^x \, \mathrm{d}x = \int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C. \end{aligned}$$

Položíme $u = x^n$ a $v' = e^x$. Tím dostaneme

$$\begin{aligned} I_n = \int x^n e^x \, \mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{ll} u = x^n, & v' = e^x \\ u' = n x^{n-1}, & v = e^x \end{array} \right| = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x \, \mathrm{d}x = \\ &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, \mathrm{d}x = x^n e^x - n I_{n-1}. \end{aligned}$$

Je tedy

$$I_n = x^n e^x - n I_{n-1}. \tag{1.10}$$

Nyní podle nalezeného vzorce vypočítáme $\int x^3 e^x \, \mathrm{d}x$. Je

$$\begin{aligned} I_3 &= x^3 e^x - 3 I_2 \\ I_2 &= x^2 e^x - 2 I_1 \\ I_1 &= x^1 e^x - 1 I_0 \\ I_0 &= e^x \end{aligned}$$

Dosazením do (1.10) dostaneme

$$\int x^3 e^x \, \mathrm{d}x = I_3 = x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2(x^1 e^x - 1 \cdot e^x)) = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C.$$

1.112. Nalezněte rekurentní vzorec pro

$$I_n = \int \sin^n x \, \mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Řešení: Položíme $I_n = \int \sin^n x \, \mathrm{d}x$, index n proto značí mocninu funkce $\sin x$. Je tedy např.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x, \\ I_1 &= \int \sin^1 x \, \mathrm{d}x = \int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C, \\ I_0 &= \int \sin^0 x \, \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C. \end{aligned}$$

Funkci $\sin^n x$ rozložíme na součin funkcí $\sin^{n-1} x \cdot \sin x$. Potom je

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^n x \,\mathrm{d}x = \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x, & v' = \sin x \\ u' = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x, & v = -\cos x \end{array} \right| \\
&= \sin^{n-1} x(-\cos x) - \int (n-1)\sin^{n-2} x \cos x(-\cos x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x - \sin^n x \,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\int \sin^n x \,\mathrm{d}x = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x - (n-1)\int \sin^n x \,\mathrm{d}x
$$

Nyní k oběma stranám poslední rovnosti přičteme výraz $(n-1)\int \sin^n x \,\mathrm{d}x$. Tím dostaneme

$$
\begin{aligned}
\int \sin^n x \,\mathrm{d}x + (n-1)\int \sin^n x \,\mathrm{d}x &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x \\
n\int \sin^n x \,\mathrm{d}x &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x \\
\int \sin^n x \,\mathrm{d}x &= -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Hledaný rekurentní vzorec má tvar

$$
I_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{1.11}
$$

Mocnina funkce $\sin x$ klesne v každém kroku výpočtu o dva. Podle toho, zda je daná mocnina sudé či liché číslo, bude výpočet končit buď členem $I_0 = x + C$ nebo členem $I_1 = -\cos x + C$. Jako ilustraci vzorce uvedeme výpočet integrálů $\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x$ a $\int \sin^5 x \,\mathrm{d}x$.

$$
I_4 = -\frac{\cos x \sin^3 x}{4} + \frac{3}{4} I_2, \qquad I_2 = -\frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{1}{2} I_0.
$$

Je tedy

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x &= -\frac{\cos x \sin^3 x}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{1}{2} x\right) \\
&= -\frac{\cos x \sin^3 x}{4} - \frac{3\cos x \sin x}{8} + \frac{3x}{8} + C.
\end{aligned}
$$

Pro integrál $\int \sin^5 x \,\mathrm{d}x$ podle (1.11) dostaneme

$$
I_5 = -\frac{\cos x \sin^4 x}{5} + \frac{4}{5} I_3, \qquad I_3 = -\frac{\cos x \sin^2 x}{3} + \frac{2}{3} I_1.
$$

Je tedy

$$
\begin{aligned}
\int \sin^5 x \,\mathrm{d}x &= -\frac{\cos x \sin^4 x}{5} + \frac{4}{5}\left(-\frac{\cos x \sin^2 x}{3} + \frac{2}{3}(-\cos x)\right) \\
&= -\frac{\cos x \sin^4 x}{5} - \frac{4\cos x \sin^2 x}{15} - \frac{8\cos x}{15} + C.
\end{aligned}
$$

*** 1.113.** Nalezněte rekurentní vzorec pro

$$
I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}, \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.
$$

Řešení: Položíme $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$, index n proto značí mocninu funkce $1/(1+x^2)$. Je tedy např.

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}, \\
I_1 &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.
\end{aligned}
$$

Použitím metody per partes dostaneme

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \left| \begin{array}{ll} u = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}, & v' = 1 \\ u' = \dfrac{(-n)\cdot 2x}{(1+x^2)^{n+1}}, & v = x \end{array} \right| = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\left(\int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}\right) = \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}\right) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\,(I_n - I_{n+1}).
\end{aligned}
$$

Je tedy

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\, I_n - 2n\, I_{n+1}, \\
2n\, I_{n+1} &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\, I_n - I_n,
\end{aligned}
$$

neboli

$$
I_{n+1} = \frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot I_n, \tag{1.12}
$$

což je hledaný rekurentní vzorec. Pro ilustraci ukážeme použití vzorce (1.12) při výpočtu neurčitého integrálu $I_3 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$. Je $I_{n+1} = I_3$, proto $n = 2$. Použitím vzorce (1.12) dostaneme

$$
I_3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\cdot I_2, \qquad \text{a} \qquad I_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^1} + \frac{1}{2}\cdot I_1.
$$

Spojením obou mezivýsledků dostaneme

$$I_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} x\right).$$

Proto platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3 \operatorname{arctg} x}{8} + C.$$

Neřešené úlohy

V následujících úlohách vypočtěte zadané integrály pomocí metody per partes.

1.114. $\int x \cos x \,\mathrm{d}x$

1.115. $\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x$

1.116. $\int x e^{2x} \,\mathrm{d}x$

1.117. $\int \arcsin x \,\mathrm{d}x$

1.118. $\int x^2 \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$

1.119. $\int \frac{\sin x}{e^x} \,\mathrm{d}x$

1.120. $\int \sin^7 x \,\mathrm{d}x$

1.121. $\int \frac{x}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x$

1.122. $\int \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}x$

1.123. $\int \ln^2 x \,\mathrm{d}x$

1.124. $\int \ln(1+x^2) \,\mathrm{d}x$

1.125. $\int (2x+5) \sin 3x \,\mathrm{d}x$

1.126. $\int x^3 e^{x^2} \,\mathrm{d}x$

1.127. $\int x \operatorname{tg}^2 x \,\mathrm{d}x$

1.128. $\int (x-1) \ln x \,\mathrm{d}x$

1.129. $\int e^{3x} \cos 2x \,\mathrm{d}x$

1.130. $\int \sin(\ln x) \,\mathrm{d}x$

1.131. $\int x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$

V následujících úlohách vypočtěte rekurentní vzorce pro uvedené integrály.

1.132. $\int x^n \sin x \,\mathrm{d}x$

1.133. $\int \ln^n x \,\mathrm{d}x$

1.134. $\int \cos^n x \,\mathrm{d}x$

Výsledky

1.114 $x \sin x + \cos x + C$ **1.115** $x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$ **1.116** $(x e^{2x}/2) - (e^{2x}/4) + C$ **1.117** $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,\ x \in (-1, 1)$ **1.118** $(x^3 \operatorname{arctg} x)/3 - (1+x^2)/6 + (\ln(1+x^2))/6 + C$ **1.119** $-e^{-x}(\sin x + \cos x)/2 + C$ **1.120** $(-\sin^6 x \cos x)/7 - (6 \sin^4 x \cos x)/35 - (8 \sin^2 x \cos x)/35 - 16 \cos x/35 + C$ **1.121** $-x \operatorname{cotg} x + \ln|\sin x| + C,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **1.122** $-(1+\ln x)/x + C$ **1.123** $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$ **1.124** $x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C$ **1.125** $(2 \sin 3x)/9 - ((2x+5)\cos 3x)/3 + C$ **1.126** $(x^2 e^{x^2} - e^{x^2})/2 + C$ **1.127** $x \operatorname{tg} x - (x^2/2) + \ln|\cos x| + C$ **1.128** $(x^2/2 - x)\ln x - x^2/4 + x + C$ **1.129** $e^{3x}(2 \sin 2x + 3 \cos 2x)/13 + C$ **1.130** $x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))/2 + C$ **1.131** $x^2/4 + (x \sin 2x)/4 + (\cos 2x)/8 + C$ **1.132** $I_n = x^n \cos x + n x^{n-1} \sin x - n(n-1) I_{n-2}$ **1.133** $I_n = x \ln^n x - n I_{n-1}$ **1.134** $I_{n+1} = x/(1+x^2)^n + (2n-1) I_n/(2n)$

1.5 Vybrané typové úlohy

1.5.1 Integrály typu $\int f'(x)/f(x)\,\mathrm{d}x$

V následujících úlohách se zaměříme na důležitý typ neurčitých integrálů. Jsou to integrály, ve kterých lze integrand buď přímo, nebo po úpravě převést na tvar zlomku, kde čitatel je derivací jmenovatele.

1.135. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{2x}{x^2+1} \,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Integrand je funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Použijeme substituci $t = x^2 + 1$. Potom je

$$\int \frac{2x \,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \left| \begin{array}{c} x^2+1 = t \\ 2x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln(x^2+1) + C.$$

1.136. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{5x}{3x^2+11} \,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Použijeme substituci $t = 3x^2 + 11$. Potom je

$$\int \frac{5x}{3x^2+11} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{5}{6} \cdot 6x \,\mathrm{d}x}{3x^2+11} = \left| \begin{array}{c} 3x^2+11 = t \\ 6x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{5}{6} \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{5}{6} \ln|t| = $$
$$= \frac{5}{6} \ln(3x^2+11) + C.$$

Poznámka: Při výpočtu jsme zjistili, že derivace jmenovatele je rovna výrazu $6x$. Proto jsme v následujícím kroku převedli čitatel integrandu do tvaru, který odpovídá derivaci čitatele vynásobené jistou konstantou. Tuto konstantu můžeme podle Věty **1.1.4** převést před integrál. Tím se z integrandu stane zlomek, který má v čitateli derivaci jmenovatele.

1.137. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{2x^3}{5x^4-7} \,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Integrand lze opět snadno upravit do tvaru f'/f. Potom použijeme substituci $t = 5x^4 - 7$. Je

$$\int \frac{2x^3}{5x^4-7} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{10} \cdot 20x^3 \,\mathrm{d}x}{5x^4-7} = \left| \begin{array}{c} 5x^4-7 = t \\ 20x^3 \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{10} \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{10} \ln|t| = $$
$$= \frac{1}{10} \ln|5x^4-7| + C.$$

Neurčitý integrál existuje pro každé $x \in \left(-\infty, -\sqrt[4]{\frac{7}{5}}\right)$, resp. $x \in \left(-\sqrt[4]{\frac{7}{5}}, \sqrt[4]{\frac{7}{5}}\right)$, resp. $x \in \left(\sqrt[4]{\frac{7}{5}}, \infty\right)$.

Poslední tři příklady lze shrnout do následujícího pravidla.

Věta 1.5.1. *Je*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C. \tag{1.13}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která je $f(x) \neq 0$ a $f'(x)$ je definovaná.

Důkaz. Použijeme substituci $t = f(x)$. Potom pro všechna $x \in \mathbb{R}$ taková, že $f(x) \neq 0$, je

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} f(x) = t \\ f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln|f(x)| + C,$$

což dokazuje vyslovené tvrzení. $\square$

1.138. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{2x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Je $(x^2+3)' = 2x$. Podle vzorce (1.13) je

$$\int \frac{2x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \ln|x^2+3| + C.$$

Protože pro všechna reálná čísla x je $x^2+3 > 0$, platí rovnost $|x^2+3| = x^2+3$ a výsledek lze psát ve tvaru

$$\int \frac{2x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+3) + C.$$

Poznámka 1.5.2. V dalších příkladech již nebudeme uvádět zdůvodnění, proč v případě, kdy pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) > 0$, píšeme místo $|f(x)|$ pouze výraz $f(x)$.

1.139. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{3x^2}{x^3+8}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Je $(x^3+8)' = 3x^2$. Podle vzorce (1.13) je

$$\int \frac{3x^2}{x^3+8}\,\mathrm{d}x = \ln|x^3+8| + C,$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

1.140. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{2x}{3x^2+5}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Je $(3x^2+5)' = 6x$. Integrand upravíme tak, abychom mohli použít vzorec (1.13). Je

$$\int \frac{2x}{3x^2+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{3}\cdot 6x}{3x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\int \frac{6x}{3x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\ln|3x^2+5| + C = \frac{\ln(3x^2+5)}{3} + C,$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

1.141. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{2x^2}{5-3x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Je $(5-3x^3)' = -9x^2$. Integrand upravíme tak, abychom mohli použít vzorec (1.13). Je

$$\int \frac{2x^2}{5-3x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot(-9x^2)}{5-3x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{9}\cdot\int \frac{-9x^2}{5-3x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{2\ln|5-3x^3|}{9} + C,$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}\setminus\{\sqrt[3]{5/3}\}$.

1.142. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{27x^7}{12x^8+42}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Je $(12x^8+42)' = 96x^7$. Integrand upravíme tak, abychom mohli použít vzorec (1.13). Je

$$\int \frac{27x^7}{12x^8+42}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{27}{96}\cdot 96x^7}{12x^8+42}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{32}\cdot\int \frac{96x^7}{12x^8+42}\,\mathrm{d}x = \frac{9\ln(12x^8+42)}{32} + C,$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

1.143. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Je $(x^2+x)' = 2x+1$. Podle vzorce (1.13) je

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \ln|x^2+x| + C,$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

1.144. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{6x+5}{3x^2+5x+12}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Je $(3x^2+5x+12)' = 6x+5$. Podle vzorce (1.13) je

$$\int \frac{6x+5}{3x^2+5x+12}\,\mathrm{d}x = \ln(3x^2+5x+12) + C,$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

1.145. Vypočtěte integrál

$$\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Je $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ a $(\sin x)' = \cos x$. Podle vzorce (1.13) je

$$\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C,$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

1.146. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\sin x}{5+2\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Je $(5+2\cos x)' = -2\sin x$. Integrand upravíme tak, abychom mohli použít vzorec (1.13). Je

$$\int \frac{\sin x}{5+2\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2\sin x)}{5+2\cos x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\int \frac{-2\sin x}{5+2\cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\ln|5+2\cos x| + C,$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

1.147. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Je $(\sin x-\cos x)' = \cos x+\sin x$. Podle vzorce (1.13) je

$$\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x-\cos x| + C,$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{4}+k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

1.148. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{e^x}{10+e^x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Je $(10+e^x)' = e^x$. Podle vzorce (1.13) je

$$\int \frac{e^x}{10+e^x}\,\mathrm{d}x = \ln(10+e^x) + C,$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

1.149. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{e^{3x+2}}{5+7e^{3x}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Je $(5+7e^{3x})' = 21e^{3x}$. S použitím vzorce (1.13) dostaneme

$$\int \frac{e^{3x+2}}{5+7e^{3x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^2\cdot e^{3x}}{5+7e^{3x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{e^2}{21}\cdot 21e^{3x}}{5+7e^{3x}}\,\mathrm{d}x = \frac{e^2}{21}\cdot\int \frac{21e^{3x}}{5+7e^{3x}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{e^2}{21}\ln(5+7e^{3x}) + C,$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Neřešené úlohy

V následujících úlohách vypočtěte zadané neurčité integrály.

1.150. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-10}$

1.151. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5x-1}$

1.152. $\displaystyle\int \frac{5x}{x^2+6}\,\mathrm{d}x$

1.153. $\displaystyle\int \frac{5x^3}{1-x^4}\,\mathrm{d}x$

1.154. $\displaystyle\int \frac{5x}{3-4x^2}\,\mathrm{d}x$

1.155. $\displaystyle\int \frac{6e^{2x}}{e^{2x}+2}\,\mathrm{d}x$

1.156. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)}$

1.157. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{5+\cos x}\,\mathrm{d}x$

1.158. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cotg} x}{\ln(\sin x)}\,\mathrm{d}x$

Výsledky

1.150 $\ln|x-10|+C$, $x\in(-\infty,10)$, $x\in(10,\infty)$ **1.151** $(1/5)\ln|5x-1|+C$, $x\in(-\infty,1/5)$, $x\in(1/5,\infty)$ **1.152** $(5/2)\ln(x^2+6)+C$, $x\in\mathbb{R}$ **1.153** $(-5/4)\ln|1-x^4|+C$, $x\in(-\infty,-1)$, $x\in(-1,1)$, $x\in(1,\infty)$ **1.154** $(5/8)\ln|3-4x^2|+C$, $x\in(-\infty,-\sqrt{3}/2)$, $x\in(-\sqrt{3}/2,\sqrt{3}/2)$, $x\in(\sqrt{3}2,\infty)$ **1.155** $3\ln(e^{2x}+2)+C$, $x\in\mathbb{R}$ **1.156** $\ln|1+\ln x|+C$, $x\in(0,1/e)$, $x\in(1/e,\infty)$ **1.157** $-\ln(5+\cos x)+C$, $x\in\mathbb{R}$ **1.158** $\ln|\ln(\sin x)|$, $x\in(2k\pi,(2k+1)\pi)_{k\in\mathbb{Z}}$

1.5.2 Integrály typu $\int 1/(x^2\pm 1)\,\mathrm{d}x$

V dalších kapitolách budeme často pracovat s integrály ve tvaru $\int 1/(x^2\pm 1)\,\mathrm{d}x$. Oba typy patří mezi tabulkové integrály, které byste měli znát. Přesto tyto vzorce zdůvodníme v následujících dvou příkladech odpovídajícím výpočtem.

1.159. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Řešení: Použijeme substituci $x=\operatorname{tg} t$. Potom pro všechna $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \left|\begin{array}{l} x=\operatorname{tg} t \\ \mathrm{d}x=\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \frac{1}{\frac{\cos^2 t}{\cos^2 t}+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} =$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}\cdot\cos^2 t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t+\cos^2 t} = \int \mathrm{d}t = t + C.$$

V původním zadání byla uvedena funkce proměnné x, proto se musíme vrátit k vyjádření výsledku jakožto funkce proměnné x. Víme, že je $x=\operatorname{tg} t$. Z toho, co již víme o inverzních funkcích (viz např. [11], Kapitola 1.6), plyne, že $t=\operatorname{arctg} x$. Proto je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C. \tag{1.14}$$

1.160. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 1}, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}. \tag{1.15}$$

Řešení: Víme, že $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Rozkladem na parciální zlomky (viz např. [11], kapitola 1.7) dostaneme

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1},$$

kde zbývá určit zatím neurčené koeficienty A a B. Obě strany rovnosti vynásobíme výrazem $(x-1)(x+1)$, tím dostaneme

$$1 = A(x+1) + B(x-1),$$
$$0x + 1 = (A+B)x + (A-B).$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x na obou stranách poslední rovnosti dostaneme soustavu rovnic

$$A + B = 0,$$
$$A - B = 1,$$

jejímž řešením jsou hodnoty $A = \frac{1}{2}$ a $B = -\frac{1}{2}$. Je tedy

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Nyní již snadno vypočteme integrál (1.15). Je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1}\right).$$

Protože je $(x-1)' = (x+1)' = 1$ lze k výpočtu obou integrálů použít vzorec (1.13). Potom dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \ln|x-1| + C, \qquad \text{resp.} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x+1| + C.$$

Pro integrál (1.15) platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C.$$

Víme, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$ a $a \in \mathbb{R}$ platí vzorce

$$\ln x^a = a\ln x, \qquad \text{resp.} \qquad \ln x - \ln y = \ln\frac{x}{y}. \tag{1.16}$$

Proto je možné daný integrál vyjádřit ve tvaru

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C, \tag{1.17}$$

resp.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = \ln\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} + C. \tag{1.18}$$

1.161. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{16 + x^2}.$$

Řešení: Potřebujeme, aby platilo $x^2 = 16t^2$. (Proč?) Proto použijeme substituci $x = 4t$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{16+x^2} = \left|\begin{array}{l} x = 4t \\ \mathrm{d}x = 4\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{4\,\mathrm{d}t}{16 + 16t^2} = \int \frac{4\,\mathrm{d}t}{16(1+t^2)} = \frac{4}{16}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg} t.$$

Z uvedené substituce je patrné, že $t = \dfrac{x}{4}$. Proto je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{16+x^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + C.$$

1.162. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{6 + x^2}.$$

Řešení: Použijeme substituci $x = \sqrt{6}\,t$, platí tedy $x^2 = 6t^2$. Potom je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{6+x^2} = \left|\begin{array}{l} x = \sqrt{6}\,t \\ \mathrm{d}x = \sqrt{6}\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{\sqrt{6}\,\mathrm{d}t}{6 + 6t^2} = \int \frac{\sqrt{6}\,\mathrm{d}t}{6(1+t^2)} = \frac{\sqrt{6}}{6}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg} t.$$

Z uvedené substituce je patrné, že $t = \dfrac{x}{\sqrt{6}}$. Proto je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{6+x^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{6}} + C.$$

1.163. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2}.$$

Řešení: Použijeme substituci $x = a\,t$, platí tedy $x^2 = a^2t^2$. Potom je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \left|\begin{array}{l} x = a\,t \\ \mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{a\,\mathrm{d}t}{a^2 + a^2t^2} = \int \frac{a\,\mathrm{d}t}{a^2(1+t^2)} = \frac{a}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t.$$

Z uvedené substituce je patrné, že $t = \dfrac{x}{a}$. Proto je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

1.164. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 9}, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}.$$

Řešení: Použijeme substituci $x = 3t$, tedy $x^2 = 9t^2$. Potom je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-9} = \left|\begin{array}{l} x = 3t \\ \mathrm{d}x = 3\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{3\,\mathrm{d}t}{9t^2 - 9} = \int \frac{3\,\mathrm{d}t}{9(t^2-1)} = \frac{3}{9}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| =$$
$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{\frac{x}{3}-1}{\frac{x}{3}+1}\right| = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C.$$

Při výpočtu integrálu byl použit vzorec (1.17) ze strany 30.

1.165. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-5}, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}.$$

Řešení: Použijeme substituci $x = \sqrt{5}\,t$, platí tedy $x^2 = 5t^2$. Potom je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-5} = \left| \begin{array}{rcl} x &=& \sqrt{5}\,t \\ \mathrm{d}x &=& \sqrt{5}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{5}\,\mathrm{d}t}{5t^2-5} = \int \frac{\sqrt{5}\,\mathrm{d}t}{5(t^2-1)} = \frac{\sqrt{5}}{5}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \frac{1}{\sqrt{20}}\ln\left|\frac{\frac{x}{\sqrt{5}}-1}{\frac{x}{\sqrt{5}}+1}\right| = \frac{1}{\sqrt{20}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C.$$

1.166. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2},$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}\setminus\{\pm a\}$.

Řešení: Použijeme substituci $x = a\,t$, je tedy $x^2 = a^2t^2$. Potom platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \left| \begin{array}{rcl} x &=& a\,t \\ \mathrm{d}x &=& a\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{a\,\mathrm{d}t}{a^2t^2-a^2} = \int \frac{a\,\mathrm{d}t}{a^2(t^2-1)} = \frac{a}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} =$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{\frac{x}{a}-1}{\frac{x}{a}+1}\right| = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

1.167. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2}.$$

Řešení: Použijeme substituci $2x = t$, platí tedy $4x^2 = t^2$. Potom je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2} = \left| \begin{array}{rcl} 2x &=& t \\ 2\,\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &=& \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{1+t^2}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + C.$$

1.168. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2-1}, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Řešení: Použijeme substituci $2x = t$, je tedy $4x^2 = t^2$. Pak dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2-1} = \left| \begin{array}{rcl} 2x &=& t \\ 2\,\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &=& \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2-1}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| + C.$$

1.169. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+10x^2}.$$

Řešení: Použijeme substituci $\sqrt{10}\,x = t$, je tedy $10x^2 = t^2$. Potom je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+10x^2} = \left| \begin{array}{rcl} \sqrt{10}\,x &=& t \\ \sqrt{10}\,\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &=& \frac{1}{\sqrt{10}}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{1+t^2}\,\frac{1}{\sqrt{10}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{10}}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg} t =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\sqrt{10}\,x + C.$$

1.170. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{9+25x^2}.$$

Řešení: Použijeme substituci $5x = 3t$, platí tedy $25x^2 = 9t^2$. Potom dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{9+25x^2} = \left| \begin{array}{rcl} 5x &=& 3t \\ 5\,\mathrm{d}x &=& 3\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &=& \frac{3}{5}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{9+9t^2}\,\frac{3}{5}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{9(1+t^2)}\,\frac{3}{5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{15}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{15}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{5x}{3} + C.$$

1.171. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2-9}, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}.$$

Řešení: Použijeme substituci $2x = 3t$, platí tedy $4x^2 = 9t^2$. Potom je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2-9} = \left| \begin{array}{rcl} 2x &=& 3t \\ 2\,\mathrm{d}x &=& 3\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &=& \frac{3}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{9t^2-9}\,\frac{3}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| =$$

$$= \frac{1}{12}\ln\left|\frac{\frac{2x}{3}-1}{\frac{2x}{3}+1}\right| = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C.$$

1.172. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3+5x^2}.$$

Řešení: Použijeme substituci $\sqrt{5}\,x = \sqrt{3}\,t$, je tedy $5x^2 = 3t^2$. Potom dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3+5x^2} = \left| \begin{array}{rcl} \sqrt{5}\,x &=& \sqrt{3}\,t \\ \sqrt{5}\,\mathrm{d}x &=& \sqrt{3}\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &=& \sqrt{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{3+3t^2}\sqrt{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{3(1+t^2)}\sqrt{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{15}}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\,x\right) + C.$$

1.173. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}.$$
Řešení: Použijeme substituci $x+1=t$, platí tedy $(x+1)^2=t^2$. Potom je
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} = \left| \begin{array}{c} x+1=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

1.174. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2-1}, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,-1\}.$$
Řešení: Použijeme substituci $x+2=t$, je tedy $(x+2)^2=t^2$. Potom dostaneme
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2-1} = \left| \begin{array}{c} x+2=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)-1}{(x+2)+1}\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + C.$$

1.175. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{6+(x+1)^2}.$$
Řešení: Použijeme substituci $x+1=\sqrt{6}\,t$, platí tedy $(x+1)^2=6t^2$. Potom je
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{6+(x+1)^2} = \left| \begin{array}{c} x+1=\sqrt{6}\,t \\ \mathrm{d}x=\sqrt{6}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{6}\,\mathrm{d}t}{6+6t^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg} t =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{6}} + C.$$

1.176. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4+(x+3)^2}.$$
Řešení: Použijeme substituci $x+3=2t$, je tedy $(x+3)^2=4t^2$. Potom platí
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4+(x+3)^2} = \left| \begin{array}{c} x+3=2t \\ \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{4+4t^2} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{4(1+t^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right) + C.$$

Roznásobením výrazu $4+(x+3)^2$ snadno ověříme rovnost $4+(x+3)^2 = x^2+6x+13$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Z řešení příkladu **1.176** proto plyne, že
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+6x+13} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+3) + C.$$

1.177. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2-4}, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{-5,-1\}.$$
Řešení: Použijeme substituci $x+3=2t$, platí tedy $(x+3)^2=4t^2$. Potom je
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2-4} = \left| \begin{array}{c} x+3=2t \\ \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{4t^2-4} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| =$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\frac{x+3}{2}-1}{\frac{x+3}{2}+1}\right| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{(x+3)-2}{(x+3)+2}\right| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x+5}\right| + C.$$

Roznásobením výrazu $(x+3)^2-4$ ověříme rovnost $(x+3)^2-4 = x^2+6x+5$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Z řešení Příkladu **1.177** tak plyne, že
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+6x+5} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x+5}\right| + C.$$

Poznámka 1.5.3. Obecně, každý kvadratický polynom s reálnými koeficienty lze doplněním na čtverec (viz např. [11], Kapitola 1.7) upravit do tvaru $(x+a)^2 \pm b$. Předchozí příklady ukázaly, jakou substituci v takovém případě zvolit a integrál vypočítat.

1.178. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1}, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$
Řešení: Je $x^2+2x+1=(x+1)^2$. Použijeme substituci $x+1=t$, potom je
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \left| \begin{array}{c} x+1=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} =$$
$$= -\frac{1}{x+1} + C.$$

1.179. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}.$$
Řešení: Doplněním na čtverec zjistíme, že je $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$. Je tedy
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}.$$
Můžeme proto použít výsledek příkladu **1.173**. Je
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

1.180. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+7}.$$
Řešení: Doplněním na čtverec zjistíme, že je $x^2+2x+7=(x+1)^2+6$. Je tedy
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+7}=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+6}.$$
Použijeme výsledek příkladu **1.175**. Je
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+7}=\frac{\sqrt{6}}{6}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{6}}+C.$$

1.181. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x-5}, \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,5\}.$$
Řešení: Doplněním na čtverec zjistíme, že je $x^2-4x-5=(x-2)^2-9$. Je tedy
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x-5}=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2-9}.$$
Nyní použijeme substituci $x-2=3t$, je tedy $(x-2)^2=9t^2$. Tím dostaneme
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2-9}=\left|\begin{array}{l} x-2=3t \\ \mathrm{d}x=3\,\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int \frac{3\,\mathrm{d}t}{9t^2-9}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=$$
$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\frac{x-2}{3}-1}{\frac{x-2}{3}+1}\right|=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x-2)-3}{(x-2)+3}\right|=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+C.$$

1.182. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}.$$
Řešení: Doplněním na čtverec zjistíme, že je $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$. Je tedy
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+1}.$$
Použijeme substituci $x+2=t$, platí tedy $(x+2)^2=t^2$. Potom je
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+1}=\left|\begin{array}{l} x+2=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\operatorname{arctg}t=\operatorname{arctg}(x+2)+C.$$

1.183. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+8x+20}.$$
Řešení: Doplněním na čtverec zjistíme, že je $x^2+8x+20=(x+4)^2+4$. Je tedy
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+8x+20}=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+4)^2+4}.$$

Použijeme substituci $x+4=2t$, je tedy $(x+4)^2=4t^2$. Pak platí
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+4)^2+4}=\left|\begin{array}{l} x+4=2t \\ \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{4t^2+4}=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{4(t^2+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{2}+C.$$

1.184. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+10x+21}, \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{-7,-3\}.$$
Řešení: Doplněním na čtverec zjistíme, že je $x^2+10x+21=(x+5)^2-4$. Je tedy
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+10x+21}=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+5)^2-4}.$$
Nyní použijeme substituci $x+5=2t$, je tedy $(x+5)^2=4t^2$. Tím dostaneme
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+5)^2-4}=\left|\begin{array}{l} x+5=2t \\ \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{4t^2-4}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=$$
$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\frac{x+5}{2}-1}{\frac{x+5}{2}+1}\right|=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{(x+5)-2}{(x+5)+2}\right|=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+3}{x+7}\right|+C.$$

1.185. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+15}.$$
Řešení: Doplněním na čtverec zjistíme, že je $x^2-6x+15=(x-3)^2+6$. Je tedy
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+15}=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2+6}.$$
Použijeme substituci $x-3=\sqrt{6}\,t$; z ní plyne rovnost $(x-3)^2=6t^2$. Potom je
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2+6}=\left|\begin{array}{l} x-3=\sqrt{6}\,t \\ \mathrm{d}x=\sqrt{6}\,\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int \frac{\sqrt{6}\,\mathrm{d}t}{6t^2+6}=\int\frac{\sqrt{6}\,\mathrm{d}t}{6(t^2+1)}=\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}t=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{6}}+C.$$

1.186. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+10x+35}.$$
Řešení: Doplněním na čtverec zjistíme, že je $x^2+10x+35=(x+5)^2+10$. Je tedy
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+10x+35}=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+5)^2+10}.$$
Použijeme substituci $x+5=\sqrt{10}\,t$, je tedy $(x+5)^2=10t^2$. Potom platí
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+5)^2+10}=\left|\begin{array}{l} x+5=\sqrt{10}\,t \\ \mathrm{d}x=\sqrt{10}\,\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int \frac{\sqrt{10}\,\mathrm{d}t}{10t^2+10}=\int\frac{\sqrt{10}\,\mathrm{d}t}{10(t^2+1)}=\frac{1}{\sqrt{10}}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}t=\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x+5}{\sqrt{10}}+C.$$

1.187. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+7x+15}.$$
Řešení: Doplněním na čtverec zjistíme, že je $x^2+7x+15=\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$. Je tedy
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+7x+15}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}.$$
Použijeme substituci $x+\frac{7}{2}=\frac{\sqrt{11}}{2}t$, platí tedy $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{11}{4}t^2$. Potom je
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}=\left|\begin{array}{rl} x+\frac{7}{2} & =\frac{\sqrt{11}}{2}t \\ \mathrm{d}x & =\frac{\sqrt{11}}{2}\,\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int \frac{\frac{\sqrt{11}}{2}\,\mathrm{d}t}{\frac{11}{4}t^2+\frac{11}{4}}=\frac{2}{\sqrt{11}}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg} t$$
$$=\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{11}}\left(x+\frac{7}{2}\right)\right]=\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+7}{\sqrt{11}}\right)+C.$$

Neřešené úlohy

V následujících úlohách vypočtěte zadané neurčité integrály.

1.188. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+7}$

1.189. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-100}$

1.190. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{8x^2+1}$

1.191. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{9x^2-1}$

1.192. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2-5}$

1.193. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{7x^2+9}$

1.194. $\displaystyle\int \frac{6\,\mathrm{d}x}{5x^2+11}$

1.195. $\displaystyle\int \frac{5\,\mathrm{d}x}{6x^2-14}$

1.196. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2+5}$

1.197. $\displaystyle\int \frac{5\,\mathrm{d}x}{(x-5)^2+4}$

1.198. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2-6}$

1.199. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+9}$

1.200. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x-1}$

1.201. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x-2}$

1.202. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+13}$

Výsledky

1.188 $(1/\sqrt{7})\operatorname{arctg}(x/\sqrt{7})+C$, $x\in\mathbb{R}$ **1.189** $(1/20)\ln|(x-10)/(x+10)|+C$, $x\in(-\infty,-10)$, $x\in(-10,10)$, $x\in(10,\infty)$ **1.190** $(1/\sqrt{8})\operatorname{arctg}(\sqrt{8}x)+C$, $x\in\mathbb{R}$ **1.191** $(1/6)\ln|(3x-1)/(3x+1)|$, $x\in(-\infty,-1/3)$, $x\in(-1/3,1/3)$, $x\in(1/3,\infty)$ **1.192** $(1/\sqrt{80})\ln|(2x-\sqrt{5})/(2x+\sqrt{5})|+C$, $x\in(-\infty,-\sqrt{5}/2)$, $x\in(-\sqrt{5}/2,\sqrt{5}/2)$, $x\in(\sqrt{5}/2,\infty)$ **1.193** $(1/\sqrt{63})\operatorname{arctg}((\sqrt{7}x)/3)+C$, $x\in\mathbb{R}$ **1.194** $(6/\sqrt{55})\operatorname{arctg}(x\sqrt{5/11})+C$, $x\in\mathbb{R}$ **1.195** $(5/(4\sqrt{21}))\ln(\sqrt{6}x-\sqrt{14})/(\sqrt{6}x+\sqrt{14})+C$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-7/3,7/3\}$ **1.196** $(1/\sqrt{5})\operatorname{arctg}((x-2)/\sqrt{5})+C$, $x\in\mathbb{R}$ **1.197** $(5/2)\operatorname{arctg}((x-5)/2)+C$, $x\in\mathbb{R}$ **1.198** $(1/(2\sqrt{6}))\ln|(x+3-\sqrt{6})/(x+3+\sqrt{6})|+C$, $x\in(-\infty,-\sqrt{6}-3)$, $x\in(-\sqrt{6}-3,\sqrt{6}-3)$, $x\in(\sqrt{6}-3,\infty)$ **1.199** $(1/\sqrt{5})\operatorname{arctg}((x+2)/\sqrt{5})+C$, $x\in\mathbb{R}$ **1.200** $(1/\sqrt{20})\ln|(x+2-\sqrt{5})/(x+2+\sqrt{5})|+C$, $x\in(-\infty,\sqrt{5}-2)$, $x\in(\sqrt{5}-2,\sqrt{5}+2)$, $x\in(\sqrt{5}+2,\infty)$ **1.201** $(1/2\sqrt{3})\ln|(x-1-\sqrt{3})/(x-1+\sqrt{3})|+C$, $x\in(-\infty,1-\sqrt{3})$, $x\in(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3})$, $x\in(1+\sqrt{3},\infty)$ **1.202** $(1/2)\operatorname{arctg}((x-3)/2)+C$, $x\in\mathbb{R}$

1.5.3 Integrace racionálních lomených funkcí

Připomeňme, že definici racionální lomené funkce spolu s popisem rozkladu této funkce na součet parciálních zlomků čtenář nalezne např. v [11], str. 31-32.

Řešené úlohy

1.203. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{2x+10}{x^2-6x+15}\,\mathrm{d}x.$$
Řešení: Nejprve vyzkoušíme, zda je výraz v čitateli derivací výrazu v jmenovateli. Je $(x^2-6x+15)'=2x-6$. Upravíme proto výraz v čitateli do tvaru $2x+10=2x-6+16$. Nyní integrand rozdělíme na součet dvou zlomků tak, aby jeden ze zlomků obsahoval v čitateli derivaci výrazu v jmenovateli. Je
$$\int \frac{2x+10}{x^2-6x+15}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{2x-6}{x^2-6x+15}+\frac{16}{x^2-6x+15}\right)\mathrm{d}x.$$
Podle Věty **1.1.4** je
$$\int \frac{2x+10}{x^2-6x+15}\,\mathrm{d}x=\int \frac{2x-6}{x^2-6x+15}\,\mathrm{d}x+16\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+15}. \tag{1.19}$$
Oba integrály z pravé strany rovnosti (1.19) vypočteme samostatně. Je
$$\int \frac{2x-6}{x^2-6x+15}\,\mathrm{d}x=\ln|x^2-6x+15|+C,$$
neboť víme, že v daném integrandu je výraz v čitateli derivací výrazu ve jmenovateli. Druhý integrál jsme již vyřešili v příkladu **1.185**. Víme tedy, že je
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+15}=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{6}}+C.$$
Spojením obou částečných výsledků dostaneme
$$\int \frac{2x+10}{x^2-6x+15}\,\mathrm{d}x=\ln|x^2-6x+15|+\frac{16}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{6}}+C.$$

1.204. Vypočtěte integrál
$$\int \frac{4x+3}{x^2+4x+20}\,\mathrm{d}x.$$
Řešení: Integrand rozdělíme na dva zlomky, z nichž jeden bude v čitateli obsahovat derivaci výrazu v jmenovateli. Je $(x^2+4x+20)'=2x+4$. Dále je
$$4x+3=2\left(2x+\frac{3}{2}\right)=2\left(2x+4-\frac{5}{2}\right)=2(2x+4)-5.$$

Zadaný integrál proto budeme vyšetřovat ve tvaru

$$\int \frac{4x+3}{x^2+4x+20}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x+4}{x^2+4x+20}\,\mathrm{d}x - 5\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+20}. \tag{1.20}$$

První z integrálů na pravé straně (1.20) je typu $\int f'/f$, proto je

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+20}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+4x+20) + C.$$

Pro druhý integrál dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+20} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+16} = \left| \begin{array}{r} x+2 = 4t \\ \mathrm{d}x = 4\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{4\,\mathrm{d}t}{16t^2+16} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} =$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4} + C.$$

Dosazením do (1.20) dostaneme

$$\int \frac{4x+3}{x^2+4x+20}\,\mathrm{d}x = 2\ln(x^2+4x+20) - \frac{5}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4} + C.$$

1.205. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{5x-2}{x^2+7x+15}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Integrand rozdělíme na dva zlomky, z nichž jeden bude v čitateli obsahovat derivaci výrazu v jmenovateli. Je $(x^2+7x+15)' = 2x+7$. Dále je

$$5x-2 = \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}(5x-2) = \frac{5}{2}\left(2x-\frac{4}{5}\right) = \frac{5}{2}\left(2x+\frac{35}{5}-\frac{39}{5}\right) = \frac{5}{2}(2x+7) - \frac{39}{2}.$$

Zadaný integrál proto budeme vyšetřovat ve tvaru

$$\int \frac{5x-2}{x^2+7x+15}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\int \frac{2x+7}{x^2+7x+15}\,\mathrm{d}x - \frac{39}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+7x+15}. \tag{1.21}$$

Vzhledem k (1.13) je

$$\int \frac{2x+7}{x^2+7x+15}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+7x+15) + C.$$

Při výpočtu druhého integrálu na pravé straně (1.21) opět použijeme doplnění na čtverec. Je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+7x+15} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{11}{4}} = \left| \begin{array}{r} x+\frac{7}{2} = \frac{\sqrt{11}}{2}t \\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{11}}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\frac{\sqrt{11}}{2}\,\mathrm{d}t}{\frac{11}{4}t^2+\frac{11}{4}} = \frac{2}{\sqrt{11}}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg} t = \frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{11}}\left(x+\frac{7}{2}\right)\right] = \frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{11}} + C.$$

Spojením obou částečných výsledků dostaneme

$$\int \frac{5x-2}{x^2+7x+15}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\ln(x^2+7x+15) - \frac{39}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{11}} + C.$$

1.206. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{6x+10}{x^2+4x-45}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Integrand rozdělíme na dva zlomky, z nichž jeden bude v čitateli obsahovat derivaci výrazu v jmenovateli. Je $(x^2+4x-45)' = 2x+4$. Dále je

$$6x+10 = 3\cdot\frac{1}{3}(6x+10) = 3\left(2x+\frac{10}{3}\right) = 3\left(2x+\frac{12}{3}-\frac{2}{3}\right) = 3(2x+4) - 2.$$

Zadaný integrál proto budeme vyšetřovat ve tvaru

$$\int \frac{6x+10}{x^2+4x-45}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{2x+4}{x^2+4x-45}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x-45}. \tag{1.22}$$

Pro první integrál z pravé strany (1.22) použijeme vzorec (1.13), pro druhý integrál z pravé strany (1.22) dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x-45} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2-49} = \left| \begin{array}{r} x+2 = 7t \\ \mathrm{d}x = 7\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{7\,\mathrm{d}t}{49t^2-49} = \frac{1}{7}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} =$$
$$= \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \frac{1}{14}\ln\left|\frac{\frac{x+2}{7}-1}{\frac{x+2}{7}+1}\right| = \frac{1}{14}\ln\left|\frac{x+2-7}{x+2+7}\right| =$$
$$= \frac{1}{14}\ln\left|\frac{x-5}{x+9}\right| + C.$$

Dosazením do (1.22) dostaneme

$$\int \frac{6x+10}{x^2+4x-45}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x^2+4x-45| - \frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-5}{x+9}\right| + C.$$

Poznámka 1.5.4. Výše uvedené příklady tvoří základ pro výpočet neurčitého integrálu libovolné lomené racionální funkce. Dělením polynomu polynomem a rozkladem na parciální zlomky lze tyto funkce převést na neurčité integrály typu

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b}, \text{ resp. } \int \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^n}, \text{ resp. } \int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}\,\mathrm{d}x, \text{ resp. } \int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}\,\mathrm{d}x,$$

které již umíte řešit.

1.207. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Nejprve rozložíme polynom x^3-1 na součin polynomů prvního a druhého stupně. Snadno ověříme, že jedním z kořenů polynomu je $x=1$. Daný polynom proto můžeme dělit výrazem $(x-1)$. Je $(x^3-1)\div(x-1) = x^2+x+1$, tedy $(x^3-1) = (x-1)\cdot(x^2+x+1)$. Nyní můžeme integrand rozložit na parciální zlomky s (zatím) neurčenými koeficienty. Je

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}. \tag{1.23}$$

Obě strany rovnosti vynásobíme výrazem $x^3 - 1$. Tím dostaneme

$$1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1).$$

Výrazy na obou stranách upravíme do tvaru polynomu druhého stupně. Je

$$0x^2 + 0x + 1 = (A + B)x^2 + (A - B + C)x + (A - C).$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme soustavu rovnic s neznámými A, B a C

$$\begin{aligned} A + B \phantom{{}+C} &= 0 \\ A - B + C &= 0 \\ A \phantom{{}+B} - C &= 1, \end{aligned}$$

jejímž řešením jsou hodnoty $A = 1/3$, $B = -1/3$, $C = -2/3$. Dosazením vypočtených hodnot do (1.23) dostaneme

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{\frac{1}{3}}{x - 1} + \frac{-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x - 1} - \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}\right).$$

Pro zadaný integrál tak platí

$$\int \frac{1}{x^3 - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x - 1} - \frac{1}{3}\int \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Nyní vypočteme oba integrály z pravé strany předchozí rovnosti. Snadno nahlédneme, že vzhledem k vztahu (1.13) je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x - 1} = \ln|x - 1| + C.$$

Druhý integrál rozložíme na součet dvou zlomků tak, aby jeden z nich obsahoval v čitateli derivaci výrazu v jmenovateli. Je

$$(x^2 + x + 1)' = 2x + 1,$$

proto upravíme výraz $x + 2$ do tvaru, který obsahuje člen $2x + 1$. Je

$$x + 2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}(x + 2) = \frac{1}{2}(2x + 4) = \frac{1}{2}(2x + 1 + 3) = \frac{1}{2}(2x + 1) + \frac{3}{2},$$

resp.

$$\int \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x + 1}.$$

První z integrálů na pravé straně snadno vypočítáme podle vzorce (1.13). Je

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x = \ln|x^2 + x + 1| + C.$$

Pro druhý integrál platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x + 1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \left| \begin{array}{rl} x + \frac{1}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ \mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t}{\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Nyní již můžeme vyjádřit hodnotu původně zadaného neurčitého integrálu. Je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3 - 1} = \frac{1}{3}\ln|x - 1| - \frac{1}{6}\ln|x^2 + x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Pomocí vzorců (1.16) lze výsledek zjednodušit do tvaru

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3 - 1} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Neřešené úlohy

V následujících úlohách vypočtěte zadané neurčité integrály.

1.208. $\displaystyle\int \frac{(6x + 8)\,\mathrm{d}x}{x^2 + 4x - 5}$

1.209. $\displaystyle\int \frac{(8x - 7)\,\mathrm{d}x}{x^2 + 6x - 7}$

1.210. $\displaystyle\int \frac{(2x + 5)\,\mathrm{d}x}{x^2 + 3x + 11}$

1.211. $\displaystyle\int \frac{(3x + 7)\,\mathrm{d}x}{x^2 + 4x + 24}$

1.212. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3 - x^2}$

1.213. $\displaystyle\int \frac{x}{x^3 - 1}\,\mathrm{d}x$

1.214. $\displaystyle\int \frac{(7x - 15)\,\mathrm{d}x}{x^3 - 2x^2 + 5x}$

1.215. $\displaystyle\int \frac{(x^2 + 1)\,\mathrm{d}x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$

1.216. $\displaystyle\int \frac{2x^5 - 2x + 1}{1 - x^4}\,\mathrm{d}x$

1.217. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 4}\,\mathrm{d}x$

1.218. $\displaystyle\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{x^4 - 2x^2 + 1}$

1.219. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3}{(x^2 + 5)^2}\,\mathrm{d}x$

1.220. $\displaystyle\int \frac{(3x^2 + 5x)\,\mathrm{d}x}{(x + 1)(x - 1)^2}$

Výsledky

1.208 $3\ln|x^2 + 4x - 5| - (2/3)\ln|(x - 1)/(x + 5)| + C$, $x \in (\infty, -5)$, $x \in (-5, 1)$, $x \in (1, \infty)$ **1.209** $4\ln|x^2 + 6x - 7| - (31/8)\ln|(x - 1)/(x + 7)| + C$, $x \in (-\infty, -3 - \sqrt{2})$, $x \in (-3 - \sqrt{2}, -3 + \sqrt{2})$, $x \in (-3 + \sqrt{2}, \infty)$, **1.210** $\ln|x^2 + 3x + 11| + (4/35)\operatorname{arctg}((2x + 3)/\sqrt{3})$, $x \in \mathbb{R}$ **1.211** $(3/2)\ln|x^2 + 4x + 24| + (1/2\sqrt{5})\operatorname{arctg}((x + 2)/(2\sqrt{5}))$, $x \in \mathbb{R}$ **1.212** $(1/x) + \ln|1 - 1/x| + C$, $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, 1)$, $x \in (1, \infty)$ **1.213** $(1/3)\ln(|x - 1|/\sqrt{x^2 + x + 1}) + (1/\sqrt{3})\operatorname{arctg}((2x + 1)/\sqrt{3}) + C$, $x \in (-\infty, 1)$, $x \in (1, \infty)$ **1.214** $3\ln(\sqrt{x^2 - 2x + 5}/|x|) + 2\operatorname{arctg}((x - 1)/2) + C$, $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, \infty)$ **1.215** $\ln|x - 1| - (2x - 1)/(x - 1)^2 + C$, $x \in (-\infty, 1)$, $x \in (1, \infty)$ **1.216** $(1/4)\ln|(1 + x)/(1 - t)| - x^2 + (1/2)\operatorname{arctg} x + C$, $x \in (-\infty, -1)$, $x \in (-1, 1)$, $x \in (1, \infty)$ **1.217** $(2/3)\operatorname{arctg}(x/2) - (1/3)\operatorname{arctg} x + C$, $x \in \mathbb{R}$ **1.218** $(2x^3 - 3x)/(2x^2 - 2) - (3/4)\ln|(x - 1)/(x + 1)| + C$, $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, 1)$, $x \in (1, \infty)$ **1.219** $(1/2)\ln(x^2 + 5) + ((25 - 3x)/(x^2 + 5)) - (3/10\sqrt{5})\operatorname{arctg}(x/\sqrt{5}) + C$, $x \in \mathbb{R}$ **1.220** $(-1/2)\ln|x + 1| + (7/2)\ln|x - 1| - (4/(x - 1)) + C$, $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, 1)$, $x \in (1, \infty)$

1.5.4 Integrály s odmocninou lineárního (lomeného) výrazu

V příkladech uvedeného typu předpokládáme, že integrand je vytvořen pomocí operací sčítání, odčítání, násobení a dělení z výrazu x a $\sqrt[n_i]{ax+b}$, kde $a \neq 0$ a $n_i \in \mathbb{N}$, resp. z výrazů x a $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, přičemž platí $n \in \mathbb{N}$ a $ad - bc \neq 0$. V prvním případě většinou volíme substituci $t = \sqrt[s]{ax+b}$, kde s je nejmenší společný násobek čísel n_i. V druhém případě používáme substituci

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

čímž převedeme daný integrál na integrál racionální funkce vzhledem k proměnné t. V některých případech se tak dají řešit i integrály s odmocninou z kvadratického výrazu a to za podmínky, že kvadratický výraz má reálné kořeny.

Řešené úlohy

* **1.221.** Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x$ pro všechna $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Řešení: K výpočtu použijeme substituci $t = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$. Je

$$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow t^2 = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow t^2x + t^2 = x - 1 \Rightarrow t^2 + 1 = x - t^2x \Rightarrow x(1-t^2) = 1 + t^2$$
$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{2t(1-t^2) + 2t(1+t^2)}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{4t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

Dosazením do zadaného integrálu dostaneme

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot t\cdot\frac{4t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 4\int \frac{t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Získali jsme integrál racionální funkce. Nyní integrand rozložíme na parciální zlomky. Je

$$\frac{t^2}{(1-t)(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2}$$
$$t^2 = A(1+t)(1+t^2) + B(1-t)(1+t^2) + (Ct+D)(1-t^2)$$
$$t^2 = t^3(A - B - C) + t^2(A + B - D) + t(A - B + C) + (A + B + D).$$

Poslední rovnost vede k soustavě rovnic s neznámými A, B, C, D:

$$\begin{aligned} A - B - C &= 0\\ A + B - D &= 1\\ A - B + C &= 0\\ A + B + D &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením jsou hodnoty $A = 1/4$, $B = 1/4$, $C = 0$ a $D = -1/2$. Pro integrand jsme tak dostali

$$\frac{t^2}{(1-t)(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-t} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2},$$

a pro zadaný integrál platí

$$\begin{aligned} 4\int \frac{t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t &= 4\left(\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{1-t} + \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right) =\\ &= \int\frac{\mathrm{d}t}{1-t} + \int\frac{\mathrm{d}t}{1+t} - 2\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} =\\ &= -\ln|1-t| + \ln|1+t| + 2\operatorname{arctg} t = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + 2\operatorname{arctg} t. \end{aligned}$$

Zadaný integrál dostaneme dosazením výrazu $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ namísto t. Je

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right| + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} =\\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right| + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} =\\ &= \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C. \end{aligned}$$

1.222. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ dx pro všechna $x \in (0, \infty)$.

Řešení: Integrand obsahuje druhou a třetí odmocninu proměnné x. Nejmenším společným násobkem těchto čísel je číslo šest. Použijeme proto substituci $t = \sqrt[6]{x}$. Potom je $x = t^6$ a $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$. Dosazením do zadaného integrálu dostaneme

$$\begin{aligned} \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} &= \int\frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int\frac{t^5}{t^2(t+1)}\,\mathrm{d}t = 6\int\frac{t^3}{t+1}\,\mathrm{d}t = 6\int t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t =\\ &= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - \ln(\sqrt[6]{x}+1) + C. \end{aligned}$$

* **1.223.** Vypočtěte integrál $\displaystyle\int\frac{x}{(2-x)\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$ pro všechna $x \in (-2, 2)$.

Řešení: Kvadratický výraz pod odmocninou má reálné kořeny. Proto je možné ho upravit do tvaru, ve kterém bude pod odmocninou lineárně lomený výraz. Pro $x \in (-2, 2)$ je

$$\begin{aligned} \frac{x}{(2-x)\sqrt{4-x^2}} &= \frac{x}{(2-x)\sqrt{(2-x)(2+x)}} = \frac{x}{(2-x)\sqrt{(2-x)^2\cdot\frac{2+x}{2-x}}} =\\ &= \frac{x}{(2-x)^2\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}}. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že při výpočtu integrálu použijeme substituci

$$t = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}.$$

Vyjádříme, čemu se rovná veličina x. Je

$$t = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \Rightarrow t^2 = \frac{2+x}{2-x} \Rightarrow t^2(2-x) = 2+x \Rightarrow 2t^2 - t^2x = 2+x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 2 = t^2x + x \Rightarrow 2(t^2-1) = x(t^2+1) \Rightarrow x = 2\cdot\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

Pro $\mathrm{d}x$ platí

$$\mathrm{d}x = 2\cdot\left(\frac{2t(t^2+1) - 2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{8t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Dosazením do původního integrálu dostaneme

$$\int \frac{x}{(2-x)\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{(2-x)^2\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\cdot\frac{t^2-1}{t^2+1}\cdot\frac{8t}{(t^2+1)^2}}{\left[2\cdot\left(1-\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)\right]^2\cdot t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 4\int \frac{t(t^2-1)}{(t^2+1)^3\cdot t\cdot\left(\frac{(t^2+1)-(t^2-1)}{t^2+1}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{t^2+1-2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2+1}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t - 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} =$$

$$= t - 2\operatorname{arctg} t = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} + C.$$

Neřešené úlohy

V následujících úlohách vypočtěte zadané integrály.

* **1.224.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

* **1.225.** $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$

* **1.226.** $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}\,\mathrm{d}x$

* **1.227.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}+1}{2-x}\,\mathrm{d}x$

Výsledky

1.224 $-\frac{\sqrt{2x+1}}{x} + \ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right| + C$, $x \in (-1/2, 0) \cup (0, \infty)$ **1.225** $(3/2)\sqrt[3]{(1+x)^2} + C$, $x \in (-1, \infty)$ **1.226** $-2\sqrt{(x-2)/x} + \ln\left|2-x-\sqrt{x(x-2)}\right| + C$, $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ **1.227** $\ln(3/(2-x)) - 2\operatorname{arctg}\sqrt{(2-x)/(x+1)} + C$, $x \in (-1, 2)$

Kapitola 2

Určitý integrál

V Definici **1.1.1** na straně 1 jsme zavedli pojem primitivní funkce na otevřeném intervalu I. Nyní tento pojem využijeme k zavedení tzv. Newtonova určitého integrálu.

Definice 2.0.5. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu $(a,b) \subset I$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Potom symbol $(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nazýváme (*Newtonův*) *určitý integrál* a definujeme jej vztahem

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{2.1}$$

Symbol (N) v Definici **2.0.5** značí adjektivum Newtonův. Kromě Newtonova integrálu je možné definovat ještě další typy integrálů, jako jsou např. Riemannův integrál, Lebesgueův integrál, atd. Smyslem zavedení dalších typů integrálů je skutečnost, že v případě některých spojitých elementárních funkcí není možné vyjádřit v uvažovaném intervalu (a,b) příslušnou primitivní funkci ve formě konečného součtu elementárních funkcí. Takové funkce jsou například $f(x) = e^{x^2}$, $f(x) = e^{-x^2}$, $f(x) = x^2e^{-x^2}$, $f(x) = 1/\ln x$, $f(x) = \sin(x^2)$, a další. Protože nadále budeme uvažovat pouze Newtonův určitý integrál, učiníme na tomto místě dohodu, že označení (N) spolu s přídavným jménem Newtonův v dalším textu vynecháme. Na závěr odstavce poznamenejme, že pokud pro danou funkci existuje na intervalu (a,b) Newtonův určitý integrál společně s jiným typem určitého integrálu, potom se jejich hodnoty rovnají.

Místo výrazu $F(b) - F(a)$ často píšeme symbol $\left[F(x)\right]_a^b$. Je tedy například

$$\begin{aligned}\left[x^3 + 3x + C\right]_2^4 &= (4^3 + 3\cdot 4 + C) - (2^3 + 3\cdot 2 + C)\\ &= 4^3 + 3\cdot 4 + C - 2^3 - 3\cdot 2 - C\\ &= 4^3 + 3\cdot 4 - 2^3 - 3\cdot 2\\ &= 64 + 12 - 8 - 6\\ &= 62\end{aligned}$$

Uvedený příklad ukazuje, že při výpočtu určitého integrálu není nutné uvažovat integrační konstantu C, neboť tato se v rozdílu $F(b) - F(a)$ vždy odečte.

Při výpočtu určitých integrálů lze použít následující vzorce (za předpokladu, že uvedené určité integrály v daných mezích skutečně existují).

$$\int_a^b c\, f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{2.3}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.4}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{pro všechna } c \in (a, b) \tag{2.5}$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.6}$$

Řešené úlohy

2.1. Vypočtěte hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Nejprve vypočteme primitivní funkci k integrandu. Je $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Dosazením do vzorce (2.1) dostaneme

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}.$$

2.2. Vypočtěte hodnotu určitého integrálu

$$\int_2^5 x^2 + 2x - 3\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Primitivní funkcí k integrandu je funkce $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$. Dosazením do vzorce (2.1) dostaneme

$$\int_2^5 x^2 + 2x - 3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right]_2^5 = \left(\frac{5^3}{3} + 5^2 - 3\cdot 5\right) - \left(\frac{2^3}{3} + 2^2 - 3\cdot 2\right)$$
$$= \left(\frac{125}{3} + 25 - 15\right) - \left(\frac{8}{3} + 4 - 6\right) = 51.$$

2.3.

$$\int_1^2 \left(7 - \frac{5}{x^3}\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 (7 - 5x^{-3})\,\mathrm{d}x = \left[7x - 5\cdot\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^2 = \left[7x + \frac{5}{2x^2}\right]_1^2 =$$
$$= \left(7\cdot 2 + \frac{5}{2\cdot 2^2}\right) - \left(7\cdot 1 + \frac{5}{2\cdot 1^2}\right) = \frac{41}{8}$$

2.4.

$$\int_4^9 5\sqrt{x^3}\,\mathrm{d}x = 5\int_4^9 x^{3/2}\,\mathrm{d}x = 5\left[\frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_4^9 = 2\left[\sqrt{x^5}\right]_4^9 = 2\left(\sqrt{9^5} - \sqrt{4^5}\right) = 2\,(3^5 - 2^5) =$$
$$= 422$$

2.5. $\displaystyle\int_1^4 \frac{2}{3\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_1^4 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\cdot\left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_1^4 = \frac{4}{3}\left[\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{4}{3}\left(\sqrt{4} - \sqrt{1}\right) = \frac{4}{3}$

2.6. $\displaystyle\int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x = \left[\sin x\right]_0^\pi = \sin(\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = 0$

2.7. $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \left[-\cos x\right]_0^\pi = (-\cos(\pi)) - (-\cos(0)) = (-(-1)) - (-1) = 2$

2.8. $\displaystyle\int_{-1}^1 2^x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_{-1}^1 = \frac{2^1}{\ln 2} - \frac{2^{-1}}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{2\ln 2} = \frac{3}{2\ln 2}$

2.9. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\operatorname{arctg} x\right]_{-1}^0 = \operatorname{arctg}(0) - \operatorname{arctg}(-1) = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

2.10.

$$\int_0^{\pi/4} x^3 + 4 + 2\cos x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}\cdot x^4 + 4x + 2\sin x\right]_0^{\pi/4} =$$
$$= \left(\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 + 4\cdot\frac{\pi}{4} + 2\sin\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 0^4 + 4\cdot 0 + 2\sin 0\right) =$$
$$= \left(\frac{\pi^4}{4^5} + \pi + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0 + 0 + 0) = \frac{\pi^4}{4^5} + \pi + \sqrt{2}$$

2.11. Vypočtěte hodnotu určitého integrálu

$$\int_{-2}^1 |x|\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Vyjdeme z definice absolutní hodnoty reálného čísla $|x|$, podle níž je

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Pro $x \in (-2, 0)$ je podle uvedené definice $|x| = -x$, pro $x \in (0, 1)$ je $|x| = x$. Proto upravíme integrál podle vzorce (2.5) do tvaru

$$\int_{-2}^1 |x|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 |x|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |x|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 (-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x.$$

Potom je

$$\int_{-2}^1 |x|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 (-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$
$$= -\left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) + \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = -(0 - 2) + \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{5}{2}$$

Neřešené úlohy

V následujících příkladech vypočtěte hodnotu zadaných určitých integrálů.

2.12. $\int_0^2 5x^2 + 3x \,\mathrm{d}x$ **2.15.** $\int_1^4 x^2 + 4x + 5 \,\mathrm{d}x$ **2.18.** $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4} \,\mathrm{d}x$

2.13. $\int_0^{\pi/4} \sin x - 2\cos x \,\mathrm{d}x$ **2.16.** $\int_{-1}^3 3 + 2x - x^2 \,\mathrm{d}x$ **2.19.** $\int_1^{10} \frac{2}{x} \,\mathrm{d}x$

2.14. $\int_0^1 3^x - 2^x \,\mathrm{d}x$ **2.17.** $\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ **2.20.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^x}{4} + 2\sin x \,\mathrm{d}x$

Výsledky

2.12 $58/3$, **2.13** $1 - \sqrt{2} - \sqrt{2}/2$, **2.14** $(2/\ln 3) - (1/\ln 2)$, **2.15** 66, **2.16** $32/3$, **2.17** 4,
2.18 $-3/8$, **2.19** $\ln 100$, **2.20** $(e^{\pi/2} - e^{-\pi/2})/4$.

2.1 Použití metody per partes a substituce v určitém integrálu

Z předchozí kapitoly je zřejmé, že při výpočtu určitého integrálu můžeme postupovat
tak, že nejprve nalezneme příslušnou primitivní funkci a pak dosadíme meze určitého
integrálu. Pokud k výpočtu primitivní funkce použijeme metodu per partes, resp. substi-
tuční metodu, lze při výpočtu použít následující dvě věty.

Věta 2.1.1 (Metoda per partes pro určitý integrál). *Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají*
spojité derivace pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Potom platí

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.7}$$

Věta 2.1.2 (Substituční metoda pro určitý integrál). *Nechť $y = f(t)$ je spojitá*
funkce na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ a nechť funkce $g(x)$ má spojitou derivaci pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$,
platí $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$ a je $\alpha \leq g(x) \leq \beta$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Potom je

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.8}$$

Poznamenejme, že ve Větě **2.1.2** je zmíněn interval $\langle a, b\rangle$, proto předpokládáme, že
je $a < b$. Věta však za příslušných předpokladů platí i pro $a > b$. Na obou stranách
vzorce (2.8) pak stačí vyměnit integrační meze dolní za horní.

Řešené úlohy

2.21. Vypočtěte hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Ukážeme dva možné způsoby výpočtu. Nejprve vypočteme příslušný neurčitý
integrál. Je

$$\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \left| \begin{array}{l} 1 + x^2 = t \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Potom je

$$\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{1+x^2}\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{1+1^2}\right) - \left(-\frac{1}{1+0^2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Druhý způsob výpočtu spočívá ve využití Věty **2.1.2** a vzorce (2.8). Při výpočtu urči-
tého integrálu opět zavedeme substituci $g(x) = t = 1 + x^2$. Meze určitého integrálu po
substituci budou $\alpha = g(a) = g(0) = 1 + 0^2 = 1$ a $\beta = g(b) = g(1) = 1 + 1^2 = 2$. Snadno
ověříme, že pro všechna $x \in \langle 0, 1\rangle$ jsou splněny předpoklady věty. Funkce $f(t) = 1/t^2$ je
spojitá v intervalu $\langle 1, 2\rangle$. Funkce $g(x) = 1 + x^2$ a $g'(x) = 2x$ jsou spojité na $\langle 0, 1\rangle$ a pro
všechna $x \in \langle 0, 1\rangle$ je $1 \leq g(x) = 1 + x^2 \leq 2$. Proto je

$$\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^2}}_{f(g(x))} \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{f(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^2 = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Oba postupy vedou k stejné hodnotě určitého integrálu

$$\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

2.22. Vypočtěte hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^4 \frac{20x}{\sqrt{1+5x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Zavedeme substituci $1 + 5x^2 = t$; pro dolní mez α je $\alpha = 1 + 5 \cdot 0^2 = 1$ a pro horní
mez β platí $\beta = 1 + 5 \cdot 4^2 = 81$. Opět snadno ověříme, že jsou splněny všechny podmínky
Věty **2.1.2**. S použitím vzorce (2.8) dostaneme

$$\int_0^4 \frac{20x}{\sqrt{1+5x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{1+5x^2}} \cdot 10x\,\mathrm{d}x = 2\int_1^{81} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\int_1^{81} t^{-1/2}\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_1^{81} =$$
$$= 4\left[\sqrt{t}\right]_1^{81} = 4\left(\sqrt{81} - \sqrt{1}\right) = 4 \cdot 8 = 32.$$

2.23. Vypočtěte hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^{16} \frac{20x}{\sqrt{1+5x}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Zavedeme substituci $\sqrt{1+5x} = t$; pro dolní mez platí $\alpha = \sqrt{1+5\cdot 0} = 1$ a pro horní mez dostaneme $\beta = \sqrt{1+5\cdot 16} = \sqrt{81} = 9$. Je

$$\int_0^{16} \frac{20x}{\sqrt{1+5x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} \sqrt{1+5x} &= t \\ 1+5x &= t^2 \\ x &= (t^2-1)/5 \\ \mathrm{d}x &= \frac{2}{5}t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int_1^9 \frac{20\cdot\frac{1}{5}(t^2-1)}{t}\cdot\frac{2}{5}t\,\mathrm{d}t = \frac{40}{25}\int_1^9 t^2-1\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{8}{5}\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_1^9 = \frac{8}{5}\left[\left(\frac{9^3}{3}-9\right)-\left(\frac{1^3}{3}-1\right)\right] = \frac{5632}{15}$$

2.24. Vypočtěte hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Zavedeme substituci $1+e^x = t$; potom je $e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, pro dolní mez α dostaneme $\alpha = 1+e^0 = 2$ a pro horní mez β platí $\beta = 1+e^1 = 1+e$. Opět snadno ověříme, že jsou splněny všechny podmínky Věty **2.1.2**. Potom je

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int_2^{1+e} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \big[\ln|t|\big]_2^{1+e} = \ln(1+e) - \ln 2 = \ln\frac{1+e}{2}.$$

Poznámka: Při úpravě výsledné funkce jsme použili vzorec pro práci s logaritmy

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^+,\ a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}.$$

2.25. Vypočtěte hodnotu určitého integrálu $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Zavedeme substituci $e^x = t$; potom je $e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, pro dolní mez α je $\alpha = e^0 = 1$ a pro horní mez β platí $\beta = e^1 = e$. Vzhledem k tomu, že funkce e^x je rostoucí na $\mathbb{R}$, snadno ověříme, že jsou splněny všechny podmínky Věty **2.1.2**. S použitím vzorce (2.8) dostaneme

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \big[\operatorname{arctg} t\big]_1^e = \operatorname{arctg} e - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}.$$

2.26. Vypočtěte hodnotu určitého integrálu $\displaystyle\int_0^{e-1} \frac{\ln^2(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Zavedeme substituci $\ln(1+x) = t$. Potom pro dolní mez α je $\alpha = \ln(1+0) = 0$ a pro horní mez β platí $\beta = \ln(1+e-1) = \ln e = 1$.

$$\int_0^{e-1} \frac{\ln^2(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{e-1} \ln^2(1+x)\frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \left| \begin{array}{rl} \ln(1+x) &= t \\ \frac{\mathrm{d}x}{1+x} &= \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

2.27. Vypočtěte hodnotu určitého integrálu $\displaystyle\int_{\pi/12}^{\pi/6} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 3x}$.

Řešení: Zvolíme substituci $3x = t$. Potom pro dolní mez platí $\alpha = 3\cdot\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4}$ a pro horní mez β je $\beta = 3\cdot\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$. Dosazením do (2.8) dostaneme:

$$\int_{\pi/12}^{\pi/6} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 3x} = \left| \begin{array}{rl} 3x &= t \\ 3\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &= \mathrm{d}t/3 \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = \big[-\operatorname{cotg} t\big]_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} - \operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{3}\cdot(0-1) = \frac{1}{3}.$$

2.28. Vypočtěte hodnotu určitého integrálu $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Zavedeme substituci $\sin x = t$. Potom pro dolní mez α je $\alpha = \sin 0 = 0$ a pro horní mez β platí $\beta = \sin(\pi/2) = 1$. Potom je

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos^2 x\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x(1-\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{rl} \sin x &= t \\ \cos x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int_0^1 t^3(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^3 - t^5\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6}\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^6}{6}\right) - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^6}{6}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Poznámka: Při výpočtu byla použita známá rovnost mezi goniometrickými funkcemi

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Použitá substituce se opírá o často využívanou možnost vyjádřit funkci $\sin x$ pomocí funkce $\cos x$ a naopak.

2.29. Vypočtěte hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Zavedeme substituci $\operatorname{arctg} x = t$. Potom pro dolní mez α je $\alpha = \operatorname{arctg} 0 = 0$ a pro horní mez platí $\beta = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$.

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \left|\begin{array}{rl} \operatorname{arctg} x &= t \\ \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int_0^{\pi/4} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} t^{1/2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{2}{3}\left[\sqrt{t^3}\right]_0^{\pi/4} = \frac{2}{3}\left[\left(\sqrt{(\pi/4)^3} - \sqrt{0^3}\right)\right] = \frac{\sqrt{\pi^3}}{12}.$$

* **2.30.** Vypočtěte hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: V tomto příkladu se vyplatí převést integrál ve tvaru $f(x)$ do tvaru $f(g(t))g'(t)$. Zavedeme substituci $x = \sin t$; potom je $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$. Dolní mez α získáme řešením rovnice $0 = \sin\alpha$, je tedy $\alpha = 0 + k\pi$ a horní mez β je řešením rovnice $1 = \sin\beta$, je tedy $\beta = \pi/2 + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Zvolíme $k = 0$, tím dostaneme $t \in \langle 0, \pi/2\rangle$. Protože funkce $\sin t$ i $\cos t$ jsou spojité a monotónní na intervalu $\langle 0, \pi/2\rangle$ lze použít Větu **2.1.2**. Dosazením do vzorce (2.8) dostaneme

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{rl} 2t &= w \\ 2\,\mathrm{d}t &= \mathrm{d}w \end{array}\right| =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1+\cos w}{4}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{4}\left[w + \sin w\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4}\left[(\pi + \sin\pi) - (0 + \sin 0)\right] = \frac{\pi}{4}.$$

Poznámka: Při přechodu z proměnné t na w jsme použili substituci $2t = w$, je tedy $2\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}w$ a pro nové meze platí $\alpha = 2\cdot 0 = 0$ a $\beta = 2\cdot\pi/2 = \pi$. Dále byla použita rovnost $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$, která platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

2.31. Vypočtěte hodnotu určitého integrálu $\displaystyle\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Opět použijeme metodu per partes. Položíme $u(x) = \ln x$ a $v'(x) = 1$. Potom je

$$\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = \ln x, & v' = 1 \\ u' = 1/x, & v = x \end{array}\right| = \left[x\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x = (e\cdot\ln e - 1\cdot\ln 1) - \left[x\right]_1^e =$$

$$= (e - 0) - (e - 1) = 1.$$

2.32. Vypočtěte hodnotu určitého integrálu $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: K výpočtu použijeme metodu per partes a položíme $u(x) = x$ a $v'(x) = \cos x$. Potom je

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = x, & v' = \cos x \\ u' = 1, & v = \sin x \end{array}\right| = \left[x\sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2} - 0\cdot\sin 0\right) - \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{\pi - 2}{2}.$$

2.33. Vypočtěte hodnotu určitého integrálu $\displaystyle\int_0^1 x\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: I v tomto příkladu použijeme metodu per partes. Položíme $u(x) = \operatorname{arctg} x$ a $v'(x) = x$. Potom je

$$\int_0^1 x\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x, & v' = x \\ u' = \dfrac{1}{x^2+1}, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right| = \left[\frac{x^2}{2}\cdot\operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Je $\left[\dfrac{x^2}{2}\cdot\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \left(\dfrac{1^2}{2}\cdot\operatorname{arctg} 1 - \dfrac{0^2}{2}\cdot\operatorname{arctg} 0\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{4} - 0\cdot 0 = \dfrac{\pi}{8}$. Dále platí

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \left[x\right]_0^1 - \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1 =$$

$$= (1 - 0) - (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = 1 - \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Spojením obou výsledků dostaneme $\displaystyle\int_0^1 x\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi - 2}{4}$.

Neřešené úlohy

V následujících úlohách vypočtěte hodnoty zadaných určitých integrálů.

2.34. $\displaystyle\int_0^2 e^{3x}\,\mathrm{d}x$

2.35. $\displaystyle\int_{-1}^0 (3x+4)^3\,\mathrm{d}x$

2.36. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} x^2\sin x\,\mathrm{d}x$

2.37. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{4x}+5}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x$

2.38. $\displaystyle\int_3^{12} x\sqrt{3x^2+9}\,\mathrm{d}x$

2.39. $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{x-2}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$

2.40. $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$

2.41. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+3}\,\mathrm{d}x$

2.42. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

Výsledky

2.34 $(e^6 - 1)/3$, **2.35** $85/4$, **2.36** $\pi/\sqrt{3} - \pi^2/18 - 1$, **2.37** $e^2/2 - 5/(2e^2) + 2$ **2.38** 1005
2.39 $\ln 4$ **2.40** $2\ln 2 - 1$ **2.41** $\ln(4e/(3e+1))$ **2.42** $1/3$

2.2 Nevlastní integrál vlivem meze

Nevlastním integrálem vlivem meze rozumíme integrál, u kterého alespoň jedna jeho mez leží v nekonečnu. Značíme je symboly

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{resp.} \quad \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{resp.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definice 2.2.1. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je integrovatelná v každém intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a že existuje konečná (vlastní) limita

$$\lim_{t\to\infty} \int_{a}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.9}$$

Potom říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje (je konvergentní) a pro jeho hodnotu platí rovnost

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_{a}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.10}$$

V případě, že neexistuje konečná limita (2.9) (tj. limita (2.9) neexistuje, nebo je nevlastní), říkáme, že nevlastní integrál diverguje (je divergentní).

Analogicky by se definovala konvergence nevlastního integrálu $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Při výpočtu postupujeme tak, že nejprve vyjádříme určitý integrál $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ jakožto funkci horní meze t (viz příklad **3.6**) a poté vypočteme limitu této funkce pro $t \to \infty$.

Při výpočtu nevlastního integrálu ve tvaru

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.11}$$

postupujeme tak, že zvolíme vhodný bod $c \in \mathbb{R}$ a vypočteme hodnoty integrálů

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.12}$$

Konvergují-li oba integrály v (2.12), potom říkáme, že integrál (2.11) konverguje a platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.13}$$

Jestliže alespoň jeden z integrálů v (2.12) diverguje, potom říkáme, že integrál (2.11) neexistuje.

V případě, že funkce $f(x)$ je lichá, platí (v případě konvergence obou integrálů) rovnost $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, (Proč?) a pro nevlastní integrál pak dostaneme rovnost

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.14}$$

V případě, že funkce $f(x)$ je sudá, platí (v případě existence obou integrálů) rovnost $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, (Proč?) a pro nevlastní integrál pak dostaneme rovnosti

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.15}$$

Řešené úlohy

2.43. Vypočtěte hodnotu nevlastního integrálu

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}. \tag{2.16}$$

Řešení: Integrál (2.16) představuje nevlastní integrál vlivem (horní) meze. Již víme, že funkce $f(x) = 1/x^2$ je integrovatelná na každém intervalu $\langle 1, t\rangle$, kde $1 < t$. Nejprve vyjádříme určitý integrál jakožto funkci horní meze. Tím dostaneme

$$\int_{1}^{t} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{1}^{t} x^{-2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^t = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \left(-\frac{1}{t}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{t}.$$

Dosazením do (2.10) dostaneme

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{t\to\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

Existuje konečná limita s hodnotou 1 a zadaný nevlastní integrál tedy konverguje a jeho hodnota je rovna 1.

2.44. Vypočtěte hodnotu nevlastního integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}. \tag{2.17}$$

Řešení: Funkce $f(x) = 1/\sqrt{x}$ je opět integrovatelná na každém intervalu $(1, t)$. Vyjádříme určitý integrál jakožto funkci horní meze. Je

$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int_1^t x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_1^t = 2\left[\sqrt{x}\right]_1^t = 2\left(\sqrt{t} - 1\right).$$

Vypočteme hodnotu příslušné limity. Je

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2 \lim_{t\to\infty} \left(\sqrt{t} - 1\right) = \infty.$$

Tato limita je nevlastní, proto není splněna podmínka existence vlastní limity z Definice **2.2.1** a nevlastní integrál (2.17) diverguje.

2.45. Zjistěte, pro jaké hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ konverguje nevlastní integrál

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}. \tag{2.18}$$

Řešení: Funkce $f(x) = 1/x^p$ je integrovatelná na intervalu $(1, t)$ pro všechny hodnoty $p \in \mathbb{R}$. Pro všechna $p \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ je

$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \int_1^t x^{-p}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^t.$$

Nechť je $p \in (1, \infty)$. Potom platí

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^t = \frac{1}{1-p} \cdot \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^t = \\ &= \frac{1}{1-p} \cdot \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t^{p-1}} - \frac{1}{1^{p-1}}\right) = \frac{1}{p-1} \cdot \lim_{t\to\infty} \left(1 - \frac{1}{t^{p-1}}\right) = \frac{1}{p-1},\end{aligned}$$

neboť pro $p \in (1, \infty)$ je $\lim\limits_{t\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{t^{p-1}}\right) = 1$. (Proč?) Pro $p \in (1, \infty)$ integrál konverguje a je

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{p-1}, \qquad p \in (1, \infty).$$

Pro $p \in (-\infty, 1)$ je

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p} \cdot \lim_{t\to\infty} \left[x^{1-p}\right]_1^t = \frac{1}{1-p} \cdot \lim_{t\to\infty} \left(t^{1-p} - 1\right) = \infty,$$

neboť pro $p \in (-\infty, 1)$ je $\lim\limits_{t\to\infty} \left(t^{1-p} - 1\right) = \infty$. Pro $p \in (-\infty, 1)$ neexistuje vlastní limita a integrál diverguje. Pro $p = 1$ je

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{t\to\infty} \left[\ln x\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \left(\ln t - \ln 1\right) = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty.$$

Proto pro $p \in (-\infty, 1)$ integrál (2.18) diverguje.

2.46. Vypočtěte hodnotu nevlastního integrálu

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2}. \tag{2.19}$$

Řešení: Integrand je funkce spojitá na $\mathbb{R}$, proto je také na $\mathbb{R}$ integrovatelná. Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je

$$f(-x) = \frac{1}{1 + (-x)^2} = \frac{1}{1 + x^2} = f(x).$$

Funkce $f(x)$ je sudá, proto můžeme k výpočtu hodnoty integrálu použít vzorec (2.15). Je

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} &= 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = 2 \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = 2 \lim_{t\to\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^t = 2 \lim_{t\to\infty} (\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} 0) = \\ &= 2 \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg} t = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi,\end{aligned}$$

neboť $\operatorname{arctg} 0 = 0$ a $\lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{arctg} t = \pi/2$. Integrál (2.19) tedy konverguje a jeho hodnota je rovna π.

2.47. Vypočtěte hodnotu nevlastního integrálu

$$\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x. \tag{2.20}$$

Řešení: Funkce $\cos x$ je integrovatelná na libovolném intervalu $(0, b)$, kde $b > 0$. Limita

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left[\sin x\right]_0^t = \lim_{t\to\infty} \left(\sin t - \sin 0\right) = \lim_{t\to\infty} \sin t$$

ovšem neexistuje. Proto integrál (2.20) diverguje.

2.48. Vypočtěte hodnotu nevlastního integrálu

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x. \tag{2.21}$$

Řešení: Integrand je funkce spojitá na $\mathbb{R}$, je proto integrovatelná na $\mathbb{R}$ a tedy i na množině $(0, \infty)$. Pro primitivní funkci k integrandu platí

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} -x = & s \\ -\mathrm{d}x = & \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}x = & -\mathrm{d}s \end{array} \right| = -\int e^{s}\,\mathrm{d}s = -e^{s} = -e^{-x}.$$

Nyní dosadíme meze do primitivní funkce. Tím dostaneme

$$\int_0^{t} e^{-x}\,\mathrm{d}x = -\left[e^{-x}\right]_0^t = -\left(e^{-t} - e^{0}\right) = 1 - e^{-t}.$$

Nyní již můžeme snadno vypočítat hodnotu nevlastního integrálu (2.21). Je

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left(1 - e^{-t}\right) = 1 - 0 = 1,$$

neboť $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t} = 0$. Integrál (2.21) konverguje a jeho hodnota je rovna jedné.

2.49. Vypočtěte hodnotu nevlastního integrálu

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x. \tag{2.22}$$

Řešení: Integrand je spojitá funkce na $\mathbb{R}$, je tedy integrovatelná na $\mathbb{R}$ a tedy i na intervalu $(0, \infty)$. Dvojí integrací per partes dostaneme

$$\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right).$$

Potom je

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = -\lim_{t\to\infty} \left[e^{-x}(x^2 + 2x + 2)\right]_0^t =$$

$$= -\lim_{t\to\infty} \left(e^{-t}(t^2 + 2t + 2) - e^{0}(0^2 + 2\cdot 0 + 2)\right) = 2 - \lim_{t\to\infty} \frac{t^2 + 2t + 2}{e^t}.$$

Hodnotu limity v poslední rovnosti vpravo zjistíme opakovaným použitím l'Hospitalova pravidla. (Nezapomeňte přitom ověřit podmínky pro použití l'Hospitalova pravidla.) Je $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^2}{e^t} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{2t}{e^t} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{2}{e^t} = 0$. Proto je $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^2 + 2t + 2}{e^t} = 0$ a platí

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x = 2.$$

Integrál (2.22) konverguje a jeho hodnota je rovna dvěma.

2.50. Vypočtěte hodnotu nevlastního integrálu

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 2}. \tag{2.23}$$

Řešení: Integrand je funkce spojitá na $\mathbb{R}$, proto je tato funkce integrovatelná na $\mathbb{R}$ a tedy i na množině $(0, \infty)$. Nejprve najdeme primitivní funkci k integrandu. Je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2 + 1} = \left| \begin{array}{rl} x + 1 = & s \\ \mathrm{d}x = & \mathrm{d}s \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}s}{s^2 + 1} = \operatorname{arctg} s = \operatorname{arctg}(x + 1).$$

Pro integrál (2.23) tak platí

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 2} = \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 2} = \lim_{t\to\infty} \left[\operatorname{arctg}(x + 1)\right]_0^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\operatorname{arctg}(t + 1) - \operatorname{arctg} 1\right) = \lim_{t\to\infty} \left(\operatorname{arctg}(t + 1)\right) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

Při výpočtu jsme využili rovnosti $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$ a $\lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{arctg} t = \pi/2$.

2.51. Vypočtěte hodnotu nevlastního integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 2}. \tag{2.24}$$

Řešení: Z předchozího příkladu víme, že integrand je funkce integrovatelná na $\mathbb{R}$. Snadno ověříme, že integrand není ani sudá, ani lichá funkce, nelze proto použít vzorce (2.14), resp. (2.15). Hledejme tedy vhodný bod $c \in \mathbb{R}$, kterým rozdělíme reálnou osu na dva intervaly $(-\infty, c)$ a (c, ∞). Volba bodu c může být celkem libovolná, nicméně v tomto případě se nabízí využít fakt, že ve jmenovateli integrandu je kvadratická funkce, která má po doplnění na čtverec tvar $f(x) = (x+1)^2 + 1$. Z toho plyne, že graf funkce je osově souměrný podle svislé přímky, která protíná osu x pro $x = -1$. Platí proto rovnost

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 2} = \int_{-1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 2},$$

tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 2} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 2} + \int_{-1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 2} = 2\int_{-1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 2}.$$

S využitím výsledků z příkladu **2.50** dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = 2\lim_{t\to\infty}\Big[\operatorname{arctg}(x+1)\Big]_{-1}^{t} = 2\lim_{t\to\infty}\Big(\operatorname{arctg}(t+1)-\operatorname{arctg}0\Big) =$$

$$= 2\lim_{t\to\infty}\operatorname{arctg}(t+1) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Integrál (2.24) konverguje a jeho hodnota je rovna π.

2.52. Vypočtěte hodnotu nevlastního integrálu

$$\int_{-\infty}^{0} x\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{2.25}$$

Řešení: Integrand je funkce integtovatelná na množině $\langle 0, b\rangle$ pro libovolné $b > 0$. Vypočteme primitivní funkci k integrandu. Je

$$\int x\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rl} -x^2 &= s \\ -2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}s \end{array}\right| = -\frac{1}{2}\int e^s\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}e^s = -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

Pro nevlastní integrál (2.25) dostaneme

$$\int_{-\infty}^{0} x\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} x\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\lim_{t\to-\infty}\Big[e^{-x^2}\Big]_t^0 = -\frac{1}{2}\lim_{t\to-\infty}\Big(e^0-e^{-t^2}\Big) = -\frac{1}{2},$$

neboť je $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{-t^2} = 0$. Integrál (2.25) konverguje a jeho hodnota je $-1/2$.

2.53. Vypočtěte hodnotu nevlastního integrálu

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{2.26}$$

Řešení: Funkce $\frac{x}{1+x^2}$ je integrovatelná na intervalu $\langle 0, b\rangle$, kde $b > 0$. Vypočteme primitivní funkci k integrandu. Je

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rl} 1+x^2 &= t \\ 2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right).$$

Pro nevlastní integrál (2.26) pak platí

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\Big[\ln\left(1+x^2\right)\Big]_0^t = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\Big(\ln\left(1+t^2\right)-\ln 1\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\ln(1+t^2) = \infty.$$

Limita (2.9) pro $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ je nevlastní, proto integrál (2.26) diverguje.

2.54. Vypočtěte hodnotu nevlastního integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{2.27}$$

Řešení: Integrand je stejný jako v předchozím příkladě. Pro všechna $x\in\mathbb{R}$ je

$$f(-x) = (-x)e^{-(-x)^2} = (-x)e^{-x^2} = (-1)\,x\,e^{-x^2} = -f(x).$$

Integrand je tedy lichá funkce a můžeme použít vzorec (2.14). Je

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0.$$

2.55. Vypočtěte hodnotu nevlastního integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{2.28}$$

Řešení: Funkce je integrovatelná pro všechna $x\in\mathbb{R}$. Je

$$f(-x) = \frac{(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-x}{1+x^2} = -\frac{x}{1+(-x)^2} = -f(x).$$

Nabízí se tedy použít vzorec (2.14) a prohlásit integrál (2.28) za konvergentní s hodnotou 0. Ovšem to by byla chyba, neboť z příkladu **2.53** víme, že integrál (2.26) diverguje. Proto musíme prohlásit integrál (2.28) za divergentní, neboť není splněna základní podmínka pro jeho existenci (tj. konvergence obou integrálů $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$).

Neřešené úlohy

V následujících příkladech vypočtěte hodnotu zadaných nevlastních integrálů.

2.56. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

2.57. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

2.58. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

2.59. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$

2.60. $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

2.61. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$

2.62. $\displaystyle\int_1^{\infty}\ln x\,\mathrm{d}x$

* **2.63.** $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$

V následujících úlohách vypočtěte, pro jaké p konvergují zadané nevlastní integrály.

2.64. $\int_0^{\infty} e^{-px}\,\mathrm{d}x,\ p \in \mathbb{R}$ **2.65.** $\int_0^{\infty} x^p e^{-x}\,\mathrm{d}x,\ p \in \mathbb{N}$ **2.66.** $\int_0^{\infty} e^{-px}\sin x\,\mathrm{d}x,\ p \in \mathbb{R}$

Výsledky

2.56 $e-1$, **2.57** $2\pi/\sqrt{3}$, **2.58** diverguje, **2.59** $2\pi/\sqrt{3}$, **2.60** diverguje, **2.61** diverguje, **2.62** diverguje, **2.64** pro $p > 0$ konverguje k hodnotě $1/p$, pro $p \leq 0$ diverguje, **2.65** konverguje pro všechna $p \in \mathbb{N}$ k hodnotě $(p-1)!$, **2.66** pro $p > 0$ konverguje k hodnotě $1/(p^2+1)$, pro $p \leq 0$ diverguje.

2.3 Nevlastní integrál vlivem funkce

U určitého integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jsme předpokládali, že integrand má primitivní funkci na intervalu $\langle a, b\rangle$, tedy že funkce f je na intervalu $\langle a, b\rangle$ ohraničená. Nyní dáme smysl i případům, kdy tento požadavek není splněn.

Definice 2.3.1. Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná v libovolném intervalu $\langle a, c\rangle$, kde $a < c < b$. Nechť současně platí, že $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$. Potom výraz

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.29}$$

nazýváme *nevlastním integrálem vlivem funkce*. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.30}$$

říkáme, že integrál (2.29) konverguje (je konvergentní), a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.31}$$

Neexistuje-li vlastní limita (2.30), říkáme, že integrál (2.29) diverguje (je divergentní).

Analogicky by se definovala konvergence nevlastního integrálu (2.29) v případě, kdy je $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ a existuje vlastní limita

$$\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.32}$$

přičemž hodnota integrálu (2.29) je rovna hodnotě limity v (2.32).

Definice 2.3.2. Nechť funkce $f(x)$ není ohraničená v jistém okolí bodu c, kde $a < c < b$. Potom integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.33}$$

konverguje, jestliže konvergují oba integrály

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.34}$$

a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.35}$$

Je-li alespoň jeden z integrálů (2.34) divergentní, pak říkáme, že integrál (2.33) diverguje.

Definice 2.3.3. Bod $c \in \langle a, b\rangle$, ve kterém není funkce f ohraničená, nazýváme singularitou funkce f.

Řešené úlohy

2.67. Vypočtěte hodnotu integrálu

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}. \tag{2.36}$$

Řešení: Integrál (2.36) představuje nevlastní integrál vlivem funkce se singularitou v dolní mezi. Integrand je funkce integrovatelná na každém intervalu $\langle c, 1\rangle$, kde $0 < c < 1$. Vyšetříme konvergenci integrálu (2.36) pomocí výpočtu limity (2.32). Je

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0^+} \Big[2\sqrt{x}\Big]_c^1 = \lim_{c\to 0^+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2.$$

Integrál (2.36) konverguje a jeho hodnota je rovna dvěma.

2.68. Vypočtěte hodnotu integrálu

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x-1}. \tag{2.37}$$

Řešení: Integrál (2.37) představuje nevlastní integrál vlivem funkce se singularitou v horní mezi. Integrand je funkce integrovatelná na každém intervalu $\langle 0, c\rangle$, kde $0 < c < 1$. Vyšetříme existenci limity (2.30). Je

$$\lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \lim_{c\to 1^-} \Big[\ln|x-1|\Big]_0^c = \lim_{c\to 1^-} \big(\ln|c-1| - \ln|-1|\big) = \lim_{c\to 1^-} \ln|c-1| = -\infty.$$

Limita (2.30) není vlastní, proto integrál (2.37) diverguje.

2.69. Vypočtěte hodnotu integrálu

$$\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x. \tag{2.38}$$

Řešení: Integrál (2.38) představuje nevlastní integrál vlivem funkce se singularitou v dolní mezi. Integrand je funkce integrovatelná na každém intervalu $\langle c, 1\rangle$, kde $0 < c < 1$. Nejprve vyšetříme existenci limity (2.32). Je

$$\begin{aligned}\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \ln x \,\mathrm{d}x &= \lim_{c\to 0^+} \Big[x\ln x - x\Big]_c^1 = \lim_{c\to 0^+} \Big((1\cdot\ln 1 - 1) - (c\cdot \ln c - c)\Big) = \\ &= \lim_{c\to 0^+} (c - 1 - c\cdot\ln c) = -1 - \lim_{c\to 0^+}(c\cdot\ln c) = -1 - \lim_{c\to 0^+} \frac{\ln c}{\frac{1}{c}} = \\ &= -1 - \lim_{c\to 0^+} \frac{\frac{1}{c}}{-\frac{1}{c^2}} = -1 + \lim_{c\to 0^+} c = -1.\end{aligned}$$

Při výpočtu limity $\lim_{c\to 0^+}(c\ln c)$ jsme použili l'Hospitalovo pravidlo. Existuje vlastní limita $\lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ s hodnotou -1, proto integrál (2.38) konverguje a jeho hodnota je rovna -1.

2.70. Vyšetřete konvergenci, resp. hodnotu integrálu

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{cotg} x \,\mathrm{d}x. \tag{2.39}$$

Řešení: Integrál (2.39) představuje nevlastní integrál vlivem funkce se singularitou ve vnitřním bodě $c = 0$. Nejprve tedy musíme ověřit konvergenci obou integrálů

$$\int_{-\pi/2}^{0} \operatorname{cotg} x \,\mathrm{d}x \qquad \text{a} \qquad \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{cotg} x \,\mathrm{d}x, \tag{2.40}$$

tedy existenci a konečnost obou limit

$$\lim_{c\to 0^-} \int_{-\pi/2}^{c} \operatorname{cotg} x \,\mathrm{d}x \qquad \text{a} \qquad \lim_{c\to 0^+} \int_{c}^{\pi/2} \operatorname{cotg} x \,\mathrm{d}x. \tag{2.41}$$

Je

$$\begin{aligned}\lim_{c\to 0^-} \int_{-\pi/2}^{c} \operatorname{cotg} x \,\mathrm{d}x &= \lim_{c\to 0^-} \int_{-\pi/2}^{c} \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0^-} \Big[\ln|\sin x|\Big]_{-\pi/2}^{c} = \\ &= \lim_{c\to 0^-} \Big(\ln|\sin c| - \ln|-1|\Big) = \lim_{c\to 0^-} \ln|\sin c| = \lim_{t\to 0^+} \ln t = -\infty.\end{aligned}$$

V předposlední rovnosti jsme využili rovnost $\lim_{c\to 0^-} |\sin c| = \lim_{c\to 0^+} \sin c = 0$, a vlastnosti limity složené funkce, viz např. [11], str. 39. Limita na levé straně (2.41) není vlastní. Proto integrál na levé straně (2.40) diverguje, a z toho důvodu diverguje i integrál (2.39).

2.71. Vypočtěte hodnotu integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2.42}$$

Řešení: Integrál (2.42) představuje nevlastní integrál vlivem funkce se singularitou v dolní i v horní mezi. Proto je vhodné rozdělit interval $(-1, 1)$ pomocí vhodného bodu na dva intervaly. Zvolíme bod $x = 0$, neboť integrand je sudá funkce. Budeme tedy vyšetřovat konvergenci integrálů

$$\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{a} \qquad \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2.43}$$

Z tabulky základních vzorců na straně 2 víme, že primitivní funkcí k integrandu na intervalu $(-1, 1)$ je funkce $\arcsin x$. Proto je

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{c\to -1^+} \int_{c}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to -1^+} \Big[\arcsin x\Big]_c^0 = \lim_{c\to -1^+} \big(\arcsin 0 - \arcsin c\big) = \\ &= -\lim_{c\to -1^+} \arcsin c = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{c\to 1^-} \int_{0}^{c} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to 1^-} \Big[\arcsin x\Big]_0^c = \lim_{c\to 1^-} \big(\arcsin c - \arcsin 0\big) = \\ &= \lim_{c\to 1^-} \arcsin c = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Oba integrály v (2.43) jsou konvergentní, proto pro integrál (2.42) platí

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

To, že oba integrály v (2.43) mají stejnou hodnotu, by nás nemělo překvapit, neboť integrand je sudá funkce. K výpočtu by tedy stačilo ověřit, že konverguje jeden z těchto integrálů a poté použít rovnost

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 2\cdot \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 2\cdot \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Pokuste se poslední vyslovenou myšlenku zobecnit.

Neřešené úlohy

V následujících úlohách zjistěte konvergenci, resp. hodnotu zadaných integrálů.

2.72. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$ * **2.74.** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$ **2.76.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

2.73. $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^n\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}$ **2.75.** $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x$ **2.77.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$

Výsledky

2.72 $3/2$, **2.73** $(-1)^n n!$, **2.74** $1+(\pi/2)$, **2.75** $-1/4$, **2.76** 6, **2.77** diverguje.

2.4 Numerický výpočet určitých integrálů

Na straně 47 byly zmíněny elementární funkce, pro které nelze vyjádřit primitivní funkci ve tvaru elementární funkce. V takovém případě se často musíme spokojit pouze s výpočtem přibližné hodnoty určitého integrálu. K výpočtu přibližné hodnoty určitého integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se používají různé metody. Některé z nich spočívají v rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ na n podintervalů o délce $(b-a)/n$ a nahrazení části grafu funkce na těchto podintervalech jinou funkcí - např. konstantní funkcí, lineární funkcí resp. kvadratickou funkcí. Procvičíme tzv. Simpsonovu (kvadratickou) metodu.

Věta 2.4.1 (Simpsonova (kvadratická) metoda). *Nechť $n = 2k$ a funkce $f(x)$ je spojitá a má derivace alespoň 4. řádu na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, kde $i = 0, 1, \dots, n-1, n$ a $f_i = f(x_i)$. Potom je*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \doteq \frac{h}{3}\left[(f_0+f_n) + 2(f_2+f_4+\dots+f_{2k-2}) + 4(f_1+f_3+\dots+f_{2k-1})\right]. \quad (2.44)$$

Rovnost (2.44) se často nazývá Simpsonův vzorec.

Řešené úlohy

2.78. Pomocí Simpsonova vzorce vypočtěte přibližnou hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{kde } n = 10.$$

Řešení: Integrand není definovaný v bodě $x = 0$, jako funkční hodnotu v tomto bodě proto budeme uvažovat limitu $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$. Potom je integrand funkce spojitá a dostatečně diferencovatelná na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Interval $\langle 0, 1\rangle$ rozdělíme na 10 stejných

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
f_i	1	0,998	0,993	0,985	0,974	0,959	0,941	0,920	0,897	0,870	0,841

Tabulka 2.1: Hodnoty funkce $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ v intervalu $\langle 0, 1\rangle$

podintervalů, každý z nich má délku $h = \dfrac{1-0}{10} = 0,1$. Vypočteme hodnoty $f_i = \dfrac{\sin x_i}{x_i}$, kde x_i postupně nabývá hodnoty $0;\ 0,1;\ 0,2;\ \dots;\ 0,9;\ 1$. Podle Simpsonova vzorce je

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &\doteq \frac{h}{3}\left[(f_0+f_{10}) + 2(f_2+f_4+f_6+f_8) + 4(f_1+f_3+f_5+f_7+f_9)\right] = \\
&= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}\left[(1+0,841) + 2\,(0,993+0,974+0,941+0,897) + \right.\\
&\quad \left. + 4\,(0,998+0,985+0,959+0,920+0,870)\right] = \\
&= \frac{1}{30}\left[1,841 + 2(3,805) + 4(4,732)\right] = \frac{28,379}{30} \doteq 0,946.
\end{aligned}$$

Poznámka: Pro porovnání uvedeme, že skutečná hodnota určitého integrálu zaokrouhlená na 3 desetinná místa činí rovněž $0,946$.

Neřešené úlohy

Pomocí Simpsonova pravidla vypočtěte následující integrály.

2.79. $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x, \quad (n=4)$ **2.81.** $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x, \quad (n=8)$

2.80. $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{1+3\sin x}\,\mathrm{d}x, \quad (n=6)$ **2.82.** $\displaystyle\int_1^4 \frac{x}{\ln(1+x)}\,\mathrm{d}x, \quad (n=6)$

Výsledky

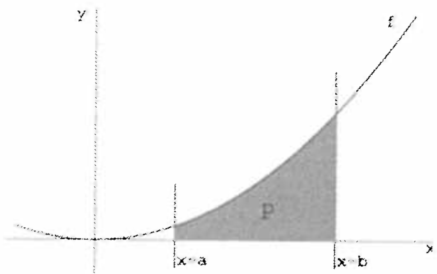
2.79 $17,333$ **2.80** $5,123$ **2.81** $0,636$ **2.82** $5,956$

Kapitola 3

Použití určitého integrálu

3.1 Obsah rovinné plochy

Mějme funkci $f(x)$ spojitou a nezápornou na intervalu $\langle a, b\rangle$. Dále uvažujme plochu P, která je ohraničená grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$, viz Obrázek **3.1**.



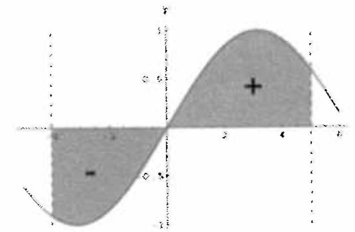
Obrázek 3.1: Plocha pod grafem funkce $f(x)$ ohraničená přímkami $x = a$ a $x = b$

Potom obsah $S(P)$ plochy P je roven hodnotě určitého integrálu

$$S(P) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

Jsou-li všechny hodnoty funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ záporné, potom hodnota určitého integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ odpovídá obsahu plochy P, ale s opačným znaménkem. Při výpočtu obsahu plochy proto musíme získanou hodnotu vynásobit číslem -1. Jestliže se v intervalu $\langle a, b\rangle$ vyskytují podintervaly, na kterých má funkce f pouze nezáporné, resp. nekladné hodnoty, potom lze plochu rozdělit na úseky s kladnou, resp. nezápornou funkční hodnotou (tj. na úseky plochy, které se nacházejí nad resp. pod osou x) a vypočítat obsahy

jednotlivých úseků. Obsah celé plochy je potom roven součtu obsahů jednotlivých úseků, viz Obrázek **3.2**.

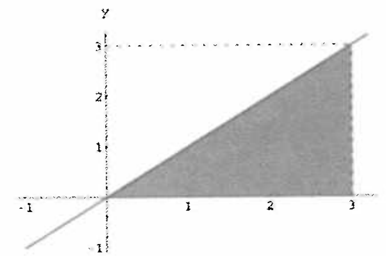


Obrázek 3.2: Rozložení intervalu $\langle a, b\rangle$ na

Řešené úlohy

3.1. Vypočtěte obsah plochy ohraničené grafem funkce $f(x) = x$, osou x a přímkou $x = 3$, viz Obrázek **3.3**.

Řešení: Z obrázku je zřejmé, že budeme vyšetřovat plochu, která leží nad intervalem $\langle 0, 3\rangle$ a je shora ohraničená grafem funkce $f(x) = x$. Uvažovaná plocha tvoří pravoúhlý



Obrázek 3.3: Plocha ohraničená grafem funkce $f(x) = x$, osou x a přímkou $x = 3$

trojúhelník s délkou základny $a = 3$ a výškou $v = 3$. Obsah lze potom vypočítat podle vzorce $S = \frac{1}{2}av$. Dosazením hodnot a a v dostaneme

$$S = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = \frac{9}{2}\,\mathrm{j}^2.$$

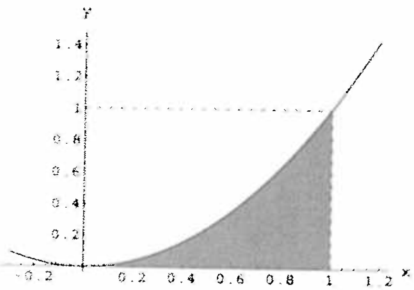
Kromě toho lze obsah plochy vypočítat jako hodnotu určitého integrálu $\int_0^3 x\,\mathrm{d}x$. Je

$$\int_0^3 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{9}{2}.$$

Obsah plochy je roven $\frac{9}{2}\,\mathrm{j}^2$, což je v souladu s dříve vypočtenou hodnotou.

3.2. Vypočtěte obsah plochy ohraničené grafem funkce $f(x) = x^2$, osou x a přímkou $x = 1$, viz Obrázek **3.4**.

Řešení: Uvažovaná plocha leží nad intervalem $\langle 0, 1\rangle$. Proto je velikost obsahu plochy rovna určitému integrálu



Obrázek 3.4: Plocha ohraničená grafem funkce $f(x) = x^2$, osou x a přímkou $x = 1$

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Obsah plochy je roven $\frac{1}{3}\,\mathrm{j}^2$. Porovnáním s obsahem jednotkového čtverce, naznačeném na Obrázku **3.4**, je vidět, že obsah plochy pod parabolou je menší než $1/2\,\mathrm{j}^2$, což odpovídá vypočtenému výsledku.

3.3. Vypočtěte obsah plochy ohraničené grafem funkce $f(x) = x^2 - 2x$, osou x a přímkami $x = -1$ a $x = 2$, viz Obrázek **3.5**

Řešení: Nejprve zkusíme vypočítat hodnotu určitého integrálu $\int_{-1}^{2} x^2 - 2x\,\mathrm{d}x$. Je

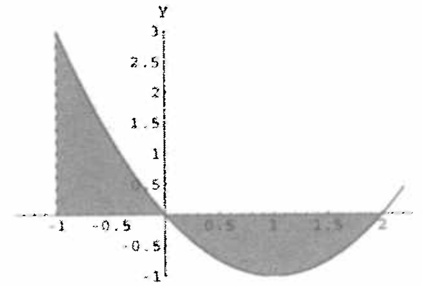
$$\int_{-1}^{2} x^2 - 2x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2\right) = \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} + 1 = 0.$$

Obsah zadané plochy však těžko může být roven nule a proto obsah plochy neodpovídá hodnotě vypočteného určitého integrálu. Je to z toho důvodu, že funkce $f(x)$ není na intervalu $\langle -1, 2\rangle$ pouze nezáporná. Ve skutečnosti je funkce $f(x)$ na intervalu $\langle -1, 0\rangle$ nezáporná a na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ nekladná. Pro obsah $S(P)$ plochy P proto platí

$$S(P) = \left(\int_{-1}^{0} x^2 - 2x\,\mathrm{d}x\right) - \left(\int_{0}^{2} x^2 - 2x\,\mathrm{d}x\right) = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2} =$$

$$= \left[\left(\frac{0^3}{3} - 0^2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2\right)\right] - \left[\left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 0^2\right)\right] = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Obsah vyšetřované plochy je roven $\frac{8}{3}\,\mathrm{j}^2$.



Obrázek 3.5: Plocha ohraničená grafem funkce $f(x) = x^2 - 2x$, osou x a přímkou $x = -1$ a $x = 2$

3.4. Vypočtěte obsah plochy ohraničené grafem funkce $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$, osou x a přímkami $x = -2$ a $x = 3$.

Řešení: Vzhledem k tomu, že funkce f představuje polynom třetího stupně, bude nabývat kladných i záporných funkčních hodnot. Nejprve zjistíme, na kterých intervalech je funkce $f(x)$ kladná a na kterých záporná, viz např. [11]. Předpis funkce upravíme do tvaru

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x^2 - 4).$$

Z uvedených rovností je zřejmé, že nulovými body funkce jsou body $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ a $x_3 = 2$, které dělí reálnou osu na čtyři intervaly. Snadno ověříme, že na intervalech $(-2, -1)$ a $(2, \infty)$ funkce $f(x)$ nabývá pouze kladné funkční hodnoty a na intervalu $(-1, 2)$ má funkce $f(x)$ pouze záporné funkční hodnoty. Pro obsah plochy platí:

$$S(P) = \left(\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x\right) - \left(\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\right) + \left(\int_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Nejprve vypočteme neurčitý integrál k funkci f. Je

$$\int x^3 + x^2 - 4x - 4\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x + C.$$

Dále platí

$$\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x\right]_{-2}^{-1} = \frac{7}{12}$$

$$\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x\right]_{-1}^{2} = -\frac{45}{4}$$

$$\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x\right]_{2}^{3} = \frac{103}{12}$$

Obsah plochy je roven $S(P) = \frac{7}{12} - \left(-\frac{45}{4}\right) + \frac{103}{12} = \frac{245}{12} = 20\frac{5}{12}\,\mathrm{j}^2$.

* **3.5.** Vypočtěte vzorec pro obsah $S(E)$ elipsy E s rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kde $a \in \mathbb{R}^+$, resp. $b \in \mathbb{R}^+$ představuje délku hlavní, resp. vedlejší poloosy.

Řešení: Celá elipsa není grafem žádné funkce (proč?). Nicméně, omezíme-li se pouze na jednu její (pravou, horní) čtvrtinu, potom se jedná o plochu ohraničenou osami x a y a grafem funkce $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Pro obsah $S(P)$ čtvrtiny elipsy tak platí

$$S(P) = \frac{b}{a}\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = a\sin t \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{b}{a}\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{b}{a}\int\limits_0^{\pi/2} a^2\sqrt{1 - \sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = ab\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = ab\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1 + \cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= ab\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = ab\left[\left(\frac{\pi}{4} + 0\right) - (0 + 0)\right] = \frac{ab\pi}{4}\,\mathrm{j}^2.$$

Obsah $S(P)$ jedné čtvrtiny elipsy je roven $\frac{ab\pi}{4}\,\mathrm{j}^2$, pro obsah $S(E)$ celé elipsy platí

$$S(E) = 4\cdot S(P) = \pi\,a\,b. \tag{3.2}$$

Je známo, že kružnice s poloměrem r je speciální případ elipsy se shodnou délkou hlavní i vedlejší poloosy, je tedy $a = b = r$ a po dosazení do (3.2) dostaneme známý vzorec pro výpočet obsahu kruhu $S = \pi r^2$, což potvrzuje správnost výpočtu.

3.6. Vypočtěte, pro jakou hodnotu $t \in (0, \infty)$, bude obsah $S(P)$ plochy P ohraničené grafem funkce $f(x) = x^2$, osou x a přímkou $x = t$ roven $9\,\mathrm{j}^2$.

Řešení: Funkce $f(x)$ je nezáporná na $\mathbb{R}$, proto bude obsah plochy P roven hodnotě určitého integrálu $\int_0^t x^2\,\mathrm{d}x$. Naším úkolem tak je vyřešit rovnici s neznámou t

$$\int_0^t x^2\,\mathrm{d}x = 9.$$

Vyjádřením určitého integrálu dostaneme rovnici v běžném tvaru:

$$9 = \int_0^t x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^t = \frac{t^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{t^3}{3}.$$

Je

$$\frac{t^3}{3} = 9, \qquad \text{tedy} \qquad t = 3.$$

Obsah plochy P bude roven $9\,\mathrm{j}^2$ právě tehdy, bude-li $t = 3$. Pokud bychom hodnotu t neomezili na kladné hodnoty, potom by správným řešením byla i hodnota $t = -3$. (Proč?)

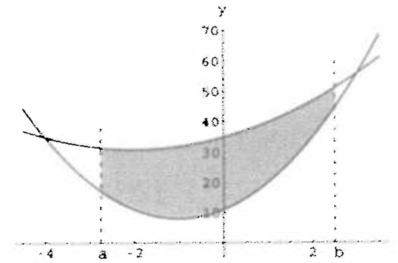
Poznámka: Určitý integrál s jednou mezí ve formě proměnné t je vlastně funkce této proměnné, neboť hodnota určitého integrálu závisí právě na hodnotě t. V takovém případě pak mluvíme o integrálu jako funkci dolní, resp. horní meze. Tento přístup jsme již používali při výpočtu nevlastních integrálů.

Častou úlohou je výpočet obsahu plochy ohraničené grafy dvou funkcí. V takovém případě lze použít následující větu.

Věta 3.1.1. *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť pro všechna x z tohoto intervalu platí $f(x) \geq g(x)$. Potom pro obsah $S(P)$ plochy P, ohraničené grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$ a přímkami $x = a$ a $x = b$, platí*

$$S(P) = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x, \tag{3.3}$$

viz Obrázek **3.6**.



Obrázek 3.6: Plocha ohraničená grafy funkcí a přímkami $x = a$ a $x = b$

3.7. Vypočtěte obsah plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = x + 5$, $g(x) = 4 - x^2$ a přímkami $x = -1$ a $x = 1$.

Řešení: Nejprve ověříme, že na celém intervalu $\langle -1, 1\rangle$ je splněna podmínka $f(x) \geq g(x)$. Řešením nerovnice $x + 5 \geq 4 - x^2$ jsou všechna $x \in \mathbb{R}$, proto i pro všechna $x \in \langle -1, 1\rangle$ je splněna nerovnost $f(x) \geq g(x)$. Obě funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojité, proto jsou splněny obě podmínky Věty **3.1.1** a k výpočtu obsahu zadané plochy můžeme použít vzorec (3.3). Dosazením dostaneme

$$S(P) = \int\limits_{-1}^{1}\left[(x + 5) - (4 - x^2)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} x^2 + x + 1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) - \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{8}{3}\,\mathrm{j}^2.$$

Obsah plochy je roven $\frac{8}{3}\,\mathrm{j}^2$.

3.8. Vypočtěte obsah plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = x + 1$ a $g(x) = x^2 + 3x - 2$.

Řešení: V zadání nejsou uvedeny svislé meze plochy. Můžeme proto předpokládat, že grafy funkcí mají společné průsečíky a tyto určují hranice plochy. Vypočteme polohu průsečíků obou grafů, tj. nalezneme hodnoty x, pro které je $f(x) = g(x)$. Je

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 2 &= x + 1 \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

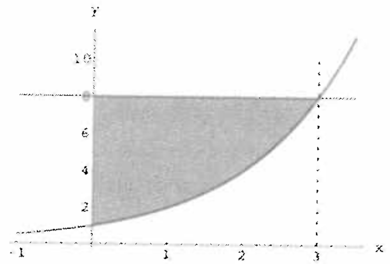
Řešením kvadratické rovnice (3.4) jsou hodnoty $x_1 = -3$ a $x_2 = 1$. Nyní zjistíme vzájemnou polohu obou grafů. Je $f(0) = 1$ a $g(0) = -2$, proto pro všechna $x \in \langle -3, 1\rangle$ platí nerovnost $f(x) \geq g(x)$ a výpočet obsahu plochy provedeme dosazením do vzorce (3.3). Je

$$S(P) = \int_{-3}^{1} \left[(x+1) - (x^2 + 3x - 2)\right] \mathrm{d}x = \int_{-3}^{1} -x^2 - 2x + 3 \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{-3}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - (9 - 9 - 9) = \frac{32}{3}\,\mathrm{j}^2.$$

Obsah plochy je roven $\frac{32}{3}\,\mathrm{j}^2$.

3.9. Vypočtěte obsah plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = 2^x$, $g(x) = 8$ a osou y, viz Obrázek **3.7**.



Obrázek 3.7: Plocha ohraničená osou y a grafy funkcí $f(x) = 2^x$ a $g(x) = 8$

Řešení: V zadání je uvedena pouze jedna svislá mez (osa y), druhou svislou mez získáme z rovnosti $f(x) = g(x)$. Řešením rovnice $2^x = 8$ je $x = 3$, plocha P proto leží nad body $x \in \langle 0, 3\rangle$. Pro tyto hodnoty x je $2^x \leq 8$, pro obsah $S(P)$ plochy P tak platí

$$S(P) = \int_0^3 8 - 2^x \,\mathrm{d}x = \left[8x - \frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^3 = \left(24 - \frac{8}{\ln 2}\right) - \left(0 - \frac{1}{\ln 2}\right) = \left(24 - \frac{7}{\ln 2}\right)\mathrm{j}^2.$$

Obsah plochy je roven $\left(24 - \frac{7}{\ln 2}\right)\mathrm{j}^2$.

3.10. Vypočtěte obsah plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{2}$ nad jednou periodou funkce $\sin x$.

Řešení: V zadání nejsou uvedeny svislé meze, proto vypočteme průsečíky obou funkcí. Tyto průsečíky vyhovují rovnici $\sin x = \frac{1}{2}$, jejímž řešením na „první kladné" periodě jsou kořeny $x_1 = \pi/6$ a $x_2 = 5\pi/6$. Je $\sin\frac{\pi}{2} = 1 > \frac{1}{2}$, proto na intervalu $\left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\rangle$ platí nerovnost $\sin x > \frac{1}{2}$. Obsah plochy vypočteme dosazením do vzorce (3.3). Je

$$S(P) = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin(x) - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \left[-\cos x - \frac{x}{2}\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)\mathrm{j}^2.$$

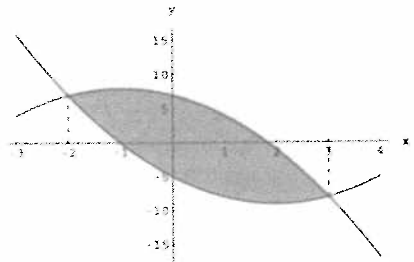
Obsah plochy je roven $\left(\sqrt{3} - \pi/3\right)\mathrm{j}^2$.

3.11. Vypočtěte obsah plochy, která je ohraničená grafy funkcí $f(x) = x^2 - 4x - 5$ a $g(x) = 7 - 2x - x^2$, viz Obrázek **3.8**.

Řešení: V zadání nejsou uvedeny svislé meze, proto lze předpokládat, že „pravá a levá mez" plochy je dána průsečíky obou funkcí. Tyto průsečíky vyhovují rovnici

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 5 &= 7 - 2x - x^2 \\ 2x^2 - 2x - 12 &= 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

kde řešením kvadratické rovnice (3.5) jsou kořeny $x_1 = -2$ a $x_2 = 3$. V intervalu $\langle -2, 3\rangle$ leží např. bod $x = 0$. Je $f(0) = -5$ a $g(0) = 7$. Vzhledem k spojitosti funkcí $f(x)$ a $g(x)$ platí pro všechna $x \in \langle -2, 3\rangle$ nerovnost $f(x) \leq g(x)$. Proto je obsah plochy roven



Obrázek 3.8: Plocha ohraničená grafy funkcí

hodnotě určitého integrálu

$$S(P) = \int_{-2}^{3} [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{3} (7 - 2x - x^2) - (x^2 - 4x - 5)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-2}^{3} 12 + 2x - 2x^2\,\mathrm{d}x = \left[12x + x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_{-2}^{3} =$$

$$= (36 + 9 - 18) - \left(-24 + 4 + \frac{16}{3}\right) = \frac{125}{3}\,\mathrm{j}^2.$$

Obsah $S(P)$ plochy P je roven $\frac{125}{3}\,\mathrm{j}^2$.

Neřešené úlohy

3.12. Vypočtěte obsah plochy ohraničené osami x a y a grafem funkce $f(x) = 4 - x^2$.

3.13. Vypočtěte obsah plochy ohraničené osami x a y a grafem funkce $f(x) = \cos x$.

3.14. Vypočtěte obsah plochy ohraničené osami x a y a grafem funkce $f(x) = 2 - e^x$.

3.15. Vypočtěte obsah plochy ohraničené osou x, grafem funkce $f(x) = x + \sin x$ a přímkou $x = \pi$.

3.16. Vypočtěte obsah plochy ohraničené osou x, grafem funkce $f(x) = \sqrt{x+1}$ a přímkami $x = 0$ a $x = 8$.

3.17. Vypočtěte obsah plochy ohraničené osou x, grafem funkce $f(x) = \ln x$ a přímkami $x = e$ a $x = e^2$.

3.18. Vypočtěte obsah plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sqrt{x}$.

3.19. Vypočtěte obsah plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ a osou y.

3.20. Vypočtěte obsah plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = 5 - x$ a $g(x) = x^2 + 2x - 5$.

3.21. Plocha je ohraničena grafy funkcí $f(x) = x^2 + 2x - 5$ a $g(x) = 10 + x - x^2$. Vypočtěte její obsah.

3.22. Je dána plocha P ohraničená osou x, přímkami $x = 1$, $x = t$ a grafem funkce $f(x) = 1/x^2$. Vypočtěte, pro jakou hodnotu t bude obsah $S(P)$ plochy P roven $4/5\,\mathrm{j}^2$.

3.23. Je dána plocha P ohraničená osou x, přímkami $x = 1$, $x = t$, kde $t \in \mathbb{R}$, a grafem funkce $f(x) = 1/x^2$. Vypočtěte, pro jakou hodnotu t bude obsah $S(P)$ plochy P roven $5\,\mathrm{j}^2$.

3.24. Je dána plocha P ohraničená osou x, přímkami $x = 1$, $x = t$, kde $t \in (1, \infty)$, a grafem funkce $f(x) = 1/x^2$. Vypočtěte, pro jakou hodnotu t bude obsah $S(P)$ plochy P roven $3\,\mathrm{j}^2$.

3.25. Je dána plocha P ohraničená grafy funkcí $f(x) = x^2$ a $g(x) = tx$, kde $t \in \mathbb{R}$ představuje parametr. Při jaké hodnotě tohoto parametru t bude obsah $S(P)$ plochy P roven $36\,\mathrm{j}^2$?

Výsledky

3.12 $16/3\,\mathrm{j}^2$ **3.13** $1\,\mathrm{j}^2$ **3.14** $2\ln 2 - 1\,\mathrm{j}^2$ **3.15** $2 + \pi^2/2\,\mathrm{j}^2$ **3.16** $52/3\,\mathrm{j}^2$ **3.17** $e^2\,\mathrm{j}^2$ **3.18** $1/3\,\mathrm{j}^2$ **3.19** $\sqrt{2} - 1\,\mathrm{j}^2$ **3.20** $343/6\,\mathrm{j}^2$ **3.21** $1331/24\,\mathrm{j}^2$ **3.22** $t = 5$ **3.23** $t = 1/6$ **3.24** Takové t neexistuje. **3.25** $t = 6$

3.2 Střední hodnota

Střední hodnota funkce představuje analogický pojem k aritmetickému průměru diskrétních veličin. Pomáhá určit průměrnou hodnotu veličiny, která se plynule mění. Tento pojem se opírá o následující větu:

Věta 3.2.1. *Je-li funkce $f(x)$ spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, potom existuje číslo $c \in \langle a, b\rangle$ takové, že platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b - a)f(c). \tag{3.6}$$

Hodnotu $f(c)$ nazýváme *střední hodnota funkce* $f(x)$ *v intervalu* $\langle a, b\rangle$. Často se pro označení střední hodnoty funkce používá symbol ξ. Platí tedy

$$\xi = f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

Řešené úlohy

3.26. Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x) = x$ v intervalu $\langle 2, 8\rangle$.

Řešení: Funkce f je v uvažovaném intervalu spojitá, hledaná střední hodnota funkce proto podle Věty **3.2.1** existuje. Je

$$\xi = \frac{1}{8-2}\int_2^8 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^8 = \frac{1}{6}\left(\frac{64}{2} - \frac{4}{2}\right) = 5.$$

Střední hodnota je rovna pěti. To je v souladu s intuitivní představou, že průměr všech reálných čísel od 2 do 8 je roven pěti.

3.27. Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x) = x^2$ v intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Řešení: Funkce f je v uvažovaném intervalu spojitá, hledaná střední hodnota funkce proto podle Věty **3.2.1** existuje. Je

$$\xi = \frac{1}{1-0}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{0}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Střední hodnota funkce $f(x) = x^2$ v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ je rovna $1/3$.

3.28. Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x) = x^2$ v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Řešení: Uvedený příklad je zobecněním předchozí úlohy. Funkce f je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}$. Střední hodnota funkce proto podle Věty **3.2.1** existuje. Je

$$\xi = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

neboť je $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2)$. Střední hodnota je rovna $(a^2+ab+b^2)/3$.

3.29. Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x) = \dfrac{10}{x^2}$ v intervalu $\langle -3, 2\rangle$.

Řešení: Funkce f není v uvažovaném intervalu spojitá. O existenci střední hodnoty funkce proto nelze rozhodnout podle Věty **3.2.1**. Odpověď na otázku, zda existuje číslo ξ s vlastností

$$\xi\cdot(2-(-3)) = \int\limits_{-3}^{2}\frac{10}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

nalezneme v kapitole o nevlastních integrálech. Snadno ověříme, že daný integrál diverguje, neboť platí

$$\int\limits_{-3}^{2}\frac{10}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0^-}\int\limits_{-3}^{s}\frac{10}{x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to 0^+}\int\limits_{t}^{2}\frac{10}{x^2}\,\mathrm{d}x = \infty.$$

V tomto případě proto nemá smysl hledat střední hodnotu funkce na uvedeném intervalu.

3.30. Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x) = \dfrac{10}{x}$ v intervalu $\langle 1, 5\rangle$.

Řešení: Funkce f je v uvažovaném intervalu spojitá, hledaná střední hodnota funkce proto podle Věty **3.2.1** existuje. Je

$$\xi = \frac{1}{5-1}\int\limits_1^5\frac{10}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[10\ln x\right]_1^5 = \frac{5}{2}(\ln 5 - \ln 1) = \frac{5\ln 5}{2}.$$

Střední hodnota funkce je rovna $(5\ln 5)/2$.

3.31. Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ v intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

Řešení: Funkce f je v uvažovaném intervalu spojitá, střední hodnota funkce proto existuje. Je

$$\xi = \frac{1}{1-(-1)}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{arctg} x\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\big(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1)\big) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Střední hodnota funkce je rovna $\pi/4$.

Neřešené úlohy

V následujících úlohách vypočtěte střední hodnoty funkce $f(x)$ v uvedených intervalech.

3.32. $f(x) = \sin x, \quad x \in \langle 0, \pi\rangle$

3.33. $f(x) = \ln x, \quad x \in \langle 1, e\rangle$

3.34. $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad x \in \langle 0, 1\rangle$

3.35. $f(x) = e^{-x}, \quad x \in \langle -1, 1\rangle$

3.36. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}, \quad x \in \langle 0, 1\rangle$

3.37. $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in \langle 0, \pi/3\rangle$

Výsledky

3.32 $2/\pi$ **3.33** $1/(e-1)$. **3.34** $2(\sqrt{8}-1)/3$ **3.35** $(e^2-1)/(2e)$ **3.36** $\ln 2$ **3.37** $(\ln 8)/\pi$

3.3 Slovní úlohy na určité integrály

Pomocí určitých integrálů lze kvantitativně popsat mnohé geometrické útvary, např. obsah plochy, objem rotačních těles, délku křivky, atd. Následující úlohy jsou založeny na možnosti vyjádřit studovanou veličinu pomocí obsahu plochy.

3.3.1 Přebytek spotřebitele a výrobce

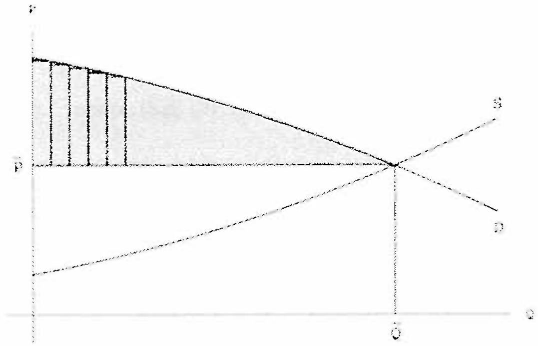
Je-li dokonale konkurenční trh efektivní, znamená to, že maximalizuje prospěch všech účastníků. Při analýze hospodářské politiky je často užitečné odhadnout skutečnou velikost přínosu, který spotřebitelé a výrobci získávají svou účastní na určitých trzích. V knize [5] str. 401, je uveden příklad vlády nějaké země třetího světa, která ví, že když postaví dálnici od pobřeží do vnitrozemí, zpřístupní tím nové trhy potravin přicházejících z moře. Rozhodnutí vlády o výstavbě dálnice závisí na tom, zda prospěch, který nový trh přinese spotřebitelům i dodavatelům, převýší náklady na výstavbu dálnice.

Míru prospěchu, kterou spotřebitel získává účastí na tržní směně, nazýváme *užitek spotřebitele* a značíme S_c. Při rovnovážném stavu mezi poptávkou a nabídkou stále existují spotřebitelé, kteří jsou ochotni zaplatit za zboží cenu vyšší, než je rovnovážná cena. Předpokládejme, že poptávková funkce po jistém druhu zboží je popsána rovnicí

$$P = 10 - Q,$$

kde P je cena za jednotku zboží (např. v Kč) a Q je množství prodaného zboží při ceně P. Z poptávkové funkce je zřejmé, že jeden spotřebitel je ochoten nakupovat za cenu 9 Kč, o jednoho spotřebitele víc je ochotno vydat za jednotku zboží 8 Kč, atd. Pokud se zboží prodává za 5 Kč, potom první uvedený spotřebitel ušetřil 4 Kč, druhý 3 Kč, atd. Zboží koupí celkem pět zákazníků, přičemž čtyři z nich platí nižší cenu, než za jakou jsou ochotni nakupovat. Celkově tak zákazníci ušetří $(4+3+2+1)$ Kč. Přebytek spotřebitele je roven 10 Kč.

Situace je popsána na Obrázku **3.9**. Hodnota funkce poptávky vyjadřuje nejvyšší částku, kterou je daný počet spotřebitelů ochoten zaplatit za jednotku zboží. Odečteme-li od této hodnoty nákupní cenu a sečteme-li výsledné rozdíly pro každé množství až do



Obrázek 3.9: Přebytek spotřebitele

prodejní ceny, dostaneme přibližnou hodnotu obsahu vyznačené plochy. Pokud použijeme určitý integrál, získáme přesnou hodnotu obsahu vyznačené oblasti. Užitek spotřebitele je potom roven

$$S_c = \int_0^{\overline{Q}} (D(Q) - \overline{P})\,\mathrm{d}Q,$$

kde $D(Q)$ je rovnice poptávky, $\overline{Q}$ je množství zboží prodaného za cenu $\overline{P}$.

Analogií k přebytku spotřebitele je *přebytek výrobce*. Tento pojem je založen na myšlence, že při dané funkci nabídky $P = S(Q)$, kde P je současná cena a Q je odpovídající nabízené množství zboží, existují výrobci, kteří jsou ochotni dodat jisté množství zboží za nižší cenu. Přebytek výrobce S_p potom odpovídá příjmu plynoucího z toho, že se zboží prodává za vyšší cenu. Je tedy

$$S_p = \int_0^{\overline{Q}} (\overline{P} - S(Q))\,\mathrm{d}Q. \tag{3.8}$$

Celkový prospěch S všech účastníků z tržní směny je roven součtu přebytků spotřebitele a výrobce, je tedy

$$S = S_c + S_p = \int_0^{\overline{Q}} (D(Q) - \overline{P})\,\mathrm{d}Q + \int_0^{\overline{Q}} (\overline{P} - S(Q))\,\mathrm{d}Q = \int_0^{\overline{Q}} (D(Q) - S(Q))\,\mathrm{d}Q,$$

kde $D(Q)$ znamená funkci poptávky, $S(Q)$ je funkce nabídky a $\overline{Q}$ značí množství prodaného zboží.

Řešené úlohy

3.38. Vypočtěte hodnotu přebytku spotřebitele, jestliže se jednotka zboží prodává za cenu $\overline{P} = 30$ Kč a funkce poptávky má tvar $P = 50 - \frac{Q}{10}$, kde P je cena v Kč a Q je množství prodaného zboží za příslušnou časovou jednotku.

Řešení: Nejprve zjistíme množství prodaného zboží $\overline{Q}$ při ceně 30 Kč. Je

$$\begin{aligned} \overline{P} &= 50 - \frac{\overline{Q}}{10} \\ 30 &= 50 - \frac{\overline{Q}}{10} \\ \frac{\overline{Q}}{10} &= 20 \\ \overline{Q} &= 200. \end{aligned}$$

Výpočtem jsme zjistili, že při ceně 30 Kč se prodá 200 kusů zboží. Pro užitek spotřebitele platí

$$S_c = \int_0^{200} (D(Q) - \overline{P})\,\mathrm{d}Q = \int_0^{200} \left(50 - \frac{Q}{10} - 30\right)\mathrm{d}Q = \int_0^{200} \left(20 - \frac{Q}{10}\right)\mathrm{d}Q =$$
$$= \left[20Q - \frac{Q^2}{20}\right]_0^{200} = 4\,000 - 2\,000 = 2\,000.$$

Zjistili jsme, že přebytek spotřebitele je roven 2 000 Kč.

3.39. Funkce poptávky $D(Q)$ po mléku je dána vztahem $P = 25 - Q$, kde P je cena v Kč a Q je množství prodaných lahví mléka týdně. O kolik se změní přebytek spotřebitele, jestliže se cena mléka zvedne z 12 Kč na 14 Kč. Předpokládejme, že důchodový efekt ze zvýšení ceny mléka je bezvýznamný, takže k výpočtu spotřebitelského přebytku lze využít funkci poptávky před i po zvýšení ceny mléka.

Řešení: Nejprve vypočteme množství prodaného mléka při cenách 12 Kč a 14 Kč. Je

$$\begin{aligned} \overline{P} &= 25 - \overline{Q} \\ 12 &= 25 - \overline{Q} \\ \overline{Q} &= 13, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \overline{P} &= 25 - \overline{Q} \\ 14 &= 25 - \overline{Q} \\ \overline{Q} &= 11. \end{aligned}$$

Změna přebytku spotřebitele při obou cenách je dána vztahem

$$\Delta S_c = \int_0^{11} \Big((25 - Q) - 14\Big)\,\mathrm{d}Q - \int_0^{13} \Big((25 - Q) - 12\Big)\,\mathrm{d}Q =$$
$$= \int_0^{11} (11 - Q)\,\mathrm{d}Q - \int_0^{13} (13 - Q)\,\mathrm{d}Q = \left[11Q - \frac{Q^2}{2}\right]_0^{11} - \left[13Q - \frac{Q^2}{2}\right]_0^{13} =$$
$$= \left(11^2 - \frac{11^2}{2}\right) - \left(13^2 - \frac{13^2}{2}\right) = \frac{11^2 - 13^2}{2} = -24.$$

Zjistili jsme, že při zvýšení ceny mléka, dojde ke snížení přebytku spotřebitele o 24 Kč.

3.40. Funkce nabídky po zboží je dána vztahem

$$P = S(Q) = 4 + \frac{Q^2}{100}.$$

Určete přebytek výrobce, jestliže se zboží prodává při ceně 40 Kč za kus.

Řešení: Vypočteme množství nabízeného zboží při ceně 40 Kč. Je

$$\begin{aligned} P &= 4 + \frac{Q^2}{100} \\ 40 &= 4 + \frac{Q^2}{100} \\ 36 &= \frac{Q^2}{100} \\ Q^2 &= 3\,600 \\ Q &= 60. \end{aligned}$$

Kořen $Q = -60$ neuvažujeme, vzhledem k předpokladu $Q \geq 0$. Potom pro přebytek výrobce platí

$$S_P = \int_0^{60} \left(40 - \left(4 + \frac{Q^2}{100}\right)\right) \mathrm{d}Q = \int_0^{60} \left(36 - \frac{Q^2}{100}\right) \mathrm{d}Q = \left[36Q - \frac{Q^3}{300}\right]_0^{60} =$$
$$= 36 \cdot 60 - \frac{60^3}{300} = 1\,440$$

Přebytek výrobce činí 1 440 Kč.

3.41. Nalezněte rovnovážnou cenu $\overline{P}$, množství zboží prodávaného $\overline{Q}$ za rovnovážnou cenu a celkový přebytek S, jsou-li dány funkce poptávky, resp. nabídky $P = D(Q)$, resp. $P = S(Q)$ ve tvaru

$$\begin{aligned} P &= D(Q) = 25 - \frac{Q^2}{1\,000}, \\ P &= S(Q) = 5 + \frac{Q}{10}. \end{aligned}$$

Řešení: Při rovnováze na trhu je $\overline{P} = D(\overline{Q}) = S(\overline{Q})$. Nalezneme tedy Q, pro které mají funkce poptávky a nabídky stejnou hodnotu. Je

$$\begin{aligned} D(Q) &= S(Q) \\ 25 - \frac{Q^2}{1\,000} &= 5 + \frac{Q}{10} \\ 20 &= \frac{Q^2}{1\,000} + \frac{Q}{10} \\ Q^2 + 100\,Q - 20\,000 &= 0 \\ Q &= -200,\ 100. \end{aligned}$$

Kořen -200 nebudeme uvažovat vzhledem k předpokladu $Q \geq 0$. Při rovnováze na trhu se bude prodávat 100 kusů zboží. Nyní můžeme dosazením do $P = D(Q)$, resp. $P = S(Q)$ určit cenu, za jakou se bude zboží prodávat. Je

$$\begin{aligned} \overline{P} &= D(100) = 25 - \frac{100^2}{1\,000} = 25 - 10 = 15 \text{ Kč}, \\ \overline{P} &= S(100) = 5 + \frac{100}{10} = 5 + 10 = 15 \text{ Kč}. \end{aligned}$$

K výpočtu $\overline{P}$ stačilo určit hodnotu dosazením pouze do jedné funkce, my jsme výpočet pro kontrolu provedli dosazením do obou funkcí. Vypočteme celkový přebytek. Je

$$S = \int_0^{100} \left(25 - \frac{Q^2}{1\,000} - \left(5 + \frac{Q}{10}\right)\right) \mathrm{d}Q = \int_0^{100} \left(20 - \frac{Q}{10} - \frac{Q^2}{1\,000}\right) \mathrm{d}Q =$$
$$= \left[20Q - \frac{Q^2}{20} - \frac{Q^3}{3\,000}\right]_0^{100} = 2\,000 - \frac{10\,000}{20} - \frac{1\,000\,000}{3\,000} = \frac{7\,000}{6} \doteq 1167 \text{ Kč}.$$

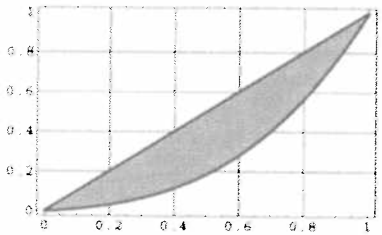
Zjistili jsme, že při rovnováze na trhu se bude prodávat 100 kusů zboží za cenu 15 Kč a celkový přebytek účastníků trhu bude (po zaokrouhlení) 1 167 Kč.

3.3.2 Lorenzova křivka

Lorenzovu křivku používáme k měření nerovností v rozdělení bohatství. Můžeme se ptát: Jsou příjmy domácností rozděleny rovnoměrněji v Česku nebo na Slovensku? Jak je rozděleno vlastnictví půdy v Česku? Jak jsou rozděleny světové zásoby ropy ve všech zemích světa?

V roce 1905 navrhl americký ekonom a statistik Max Otto Lorenz (1880 – 1962) grafické vyjádření odpovědi na tyto otázky. Roztřídil a seřadil nositele znaku podle vlastněného množství sledovaných statků. Je-li například sledovaným znakem příjem, tak všechny jedince ve společnosti seřadíme podle velikosti jejich příjmu. Nejprve uvedeme ty, kteří nemají nic. Pak se postupně do grafu vyjádří, že x % nejchudších jedinců má y % procent celkových příjmů společnosti. Např. 5 % populace má 0 % z celkového příjmu, 10 % populace má 2 % z celkového příjmu společnosti, 15 % populace má 5 % z celkového příjmu, atd. Zaneseme-li zjištěné údaje do grafu, ve kterém vodorovná osa znamená procentuální část populace a svislá osa označuje počet procent celkového příjmu, dostaneme tzv. Lorenzovu křivku, viz Obr. **3.10**.

Zmíníme některé vlastnosti Lorenzovy křivky. Tato prochází vždy body o souřadnicích $[0, 0]$ a $[1, 1]$. Je to dáno tím, že 0 % populace dosahuje 0 % celkových příjmů a 100 % populace dosahuje veškeré příjmy populace, tedy 100 % celkových příjmů. Křivka je „rostoucí", neboť není možné, aby větší část populace seřazené dle velikosti příjmu měla menší příjem než menší část takto seřazené populace. Křivka leží pod grafem funkce $y = x$, protože x % nejchudších nemůže mít více než x % celkových příjmů. Současně je křivka konvexní, neboť podíl celkových příjmů, který připadá na jednotlivé příjemce, musí s rostoucím příjmem růst.



Obrázek 3.10: Lorenzova křivka a míra nerovnosti

Čím je Lorenzova křivka prohnutější, tím větší nerovnost v rozdělení příjmu (majetku, bohatství) panuje. Proto se ke kvantitativnímu vyjádření této nerovnosti používá obsah plochy mezi Lorenzovou křivkou a grafem funkce $y = x$. Velikost této plochy musí být v rozmezí od 0 do $1/2$. Jsou dva extrémní případy: příjem je rozdělen naprosto rovnoměrně, tj. všichni dosahují stejného příjmu, nebo je příjem rozdělen naprosto nerovnoměrně, tj. veškerý příjem (majetek, bohatství) má jediná osoba a ostatní nemají nic. V prvním případě Lorenzova křivka splývá s grafem funkce $y = x$, v druhém případě je Lorenzova křivka totožná s osou x až do bodu 100 %, kdy „odskočí" na hodnotu 1 (tj. 100 % celkového majetku).

Míra nerovnosti G je definována jako poměr plochy mezi grafem funkce $y = x$ a Lorenzovou křivkou k obsahu plochy pod grafem funkce $y = x$. Obsah plochy pod grafem funkce $y = x$ je roven $1/2$, z toho plyne, že míra nerovnosti je rovna dvojnásobku plochy ohraničené Lorenzovou křivkou a grafem funkce $y = x$ a nabývá proto hodnoty od 0 do 1. Poznamenejme, že někdy se míra nerovnosti také nazývá *Giniho koeficient*. Jestliže je $y = f(x)$ rovnicí Lorenzovy křivky, potom pro míru nerovnosti G platí

$$G = 2\int_0^1 (x - f(x))\,\mathrm{d}x. \tag{3.9}$$

Pro srovnání uveďme hodnoty míry nerovnosti příjmu rodin ve vybraných zemích světa. Nejnižší hodnota Giniho koeficientu je ve Švédsku, nejvyšší v Namibii. Průměrná hodnota v EU je odhadována na $G \doteq 0,3$.

stát	Giniho koeficient
Švédsko	0,23
Česká republika	0,26
Rusko	0,41
USA	0,45
Čína	0,47
Namibie	0,70

Tabulka 3.1: Giniho koeficient pro vybrané země dle *CIA, Factbook* 2008

Řešené úlohy

3.42. Vypočtěte míru nerovnosti rozdělení příjmů v populaci pro Lorenzovu křivku s rovnicí $y = \dfrac{4x^2}{5} + \dfrac{x}{5}$.

Řešení: S použitím vzorce (3.1) dostaneme

$$G = 2\int_0^1 \left(x - \left(\frac{4x^2}{5} + \frac{x}{5}\right)\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \left(\frac{4x}{5} - \frac{4x^2}{5}\right)\mathrm{d}x = 2\left[\frac{2x^2}{5} - \frac{4x^3}{15}\right]_0^1 =$$
$$= 2\left(\frac{2}{5} - \frac{4}{15}\right) = \frac{4}{15}.$$

Míra nerovnosti je v tomto případě rovna $4/15$, tedy $0,2\overline{6}$. Tato hodnota představuje celkem malou nerovnoměrnost v rozložení příjmů v populaci, příjmy jsou v populaci víceméně rovnoměrně rozdělené.

3.43. Během výzkumu se zjišťoval celkový příjem domácností v jisté společnosti. V Tabulce 3.2 jsou uvedeny výsledky, kde v prvním řádku je uveden počet procent populace, která má procentuální podíl na celkovém příjmu nižší nebo stejný než je odpovídající údaj v druhém řádku tabulky. Z Tabulky 3.2 je zřejmé, že 10 % populace má nejvýše 1,27 %

x [%]	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y [%]	0	1,27	3,36	6,69	11,68	18,75	28,32	40,81	56,64	76,23	100

Tabulka 3.2: Rozdělení celkových příjmů domácností

celkových příjmů společnosti, 20 % populace dosahuje nejvýše na 3,36 % celkových příjmů společnosti, atd. Vypočtěte míru nerovnosti rozdělení příjmu v této společnosti.

Řešení: V tomto případě neznáme předpis pro rovnici Lorenzovy křivky. Není proto možné použít vzorec (3.1). Z tabulky však známe některé funkční hodnoty. Nabízí se použít Simpsonův vzorec (2.44) ze strany 68, což také uděláme. Označme rovnici Lorenzovy křivky $y = f(x)$, $i = x/10$ a $f_i = [f(x)]/100\%$. Je tedy $f_0 = f(0) = 0$, $f_1 = f(10) = 0,0127$, atd. Potom je

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \doteq \frac{h}{3}\left[(f_0 + f_{10}) + 2(f_2 + f_4 + f_6 + f_8) + 4(f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9)\right] =$$
$$= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}\left[(0+1) + 2\,(0,0336 + 0,1168 + 0,2832 + 0,5664) +\right.$$
$$\left. + 4\,(0,0127 + 0,0669 + 0,1875 + 0,4081 + 0,7623)\right] =$$
$$= \frac{1}{30}\left[1 + 2\cdot 1 + 4\cdot 1,4375\right] = \frac{875}{3000}.$$

Nyní využijeme následující rovnosti

$$G = 2\int_0^1 (x - f(x))\,\mathrm{d}x = 2\cdot\left[\int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

Snadno ověříme rovnost $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 1/2$. Potom je

$$G = 2\left[\int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right] = 2\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{875}{3000}\right) = 0,4167.$$

Míra nerovnosti je v tomto případě přibližně rovna $G = 0,4167$.

3.4 Různé úlohy

Řešené úlohy

3.44. Velká ZOO zahájila reklamní kampaň, jejímž cílem je přilákat návštěvníky. Počet lidí, kteří ZOO navštívili po zahájení kampaně, lze popsat rovností

$$V(t) = 5\,000 - 24e^{-0,3t},$$

kde t je počet dnů trvání kampaně a $V(t)$ značí počet návštěvníků během t-tého dne. Vypočtěte, kolik návštěvníků přišlo do ZOO během prvních třiceti dnů kampaně.

Řešení: K výpočtu opět použijeme obsah plochy pod grafem funkce. Snadno ověříme, že obsah této plochy v mezích od $t = 0$ do $t = 1$ odpovídá počtu návštěvníků v prvém dni kampaně, obsah plochy v mezích od $t = 1$ do $t = 2$ přibližně odpovídá počtu návštěvníků v druhém dni kampaně, tj. celkový počet příchozích v prvních třiceti dnech odpovídá obsahu plochy pod grafem funkce $V(t)$ v mezích od $t = 0$ do $t = 30$. Je

$$V_T = \int_0^{30} (5\,000 - 24e^{-0,3t})\,\mathrm{d}t = \left[5\,000t + 80e^{-0,3t}\right]_0^{30} = \left(150\,000 + \frac{80}{e^9}\right) - (0 + 80) = \\ = 149\,920.$$

Za první měsíc do ZOO přišlo 149 920 návštěvníků.

3.45. Nový ropný vrt na počátku provozu poskytuje 120 000 barelů ropy ročně. Každý rok však produkce vrtu klesá o 4 000 barelů oproti předchozímu roku. Kolik ropy se vytěží z vrtu během prvních 20 let provozu?

Řešení: Je samozřejmě možné vypočítat množství vytěžených barelů v jednotlivých letech a tyto sečíst, nicméně existuje rychlejší cesta. Víme, že produkci ropy lze popsat rovností $f(t) = 120\,000 - 4\,000t$, kde $f(t)$ značí objem těžby v t-tém roce provozu. Obsah plochy pod grafem funkce $f(t)$ v rozmezí od t_0 do t_1 odpovídá celkovému objemu ropy, vytěženému v období od t_0 do t_1. Celkové množství ropy P_{20} za prvních dvacet let tak vypočítáme pomocí vzorce

$$P_{20} = \int_0^{20} (120\,000 - 4\,000t)\,\mathrm{d}t = \left[120\,000t - 2\,000t^2\right]_0^{20} = 120\,000\cdot 20 - 2\,000\cdot 400 = \\ = 1\,600\,000 \text{ barelů}.$$

Za dvacet let provozu ropného vrtu bude vytěženo přibližně 1 600 000 barelů ropy.

3.46. Uvažujme podobnou situaci jako v předchozí úloze. Ropný vrt na počátku provozu poskytuje 200 000 barelů ropy ročně. Produkce vrtu klesá každý rok o 6% vytěžených barelů oproti předchozímu roku. Za jak dlouho bude celkově z vrtu vytěženo

(a) 1 000 000 barelů ropy,

(b) 3 500 000 barelů ropy?

Řešení: Objem těžby v jednotlivých letech představuje členy geometrické posloupnosti, neboť každý následující člen je o šest procent menší než předchozí člen; každý následující člen je tedy 0,94 násobkem předchozího členu. Pro vyjádření n-tého členu geometrické posloupnosti platí vzorec $a_n = a_1\cdot q^{n-1}$, kde a_1 je první člen posloupnosti (v našem případě jde o objem těžby v prvním roce provozu vrtu) a q je tzv. kvocient posloupnosti (v našem případě je $q = 0,94$). Pro množství vytěžené ropy $f(t)$ v roce t proto platí vzorec $f(t) = 200\,000\cdot 0,94^{t-1}$, kde $t = 1, 2, 3, \ldots$. Přibližné celkové množství vytěžené ropy v období od t_0 do t_1 lze vypočítat pomocí vzorce

$$P = \int_{t_0}^{t_1} (200\,000\cdot 0,94^{t-1})\,\mathrm{d}t.$$

Víme, že těžit začneme v čase $t_0 = 0$ a ptáme se, v jakém čase t_1, resp. t_2 bude celkové množství vytěžené ropy rovno 1 000 000 resp. 3 500 000 barelů ropy. Odpověď dostaneme vyřešením dvou rovnic s neznámými t_1 a t_2 v horní mezi určitých integrálů

$$1\,000\,000 = \int_0^{t_1} (200\,000\cdot 0,94^{t-1})\,\mathrm{d}t, \qquad \text{resp.} \qquad 3\,500\,000 = \int_0^{t_2} (200\,000\cdot 0,94^{t-1})\,\mathrm{d}t.$$

Nejprve nalezneme řešení rovnice vlevo. Je

$$\begin{aligned}
1\,000\,000 &= \int_0^{t_1} (200\,000\cdot 0,94^{t-1})\,\mathrm{d}t\\
1\,000\,000 &= 200\,000\int_0^{t_1} 0,94^{t-1}\,\mathrm{d}t\\
5 &= \int_0^{t_1} 0,94^{t-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{0,94^{t-1}}{\ln(0,94)}\right]_0^{t_1}\\
5\ln(0,94) &= 0,94^{t_1-1} - 0,94^{-1}\\
0,94^{-1} + 5\ln(0,94) &= 0,94^{t_1-1}\\
t_1 - 1 &= \frac{\ln(0,94^{-1} + 5\ln(0,94))}{\ln(0,94)}\\
t_1 &= \frac{\ln(0,94^{-1} + 5\ln(0,94))}{\ln(0,94)} + 1\\
t_1 &\doteq 5,55
\end{aligned}$$

Zjistili jsme, že z ropného vrtu bude vyčerpáno 1 000 000 barelů ropy po přibližně pěti a půl letech provozu vrtu.

Analogicky můžeme hledat řešení druhé rovnice. Zápis řešení již bude stručnější. Je

$$3\,500\,000 = \int_0^{t_2} (200\,000 \cdot 0{,}94^{t-1})\,dt$$

$$\frac{35}{2} = \int_0^{t_2} 0{,}94^{t-1}\,dt = \left[\frac{0{,}94^{t-1}}{\ln(0{,}94)}\right]_0^{t_2}$$

$$0{,}94^{-1} + \frac{35}{2}\ln(0{,}94) = 0{,}94^{t_2-1}$$

$$t_2 = \frac{\ln\left(0{,}94^{-1} + \frac{35}{2}\ln(0{,}94)\right)}{\ln(0{,}94)} + 1 = \frac{\ln(-0{,}019)}{\ln(0{,}94)} + 1$$

Hodnota $\ln(-0{,}019)$ však není definována, neboť funkce $\ln x$ je definována jen pro $x > 0$. Hodnota t_2 tedy neexistuje. Proč? Odpověď poskytne výpočet následujícího nevlastního integrálu. Je

$$\int_0^\infty 200\,000 \cdot 0{,}94^{t-1}\,dt = 200\,000 \cdot \lim_{s\to\infty}\int_0^s 0{,}94^{t-1}\,dt = 200\,000 \cdot \lim_{s\to\infty}\left[\frac{0{,}94^{t-1}}{\ln(0{,}94)}\right]_0^s =$$

$$= \frac{200\,000}{\ln(0{,}94)} \cdot \lim_{s\to\infty}\left(0{,}94^{s-1} - 0{,}94^{-1}\right) = 200\,000 \cdot \frac{-0{,}94^{-1}}{\ln(0{,}94)} =$$

$$= 200\,000 \cdot 17{,}2 = 3\,440\,000$$

Závěr zní, že pokud by těžba probíhala za stanovených podmínek po neomezenou dobu, celkově by se vytěžilo přibližně 3 440 000 barelů ropy. Proto není možné vytěžit v konečném čase 3 500 000 barelů ropy.

3.47. Pole je z jedné strany ohraničeno přímou silnicí o délce 2 km a z druhé strany klikatou řekou. S odstupem 100 metrů od sebe byly měřeny vzdálenosti od silnice k řece (vždy kolmo na silnici) a byly zjištěny tyto hodnoty: 51 m, 72 m, 154 m, 203 m, 254 m, 324 m, 512 m, 754 m, 811 m, 823 m, 795 m, 712 m, 687 m, 712 m, 749 m, 763 m, 751 m, 654 m, 421 m, 214 m, 68 m. Pomocí Simpsonova vzorce odhadněte velikost plochy pole.

Řešení. Břeh řeky přiléhající k poli můžeme považovat za graf funkce f. Dané vzdálenosti potom lze brát jako hodnoty funkce f v bodech $x = 0$, $x = 100$, $x = 200$, atd. Je tedy $f_0 = f(0) = 51$, $f_1 = f(100) = 72$, $f_2 = f(200) = 154$, atd. Když jsme si vyjasnili, jak vypadají funkční hodnoty, můžeme použít Simpsonův vzorec k výpočtu velikosti plochy pole jakožto určitého integrálu funkce f v mezích od 0 do 2 000 m. Je

$$S = \frac{100}{3}\Big[(f_0 + f_{20}) + 2(f_2 + f_4 + f_6 + f_8 + f_{10} + f_{12} + f_{14} + f_{16} + f_{18}) +$$

$$+ 4(f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9 + f_{11} + f_{13} + f_{15} + f_{17} + f_{19})\Big] =$$

$$= \frac{100}{3}\Big[(51 + 68) + 2(154 + 254 + 512 + 811 + 795 + 687 + 749 + 751 + 421) +$$

$$+ 4(72 + 203 + 324 + 754 + 823 + 712 + 712 + 763 + 654 + 214)\Big] =$$

$$= \frac{100}{3}(119 + 2 \cdot 5134 + 4 \cdot 5231) = \frac{100 \cdot 31\,311}{3} = 1\,043\,700\ \mathrm{m}^2 = 104{,}37\ \mathrm{ha}$$

Přibližná výměra pole činí přibližně 104,37 ha.

Literatura

[1] Barnett, R. A., Ziegler, M. R.: *Applied mathematics for business, economics, life sciences, and social sciences.* Dellen Publishing Company, San Francisco 1989.

[2] Budinský, B., Charvát, J.: *Matematika I.* SNTL, Praha 1987.

[3] Černý, I.: *Úvod do inteligentního kalkulu.* Academia, Praha 2002.

[4] Děmidovič, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy.* Fragment, Praha 2003.

[5] Frank, R. H.: *Mikroekonomie a chování.* Nakladatelství Svoboda, Praha 1995.

[6] Krämer, W.: *Statistika do vesty.* Nakladatelsví Baronet, Praha 2005.

[7] Jirásek, F., Benda, J.: *Matematika pro bakalářské studium.* Ekopress, Praha 2006.

[8] Jirásek, F., Kriegelstein, E., Tichý, Z.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky.* SNTL, Praha 1979.

[9] Matejdes, M.: *Aplikovaná matematika.* MATCENTRUM, Zvolen 2005.

[10] Minorskij, V. P.: *Sbírka úloh z vyšší matematiky.* SNTL, Praha 1964.

[11] Moc, O.: *Sbírka úloh z matematiky. Diferenciální počet jedné proměnné.* UJEP, Ústí nad Labem 2007.

Autor:	Mgr. Ondřej Moc, Ph.D.
Název:	Sbírka úloh z matematiky Integrální počet funkcí jedné proměnné
Vydal:	Fakulta sociálně ekonomická, UJEP, Ústí nad Labem
Vydání:	Druhé
Rozsah:	98 stran
Náklad	300 výtisků
Rok vydání	2009
ISBN:	978-80-7414-183-6
Tisk:	Dům tisku, Ústí nad Labem

Publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou.

Ústí nad Labem 2009

Název	Sbírka úloh z matematiky Integrální počet funkcí jedné proměnné
Autoři	Ondřej Moc
Nakladatel	Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem
Edice	skripta
Rok	2009
Vydání	2. vydání
Náklad	300 ks
Počet stran	98 stran
Tisk a vazba	PrintActive s.r.o.

Kniha byla objednána prostřednictvím portálu: **www.dum-tisku.cz**.

ISBN 978-80-7414-183-6