DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

J. Kuben, Š. Mayerová, P. Račková a P. Šarmanová

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

J. Kuben, Š. Mayerová, P. Račková a P. Šarmanová
Diferenciální počet funkcí více proměnných

ISBN

Předmluva

V textu jsou vyloženy základní partie diferenciálního počtu funkcí více proměnných jako limita a spojitost, parciální a směrové derivace, diferenciál, Taylorův polynom, lokální a globální extrémy, implicitní funkce a vázané extrémy.

Výklad je pro jednoduchost ve větší části textu omezen na funkce dvou proměnných. V každé kapitole je však v části Pro zájemce uvedeno, jak vypadají příslušné pojmy a výsledky pro funkce tří a více proměnných. Výjimkami jsou pouze část kapitoly o lokálních extrémech, kde jsou v samostatném oddílu uvedeny nutné a postačující podmínky existence pro funkce tří a více proměnných, a kapitola o vázaných extrémech, kde je od počátku výklad veden pro obecný případ funkcí n proměnných. Studium těchto partií (zejména vázaných extrémů) je oproti zbytku textu výrazně náročnější.

V poslední kapitole jsou zavedeny kvadriky v třírozměrném prostoru a jsou popsány nejdůležitější z nich. Tato problematika sice patří do geometrie, na druhé straně však kvadriky poskytují užitečné příklady implicitně daných funkcí.

Text obsahuje řadu detailně řešených příkladů i neřešených úloh k procvičení. Jejich počet by měl být dostatečný pro pokrytí potřeb cvičení i samostatné studium. Velký důraz je v textu kladen na názorné ilustrace, které pomohou k získání správné geometrické představy o zaváděných pojmech.

Všechna tvrzení uvedená v textu pro funkce dvou proměnných jsou dokazována. Chybějící důkazy, týkající se především funkcí tří a více proměnných, lze nalézt v pracích uvedených v seznamu literatury, zejména v [2], [7], [8] a [18]. Prvně zmíněný titul rovněž existuje v elektronické verzi [4]. Zájemcům o hlubší poznatky lze doporučit [5], [8], [14] a [16].

Text byl vysázen pomocí sázecího systému TEX ve formátu LATEX 2_ε. Obrázky byly zhotoveny s použitím programů METAPOST (balík mfpic), Maple a MG.

V Brně a Ostravě 15. 1. 2011 Autoři

O projektu

Text vznikl v rámci řešení projektu „Matematika pro inženýry 21. století — inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti“. Tento projekt je řešen na Vysoké škole báňské — Technické univerzitě v Ostravě a Západočeské univerzitě v Plzni v období 2009–2012.

Hlavní motivací tohoto projektu je potřeba reagovat na změnu úlohy jednotlivých partií matematiky při řešení praktických problémů, způsobenou zejména velkým pokrokem v matematickém modelování, dramatickým zlepšováním software a rychlým zvyšováním výpočetních kapacit moderních počítačů. Inženýři tak nyní běžně využívají stále se vyvíjející komplikované softwarové produkty založené na matematických pojmech, se kterými se v kurzech matematiky buďto nesetkají vůbec nebo v nevhodné formě. Na druhé straně neodráží z nejrůznějších důvodů prezentace některých pojmů v základních kurzech potřeby odborných kateder. Tento stav ztěžuje studentům aktivní používání získaných vědomostí v odborných předmětech i orientaci v rychle se vyvíjejících metodách inženýrské praxe.

Cílem projektu je inovace matematických a některých odborných kurzů na technických vysokých školách s cílem získat zájem studentů, zvýšit efektivnost výuky, zpřístupnit prakticky aplikovatelné výsledky moderní matematiky a vytvořit předpoklady pro efektivní výuku inženýrských předmětů. Zkvalitnění výuky matematiky budoucích inženýrů chceme dosáhnout po stránce formální využitím nových informačních technologií přípravy elektronických studijních materiálů a po stránce věcné pečlivým výběrem vyučované látky s důsledným využíváním zavedených pojmů v celém kurzu matematiky s promyšlenou integrací moderního matematického aparátu do vybraných inženýrských předmětů. Metodiku výuky matematiky a její atraktivnost pro studenty chceme zlepšit důrazem na motivaci a důsledným používáním postupu „od problému k řešení“.

V rámci projektu vytváříme 40 nových výukových materiálů z oblastí matematické analýzy, lineární algebry, numerických metod, metod optimalizace, teorie grafů, diskrétní matematiky, statistiky a vybraných odborných kurzů. Všechny hotové výukové materiály budou volně k dispozici na webových stránkách projektu `http://mi21.vsb.cz/`.

Autoři předem děkují za všechny podnětné nápady k vylepšení textu a za upozornění na chyby.

Orientace v textu

Každá kapitola má svou pevnou strukturu, která by vám měla pomoci k rychlejší orientaci v textu. Při psaná můžete využít následující „stavební kameny“:

Průvodce studiem

Prostřednictvím průvodce studiem vás chceme seznámit s tím, co vás v dané kapitole čeká, které části by měly být pro vás opakováním, na co je třeba se obzvláště zaměřit atd.

Cíle

V části cíle se dozvíte, co všechno zvládnete a budete umět po prostudování dané kapitoly.

Příklad

Touto ikonou jsou označeny všechny řešené příklady. Konec řešených příkladů je označen plným trojúhelníčkem (▲).

Pojmy k zapamatování

Pojmy zde uvedené jsou většinou nové a zcela zásadní. To znamená tyto pojmy nejen pochopit a umět ilustrovat na příkladech, ale také umět vyslovit jejich přesné definice.

Kontrolní otázky

Odpovězením na tyto otázky si ověříte, zda jste daným pojmům porozuměli, zda si uvědomujete rozdíly mezi zdánlivě podobnými pojmy, zda dovedete uvést příklad ilustrující danou situaci atd.

Příklady k procvičení

Tyto příklady slouží k tomu, abyste si důkladně procvičili probranou látku. Výsledky uvedených příkladů jsou zařazeny na konci každé kapitoly.

Klíč k příkladům k procvičení

Na konci každé kapitoly je uveden klíč ke cvičením, který obsahuje výsledky příkladů k procvičení.

Autotest

Pomocí autotestu si otestujete své znalosti a početní dovednosti z celého objemu učiva.

Pro zájemce

Tato část, jak již bylo uvedeno výše, obsahuje rozšíření výsledků na funkce tří a zejména obecně n proměnných. Je od ostatního textu odlišena menším typem písma.

Literatura

Jedná se o literaturu použitou autory při vytváření tohoto studijního materiálu, nikoliv jen o literaturu doporučenou k dalšímu studiu. Pokud některou z uvedených publikací doporučujeme zájemcům, pak je to v textu spolu s odkazem na daný titul jasně uvedeno.

Rejstřík

Rejstřík, uvedený na konci skript, poslouží ke snadné orientaci v textu.

Definice a věty jsou uvedeny v rámečku (v tiskové verzi) resp. barevným písmem s barevným pozadím (v obrazovkové verzi). Konce důkazů jsou vyznačeny prázdným čtverečkem (□), konce řešení příkladů plným trojúhelníčkem (▲).

Obsah

Kapitola 1

Reálné funkce více reálných proměnných

Průvodce studiem

Již víte, co jsou reálné funkce jedné reálné proměnné. Jako příklad uveďme $y = \sin x$, $u = t \ln t$. *Jde o* zobrazení *(viz [11, str. 28]), které každému reálnému číslu z definičního oboru (hodnotě nezávisle proměnné* x, t *apod.) přiřazuje právě jedno reálné číslo (hodnotu závisle proměnné* y, u *apod.). Tedy jedna veličina (hodnota závisle proměnné) závisí na jedné veličině (hodnotě nezávisle proměnné). V matematice se ovšem setkáváme i se složitějšími případy, kdy jedna veličina závisí na více veličinách. Např. vzorec pro výpočet obsahu obdélníku je* $S = ab$, *tedy veličina* S *závisí na dvou veličinách* a *a* b. *Podobně vzorec pro výpočet objemu kvádru je* $V = abc$, *tudíž objem* V *závisí na třech veličinách* a, b *a* c. *Z fyziky známe vzorec pro výpočet dráhy rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu* $s = 1/2\,at^2$ *(*s *závisí na dvou veličinách), vzorec pro výpočet hmotnosti homogenního kvádru* $m = \rho abc$ *(*m *závisí na čtyřech veličinách) atd. To nás vede k zavedení funkcí více proměnných.*

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- určovat definiční obory funkcí dvou a více proměnných,
- určit, zda množina bodů v $\mathbb{R}^3$ je či není grafem funkce dvou proměnných,
- nakreslit vrstevnice funkce dvou proměnných,
- určit, zda je daný bod v $\mathbb{R}^2$ vnitřním, vnějším, hraničním, hromadným resp. izolovaným bodem dané množiny,
- rozhodnout, zda je daná množina v $\mathbb{R}^2$ uzavřená, otevřená nebo není ani otevřená ani uzavřená,
- definovat limitu funkce dvou proměnných,

- vypočítat limity některých funkcí dvou proměnných resp. rozhodnout o její neexistenci,
- vysvětlit vztah mezi spojitostí funkce a limitou funkce dvou proměnných v daném bodě.

Označení

V následujícím textu používáme standardní označení pro číselné množiny. Konkrétně:

$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel,
$\mathbb{Q}$	množina všech racionálních čísel,
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel,
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel,
$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel,
$\mathbb{R}^+$	množina všech kladných reálných čísel,
$\mathbb{R}^-$	množina všech záporných reálných čísel,
$\mathbb{R}_0^+$	množina všech nezáporných reálných čísel,
$\mathbb{R}_0^-$	množina všech nekladných reálných čísel,
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}_0^+$	množina všech nezáporných celých čísel apod.

Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, symbol (a, b) značí otevřený interval reálných čísel a symbol $\langle a, b\rangle$ značí uzavřený interval reálných čísel. Obdobně $\langle a, b)$ resp. $(a, b\rangle$ znamená interval, který je z jedné strany otevřený a z druhé uzavřený.

1.1 Množina $\mathbb{R}^n$

Symbolem $\mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, značíme množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel. Prvky $\mathbb{R}^n$ zapisujeme ve tvaru $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2 \dots, x_n)$, kde $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. V případě $n = 2$ se prvky $\mathbb{R}^2$, tj. uspořádané dvojice, obvykle značí (x, y) a v případě $n = 3$ se prvky $\mathbb{R}^3$, tj. uspořádané trojice, obvykle značí (x, y, z).

Nyní definujme pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$ následující operace:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ c \cdot \boldsymbol{x} &= (cx_1, cx_2, \dots, cx_n). \end{aligned}$$

Lze ukázat (cvičení v lineární algebře), že množina $\mathbb{R}^n$ tvoří spolu s těmito operacemi *reálný vektorový prostor* (vektorový prostor nad tělesem reálných čísel). Prvky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ vektorového prostoru pak obecně nazýváme vektory a prvky tělesa $\mathbb{R}$ nazýváme skaláry. Připomeňme, že mluvíme-li o vektorovém prostoru, musí být jasné, co rozumíme množinou vektorů, co množinou skalárů a jak jsou definovány operace sčítání vektorů a násobení vektoru a skaláru.

Odčítání vektorů pak definujeme jako přičítání vektoru opačného neboli vektoru vynásobeného skalárem (číslem) -1.

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + ((-1)\boldsymbol{y}) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n).$$

Chceme-li ve vektorovém prostoru „měřit“, tj. určovat velikosti vektorů a odchylky vektorů, je třeba zavést *skalární součin*. My budeme dále používat standardní skalární součin definovaný takto:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Připomeňme, že skalární součin je symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru, jejíž odpovídající kvadratická forma je pozitivně definitní. Nyní lze na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ s uvedeným skalárním součinem nadefinovat tzv. *normu vektoru*:

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Norma vektoru (někdy budeme také říkat velikost vektoru) je tedy odmocninou ze skalárního součinu tohoto vektoru se sebou samým. Tato norma se nazývá eukleidovská norma. Každá norma na vektorovém prostoru přirozeně indukuje (určuje) tzv. *metriku* rovností

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Číslo $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ se nazývá „eukleidovskou vzdáleností“ bodů x, y.

Pomocí pojmu vzdálenosti pak můžeme definovat epsilonové okolí bodu $x \in \mathbb{R}^n$ a pomocí něho pak pojmy spojitosti a limity funkce více proměnných. Množinu, na níž máme definovánu metriku, nazýváme *metrický prostor*. Skutečnost, že $\mathbb{R}^n$ je metrickým prostorem, nám umožní definovat konvergenci posloupností v $\mathbb{R}^n$.

Pro zájemce:

Pro lepší pochopení pojmů použitých v předchozích odstavcích uveďme některé definice.

Definice 1.1. Nechť $P \neq \emptyset$ a nechť funkce $\rho\colon\ P \times P \to \mathbb{R}$ má tyto vlastnosti:

a) $\rho(x, y) \geqq 0$ pro všechna $x, y \in P$, tj. ρ je nezáporná funkce,

b) $\rho(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y$,

c) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ pro všechna $x, y \in P$, tj. ρ je symetrická funkce,

d) $\rho(x, y) \leqq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ pro všechna $x, y, z \in P$, tj. ρ splňuje tzv. trojúhelníkovou nerovnost.

Potom funkci ρ nazýváme *metrikou* na P a číslo $\rho(x, y)$ *vzdáleností bodů* $x, y \in P$. Dvojici (P, ρ) nazýváme *metrický prostor*.

Předchozí definice metrického prostoru byla zavedena Mauricem René Fréchetem (1878–1973) a patří k základním pojmům matematické analýzy. Následuje definice normovaného vektorového prostoru, která se poprvé objevuje v práci Frederika Riesze (1880–1956).

Definice 1.2. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo nad $\mathbb{C}$. Nechť je na V definována reálná funkce p s těmito vlastnostmi:

a) $p(x) \geqq 0$ pro všechna $x \in V$,

b) $p(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$,

c) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ a všechna $x \in V$,

d) $p(x + y) \leqq p(x) + p(y)$ pro všechna $x, y \in V$.

Tato funkce se nazývá *norma* na V a dvojice (V, p) *normovaný vektorový prostor* nad $\mathbb{R}$ (nebo nad $\mathbb{C}$). Pro normu budeme často používat značení $|| \cdot ||$. Tedy budeme psát $||x||$ místo $p(x)$.

Jak jsme viděli výše, lze v každém normovaném vektorém prostoru přirozeným způsobem definovat metriku vztahem $\rho(x, y) = ||x - y||$. Tedy každý normovaný vektorový prostor je zároveň metrickým prostorem.

Definujeme-li na množině $\mathbb{R}^n$ skalární součin, normu a metriku pomocí vztahů výše uvedených, mluvíme o eukleidovské normě, eukleidovské metrice a n-rozměrném eukleidovském prostoru.

Například množina $\mathbb{R}$ spolu s funkcí $\rho(x, y) = |x - y|$, kde $x, y \in \mathbb{R}$, tvoří metrický prostor. Tento prostor a uvedenou metriku (vzdálenost bodů) běžně používáme.

Později se setkáte i s jinými než eukleidovskými normami a metrikami.

1.2 Vlastnosti množin v $\mathbb{R}^2$

Při studiu funkcí jedné proměnné jsme vystačili většinou s různými typy intervalů, protože funkce byly obvykle definovány na intervalech nebo sjednoceních několika intervalů. U funkcí dvou (a více) proměnných je ale situace daleko složitější. Škála „rozumných“ množin např. v rovině je daleko různorodější. Abychom se mohli snáze a přesněji vyjadřovat, zavedeme si několik důležitých pojmů, které nám umožní zavést další, klíčové pojmy, které jsou u „jednoduchých“ množin intuitivně jasné, ale u „složitějších“ množin se bez jejich přesné definice neobejdeme. Zaměříme se nejprve na rovinu $\mathbb{R}^2$.

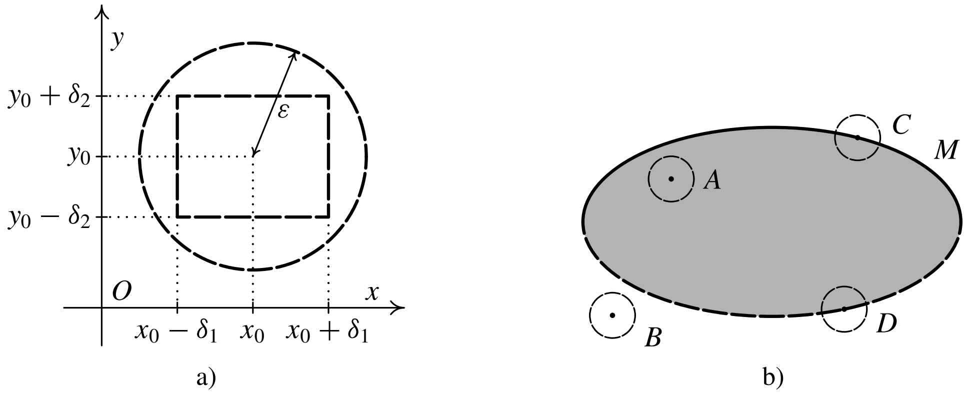
Definice 1.3. Nechť $X = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ je bod a $\varepsilon > 0$ je číslo. Pak *epsilonovým okolím* bodu X rozumíme otevřený kruh se středem v X a poloměrem ε. Značíme je $\mathscr{O}(X, \varepsilon)$ nebo $\mathscr{O}((x_0, y_0), \varepsilon)$. Tedy (viz obr. 1.1 a))

$$\mathscr{O}((x_0, y_0), \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \varepsilon\}.$$

Poznámka 1.4.

i) Symbol $\| . \|$ v předchozí definici znamená eukleidovskou normu, tj. pro $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ je $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Platí tudíž $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \|(x - x_0, y - y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Vlastně jde o vzorec pro výpočet délky úsečky, jejíž koncové body mají pravoúhlé souřadnice (x_0, y_0) a (x, y).

ii) Není-li v některých úvahách podstatná velikost poloměru okolí ε, vynecháme jej v označení, tj. použijeme $\mathscr{O}(X)$.



Obr. 1.1: Okolí a klasifikace bodů v rovině

iii) Lze ukázat, že pro další definice není podstatné, že okolí bylo definované jako otevřený kruh. Stejně dobře by posloužil např. otevřený obdélník (co je otevřená množina se dozvíte dále) mající podobu $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, o rozměrech $2\delta_1$ a $2\delta_2$ se stranami rovnoběžnými s osami x a y a středem v bodě (x_0, y_0) — viz obr. 1.1 a). V každém takovém obdélníku je dostatečně malý kruh s týmž středem a naopak v každém kruhu je dostatečně malý obdélník s týmž středem. V následujících definicích totiž bude podstatné, že *existuje nějaké (dostatečně malé) okolí* s jistou vlastností. Obdélníkové okolí se nám bude hodit později v kapitole o implicitní funkci. Naopak při definici limity, lokálních extrémů apod. se nám bude lépe pracovat s kruhovým okolím.

Definice 1.5. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je množina a $X \in \mathbb{R}^2$ je bod. Řekneme, že X je

a) *vnitřním bodem* množiny M, jestliže *existuje* okolí $\mathscr{O}(X)$ bodu X takové, že $\mathscr{O}(X) \subset \subset M$, tj. $\mathscr{O}(X) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus M) = \emptyset$,

b) *vnějším bodem* množiny M, jestliže *existuje* okolí $\mathscr{O}(X)$ bodu X takové, že $\mathscr{O}(X) \subset \subset \mathbb{R}^2 \setminus M$, tj. $\mathscr{O}(X) \cap M = \emptyset$,

c) *hraničním bodem* množiny M, jestliže pro každé okolí $\mathscr{O}(X)$ platí, že $\mathscr{O}(X) \cap M \neq \emptyset$ a $\mathscr{O}(X) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus M) \neq \emptyset$.

Na obr. 1.1 b) je znázorněna množina M a čtyři body se svými okolími. Zřejmě bod A je vnitřním bodem a bod B je vnějším bodem. Body $C \in M$ a $D \notin M$ jsou hraniční body množiny M, protože každé jejich okolí obsahuje jak body množiny M, tak body $\mathbb{R}^2 \setminus M$.

Poznámka 1.6. a) Bod X je vnitřním bodem množiny M, jestliže existuje okolí $\mathscr{O}(X)$ bodu X, které leží celé v M. Tedy každý vnitřní bod množiny M je prvkem množiny M.

b) Bod X je vnějším bodem množiny M, jestliže existuje okolí $\mathscr{O}(X)$ bodu X, které leží celé mimo M. Tedy žádný vnější bod množiny M není prvkem množiny M.

c) Bod X je hraničním bodem množiny M, jestliže každé okolí $\mathscr{O}(X)$ bodu X obsahuje jak body ležící v M, tak body neležící v M. Hraniční bod může, ale nemusí být prvkem množiny M. Např. bod C obr. 1.1 b) je prvkem množiny M, bod D není prvkem množiny M.

d) Jednotlivé vlastnosti se vylučují, každý bod v rovině má právě jednu z nich.

Definice 1.7. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je množina.

a) Množinu všech vnitřních bodů M nazýváme jejím *vnitřkem* a značíme $\operatorname{int} M$.

b) Množinu všech vnějších bodů M nazýváme jejím *vnějškem* a značíme $\operatorname{ext} M$.

c) Množinu všech hraničních bodů nazýváme její *hranicí* a značíme ∂M.

d) Množinu M nazýváme *otevřenou*, jestliže obsahuje pouze své vnitřní body, tj. když $M = \operatorname{int} M$.

e) Množinu M nazýváme *uzavřenou*, jestliže obsahuje všechny své hraniční body, tj. když $\partial M \subset M$.

f) Množinu $\overline{M} = M \cup \partial M$ nazýváme *uzávěrem* množiny M.

g) Množina M se nazývá *ohraničená* (omezená), jestliže leží uvnitř nějakého (dostatečně velikého) kruhu, tj. když existuje okolí $\mathscr{O}(X)$ jakéhokoliv bodu X takové, že $M \subset \subset \mathscr{O}(X)$.

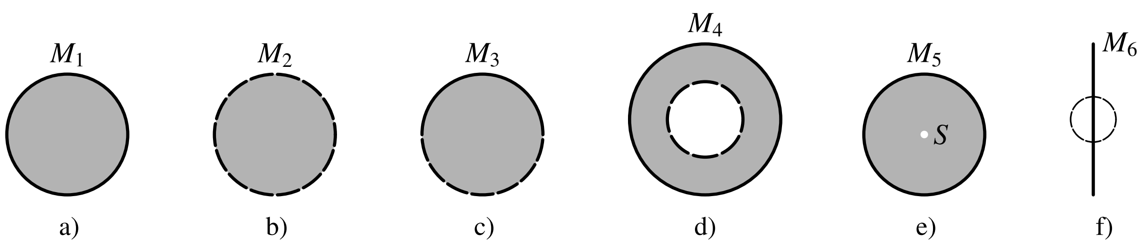
Poznámka 1.8.

i) Vzhledem k e) a f) předchozí definice je množina M uzavřená, právě když se rovná svému uzávěru, tj. když $\overline{M} = M$.

ii) Z definice 1.5 c) vyplývá, že množina M a její doplněk $\mathbb{R}^2 \setminus M$ mají stejnou hranici, tj. $\partial M = \partial(\mathbb{R}^2 \setminus M)$. Odtud snadno dostáváme, že M je otevřená právě tehdy, když její doplněk $\mathbb{R}^2 \setminus M$ je uzavřený, a naopak.

iii) Množina $\overline{M}$ je uzavřená, množina $\operatorname{int} M$ je otevřená.

Příklad 1.9. U množin na obr. 1.2 určete vnitřek, hranici a uzávěr. Rozhodněte, které z nich jsou otevřené a které uzavřené.



Obr. 1.2: Množiny v rovině

Řešení.

a) M_1 je kruh včetně jej ohraničující kružnice k. Body ležící uvnitř kruhu jsou vnitřní a tvoří vnitřek M_1, body ležící na kružnici k jsou hraniční body M_1. Tedy $\operatorname{int} M_1 = = M_1 \setminus k = M_2$, $\partial M_1 = k$, $\overline{M_1} = M_1$. M_1 je uzavřená.

b) M_2 je kruh bez ohraničující kružnice k. Body ležící uvnitř kruhu jsou vnitřní a tvoří vnitřek M_2, body ležící na kružnici k jsou hraniční. Tedy $\operatorname{int} M_2 = M_2$, $\partial M_2 = k$, $\overline{M_2} = M_2 \cup k = M_1$. M_2 je otevřená.

c) M_3 je kruh včetně horní poloviny ohraničující kružnice k. Označme l_1 horní polovinu kružnice k (včetně krajních bodů této polokružnice) a l_2 dolní polovinu kružnice k. Body ležící uvnitř kruhu jsou vnitřní a tvoří vnitřek M_3, body ležící na kružnici k (celé) jsou hraniční. Tedy $\operatorname{int} M_3 = M_3 \setminus l_1 = M_2$, $\partial M_3 = k$, $\overline{M_3} = M_3 \cup l_2 = M_1$. M_3 není ani otevřená ani uzavřená.

d) M_4 je mezikružím s větší ohraničující kružnicí k_1, která k ní patří, a menší ohraničující kružnicí k_2, která k ní nepatří. Body mezikruží jsou vnitřní body M_4 a tvoří vnitřek M_4, body ležící na těchto kružnicích jsou hraniční body M_4. Tedy $\operatorname{int} M_4 = M_4 \setminus k_1$, $\partial M_4 = k_1 \cup k_2$, $\overline{M_4} = M_4 \cup k_2$. M_4 není ani otevřená ani uzavřená.

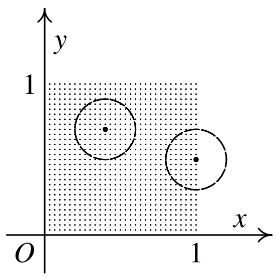
e) M_5 je kruh včetně ohraničující kružnice k, z něhož je vyjmut jeho střed S. Body různé od středu S, které leží uvnitř kruhu, jsou vnitřní a tvoří vnitřek M_1, body ležící na kružnici k jsou hraniční body M_5. Hraniční bod M_5 je ale i bod S. Jeho libovolné okolí $\mathcal{O}(S)$ obsahuje jak body z M_5 (je jich dokonce nekonečně mnoho) tak body neležící v M_5 (takový bod je vždy (pokud je $\mathcal{O}(S)$ dostatečně malé) *jediný* — bod S sám). Tedy $\operatorname{int} M_5 = M_5 \setminus k = M_2 \setminus \{S\}$, $\partial M_5 = k \cup \{S\}$, $\overline{M_5} = M_5 \cup \{S\} = M_1$. M_5 není ani otevřená ani uzavřená.

f) M_6 je úsečka včetně krajních bodů. Ta nemá (chápaná jako podmnožina $\mathbb{R}^2$!) žádné vnitřní body. Každé okolí jejího libovolného bodu zasahuje mimo ni. Všechny její body jsou hraniční. Tedy $\operatorname{int} M_6 = \emptyset$, $\partial M_6 = M_6$, $\overline{M_6} = M_6$. M_6 je uzavřená. ▲

Příklad 1.10. Určete vnitřek, hranici a uzávěr množiny

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Řešení. Množina M je tvořena všemi body jednotkového čtverce, jejichž obě souřadnice jsou racionální čísla. Protože jak racionální tak iracionální čísla jsou na přímce rozložena „neomezeně hustě“ (mezi libovolnými dvěma různými racionálními čísly je nekonečně mnoho dalších racionálních i iracionálních čísel a obdobně je tomu mezi dvěma různými iracionálními čísly), nejsme schopni takovou množinu nakreslit, obr. 1.3 je jen „přibližný“.



Obr. 1.3: Hranice množiny

Jestliže vybereme libovolný bod jednotkového čtverce, ať jsou jeho obě souřadnice racionální nebo ne, leží v jeho libovolném okolí vždy jak body, jejichž obě souřadnice jsou racionální (tedy jsou to body z M), tak body, které mají aspoň jednu souřadnici iracionální (tedy jsou to body z $\mathbb{R}^2 \setminus M$). Proto žádný bod množiny M není vnitřním bodem množiny M a libovolný bod jednotkového čtverce je hraničním bodem množiny M. Tudíž $\operatorname{int} M = \emptyset$, $\partial M = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ a $\overline{M} = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. Množina M není ani otevřená ani uzavřená.

Zatímco v „rozumných“ případech je hranice rovinných množin tvořena křivkami nebo jednotlivými body — viz příklad 1.9, ukazuje se, že se může stát, že hranicí je i čtverec.

S množinami majícími takové vlastnosti se však v běžných aplikacích nesetkáme. ▲

Příklad 1.11. Rozhodněte, které z následujících podmnožin $\mathbb{R}^2$ jsou ohraničené: Kružnice, kruh, přímka, polopřímka, úsečka, obdélník, první kvadrant, polorovina, větev hyperboly, parabola, elipsa, vnitřek trojúhelníka, vnějšek trojúhelníka, množina M z příkladu 1.10.

Řešení. Podle definice 1.7 g) musí ohraničená množina ležet uvnitř nějakého dostatečně velkého kruhu.

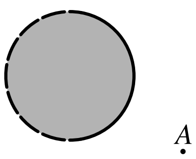
Ohraničené: Kružnice, kruh, úsečka, obdélník, elipsa, vnitřek trojúhelníka, množina M z příkladu 1.10.
Neohraničené: Přímka, polopřímka, první kvadrant, polorovina, větev hyperboly, parabola, vnějšek trojúhelníka. ▲

Definice 1.12. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je množina a $X \in \mathbb{R}^2$ je bod. Řekneme, že X je

a) *hromadným bodem* množiny M, jestliže *libovolné* okolí $\mathcal{O}(X)$ bodu X obsahuje alespoň jeden bod množiny M různý od X.

b) *izolovaným bodem* množiny M, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(X)$ takové, že platí $\mathcal{O}(X) \cap M = \{X\}$ (tj. existuje okolí $\mathcal{O}(X)$ bodu $X \in M$, které kromě bodu X neobsahuje žádné jiné body množiny M).

Množina všech hromadných bodů množiny M se nazývá *derivace* M a značí se M', množina všech izolovaných bodů množiny M se nazývá *adherence* M.



Obr. 1.4

Na obr. 1.4 je znázorněna množina M, která je tvořena otevřeným kruhem včetně pravé poloviny kružnice, která jej ohraničuje, a bodem A, který leží vně kruhu. Hromadné body množiny M jsou všechny body daného kruhu včetně celé hraniční kružnice, tedy M' je uzavřený kruh. Bod A je jediným izolovaným bodem množiny M.

Poznámka 1.13.

i) Hromadný bod může ale nemusí být prvkem množiny M. Může být vnitřním nebo hraničním (ale ne vnějším) bodem M.

ii) Izolovaný bod je prvkem množiny M a je vždy hraničním bodem M.

iii) Hromadný bod je vždy bodem uzávěru, tj. $M' \subset \overline{M}$.

iv) Uzávěr $\overline{M}$ je sjednocením derivace M' a adherence množiny M.

v) Derivace množiny nemá nic společného s derivací funkce.

Pro zájemce:

Veškeré pojmy, které jsme v tomto oddílu zavedli, byly definovány pomocí okolí bodu. Naprosto analogicky lze proto postupovat v prostoru $\mathbb{R}^n$, kde $n \geqq 3$, pokud vhodně zavedeme pojem okolí. Nejprve si všimneme prostoru $\mathbb{R}^3$.

Nechť $X = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ je bod a $\varepsilon > 0$ je číslo. Pak *epsilonovým okolím* bodu X rozumíme otevřenou kouli se středem v X a poloměrem ε. Značíme je $\mathscr{O}(X, \varepsilon)$ nebo $\mathscr{O}((x_0, y_0, z_0), \varepsilon)$. Tedy

$$\mathscr{O}((x_0, y_0, z_0), \varepsilon) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\| < \varepsilon\}.$$

Přitom pro $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, takže $\|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, což je opět délka úsečky s koncovými body o pravoúhlých souřadnicích (x_0, y_0, z_0) a (x, y, z).

Nyní bychom téměř doslova zopakovali předchozí definice a poznámky. Pokuste se představit si trojrozměrné analogie příkladů z obr. 1.2. Trojrozměrná obdoba množiny z příkladu 1.10 ukazuje, že hranicí množiny může být i těleso (konkrétně zde jednotková krychle). Avšak v případě „rozumných“ množin jako krychle, kvádr, koule, jehlan, kužel apod. bude hranice tvořena plochami, křivkami nebo body.

V případě obecného $n \in \mathbb{N}$ zavedeme normu v $\mathbb{R}^n$ následovně: pro $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ položíme $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Epsilonovým okolím bodu $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ rozumíme otevřenou kouli se středem v $\boldsymbol{x}^*$ a poloměrem $\varepsilon > 0$, kterou označíme $\mathscr{O}(\boldsymbol{x}^*, \varepsilon)$, definovanou takto:

$$\mathscr{O}(\boldsymbol{x}^*, \varepsilon) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\| < \varepsilon\}.$$

Tedy

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\| = \sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + \cdots + (x_n - x_n^*)^2}.$$

Jedná se tudíž o naprostou analogii s případy $n = 2, 3$, tentokrát nám ale chybí geometrická názornost.

Veškeré pojmy z tohoto oddílu, které byly zavedeny v $\mathbb{R}^2$, se nyní snadno přenesou do $\mathbb{R}^n$. Obecněji viz [3].

1.3 Definice funkce dvou proměnných a její graf

Definice 1.14. Nechť $A \subset \mathbb{R}^2$. Pak zobrazení $f\colon A \to \mathbb{R}$, které každé dvojici reálných čísel $(x, y) \in A$ přiřazuje právě jedno reálné číslo $z = f(x, y)$, se nazývá *reálná funkce dvou reálných proměnných*. Množinu A nazýváme *definičním oborem* a značíme $D(f)$.

Protože každý prvek množiny $D(f)$ je uspořádaná dvojice čísel (x, y), lze jej geometricky chápat jako kartézské souřadnice bodu v rovině. Tedy bodu v rovině (x, y) je zobrazením f přiřazeno číslo z. Podobně jako u funkce jedné proměnné pak píšeme $f : z = f(x, y)$ nebo stručně jen $z = f(x, y)$.

Množinu všech takových $z \in \mathbb{R}$, k nimž existuje $(x, y) \in D(f)$ tak, že $z = f(x, y)$, pak nazýváme *obor hodnot* funkce f a označujeme $H(f)$. Tj.

$$H(f) = \{z \in \mathbb{R}\colon\ \exists (x, y) \in D(f) \text{ takové, že } z = f(x, y)\}.$$

Zadání funkce

K zadání funkce f je nutné uvést jednak definiční obor $D(f)$ a jednak pravidlo (předpis), pomocí něhož je každému $(x, y) \in D(f)$ přiřazen právě jeden prvek $z \in H(f)$.

Ukažme si, s jakými formami zápisu konkrétní funkce se můžeme setkat. Například funkci f, která každému $(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x \neq y$ přiřazuje číslo $\frac{\mathrm{e}^{x+y}}{\operatorname{arctg}(x-y)}$, lze zapsat takto:

$$f\colon z = \frac{\mathrm{e}^{x+y}}{\operatorname{arctg}(x-y)}, \quad D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x \neq y\},$$
$$f(x, y) = \frac{\mathrm{e}^{x+y}}{\operatorname{arctg}(x-y)}, \quad D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x \neq y\}.$$

Často se stává, že je funkce zadána pouze předpisem a definiční obor není výslovně uveden. Pak pokládáme za definiční obor množinu všech takových $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pro která má daný předpis „smysl“.

Rovnost funkcí

Z definice plyne, že dvě funkce f a g jsou si rovny (píšeme $f = g$) právě tehdy, když mají stejný definiční obor a v každém bodě tohoto definičního oboru platí $f(x, y) = g(x, y)$. Symbolicky zapsáno:

$$(f = g) \quad \Leftrightarrow \quad [(D(f) = D(g)) \wedge (\forall (x, y) \in D(f)\colon\ f(x, y) = g(x, y))]$$

Uveďme si příklad funkcí d, r, které se rovnají.

$$d(h, k) = \frac{hk}{h^2 + k^2}, \quad D(f) = \{(h, k) \in \mathbb{R}^2\colon h > 0,\ k > 0\},$$
$$r(m, n) = \frac{|mn|}{m^2 + n^2}, \quad D(f) = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2\colon m > 0,\ n > 0\}.$$

Nezáleží samozřejmě na použitých písmenech pro označení proměnných.

U funkcí dvou proměnných budeme často znázorňovat definiční obor graficky jako podmnožinu v $\mathbb{R}^2$. Definiční obor bývá ohraničen částmi přímek, kuželoseček popř. grafů některých dalších elementárních funkcí. Domluvíme se, že části těchto hraničních křivek, které do definičního oboru patří, vyznačíme *plnou čarou*, a ty, které do definičního oboru nepatří, vyznačíme *přerušovanou čarou*.

Příklad 1.15. Určete a zakreslete definiční obory následujících funkcí.

a) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$, b) $g(x, y) = \dfrac{\sin xy}{x^2 + y^2}$,

c) $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$, d) $k(x, y) = \dfrac{\sqrt{x - y^2}}{\ln(9 - x^2 - y^2)}$.

Řešení.

a) $D(f)$ je množina takových $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pro něž má předpis $\dfrac{x+y}{x-y}$ smysl. Tento zlomek má smysl, je-li $x - y \neq 0$, tj. $x \neq y$. Tedy

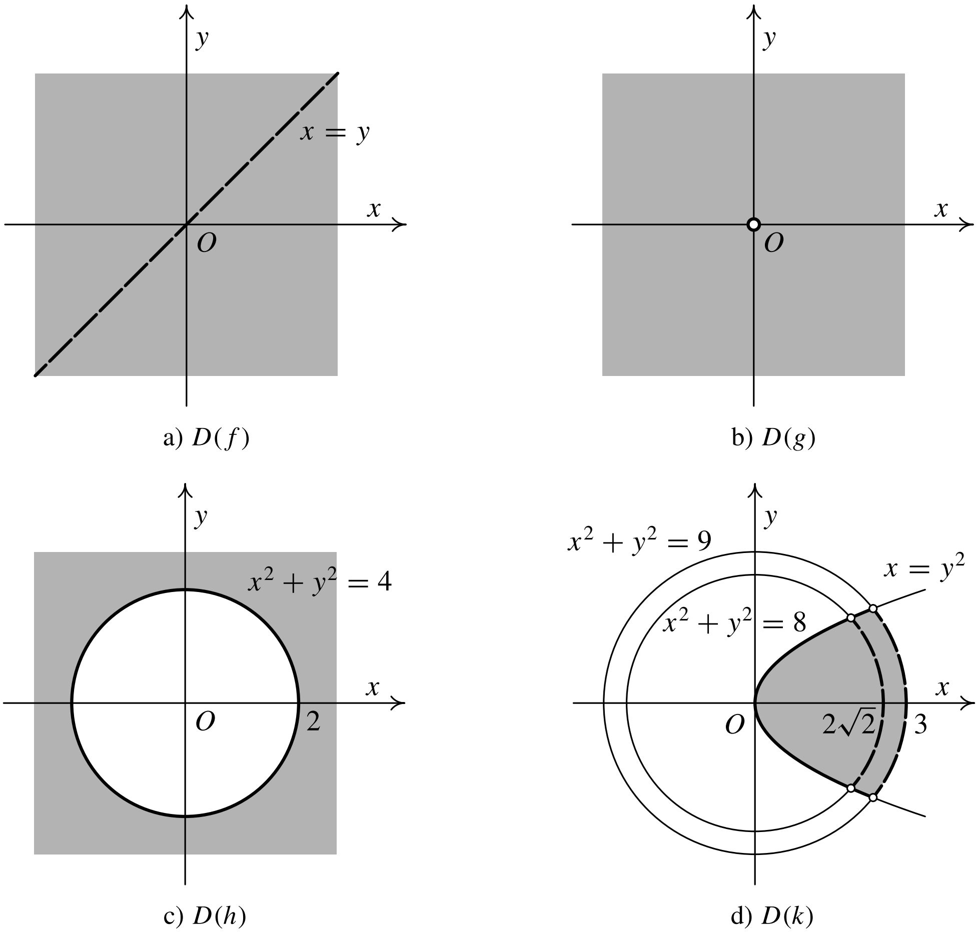
$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\},$$

což je celá rovina s vyjmutou přímkou $y = x$ — viz obr. 1.5 a).

b) Stejně jako v předchozím bodě požadujeme nenulovost jmenovatele, tj. $x^2 + y^2 \neq 0$. Odtud plyne, že $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$D(g) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

což je celá rovina s vyjmutým počátkem — viz obr. 1.5 b).



Obr. 1.5: Definiční obory

c) Protože druhá odmocnina je definována jen pro nezáporná čísla, musí platit $x^2 + y^2 - 4 \geqq 0$, tj. $x^2 + y^2 \geqq 4$. Tedy

$$D(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geqq 4\},$$

což je vnějšek kruhu $x^2 + y^2 = 4$ včetně ohraničující kružnice — viz obr. 1.5 c).

d) Zlomek má smysl, jestliže má smysl čitatel, má smysl jmenovatel a jmenovatel musí být různý od nuly. Z toho dostáváme následující podmínky.
   - $x - y^2 \geqq 0$, tj. $x \geqq y^2$ (druhá odmocnina je definována jen pro nezáporná čísla),
   - $9 - x^2 - y^2 > 0$, tj. $x^2 + y^2 < 9$ (přirozený logaritmus je definován jen pro kladná čísla),
   - $\ln(9 - x^2 - y^2) \neq 0$, tj. $9 - x^2 - y^2 \neq 1$, tj. $x^2 + y^2 \neq 8$.

   Tedy
   $$D(k) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqq y^2,\ x^2 + y^2 < 9,\ x^2 + y^2 \neq 8\},$$
   což je průnik otevřeného kruhu s hraniční kružnicí $x^2 + y^2 = 9$, z něhož je vyjmuta kružnice $x^2 + y^2 = 8$, s „vnitřkem paraboly" $x = y^2$ včetně této paraboly — viz obr. 1.5 d). ▲

U funkcí jedné proměnné byl velmi důležitým pojmem graf. Nejinak tomu bude i u funkcí dvou proměnných.

Graf funkce

U funkcí jedné proměnné $f: y = f(x)$ chápeme uspořádanou dvojici (x, y) jako bod o souřadnicích x a y. Libovolnou množinu uspořádaných dvojic (x, y) pak geometricky chápeme jako množinu bodů v rovině. *Grafem funkce* $f: D(f) \to \mathbb{R}$ pak rozumíme množinu bodů $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f) \wedge y = f(x)\}$, kde (x, y) značí bod roviny o souřadnicích x a y.

U funkcí dvou proměnných $f: z = f(x, y)$ zavedeme pojem graf funkce obdobně.

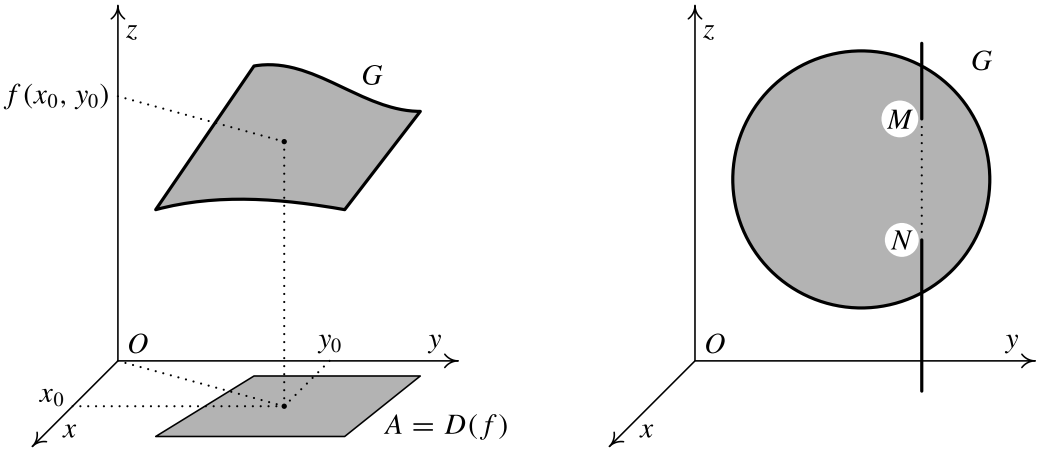
Nechť $f: z = f(x, y)$ je funkce dvou proměnných. Pak množinu bodů $G \subset \mathbb{R}^3$ definovanou vztahem
$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D(f),\ z = f(x, y)\}$$
nazýváme *grafem* funkce f.

Graf funkce f je tedy tvořen body $\big(x, y, f(x, y)\big)$ z $\mathbb{R}^3$, přičemž $(x, y) \in D(f)$.

Množina $G \subset \mathbb{R}^3$ je grafem nějaké funkce dvou proměnných právě tehdy, když libovolná rovnoběžka s osou z protne G nejvýše v jednom bodě. Definičním oborem této funkce je průmět množiny G do roviny určené osami x a y — viz obr. 1.6 a).

Tedy např. kulová plocha není grafem funkce dvou proměnných, protože některé rovnoběžky s osou z ji protnou ve dvou bodech — viz body M, N na obr. 1.6 b).

Nakreslit graf funkce dvou proměnných je obvykle podstatně obtížnější než nakreslit graf funkce jedné proměnné. Určitou představu nám mohou pomoci vytvořit tzv. vrstevnice, které známe ze zeměpisných map.



a) G je grafem funkce b) G není grafem funkce

Obr. 1.6: Množiny v $\mathbb{R}^3$

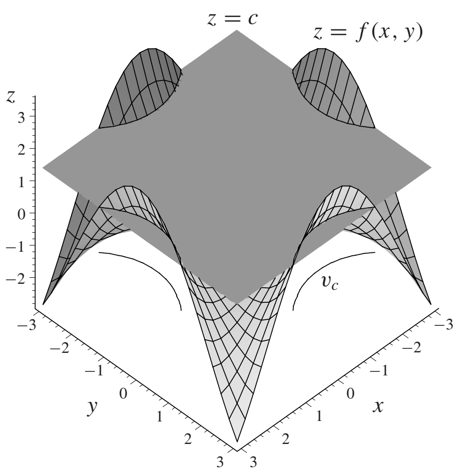
Definice 1.16. Nechť $f: z = f(x, y)$ je funkce dvou proměnných a $c \in \mathbb{R}$. Pak množinu

$$v_f(c) = \{(x, y) \in D(f) : f(x, y) = c\} \tag{1.1}$$

nazýváme *vrstevnicí* nebo *hladinou* funkce f na úrovni c (o kótě c).

Vrstevnice funkce je tedy množina bodů definičního oboru, v nichž funkce f nabývá dané hodnoty c. Vrstevnici dostaneme projekcí průniku grafu funkce f s rovinou $z = c$ do roviny určené osami x a y — viz obr. 1.7. Pokud dokážeme vrstevnice odpovídající různým hodnotám c nakreslit, pomůže nám to udělat si představu o grafu funkce f.

Poznámka 1.17. Někdy je vhodné pro lepší představu o grafu určit nejen vrstevnice, ale také řezy grafu rovinami $x = c$ resp. $y = c$. Jejich rovnice jsou $z = f(c, y)$ resp. $z = f(x, c)$, $c \in \mathbb{R}$.



Obr. 1.7: Vrstevnice

Příklad 1.18. Určete vrstevnice funkce $f: z = x^2 + y^2$ a graf funkce f.

Řešení. $D(f) = \mathbb{R}^2$. Podle (1.1) jsou rovnice vrstevnic $v_f(c): x^2 + y^2 = c$.

a) Pro $c < 0$ je $v_f(c) = \emptyset$, protože $x^2 + y^2 \geqq 0$ pro každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

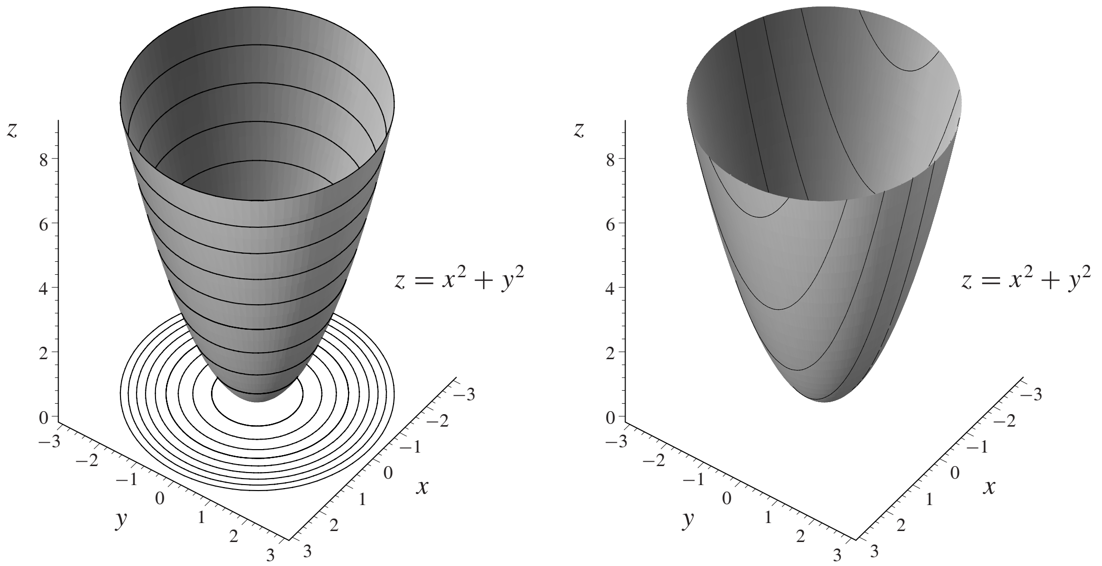
b) Pro $c = 0$ je $v_f(0) = \{(0, 0)\}$, protože pokud $x \neq 0$ nebo $y \neq 0$, je $x^2 + y^2 > 0$.

c) Pro $c > 0$ je $v_f(c)$ kružnicí se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{c}$. Čím je c větší, tím větší je poloměr a rovina $z = c$ leží výše.

Vzhledem k tomu, že uvedené vrstevnice může mít rotační paraboloid i horní část rotační kuželové plochy, podíváme se ještě na řezy grafu rovinami $x = c$. Jejich rovnice jsou $z = c^2 + y^2$, takže jde o paraboly (v rovinách $x = c$), které vzniknou posunutím paraboly $z = y^2$ směrem vzhůru ve směru osy z o c^2 — viz obr. 1.8 b).

Grafem je tedy rotační eliptický paraboloid, který vznikne rotací paraboly $z = x^2$ ležící v rovině $y = 0$ kolem osy z. Graf spolu s vrstevnicemi je znázorněn na obr. 1.8 a).

Obecné rovnice rotačního paraboloidu, kuželové plochy i dalších kvadratických ploch najdete v kapitole 9. ▲



a) $x^2 + y^2 = c$ b) $z = c^2 + y^2$

Obr. 1.8: Graf funkce $f : z = x^2 + y^2$

Pro zájemce:

Zcela analogicky zavedeme *reálnou funkci tří reálných proměnných*. Prvku množiny $A \subset \mathbb{R}^3$ přiřadíme reálné číslo. Tudíž každé trojici čísel $(x, y, z) \in A$, kterou lze geometricky chápat jako kartézské souřadnice bodu v prostoru, je přiřazeno číslo $u \in \mathbb{R}$. Tedy $f : u = f(x, y, z)$.

Podobně postupujeme pro *reálné funkce n reálných proměnných*, kde $n = 4, 5, 6, \dots$. Formálně je taková funkce zobrazení $f : A \to \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Označení je $f : z = f(x_1, \dots, x_n)$ resp. stručně $f : z = f(\boldsymbol{x})$, kde $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Příklady takových funkcí jsou

$$u(x, y, z) = x^2yz + (2x + y - z)\sin xy, \quad D(u) = \mathbb{R}^3, \qquad f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \quad D(f) = \mathbb{R}^n.$$

Analogicky bychom mohli zavést i pojem graf funkcí tří a více proměnných. Pokud bychom jej ale chtěli geometricky znázornit, potřebovali bychom např. u funkce tří proměnných tři dimenze na definiční obor a čtvrtou dimenzi na funkční hodnotu. Protože náš reálný svět je ale pouze třírozměrný, nelze vytvořit model takového grafu.

1.4 Limita a spojitost funkce dvou proměnných

Pojmy limity a spojitosti hrají při zkoumání vlastností funkcí dvou (a více) proměnných stejně důležitou roli jako u funkce jedné proměnné. Uvidíme, že řada klíčových vlastností je v případě funkcí více proměnných stejná jako u funkcí jedné proměnné.

Definice 1.19. Nechť $f\colon z = f(x, y)$ je funkce dvou proměnných a $M = (x_0, y_0)$ je hromadný bod definičního oboru $D(f)$.

Řekneme, že funkce f má v bodě M *limitu* rovnou číslu $L \in \mathbb{R}$, jestliže platí: K libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý bod $X = (x, y)$, $X \in \mathscr{O}(M, \delta) \cap D(f)$, $X \neq M$, je $f(x, y) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Píšeme:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \quad \text{nebo} \quad \lim_{X\to M} f(x, y) = L \quad \text{nebo} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = L.$$

Poznámka 1.20.

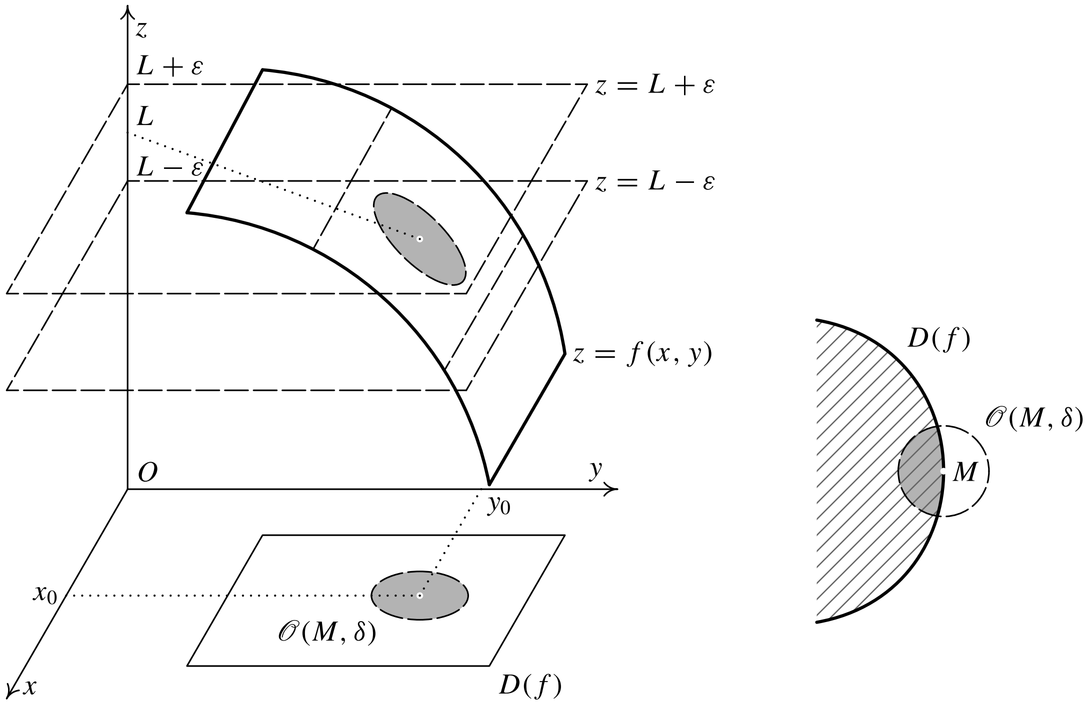
i) Vzhledem k tomu, že M je hromadný bod $D(f)$, budou v libovolném okolí $\mathscr{O}(M, \delta)$ vždy nějaké body z $D(f)$ různé od M. Bez předpokladu, že M je hromadný bod, by definici limity vyhovovalo libovolné reálné číslo L. Proto nedefinujeme limitu v izolovaném bodě.

ii) Definice vlastně vyjadřuje, že pro body definičního oboru, které jsou dostatečně blízké bodu M, musí být funkční hodnoty tak blízké číslu L, jak jen si předem řekneme (ε volíme, δ-okolí musíme být schopni najít). Tedy body grafu v dostatečně malém okolí bodu M musí ležet mezi rovinami $z = L - \varepsilon$ a $z = L + \varepsilon$ — viz obr. 1.9 a).

iii) Na bod M kromě toho, že je to hromadný bod $D(f)$, neklademe žádné požadavky. Funkce f v něm nemusí být definovaná, a pokud definovaná je, nezáleží vůbec na tom, jaká je funkční hodnota v tomto bodě.

iv) Situace na obr. 1.9 a) odpovídá případu, kdy M je vnitřní bod $D(f)$. Pak dostatečně malé okolí $\mathscr{O}(M, \delta)$ leží celé v $D(f)$.
Pokud M není vnitřním bodem, je nutně hraničním bodem definičního oboru (protože je hromadným bodem $D(f)$ — viz poznámka 1.13 i)). Pak na části i sebemenšího okolí není f definovaná — viz obr. 1.9 b).

v) Vzhledem k tomu, že limita funkce dvou proměnných je definovaná obdobně jako limita funkce jedné proměnné, lze dokázat podobné výsledky — viz [11, str. 158–160]. Zejména platí:



a) Vnitřní bod $D(f)$ b) Hraniční bod $D(f)$

Obr. 1.9: Limita funkce dvou proměnných

a) Funkce nemusí mít limitu. Pokud limita existuje, je jediná. (Toto tvrzení by neplatilo bez předpokladu, že jde o hromadný bod definičního oboru.)

b) Jestliže funkce f a g mají limitu v bodě M, který je hromadným bodem množiny $D(f) \cap D(g)$, pak také jejich součet, rozdíl, součin, podíl (jmenovatel musí být nenulový) a násobek konstantou mají limitu v bodě M a platí, že

$$\lim_{X\to M}\big(f(x,y) \pm g(x,y)\big) = \lim_{X\to M} f(x,y) \pm \lim_{X\to M} g(x,y)$$

(limita ze součtu resp. rozdílu je součet resp. rozdíl limit),

$$\lim_{X\to M} f(x,y)g(x,y) = \lim_{X\to M} f(x,y) \cdot \lim_{X\to M} g(x,y)$$

(limita ze součinu je součin limit),

$$\lim_{X\to M}\big(\alpha f(x,y)\big) = \alpha \lim_{X\to M} f(x,y), \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

(multiplikativní konstantu lze vytýkat),

$$\lim_{X\to M} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim\limits_{X\to M} f(x,y)}{\lim\limits_{X\to M} g(x,y)}, \qquad \text{pokud } \lim_{X\to M} g(x,y) \neq 0$$

(limita z podílu je podíl limit).

vi) Obdobně by bylo možné zavést nevlastní limitu $L = \pm\infty$ a limity v nevlastních bodech $(\pm\infty, y_0)$, $(x_0, \pm\infty)$ a $(\pm\infty, \pm\infty)$. Tyto pojmy však v úvodním kurzu nebudeme potřebovat.

Než se podíváme na praktický výpočet limit, uvedeme ještě jeden důležitý pojem.

Definice 1.21. Řekneme, že funkce $f\colon z = f(x, y)$ je *spojitá* v bodě $M = (x_0, y_0)$, jestliže platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0). \tag{1.2}$$

Poznámka 1.22.

i) Z předchozí definice vyplývá: Aby funkce byla spojitá v nějakém bodě (který musí být hromadným bodem jejího definičního oboru — to plyne z definice limity), pak
— funkce musí mít v tomto bodě limitu L,
— funkce musí být v tomto bodě definovaná, tj. existuje $f(x_0, y_0)$,
— předchozí dvě čísla L a $f(x_0, y_0)$ musí být stejná.

ii) Pokud je funkce definovaná v nějakém bodě, který je izolovaným bodem definičního oboru, nelze zde mluvit o limitě a tedy ani spojitosti, což je nepříjemné. Domluvíme se proto, že *funkci budeme považovat za spojitou v každém izolovaném bodě definičního oboru.*

Máme-li tedy vypočítat limitu funkce v bodě spojitosti, je to jednoduché — jde vlastně o výpočet funkční hodnoty. Abychom mohli tuto skutečnost účinně využít, potřebovali bychom vědět o co nejvíce funkcích, se kterými se prakticky setkáváme, zda jsou spojité. V kurzu diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné (viz např. [11, str. 63]) jste se seznámili s elementárními funkcemi jedné proměnné (jsou to mnohočleny, goniometrické a cyklometrické funkce, exponenciální a logaritmické funkce, mocninná funkce a funkce, které z nich vzniknou konečným počtem aritmetických operací sečítání, odčítání, násobení a dělení a skládáním) a řekli jste si, že jsou v bodech, v nichž jsou definovány, spojité.

Pro spojitost funkcí dvou proměnných bude platit totéž, pokud vyjdeme z elementárních funkcí jedné proměnné, jejichž argumenty budou označené různými písmeny. *Takové funkce budou spojité ve všech bodech svých definičních oborů.* Například

$$z = x^2y - xy^3 + 4xy, \qquad z = \frac{(x+y)^2}{\operatorname{tg}\sqrt{x + \sin y}}, \qquad z = \frac{x + 2y - x^3}{x^2 + y^2 - x^2y^2} \qquad \text{apod.}$$

Příklad 1.23. Vypočtěte následující limitu:

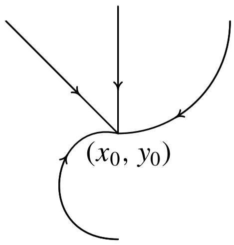
$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}{\ln(e^{xy} + 3y^2)}.$$

Řešení. Protože daná funkce je vytvořena výše popsaným způsobem z elementárních funkcí jedné proměnné a je v bodě (0, 1) definovaná, je zde i spojitá a limita je rovna funkční hodnotě. Tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}{\ln(e^{xy} + 3y^2)} = \frac{\sqrt{0^2 + 1^2}\,\operatorname{arctg}\frac{0}{1}}{\ln(e^{0\cdot 1} + 3\cdot 1^2)} = \frac{\operatorname{arctg} 0}{\ln(1+3)} = \frac{0}{\ln 4} = 0.$$

▲

Pro funkce jedné proměnné existuje velmi účinný nástroj na výpočet limit — l'Hospitalovo pravidlo. Bohužel pro funkce více proměnných nic podobného neexistuje a výpočet limit je daleko obtížnější. Paradoxně často bývá jednodušší ukázat, že nějaká limita neexistuje. To se u funkcí více proměnných (u limit typu $\frac{0}{0}$) často stává. Používá se při tom obvykle následující obrat.



Obr. 1.10

Jestliže existuje limita funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) a je rovna L, tj. funkční hodnoty se při přibližování bodu (x, y) k bodu (x_0, y_0) „ze všech možných stran" čím dál více blíží k L, musí tím spíš platit totéž, když se pohybujeme po libovolné křivce „ústící" do bodu (x_0, y_0) — viz obr. 1.10. Pokud se nám tedy podaří najít dvě takové křivky, po nichž vychází tyto „částečné" limity různě, nemůže zkoumaná limita existovat. Za křivky se často volí např. přímky o rovnicích $y = k(x - x_0) + y_0$ pro různé směrnice k.

Příklad 1.24. Vypočtěte limitu $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Řešení. Ukážeme, že tato limita neexistuje. Všimněte si, že $(0, 0)$ je jediný problematický bod. Všude jinde je funkce definovaná, a tudíž spojitá a limita je rovna funkční hodnotě.

Zvolíme přímky $y = kx$, které procházejí počátkem. Body na nich ležící mají tvar (x, kx), $k \in \mathbb{R}$. Aby se tyto body blížily k počátku, musí platit $x \to 0$. Tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot kx}{x^2 + (kx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2(1 + k^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1 + k^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Výsledek závisí na k, tj. na směrnici přímky, po níž se blížíme k počátku. Tedy limita skutečně neexistuje.

Mezi uvažovanými přímkami není osa y, která nemá směrnicový tvar. Pro úplnost určíme i limitu po této přímce. Její body mají tvar $(0, y)$, takže

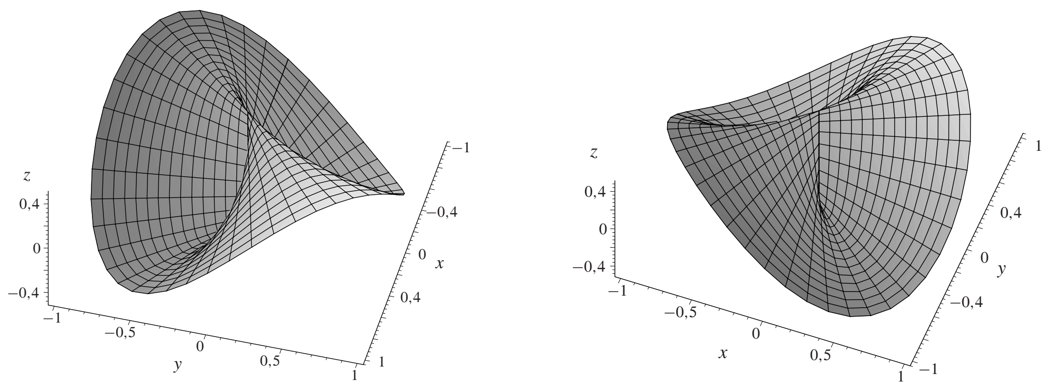
$$\lim_{y\to 0} \frac{0 \cdot y}{0 + y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Graf funkce je znázorněn na obr. 1.11 (pro názornost jsou uvedeny pohledy ze dvou směrů). ▲

I když „částečné" limity po všech možných přímkách existují a jsou stejné, může se stát, že „dvourozměrná" limita neexistuje. Může totiž existovat jiná křivka, podél níž „částečná" limita neexistuje nebo má jinou hodnotu, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 1.25. Vypočtěte limitu $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4 + y^2}$.

Řešení. Ukážeme, že ani tato limita neexistuje. Bod $(0, 0)$ je opět jediný problematický bod, všude jinde je funkce spojitá.



a) b)

Obr. 1.11: Graf funkce $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

Zkusíme nejprve opět přímky $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$, tj. budeme se přibližovat po bodech (x, kx), kde $x \to 0$. Dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 \cdot kx}{x^4 + (kx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3kx^3}{x^2(x^2 + k^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3kx}{x^2 + k^2} = 0 \qquad \text{pro libovolné } k \in \mathbb{R}.$$

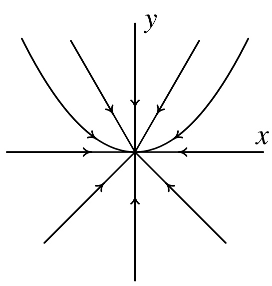
Doplníme ještě osu y, která mezi přímkami $y = kx$ není zahrnuta, protože nemá směrnicový tvar. Jde o body $(0, y)$, kde $y \to 0$. Vyjde

$$\lim_{y\to 0} \frac{3 \cdot 0^2 \cdot y}{0^4 + y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Skutečně tudíž po všech přímkách vcházejících do bodu $(0, 0)$ vychází částečná limita stejně — viz obr 1.12.

Nyní použijeme např. parabolu $y = x^2$, tj. budeme se přibližovat po bodech (x, x^2), $x \to 0$ — viz obr 1.12. Dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 \cdot x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^4}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$



Obr. 1.12

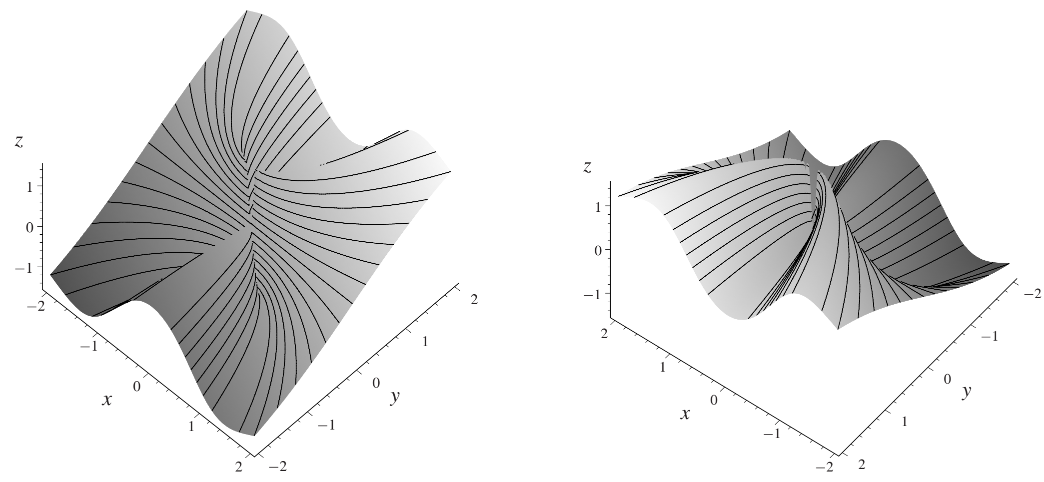
Tato limita není na rozdíl od přímek nulová, proto celková limita neexistuje. Graf funkce je znázorněn na obr. 1.13 (pro názornost jsou uvedeny pohledy ze dvou směrů). ▲

Příklad 1.26. Vyšetřete limitu funkce $f(x, y) = \dfrac{2xy}{xy + 2x - y}$ v bodech: a) $A = (1, 1)$, b) $B = (0, 0)$, c) $C = (-1, -1)$.

Řešení.

a) V tomto případě nenastane žádný problém, do funkce je možno bod $A = (1, 1)$ přímo dosadit, protože je v tomto bodě spojitá. Tedy

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2xy}{xy + 2x - y} = \frac{2}{2} = 1.$$



Obr. 1.13: Graf funkce $f(x, y) = \frac{3x^2y}{x^4+y^2}$

b) V případě bodu $B = (0, 0)$ již výpočet přímým dosazením není možný, neboť v tomto bodě není funkce definovaná. Bod B je tudíž bodem nespojitosti dané funkce. Použijeme např. přímky $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$, a budeme se k bodu nespojitosti přibližovat po bodech (x, kx). Dostaneme:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{kx^2 + 2x - kx} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2kx)}{x(kx + 2 - k)} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx}{kx + 2 - k} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \neq 2, \\ 2 & \text{pro } k = 2. \end{cases}$$

Limita tedy v bodě B neexistuje.

c) V bodě $C = (-1, -1)$ funkce rovněž není definovaná, takže se jedná opět o její bod nespojitosti. Zvolíme např. přímku $y = -1$. Po dosazení vyjde:

$$\lim_{x\to -1^\pm} \frac{-2x}{x + 1} = \left(\frac{2}{0}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{pro } x \to -1^+, \\ -\infty & \text{pro } x \to -1^-. \end{cases}$$

Limita tedy v bodě C neexistuje.

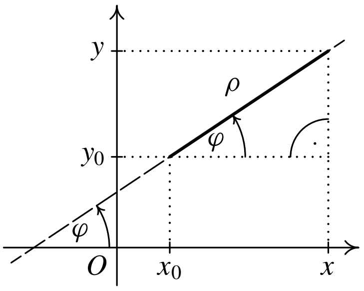
▲

Nyní si ukážeme, jak lze naopak nějakou limitu spočítat. K tomu se často u funkcí dvou proměnných používají tzv. *polární souřadnice*, se kterými se seznámíte podrobněji u transformací dvojného integrálu. Poloha bodu (x, y) je popsána dvěma čísly ρ, φ — viz. obr 1.14:

Vztah mezi kartézskými a polárními souřadnicemi je dán rovnicemi (dá se odvodit za pomoci definice goniometrických funkcí)

$$x = x_0 + \rho \cos \varphi, \qquad y = y_0 + \rho \sin \varphi. \tag{1.3}$$

Dále použijeme následující jednoduché ale užitečné lemma.



Obr. 1.14

ρ – vzdálenost bodu (x, y) od pevného bodu (x_0, y_0) (tzv. střed; často je to počátek $(0, 0)$). Platí: $\rho \in \langle 0, +\infty)$.

φ – úhel, který svírá polopřímka, jež začíná v bodě (x_0, y_0) a prochází bodem (x, y), s kladnou částí osy x (měřeno proti směru hodinových ručiček). Platí: $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$.

Lemma 1.27. *Předpokládejme, že funkci $f(x, y)$ lze v polárních souřadnicích se středem v bodě (x_0, y_0) vyjádřit ve tvaru $f(x, y) = L + g(\rho)h(\rho, \varphi)$, $L \in \mathbb{R}$, kde*

i) $\lim\limits_{\rho \to 0} g(\rho) = 0$,

ii) *$h(\rho, \varphi)$ je ohraničená na obdélníku $(0, \rho_0\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$, kde $\rho_0 > 0$.*

Pak platí: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$.

Důkaz. Nechť je h ohraničena na zmíněném obdélníku konstantou $K \in \mathbb{R}^+$, tj. $|h(\rho, \varphi)| \leqq K$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Z definice limity vyplývá, že existuje $0 < \delta < \rho_0$ takové, že pro $0 < \rho < \delta$ je $|g(\rho)| < \varepsilon/K$. Tedy pro $(x, y) \in \mathscr{O}((x_0, y_0), \delta)$, $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, je

$$|f(x, y) - L| = |g(\rho)| \cdot |h(\rho, \varphi)| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon,$$

z čehož plyne tvrzení. □

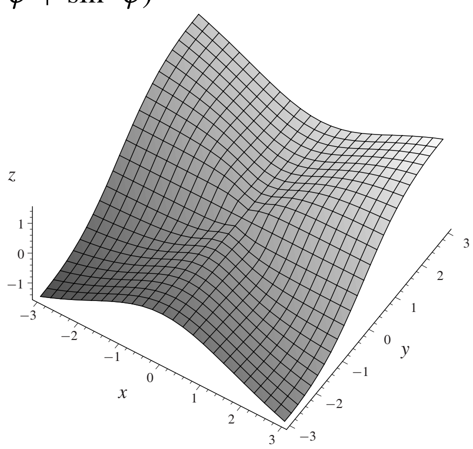
Příklad 1.28. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

Řešení. Použijeme-li polární souřadnice, přičemž $(x_0, y_0) = (0, 0)$, dostaneme:

$$\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^2 \cos^2\varphi \cdot \rho \sin\varphi}{\rho^2 \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi} = \frac{\rho^3 \sin\varphi \cos^2\varphi}{\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \rho \sin\varphi \cos^2\varphi.$$

Nyní použijeme předchozí lemma. Zvolíme $L = 0$, $g(\rho) = \rho$ a $h(\rho, \varphi) = \sin\varphi\cos^2\varphi$ (h zde nezávisí na ρ). Předpoklady jsou splněny: $\lim\limits_{\rho\to 0} \rho = 0$ a funkce $\sin\varphi\cos^2\varphi$ je ohraničená, protože je $|\sin\varphi\cos^2\varphi| \leqq 1$. Tedy naše limita je rovna $L = 0$. Graf funkce je znázorněn na obr. 1.15.

Všimněte si zdánlivě jen nepatrného rozdílu v zadání funkcí v tomto a předchozím příkladu a zcela odlišného chování jejich grafů v okolí počátku. ▲



Obr. 1.15

Příklad 1.29. Vypočtěte limitu $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^4+y^2)\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$.

Řešení. Zlomek $\frac{(x^4+y^2)\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ si nejprve vhodně rozložíme na součin. Použijeme-li opět transformaci do polárních souřadnic, dostaneme:

$$\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \cdot \frac{(x^4+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{\sin(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{\rho^2}} \cdot \frac{\rho^4\cos^4\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}{\rho^2} =$$
$$= \frac{\sin\rho^2}{\rho} \cdot (\rho^2\cos^4\varphi+\sin^2\varphi).$$

Abychom mohli použít lemma 1.27, musí být $\lim_{\rho\to 0} g(\rho) = 0$. V našem případě bude funkce $g(\rho) = \frac{\sin\rho^2}{\rho}$. Za použití l'Hospitalova pravidla ukážeme, že tato podmínka je skutečně splněna.

$$\lim_{\rho\to 0} g(\rho) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin\rho^2}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho\cos\rho^2}{1} = 0.$$

Druhá podmínka lemmatu 1.27 nám říká, že funkce $h(\rho,\varphi)$ musí být ohraničená na obdélníku $(0,1\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$. I tato podmínka je však splněna, neboť $|\rho| \leqq 1$, $|\cos\varphi| \leqq 1$, $|\sin\varphi| \leqq 1$ a tudíž $|\rho^2\cos^4\varphi+\sin^2\varphi| \leqq \rho^2|\cos^4\varphi| + |\sin^2\varphi| \leqq 1\cdot 1 + 1 \leqq 2$. Za L volíme 0. Protože jsou podmínky lemmatu splněny, je naše limita rovna L, tudíž nule.

Zlomek $\frac{(x^4+y^2)\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ bylo možno rozložit i jiným způsobem. Ukažme si i tento postup:

$$\frac{(x^4+y^2)\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \frac{(x^4+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Po dosazení polárních souřadnic dostaneme následující výraz:

$$\frac{\sin\rho^2}{\rho^2} \cdot \frac{\rho^4\cos^4\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}{\rho} = \frac{\sin\rho^2}{\rho^2} \cdot (\rho^3\cos^4\varphi+\rho\sin^2\varphi) =$$
$$= \frac{\sin\rho^2}{\rho^2} \cdot \rho(\rho^2\cos^4\varphi+\sin^2\varphi).$$

Nyní volíme $g(\rho) = \rho$, $h(\rho,\varphi) = \frac{\sin\rho^2}{\rho^2} \cdot (\rho^2\cos^4\varphi+\sin^2\varphi)$ a $L = 0$. Podmínka $\lim_{\rho\to 0} g(\rho) = 0$ je splněna. Dále již víme, že funkce $\rho^2\cos^4\varphi+\sin^2\varphi$ je ohraničená a $\lim_{\rho\to 0}\frac{\sin\rho^2}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0}\frac{2\rho\cos\rho^2}{2\rho} = 1$. Uvědomte si, že jestliže má nějaká funkce limitu, je v nějakém okolí příslušného bodu ohraničená. Tudíž i podmínka, že funkce $h(\rho,\varphi)$ musí být ohraničená, je splněna. Hodnota limity je proto rovna $L = 0$. ▲

Poznámka 1.30. Polární souřadnice lze využít i k důkazu, že nějaká limita neexistuje. Zafixujeme-li v rovnicích $x = x_0 + \rho\cos\varphi$, $y = y_0 + \rho\sin\varphi$ úhel φ, pak při $\rho \to 0^+$ se přibližujeme k bodu (x_0, y_0) po přímkách se směrovým vektorem $(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Pokud tedy

$$\lim_{\rho\to 0^+} f(x_0 + \rho\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\varphi) \tag{1.4}$$

nedává pro všechna $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ stejný výsledek, pak určitě limita

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) \tag{1.5}$$

neexistuje.

Např. v příkladu 1.24 vyjde

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi} = \cos\varphi\sin\varphi.$$

Tedy $\lim\limits_{\rho\to 0^+} \cos\varphi\sin\varphi = \cos\varphi\sin\varphi$, což potvrzuje výsledek, který jsme obdrželi, a to, že příslušná limita neexistuje.

Samozřejmě pokud je limita (1.4) pro všechna φ stejná, neznamená to, že limita (1.5) existuje. To ukazuje příklad 1.25, kde

$$\frac{3x^2y}{x^4 + y^2} = \frac{3\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^4\cos^4\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \frac{3\rho\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2\cos^4\varphi + \sin^2\varphi},$$

tedy

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{3\rho\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2\cos^4\varphi + \sin^2\varphi} = 0$$

pro všechna $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$. Přesto, jak jsme ukázali, zmíněná limita neexistuje.

Pro zájemce:

Projdeme-li si podrobně definici limity funkce dvou proměnných, zjistíme, že je založena na pojmu okolí bodu. Pojem okolí bodu jsme však zavedli nejen v $\mathbb{R}^2$, ale v libovolném $\mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Proto je možné jednoduše definici limity přenést na funkci f, mající libovolný konečný počet proměnných. Pro funkce více proměnných zůstanou v platnosti všechna základní tvrzení týkající se limit. Obdobně se rovněž zavede pojem spojitosti. Zejména platí, že funkce více proměnných vytvořené z elementárních funkcí jedné proměnné zůstanou na svých definičních oborech spojité.

Odlišnosti nastanou pouze v praktických výpočtech limit. V případech, kdy chceme ukázat, že limita neexistuje, budeme opět hledat „křivky směřující do daného bodu“, po nichž limita funkce jedné proměnné vyjde různě. Obtížnější je situace, kdy chceme dokázat existenci limity. Bylo by možné např. zavést obdobu polárních souřadnic v obecném $\mathbb{R}^n$. Pro $n \geqq 3$ jsou to tzv. *sférické souřadnice* — viz např. [16, str. 346]. Pak by bylo možné dokázat analogii lemmatu 1.27. Jde však o poměrně obtížnou problematiku, které se podrobněji věnovat nebudeme.

1.5 Dvojné a dvojnásobné limity

Nechť $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ a $\delta_0 > 0$. Označme $A = (x_0 - \delta_0, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_0)$, $B = (y_0 - \delta_0, y_0) \cup (y_0, y_0 + \delta_0)$ a $D = A \times B$. Tedy D je čtverec se středem v (x_0, y_0), z něhož je vyjmut kříž procházející středem.

Věta 1.31. *Předpokládejme, že funkce f je definována na D. Nechť pro každé $x \in A$ existuje*

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x).$$

Existuje-li $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$, *pak existuje také* $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$ *a platí*

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = L.$$

Důkaz. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu k číslu $\varepsilon/2$ existuje $\delta > 0$, $\delta < \delta_0$, takové, že pro každé $(x, y) \in \big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)\big) \cap D$ platí $|f(x, y) - L| < \varepsilon/2$. Pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, limitním přechodem pro $y \to y_0$ dostaneme

$$\Big|\lim_{y \to y_0} f(x, y) - L\Big| \leqq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \qquad \text{tj.} \qquad |\varphi(x) - L| < \varepsilon.$$

To ovšem znamená, že $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = L$. □

Tvrzení předchozí věty lze zapsat takto:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = L. \tag{1.6}$$

Podobně pokud pro každé $y \in B$ bude existovat $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \psi(y)$, dostaneme z předchozí věty záměnou x a y, že

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = L. \tag{1.7}$$

Limity (1.6) a (1.7) se nazývají *dvojnásobné* na rozdíl od limity ve smyslu definice 1.19, které se říká *dvojná*. Předchozí věta říká, že z existence vnitřních limit a dvojné limity plyne existence dvojnásobných limit, které jsou pak stejné. Platí tedy:

Důsledek 1.32. *Jestliže existují obě dvojnásobné limity* (1.6) *a* (1.7) *a jsou různé, neexistuje dvojná limita.*

Toto tvrzení lze použít k důkazu, že nějaká dvojná limita neexistuje.

Následující příklady ukazují, jaké mohou být vztahy mezi dvojnou limitou a dvojnásobnými limitami. Zejména ukazují, že předpoklad existence vnitřní limity nelze vynechat.

Příklad 1.33. Zjistěte, zda existují dvojné limity následujících funkcí v bodě $(0,0)$. V případě, že ano, vypočtěte je.

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$, b) $g(x,y) = \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2}{x^2 + y^2}$,

c) $h(x,y) = x \sin \dfrac{1}{y}$, d) $k(x,y) = (x^2 + y^2)\chi(x,y)$.

Funkce χ je definovaná následovně:

$$\chi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{když } (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \text{ nebo } (x,y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}, \\ 0 & \text{když } (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{I} \text{ nebo } (x,y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Přitom $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je množina všech iracionálních čísel.

Řešení.

a) Platí:

$$\varphi(x) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = 1 + x, \ x \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0} \varphi(x) = 1,$$
$$\psi(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = -1 + y, \ y \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{y\to 0} \psi(y) = -1.$$

Dvojnásobné limity existují, ale jsou různé, takže podle důsledku 1.32 dvojná limita neexistuje.

b) Platí:

$$\varphi(x) = \lim_{y\to 0} g(x,y) = \sin\frac{1}{x}, \ x \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0} \varphi(x) \text{ neexistuje},$$
$$\psi(y) = \lim_{x\to 0} g(x,y) = 1, \ y \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{y\to 0} \psi(y) = 1.$$

Vnitřní limity pro $x \to 0$ a $y \to 0$ tedy existují, ale dvojnásobná limita existuje jen jedna. Protože $\lim_{x\to 0} g(x,0) = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje, neexistuje ani dvojná limita.

c) Platí:

$$\varphi(x) = \lim_{y\to 0} h(x,y) = \lim_{y\to 0} x \sin\frac{1}{y}, \ x \neq 0, \text{ neexistuje},$$
$$\psi(y) = \lim_{x\to 0} h(x,y) = 0, \ y \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{y\to 0} \psi(y) = 0.$$

Jedna vnitřní limita tedy neexistuje, jedna dvojnásobná limita existuje. Dvojná limita existuje a je rovna nule, protože funkce h je součinem funkce x mající limitu nula a ohraničené funkce $\sin\frac{1}{y}$. Rovnost s existující dvojnásobnou limitou plyne z věty 1.31.

d) Pro $x \neq 0$ neexistuje $\lim_{y\to 0} k(x,y)$ a pro $y \neq 0$ neexistuje $\lim_{x\to 0} k(x,y)$. Tedy ani jedna z vnitřních limit neexistuje. Přitom dvojná limita existuje a je rovna nule, protože funkce k je součinem funkce $x^2 + y^2$ mající limitu nula a ohraničené funkce $\chi(x,y)$.

▲

$\sum$

Pojmy k zapamatování

— funkce dvou (resp. více) proměnných
— graf funkce dvou proměnných
— definiční obor funkce dvou proměnných
— vrstevnice (hladina) funkce dvou proměnných
— okolí bodu
— vnitřní, vnější, hraniční bod
— hromadný a izolovaný bod
— uzavřená a otevřená množina
— limita funkce dvou proměnných
— spojitost funkce dvou proměnných

?

Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pojmem funkce dvou proměnných?
2. Jak poznáme, že je množina bodů v $\mathbb{R}^2$ grafem funkce dvou proměnných?
3. K čemu slouží vrstevnice?
4. Definujte epsilonové okolí bodu v $\mathbb{R}^2$.
5. Porovnejte definici okolí bodu v případě funkce jedné proměnné a funkce dvou proměnných.
6. Proveďte klasifikaci bodů v rovině.
7. Definujte otevřenou resp. uzavřenou množinu v $\mathbb{R}^2$.
8. Existuje množina, která není ani uzavřená ani otevřená?
9. Jak počítáme limitu funkce dvou proměnných?
10. Dá se při výpočtu limit funkcí dvou proměnných tvaru podílu $\frac{0}{0}$ resp. $\frac{\infty}{\infty}$ použít l'Hospitalovo pravidlo?
11. Co musí být splněno, aby funkce dvou proměnných byla spojitá v nějakém bodě?
12. Může být funkce nespojitá v nějakém izolovaném bodě definičního oboru?

!

Příklady k procvičení

1. Určete a nakreslete definiční obor funkce dvou proměnných:

a) $f: z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y-1}$,
b) $f: z = \frac{1}{y^2-x^2}$,
c) $f: z = \frac{1}{25-x^2-y^2}$,
d) $f: z = \sqrt{3x} - \frac{2}{\sqrt{y}}$,
e) $f: z = \frac{1}{\sqrt{x+|y|}} - \frac{1}{\sqrt{x-|y|}}$,
f) $f: z = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$,
g) $f: z = \frac{1}{\sin \pi(x+y)}$
h) $f: z = \arcsin(x+y)$,
i) $f: z = \ln(|x|+y) + \frac{1}{\sqrt{y-x}}$,
j) $f: z = \sqrt{x^2+y^2-1} + \ln(2-x^2-y^2)$,
k) $f: z = \frac{2}{\sqrt{xy}}$,
l) $f: z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$,
m) $f: z = \sqrt{\ln x + \ln y}$,
n) $f: z = \ln(\sin x + \sin y - 3) + (xy)^2$,
o) $f: z = \pi x \sqrt{x^2-y^2}$,
p) $f: z = xy\sqrt{9-x^2-y^2}$,
q) $f: z = \frac{x+y}{2x-3y}$,
r) $f: z = \frac{x^2-2y}{y^2-2x}$,
s) $f: z = \sqrt{3x-y}$,
t) $f: z = x + \sqrt{1-y}$,
u) $f: z = \ln(y^2-4x+8)$,
v) $f: z = \arcsin(x-y)$,
w) $f: z = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{y^2-1}$,
x) $f: z = \sqrt{(9-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)}$.

2. Určete a nakreslete definiční obor funkce dvou proměnných:

a) $f: z = \ln(x+y)$,
b) $f: z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$,
c) $f: z = \ln[x \ln(y-x)]$,
d) $f: z = \sqrt{x \sin y}$,
e) $f: z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, $a, b > 0$,
f) $f: z = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$,
g) $f: z = \operatorname{tg} \pi(x-y)$,
h) $f: z = \sqrt{xy}$,
i) $f: z = \sqrt{\frac{9-x^2-y^2}{x^2+y^2-4}}$,
j) $f: z = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

3. Vypočtěte $f(1, 1/2)$ pro následující funkce:

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2y + y + 1}$, b) $f(x,y) = \frac{y^2-|x|}{x^2-|y|}$, c) $f(x,y) = \arcsin(x+y)$.

4. Je dána funkce $f(x,y,z) = \sqrt{9-x^2} + \sqrt{4-y^2} + \sqrt{9-z^2}$. Vypočtěte:

a) $f(0,0,0)$, b) $f(1,2,3)$, c) $f(1,3,2)$, d) $f(3,2,-3)$, e) $f(2,3,1)$,
f) $f(3,1,2)$, g) $f(3,2,1)$.

5. Je dána funkce $f(x,y,z) = xyz + \frac{xy}{z}$. Vypočtěte: $f(y,x,z)$, $f(-x,-y,-z)$, $f(1,1,t)$, $f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, kde $x \neq 0$, $y \neq 0$.

6. Dokažte, že $f(tx,ty) = t^3 f(x,y)$, $t \geqq 0$, pro $f(x,y) = 3x^2y - \sqrt{x^6-y^6}$.

7. Dokažte následující vztahy:

a) $F(x,y) = -F\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$, jestliže $F(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$,
b) $F(xy,z) = F(x,z) + F(y,z)$, jestliže $F(x,y) = \ln x \cdot \ln y$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

8. Určete funkci $f(u, v)$, jestliže:

   a) $f(x+y, x-y) = x^2 - 2xy - y^2$, b) $f\left(x-y, \frac{x}{y}\right) = x^3 - y^3,\ y \neq 0$.

9. Znázorněte vrstevnice vzniklé průnikem rovin $z = c$, $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, s plochami:

   a) $f : z = 5 - x^2 - y^2$, b) $f : z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$,
   c) $f : z = 5 - \sqrt{x^2 + y^2}$, d) $f : z = x^2 - y^2$.

10. Určete rovnice vrstevnic daných ploch:

    a) $z = (x+y)^2$, b) $z = xy$, c) $z = \sqrt{x \cdot y}$, d) $z = \frac{y}{x}$,
    e) $z = \frac{1}{x^2+y^2}$, f) $z = y(x^2+1)$, g) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}$.

11. Určete limity funkce:

    a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-4,-1)} \frac{(x-y)^2-9}{x^2+y^2}$, c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{xy}-1}{x}$,

    d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2}{y^2-5x+3y}$, e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$, f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$,

    g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$, h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$, i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$,

    j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^4+y^4}\, e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$, l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x+y}$,

    m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{xy+x-y-1}{(x-1)^2+(y+1)^2}$, o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$.

    Nápověda: V d) zkuste body (x, kx) a rozlište $k = 5/3$ a $k \neq 5/3$.
    V i) zkuste body (x, kx), $(t+t^2, -t+t^2)$, $(t+t^3, -t+t^3)$.

12. Určete body nespojitosti funkce:

    a) $f : z = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{pro } (x, y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x, y) = (0,0), \end{cases}$ b) $f : z = \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} & \text{pro } x \neq y, \\ 0 & \text{pro } x = y. \end{cases}$

13. Ověřte, že definiční obory následujících funkcí jsou otevřené, a nakreslete je. Určete jejich hranice a posuďte, zda je možné dodefinovat funkce v některých hraničních bodech definičního oboru tak, aby zde byly spojité.

    a) $f : z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, b) $f : z = \frac{x+y}{x-y}$, c) $f : z = \frac{1}{4-x^2-y^2}$,

    d) $f : z = \sin\frac{1}{|x|-|y|}$, e) $f : z = \sin\frac{1}{x+y}$, f) $f : z = \ln|8 - x^2 + 4y|$,

    g) $f : z = \frac{x^2+y^2-1}{\sqrt{(x^2+y^2-1)^2}}$, h) $f : z = \frac{1}{\sin x \sin y}$, i) $f : z = \ln(4 - x^2 - y^2)$.

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $D(f) = \{x \neq 0 \wedge y \neq 1\}$, b) $D(f) = \{y \neq \pm x\}$,
   c) $D(f) = \{x^2 + y^2 \neq 25\}$, d) $D(f) = \{x \geqq 0 \wedge y > 0\}$,
   e) $D(f) = \{x > 0 \wedge -x < y < x\}$,
   f) $D(f) = \{(|x| \leqq 1 \wedge |y| \leqq 1) \vee (|x| \geqq 1 \wedge |y| \geqq 1)\}$,
   g) $D(f) = \{y \neq -x + k, k \in \mathbb{Z}\}$, h) $D(f) = \{-x - 1 \leqq y \leqq -x + 1\}$,
   i) $D(f) = \{y > x\}$, j) $D(f) = \{1 \leqq x^2 + y^2 < 2\}$,
   k) $D(f) = \{(x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\}$,
   l) $D(f) = \{-y^2 \leqq x \leqq y^2 \wedge 0 < y \leqq 2\}$,
   m) $D(f) = \{x > 0 \wedge y > 0 \wedge xy \geqq 1\}$, n) $D(f) = \emptyset$,
   o) $D(f) = \{|x| \geqq |y|\}$, p) $D(f) = \{x^2 + y^2 \leqq 9\}$,
   q) $D(f) = \{y \neq \frac{2}{3}x\}$, r) $D(f) = \{y^2 \neq 2x\}$,
   s) $D(f) = \{y \leqq 3x\}$, t) $D(f) = \{y \leqq 1\}$,
   u) $D(f) = \{y^2 > 4(x - 2)\}$, v) $D(f) = \{-1 \leqq x - y \leqq 1\}$,
   w) $D(f) = \{|x| \leqq 2 \wedge |y| \geqq 1\}$, x) $D(f) = \{4 \leqq x^2 + y^2 \leqq 9\}$.

2. a) $D(f) = \{x + y > 0\}$, b) $D(f) = \{|x| \leqq 1 \wedge |y| \leqq 1\}$,
   c) $D(f) = \{(x > 0 \wedge y > x + 1) \vee (x < 0 \wedge x < y < x + 1)\}$,
   d) $D(f) = \big\{\big(x \geqq 0 \wedge 2k\pi \leqq y \leqq (2k+1)\pi\big) \vee$
   $\vee \big(x \leqq 0 \wedge (2k+1)\pi \leqq y \leqq (2k+2)\pi\big), k \in \mathbb{Z}\big\}$,
   e) $D(f) = \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1\right\}$,
   f) $D(f) = \{y^2 \leqq 4x \wedge x^2 + y^2 < 1 \wedge x^2 + y^2 \neq 0\}$,
   g) $D(f) = \{y \neq x - k - 1/2, k \in \mathbb{Z}\}$,
   h) $D(f) = \{(x \geqq 0 \wedge y \geqq 0) \vee (x \leqq 0 \wedge y \leqq 0)\}$,
   i) $D(f) = \{4 < x^2 + y^2 \leqq 9\}$,
   j) $D(f) = \{(x \geqq 0 \wedge y > 0) \vee (x \leqq 0 \wedge y < 0)\}$.

3. a) $\sqrt{2}$, b) $-\frac{3}{2}$, c) není definována.

4. a) 8, b) $\sqrt{8}$, c) nedefinovaná, d) 0, e) nedefinovaná, f) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$, g) $\sqrt{8}$.

5. $xyz + \frac{xy}{z}$, $-f(x, y, z)$, $t + \frac{1}{t}$, $1 + \frac{y^2}{x^2}$.

8. a) $f(u, v) = uv + \frac{1}{2}(v^2 - u^2)$, b) $f(u, v) = \frac{u^3(v^3-1)}{(v-1)^3}$, $v \neq 1$.

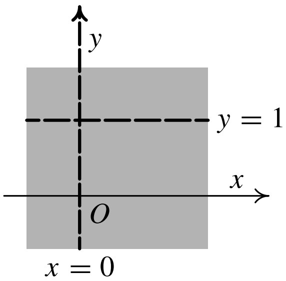
10. a) $z = c$, $c > 0$ — dvojice přímek $x + y = \pm\sqrt{c}$,
    $c = 0$ — přímka $x + y = 0$,
    b) $z = c$, $c \neq 0$ — hyperbola o rovnici $y = \frac{c}{x}$,
    $c = 0$ — dvojice přímek $x = 0$, $y = 0$,
    c) $z = c$, $c > 0$ — hyperbola o rovnici $y = \frac{c^2}{x}$,
    $c = 0$ — dvojice přímek $x = 0$, $y = 0$,
    d) $z = c$, $c \in \mathbb{R}$ — přímka o rovnici $y = cx$ s vyjmutým počátkem,
    e) $z = c$, $c > 0$ — kružnice o rovnici $x^2 + y^2 = \frac{1}{c}$,
    f) $z = c$, $c \in \mathbb{R}$ — graf funkce $y = \frac{c}{x^2+1}$,
    g) $z = c$, $0 \leqq c < 1$ — elipsa o rovnici $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 - c$,
    $c = 1$ — počátek.

11. a) $\ln 2$, b) 0, c) 2, d) neex., e) 2,
f) neex. g) neex., h) neex., i) neex., j) $1/2$,
k) 0, l) 0, m) 0, n) neex., o) 1.

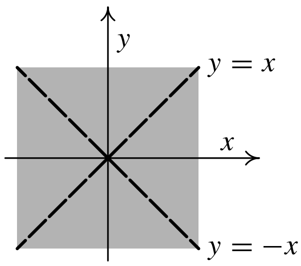
12. a) neex., b) $\{(x, y) \in \mathbb{R} : x = y\}$.

13. Žádnou funkci nelze spojitě dodefinovat v některém hraničním bodě definičního oboru.
a) $\partial D(f) = \{(0,0)\}$, b) $\partial D(f) = \{x = y\}$, c) $\partial D(f) = \{x^2 + y^2 = 4\}$,
d) $\partial D(f) = \{|x| = |y|\}$, e) $\partial D(f) = \{y = -x\}$, f) $\partial D(f) = \{x^2 = 4y + 8\}$,
g) $\partial D(f) = \{x^2 + y^2 = 1\}$,
h) $\partial D(f) = \{x = k\pi \vee y = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, i) $\partial D(f) = \{x^2 + y^2 = 4\}$.

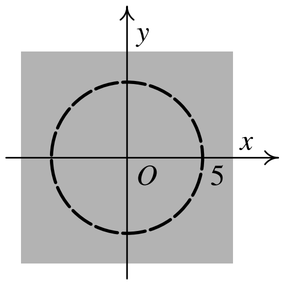
Obrázky ke cvičení 1



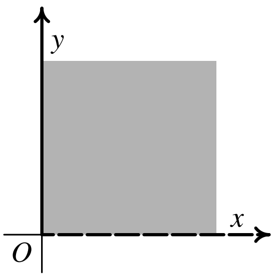
1 a)



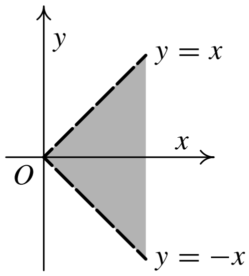
1 b)



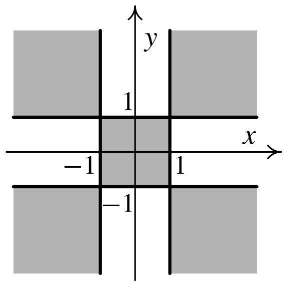
1 c)



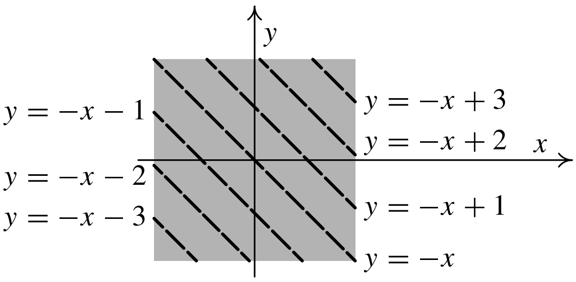
1 d)



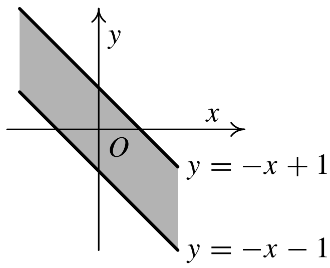
1 e)



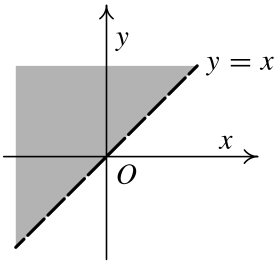
1 f)



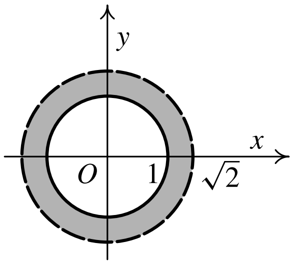
1 g)



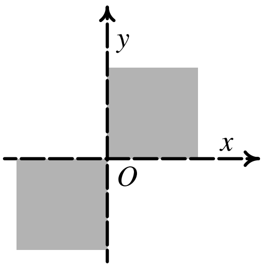
1 h)



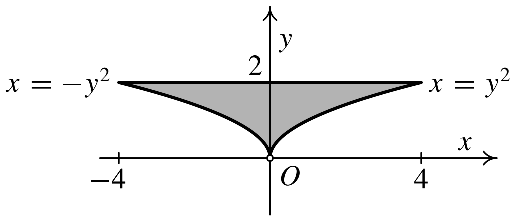
1 i)



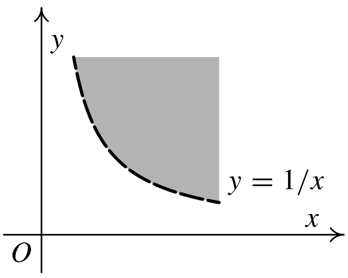
1 j)



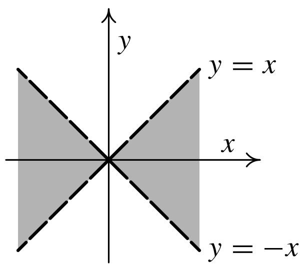
1 k)



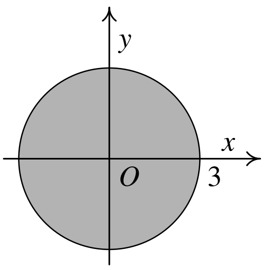
1 l)



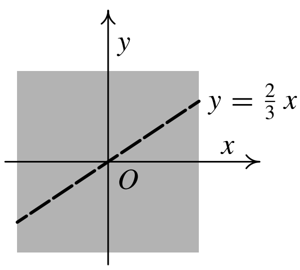
1 m)



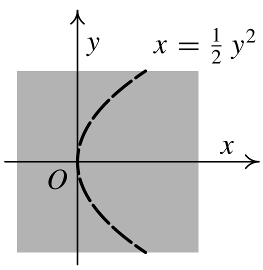
1 o)



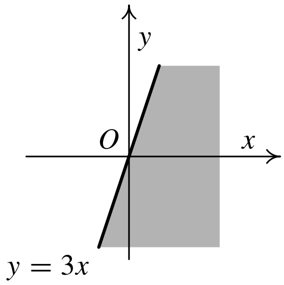
1 p)



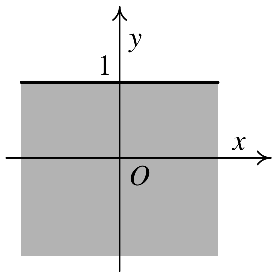
1 q)



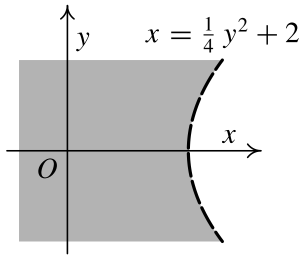
1 r)



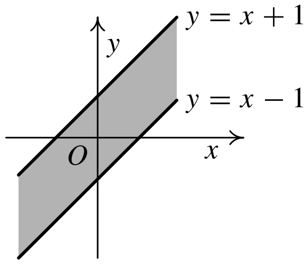
1 s)



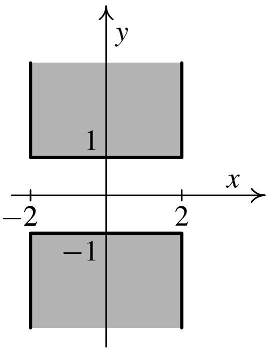
1 t)



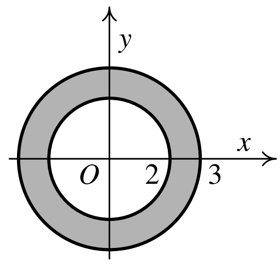
1 u)



1 v)

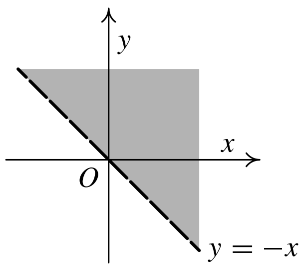


1 w)

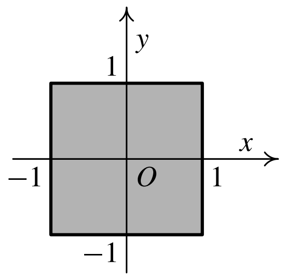


1 x)

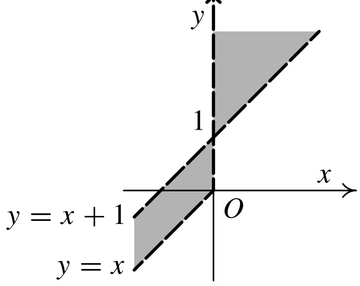
Obrázky ke cvičení 2



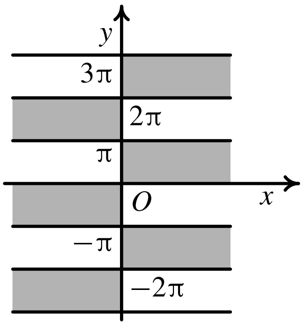
2 a)



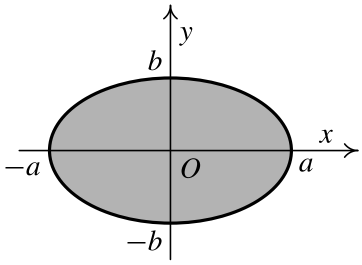
2 b)



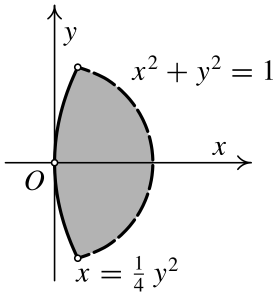
2 c)



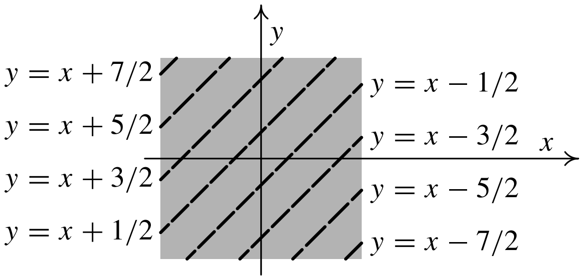
2 d)



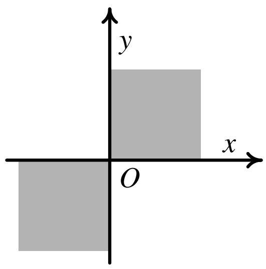
2 e)



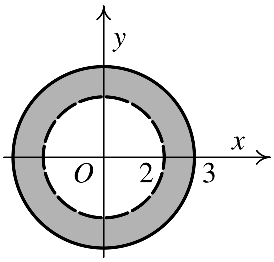
2 f)



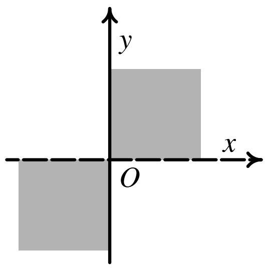
2 g)



2 h)

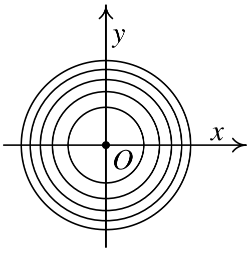


2 i)

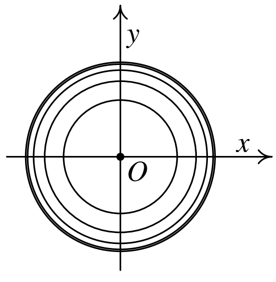


2 j)

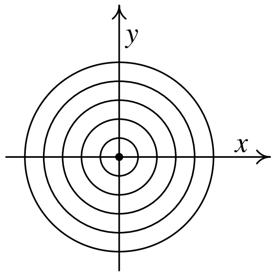
Obrázky ke cvičení 9



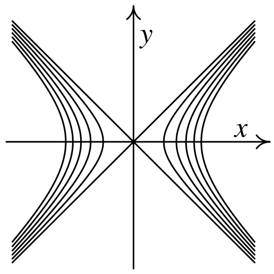
9 a)



9 b)



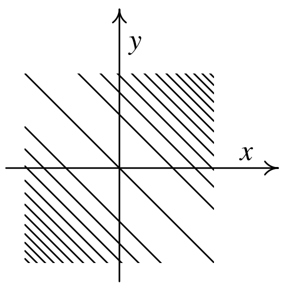
9 c)



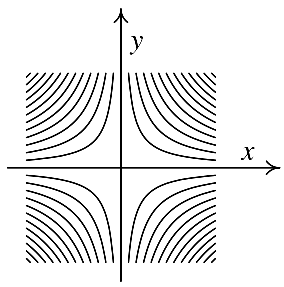
9 d)

Obrázky ke cvičení 10

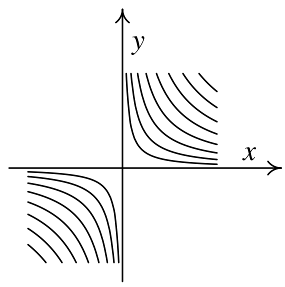
Vrstevnice na obrázcích jsou ekvidistantní, tj. tvaru $f(x, y) = kc$, $k \in \mathbb{Z}$, kde c je vhodná kladná konstanta.



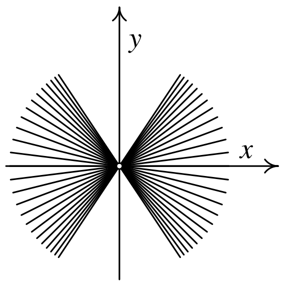
10 a)



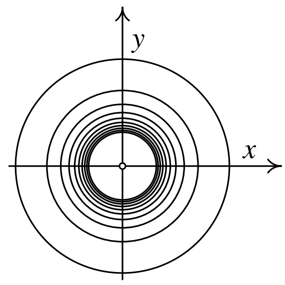
10 b)



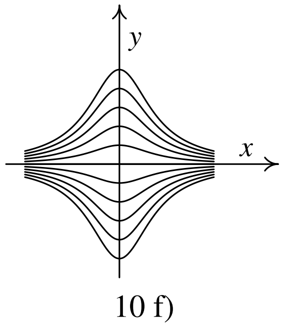
10 c)



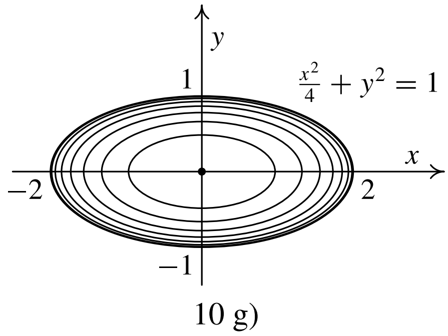
10 d)



10 e)

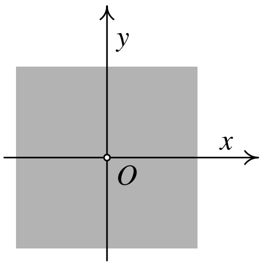


10 f)

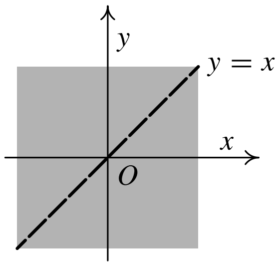


10 g)

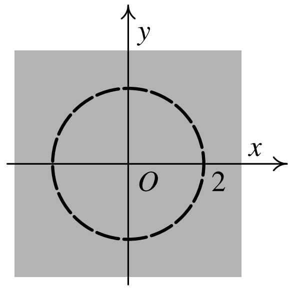
Obrázky ke cvičení 13



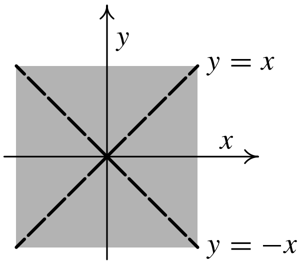
13 a)



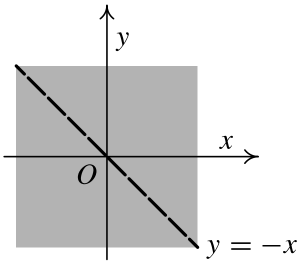
13 b)



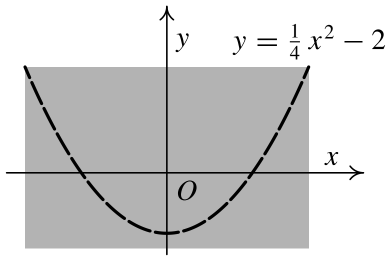
13 c)



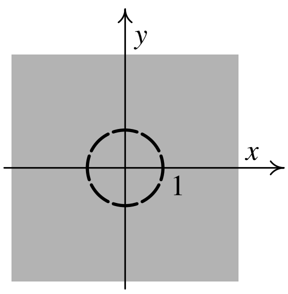
13 d)



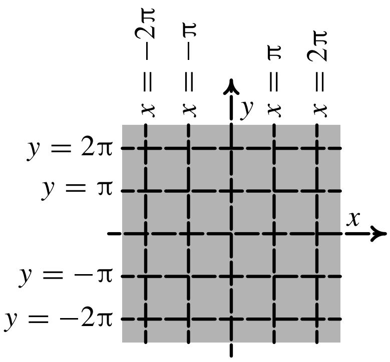
13 e)



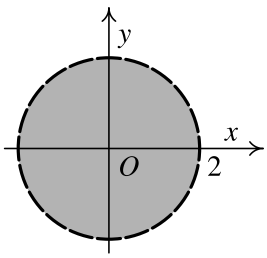
13 f)



13 g)



13 h)



13 i)

Kapitola 2

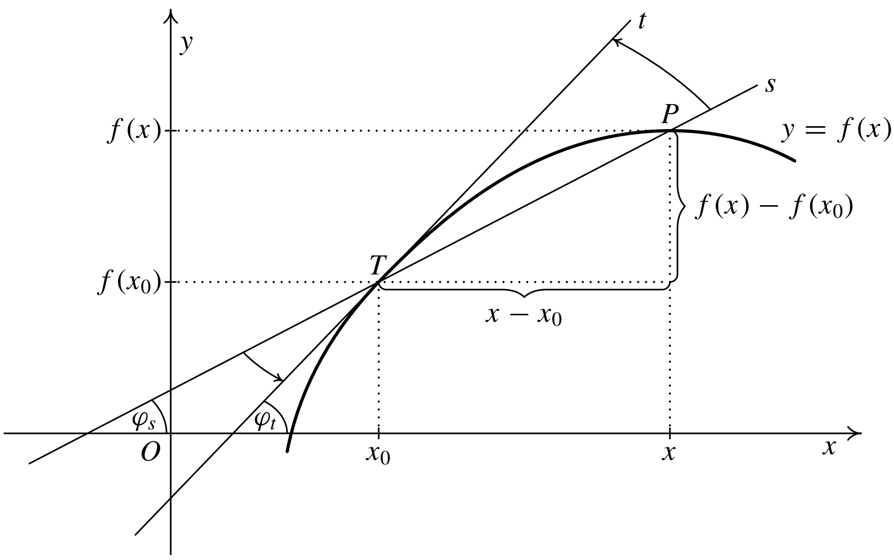
Parciální derivace a derivace ve směru

Průvodce studiem

Při studiu funkcí jedné proměnné hrál klíčovou roli pojem derivace. Připomeňme si, jak byla definovaná a jaký měla geometrický význam. Derivace reálné funkce f jedné reálné proměnné v bodě x_0 je limita (pokud existuje)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Geometricky je číslo $f'(x_0)$ směrnicí tečny ke grafu funkce f v bodě $T = \big(x_0, f(x_0)\big)$ — viz obr. 2.1, kde $f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi_t$.



Obr. 2.1: Derivace funkce jedné proměnné

U funkcí dvou a více proměnných můžeme vyšetřovat obdobný podíl přírůstků, ale k uvažovanému bodu se lze blížit z nekonečně mnoha směrů. Nejprve budeme *vyšetřovat případ, kdy se budeme přibližovat po rovnoběžce s některou souřadnicovou osou (odpovídající nezávisle proměnné). Takové derivace nazveme parciální. Pokud se do daného bodu blížíme ze směru libovolného vektoru* ***u****, mluvíme o derivaci ve směru vektoru* ***u*** *neboli směrové derivaci.*

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- vypočítat parciální derivace prvního i vyšších řádů,
- zodpovědět, za jakých podmínek jsou smíšené parciální derivace zaměnitelné,
- vysvětlit geometrický význam parciálních derivací,
- vypočítat směrové derivace a uvést jejich vztah k derivacím parciálním.

2.1 Parciální derivace prvního řádu

Uvažujme funkci $z = f(x, y)$ s definičním oborem $D(f)$ a bod $(x_0, y_0) \in D(f)$. Předpokládejme, že body tvaru (x, y_0) pro x blízké x_0 leží v definičním oboru $D(f)$. Vlastně to znamená, že v $D(f)$ má ležet malá úsečka se středem v bodě (x_0, y_0), která je rovnoběžná s osou x. Tato podmínka bude určitě splněna, jestliže (x_0, y_0) je vnitřní bod množiny $D(f)$.

Uvažujeme-li $f(x, y)$ pouze na této úsečce, dostaneme funkci $\varphi(x) = f(x, y_0)$ jen jedné proměnné x. Derivace této pomocné funkce nás zajímá. Derivujeme jen podle proměnné x a na druhou proměnnou (resp. zbývající proměnné u funkcí tří a více proměnných) se díváme jako na konstantu. Odtud také pochází název parciální derivace — při *částečném* derivování nás zajímá jen jedna proměnná.

Z hlediska aplikací jsou podstatné pouze vlastní derivace, nevlastní derivace uvažovat nebudeme. V dalším textu proto slovem derivace budeme vždy rozumět vlastní derivaci.

Definice 2.1. Nechť funkce $f\colon z = f(x, y)$ je definovaná v bodě (x_0, y_0). Položme $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Má-li funkce φ derivaci v bodě x_0, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce f podle proměnné x v bodě (x_0, y_0) a označujeme $f_x(x_0, y_0)$, event. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ nebo $f'_x(x_0, y_0)$.
To znamená, že

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Podobně, má-li funkce $\psi(y) = f(x_0, y)$ derivaci v bodě y_0, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce f podle proměnné y v bodě (x_0, y_0) a označujeme $f_y(x_0, y_0)$, event. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ nebo $f'_y(x_0, y_0)$.

Poznámka 2.2.

i) Z definice parciální derivace plyne, že při jejím výpočtu postupujeme tak, že všechny proměnné kromě té, podle níž derivujeme, považujeme za konstanty.

ii) Má-li funkce $z = f(x, y)$ parciální derivace ve všech bodech množiny $B \subset D(f)$, jsou tyto derivace funkcemi proměnných x, y. Tyto funkce označujeme $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, popř. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, z_x, z_y, z'_x, z'_y, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Pro zájemce:

Zcela analogicky se definují parciální derivace funkce tří a více proměnných. Je-li např. $f: u = f(x, y, z)$ funkce tří proměnných a bod $(x_0, y_0, z_0) \in D(f) \subset R^3$, definujeme např. parciální derivace podle y takto:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{y - y_0}.$$

Obecně je-li $f: z = f(x_1, \dots, x_n)$ funkce n proměnných, $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in D(f) \subset \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$, definujeme parciální derivaci podle x_i takto:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) = \lim_{x_i \to x_i^*} \frac{f(x_1^*, \dots, x_i, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*)}{x_i - x_i^*}.$$

Tedy všechny proměnné kromě x_i považujeme za konstanty.

Zavedeme-li pomocnou funkci jedné proměnné $\varphi(x_i) = f(x_1^*, \dots, x_i, \dots, x_n^*)$, zřejmě platí, že $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) = \varphi'(x_i^*)$. Parciální derivace je tudíž definovaná jako obyčejná derivace jisté funkce jedné proměnné.

Protože parciální derivace je definována jako „obyčejná“ derivace funkce jedné proměnné podle příslušné proměnné, platí pro počítání parciálních derivací obvyklá pravidla pro derivování. To je podstatné z hlediska praktického derivování — nemusíme se učit žádné nové vzorce pro parciální derivaci součtu, rozdílu, součinu, podílu apod.

Příklad 2.3. Vypočtěte první parciální derivace následujících funkcí:

a) $f: z = x^2 + xy - 3xy^3$, b) $g: z = \frac{x}{y}$, c) $h: z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$,

d) $k: z = (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{xy^3}$, e) $l: z = x^y$, f) $m: z = x \ln(x^2 - y^2)$,

g) $n: z = \sqrt{x + \sin xy}$, h) $p: z = \frac{x-y}{x+y}$, i) $q: u = (2x - 3y + 5z^2)^3$.

Řešení.

a) Při derivaci podle x se sebesložitější výraz obsahující pouze y (a případně další proměnné) chová jako konstanta. Použijeme vzorec pro derivaci mocniny, součtu a rozdílu. Vyjde:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 1 \cdot y - 3 \cdot 1 \cdot y^3 = 2x + y - 3y^3, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Podobně při derivování podle y se sebesložitější výraz obsahující pouze x chová jako konstanta.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + x \cdot 1 - 3x \cdot 3y^2 = x - 9xy^2, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

b) Při derivaci podle x se člen $\frac{1}{y}$, představující konstantu, vytkne. Tedy

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot 1 = \frac{1}{y}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \neq 0.$$

Při derivaci podle y se vytkne konstanta x. Přitom $\frac{1}{y} = y^{-1}$.

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x \cdot (-1) y^{-2} = -\frac{x}{y^2}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \neq 0.$$

c) Funkce je složená, při derivaci vnitřní složky využijeme výsledek b).

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad y \neq 0.$$

Podobně

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad y \neq 0.$$

d) Funkce má tvar součinu, druhý činitel je navíc složená funkce.

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial x} &= 2x\mathrm{e}^{xy^3} + (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{xy^3} \frac{\partial}{\partial x}(xy^3) = 2x\mathrm{e}^{xy^3} + (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{xy^3} y^3 = \\ &= (2x + x^2y^3 + y^5)\,\mathrm{e}^{xy^3}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Podobně

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial y} &= 2y\mathrm{e}^{xy^3} + (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{xy^3} \frac{\partial}{\partial y}(xy^3) = 2y\mathrm{e}^{xy^3} + (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{xy^3} 3xy^2 = \\ &= (2y + 3x^3y^2 + 3xy^4)\,\mathrm{e}^{xy^3}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

e) Při derivování podle x je třeba si uvědomit, že v exponentu je konstanta, a tudíž je nutné použít vzorec pro derivaci obecné mocniny ($(x^s)' = sx^{s-1}$).

$$\frac{\partial l}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad x > 0,\ y \in \mathbb{R}.$$

Při derivování podle y je třeba si uvědomit, že proměnná je jen v exponentu, a tudíž je nutné použít vzorec pro derivaci exponenciální funkce s obecným základem ($(a^x)' = = a^x \ln a$).

$$\frac{\partial l}{\partial y} = x^y \ln x, \qquad x > 0,\ y \in \mathbb{R}.$$

f) Funkce má tvar součinu, druhý činitel je navíc složená funkce.

$$\frac{\partial m}{\partial x} = 1 \cdot \ln(x^2 - y^2) + x\,\frac{1}{x^2 - y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = \ln(x^2 - y^2) + \frac{x}{x^2 - y^2}\,2x =$$
$$= \ln(x^2 - y^2) + \frac{2x^2}{x^2 - y^2}, \qquad x^2 - y^2 > 0.$$

Při derivování podle y je ovšem první činitel konstantní, takže jej lze vytknout.

$$\frac{\partial m}{\partial y} = x\,\frac{1}{x^2 - y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = \frac{x}{x^2 - y^2}\,(-2y) = \frac{-2xy}{x^2 - y^2}, \qquad x^2 - y^2 > 0.$$

g) Jde o složenou funkci, vnitřní složka má tvar součtu a druhý sčítanec je opět složená funkce.

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{2}(x + \sin xy)^{-1/2}\,\frac{\partial}{\partial x}(x + \sin xy) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sin xy}} \cdot \Bigl(1 + \cos xy \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy)\Bigr) =$$
$$= \frac{1 + y\cos xy}{2\sqrt{x + \sin xy}}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + \sin xy > 0.$$

Podobně

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{2}(x + \sin xy)^{-1/2}\,\frac{\partial}{\partial y}(x + \sin xy) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sin xy}} \cdot \Bigl(0 + \cos xy \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy)\Bigr) =$$
$$= \frac{x\cos xy}{2\sqrt{x + \sin xy}}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + \sin xy > 0.$$

Všimněte si, že zatímco funkce $n(x, y)$ je definovaná pro $x + \sin xy \geqq 0$, její parciální derivace existují jen pro $x + \sin xy > 0$.

h) Funkce má tvar zlomku, takže použijeme pravidlo pro derivování podílu.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1 \cdot (x + y) - (x - y) \cdot 1}{(x + y)^2} = \frac{2y}{(x + y)^2}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq -y,$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{-1 \cdot (x + y) - (x - y) \cdot 1}{(x + y)^2} = \frac{-2x}{(x + y)^2}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq -y.$$

i) Jde o funkci tří proměnných, která je složená. Vnitřní složka je mnohočlenem.

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 3(2x - 3y + 5z^2)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(2x - 3y + 5z^2) = 6(2x - 3y + 5z^2)^2,$$
$$\frac{\partial q}{\partial y} = 3(2x - 3y + 5z^2)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}(2x - 3y + 5z^2) = -9(2x - 3y + 5z^2)^2,$$
$$\frac{\partial q}{\partial z} = 3(2x - 3y + 5z^2)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial z}(2x - 3y + 5z^2) = 30z(2x - 3y + 5z^2)^2.$$

Ve všech případech je $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. ▲

Příklad 2.4. Nechť Φ je diferencovatelná funkce jedné proměnné definovaná na $\mathbb{R}$. Dokažte, že pak funkce dvou proměnných $f(x, y) = \Phi(xy)$ vyhovuje rovnici

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Řešení. Vypočteme potřebné parciální derivace. Přitom použijeme vzorec pro derivování složené funkce jedné proměnné. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \Phi'(xy)y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \Phi'(xy)x,$$

takže

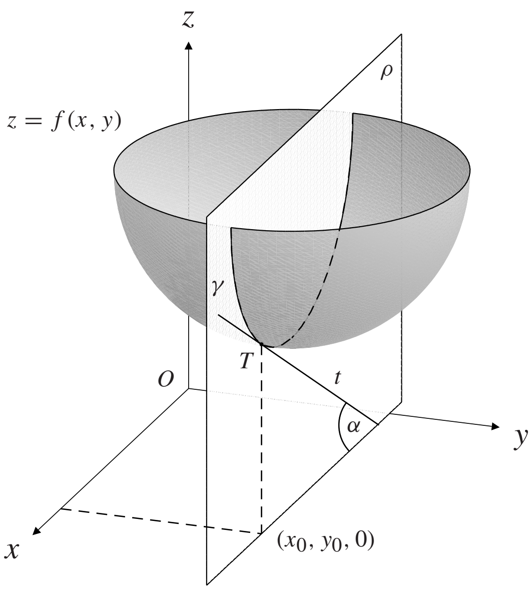
$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x\Phi'(xy)y - y\Phi'(xy)x = 0.$$

▲

Podíváme se nyní podrobněji na geometrický význam prvních parciálních derivací.

Uvažujme funkci $f\colon z = f(x, y)$, $(x, y) \in D(f) \subset \mathbb{R}^2$ s grafem G. Nechť ρ je rovina o rovnici $y = y_0$. Pak průnikem $G \cap \rho$ je (v rozumném případě, např. když je funkce f spojitá) křivka γ, která je grafem funkce $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Parciální derivace $f_x(x_0, y_0)$ pak udává směrnici tečny t k této křivce v bodě $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ — viz obr. 2.2. Připomeňme, že tato směrnice je rovna $\operatorname{tg}\alpha$.

Podobně derivace $f_y(x_0, y_0)$ udává směrnici tečny ke křivce, která je grafem funkce $\psi(y) = f(x_0, y)$ a jež vznikne jako průnik grafu G a roviny o rovnici $x = x_0$, v bodě $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$.



Obr. 2.2: Geometrický význam derivace

U funkcí jedné proměnné platilo, že jestliže má funkce v nějakém bodě derivaci, je v tomto bodě také spojitá. Obdobná věta u funkcí více proměnných neplatí, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 2.5. Vypočtěte parciální derivace v bodě $(0, 0)$ funkce f dané vztahem

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0 \text{ nebo } y = 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Rozhodněte, zda je v tomto bodě funkce f spojitá.

Řešení. Platí $\varphi(x) = f(x, 0) = 1$ a $\psi(y) = f(0, y) = 1$. Obě pomocné funkce jsou tedy konstantní a mají derivaci rovnu nule v každém bodě. Proto

$$f_x(0,0) = \varphi'(0) = 0, \qquad f_y(0,0) = \psi'(0) = 0,$$

takže f má v počátku obě první parciální derivace. Přitom je zde f zřejmě nespojitá — její graf dostaneme tak, že hodnoty konstantní funkce identicky rovné nule, které leží na kříži určeném osami x a y, „vytrhneme“ a zvedneme o jedničku. Např. po bodech $(x, 0)$ dostaneme $\lim\limits_{x\to 0} f(x, 0) = 1$, ale po bodech (x, x) vyjde $\lim\limits_{x\to 0} f(x, x) = 0$, proto $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ neexistuje. ▲

U funkcí jedné proměnné měla velký význam (zejména v řadě důkazů) tzv. Lagrangeova věta o střední hodnotě — viz [11, str. 232]. Obdobný výsledek, známý pod stejným jménem, platí i pro funkce dvou proměnných.

Věta 2.6 (Lagrange). *Předpokládejme, že funkce $f : z = f(x, y)$ má parciální derivace f_x a f_y v libovolném bodě množiny M, kde $M \subset \mathbb{R}^2$ je obdélník, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Nechť $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in M$. Pak existují čísla $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, ξ ležící mezi x_0 a x_1 a η ležící mezi y_0 a y_1, taková, že*

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, y_0)(x_1 - x_0) + f_y(x_1, \eta)(y_1 - y_0).$$

Důkaz. Platí:

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) &= f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0) = \\ &= f_x(\xi, y_0)(x_1 - x_0) + f_y(x_1, \eta)(y_1 - y_0). \end{aligned}$$

Přitom v posledním kroku jsme použili dvakrát Lagrangeovu větu pro funkci jedné proměnné — nejprve na funkci jedné proměnné $\varphi(x) = f(x, y_0)$ na intervalu s koncovými body x_0 a x_1 a pak na funkci jedné proměnné $\psi(y) = f(x_1, y)$ na intervalu s koncovými body y_0 a y_1. □

Pomocí Lagrangeovy věty dokážeme následující jednoduchý, ale užitečný výsledek.

Věta 2.7. *Má-li funkce $f : z = f(x, y)$ ohraničené parciální derivace na otevřené množině $K \subset \mathbb{R}^2$, je f na K spojitá.*

Důkaz. Podle předpokladů existuje $L > 0$ tak, že $|f_x(x, y)| \leqq L$, $|f_y(x, y)| \leqq L$ pro $(x, y) \in K$. Nechť $(x_0, y_0) \in K$. Protože K je otevřená, existuje dostatečně malý obdélník $M \subset K$ mající strany rovnoběžné se souřadnicovými osami a střed v bodě (x_0, y_0). Nechť $(x, y) \in M$. Podle Lagrangeovy věty 2.6 existují ξ mezi x_0 a x a η mezi y_0 a y tak, že

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, y_0)(x - x_0) + f_y(x, \eta)(y - y_0).$$

Pomocí Cauchyovy[1]-Bunjakovského[2] nerovnosti (pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ platí $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leqq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$) dostaneme:

$$
\begin{aligned}
|f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\leqq \sqrt{f_x^2(\xi, y_0) + f_y^2(x, \eta)} \cdot \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leqq \\
&\leqq L\sqrt{2}\, \|(x, y) - (x_0, y_0)\|.
\end{aligned}
$$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo. Položme $\delta = \varepsilon/(L\sqrt{2})$. Pak z předchozí nerovnosti plyne, že pro (x, y) takové, že $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ (pro malá ε bude $(x, y) \in M$), platí, že $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$. To znamená, že $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, a tedy f je spojitá v (x_0, y_0). □

Důsledek 2.8. *Má-li funkce $f : z = f(x, y)$ parciální derivace v okolí bodu (x_0, y_0), které jsou v tomto bodě spojité, existuje okolí $\mathscr{O}(x_0, y_0)$, na němž je f spojitá.*

Důkaz. Ze spojitosti parciálních derivací v bodě (x_0, y_0) vyplývá, že existuje okolí $\mathscr{O}(x_0, y_0)$, na němž jsou parciální derivace ohraničené. Tvrzení nyní plyne z předchozí věty. □

Poznámka 2.9. Uvědomte si, že věta 2.7 není v rozporu s příkladem 2.5. Pomocná funkce $\varphi(x) = f(x, y_0)$, $y_0 \neq 0$, nemá derivaci v $x = 0$, protože je zde nespojitá, tj. $f_x(0, y_0) = \varphi'(0)$ neexistuje. Analogicky je tomu s $f_y(x_0, 0)$, $x_0 \neq 0$. Na ose y tudíž neexistuje f_x s výjimkou počátku a na ose x neexistuje f_y s výjimkou počátku. V bodech, kde parciální derivace f_x resp. f_y existuje, je samozřejmě nulová, tj. ohraničená. Avšak nejsme schopni nalézt okolí počátku (tedy otevřenou množinu), v němž existuje *v každém bodě* jak f_x tak f_y. Předpoklady věty tedy nejsou splněny.

Pro zájemce:

Langrangeova věta se snadno zobecní pro funkce n-proměnných. Má-li funkce $f : z = f(\boldsymbol{x})$ n proměnných derivace na n-rozměrném kvádru $M = \langle a_1, b_2\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle$, $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$, a $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, existují čísla $\xi_1, \ldots, \xi_n$, ξ_i mezi x_i a y_i, taková, že

$$
f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) = f_{x_1}(\boldsymbol{z}_1)(y_1 - x_1) + \cdots + f_{x_n}(\boldsymbol{z}_n)(y_n - x_n),
$$

kde $\boldsymbol{z}_i = (y_1, \ldots, y_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$. (Body $\boldsymbol{z}_i$ jsou vnitřní body hran n-rozměrného kvádru, tedy úseček, jejichž koncové body mají souřadnice $(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ a $(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.)

Rovněž věta 2.7 a důsledek 2.8 zůstávají v platnosti.

---

[1] **Augustin Louis Cauchy** (1789–1857) (čti koši) — vynikající francouzský matematik. Napsal přes 700 prací. Položil základy soudobé matematiky, především analýzy.

[2] **Viktor Jakovlevič Bunjakovkij** (1804–1889) — ruský matematik. Zabýval se pravděpodobností a teorií čísel.

2.2 Parciální derivace vyšších řádů

Jak již bylo řečeno v poznámce 2.2 ii), pokud má funkce $z = f(x, y)$ parciální derivaci např. podle x v bodech množiny $B \subset D(f)$, dostáváme na B novou funkci $f_x(x, y)$. Její definiční obor je $D(f_x) = B$. Obecně je $B \neq D(f)$ — srovnejte příklad 2.3 g). Tato nová funkce f_x může mít v některém bodě opět parciální derivaci podle proměnné x nebo y, kterou nazýváme *druhou parciální derivací* funkce f. Podle toho, v jakém pořadí derivování provádíme, dostáváme celkem čtyři takové derivace:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = f''_{xx} \qquad \text{druhá parciální derivace } f \text{ podle } x,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = f''_{yy} \qquad \text{druhá parciální derivace } f \text{ podle } y,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = f''_{xy} \qquad \text{druhá parciální derivace } f \text{ podle } x \text{ a } y,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} = f''_{yx} \qquad \text{druhá parciální derivace } f \text{ podle } y \text{ a } x.$$

Pro stručnost jsme vynechali, ve kterém bodě se druhá derivace počítá (např. $f_{xx}(x_0, y_0)$ apod.).

Druhá parciální derivace konkrétní funkce v konkrétním bodě je tedy číslo. Pokud tato derivace neexistuje jen v jediném bodě ale na nějaké množině, dostáváme novou funkci. Ta může mít v konkrétním bodě opět derivaci, které říkáme *třetí parciální derivace*. Podle pořadí derivování existuje celkem osm možností:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx} = f'''_{xxx}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f_{xyy} = f'''_{xyy}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = f_{xxy} = f'''_{xxy},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = f_{yxy} = f'''_{yxy}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = f_{xyx} = f'''_{xyx}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = f_{yyx} = f'''_{yyx},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = f_{yxx} = f'''_{yxx}, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = f_{yyy} = f'''_{yyy}.$$

Čteme např.

f_{xxy}	třetí parciální derivace dvakrát podle x a jednou podle y,
f_{xyx}	třetí parciální derivace podle x, y a x atd.

Obdobně definujeme vyšší parciální derivace libovolného řádu. Např. n-tá parciální derivace, kdy derivujeme postupně k_1-krát podle x, k_2-krát podle y, atd. až k_r-krát podle y, bude označena

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial x^{k_3} \cdots \partial y^{k_r}}, \qquad \text{kde } n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{N},\ k_1, \dots k_r \in \mathbb{N} \text{ a } k_1 + \cdots + k_r = n.$$

Stručnější symbolika typu f_{xyyx} se používá nejvýše do řádu čtyři. Počet různých n-tých parciálních derivací je, jak se snadno zváží, 2^n.

Místo n-tá parciální derivace se také říká parciální derivace n-tého řádu.

Pro zájemce:

Stejným způsobem se postupuje u funkcí tří a více proměnných. Např. je-li $f(x, y, z)$ funkce tří proměnných, jsou některé z pátých derivací (celkem je jich $3^5 = 243$)

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^2 \partial z \partial y}, \qquad \frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y^2}, \qquad \frac{\partial^5 f}{\partial z \partial y \partial z \partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^5 f}{\partial z^2 \partial y^2 \partial x}, \qquad \frac{\partial^5 f}{\partial z^5}.$$

Nechť $f(x_1, \dots, x_n)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$, je funkce n proměnných, $r \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$, $k = k_1 + \dots + k_r$ a $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$, přičemž $i_j \neq i_{j+1}$, $j = 1, \dots, r-1$ (tj. v posloupnosti $i_1, \dots, i_r$ přirozených čísel od jedné do n, která se mohou opakovat, jsou sousední členy různé). Pak symbol

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}^{k_1} \partial x_{i_2}^{k_2} \cdots \partial x_{i_r}^{k_r}}$$

značí k-tou parciální derivaci funkce f, kde postupně derivujeme k_1-krát podle proměnné x_{i_1}, k_2-krát podle proměnné x_{i_2} atd. až k_r-krát podle proměnné x_{i_r}. Celkový počet k-tých parciálních derivací funkce n proměnných je n^k.

Příklad 2.10. Vypočtěte druhé parciální derivace následujících funkcí:

a) $f: z = x^2 + xy - 3xy^3$, b) $g: z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, c) $h: z = x^y$.

Řešení. Použijeme výsledků příkladu 2.3.

a) Podle příkladu 2.3 a) je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3y^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - 9xy^2.$$

Tedy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x + y - 3y^3) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x - 9xy^2) = -18xy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + y - 3y^3) = 1 - 9y^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x - 9xy^2) = 1 - 9y^2.$$

b) Podle příkladu 2.3 c) je

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Podle pravidla pro derivování podílu dostaneme:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{0 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{0 \cdot (x^2 + y^2) - (-x) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x^2+y^2}\Big) = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{-x}{x^2+y^2}\Big) = \frac{-1\cdot(x^2+y^2) - (-x)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

c) Podle příkladu 2.3 e) je

$$\frac{\partial h}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial h}{\partial y} = x^y \ln x.$$

S použitím vzorců pro derivování obecné mocniny, exponenciály a součinu dvou funkcí a funkce a konstanty dostaneme:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(yx^{y-1}) = y(y-1)x^{y-2},$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^y \ln x) = x^y \ln x \ln x = x^y \ln^2 x,$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1}) = 1\cdot x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x \cdot 1 = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x,$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^y \ln x) = yx^{y-1}\ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1}.$$

Všimněte si, že při výpočtu $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$ je x^{y-1} při derivování podle y složená funkce (v exponentu je $y-1$), přičemž derivace vnitřní složky je 1.

Definiční obory druhých parciálních derivací jsou v předchozích příkladech ve všech případech stejné jako u prvních parciálních derivací. ▲

Parciální derivace druhého řádu a vyšších řádů, při nichž se derivuje aspoň podle dvou různých proměnných, se nazývají *smíšené*. Tedy např. f_{xy}, f_{xyx}, f_{xzy} apod. Podíváme-li se v předchozím příkladu na smíšené druhé parciální derivace f_{xy} a f_{yx}, vidíme, že ve všech třech případech vyšly stejné. Je otázkou, nakolik je to věc náhody. Obecně neplatí, že $f_{xy} = f_{yx}$, ale za dosti rozumných předpokladů, které jsou v běžných případech splněny, rovnost platí. Výsledek je popsán v následujících třech větách.

Věta 2.11. *Nechť v nějakém okolí $\mathscr{O}(x_0, y_0)$ bodu (x_0, y_0) existují smíšené druhé parciální derivace f_{xy} a f_{yx} a jsou spojité v bodě (x_0, y_0). Pak platí $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$. (Říkáme, že smíšené parciální derivace jsou zaměnitelné.)*

Tedy spojitost smíšených derivací f_{xy} a f_{yx} zaručuje jejich zaměnitelnost.

Důkaz. Z předpokladů vyplývá existence čtverce $M = (x_0-\delta, x_0+\delta) \times (y_0-\delta, y_0+\delta)$, na němž existují f_x, f_y, f_{xy} a f_{yx}. Pro $0 < h < \delta$ položme

$$F(h) = \frac{f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+h) + f(x_0, y_0)}{h^2}$$

a označme $\varphi(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)$, $\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$. Pak lze funkci F psát ve tvaru

$$F(h) = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h^2} = \frac{\psi(y_0 + h) - \psi(y_0)}{h^2}.$$

Podle Lagrangeovy věty pro funkci jedné proměnné existuje $\vartheta_1 \in (x_0, x_0 + h)$ takové, že

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h\varphi'(\vartheta_1) = f_x(\vartheta_1, y_0 + h) - f_x(\vartheta_1, y_0).$$

Označme dále $g(y) = f_x(\vartheta_1, y)$. Pak opět podle Lagrangeovy věty existuje $\vartheta_2 \in (y_0, y_0 + h)$ takové, že

$$g(y_0 + h) - g(y_0) = hg'(\vartheta_2) = f_{xy}(\vartheta_1, \vartheta_2).$$

Pro funkci F jsme tedy dostali vyjádření

$$F(h) = f_{xy}(\vartheta_1, \vartheta_2), \qquad \vartheta_1 \in (x_0, x_0 + h),\ \vartheta_2 \in (y_0, y_0 + h).$$

Analogicky lze stejným postupem aplikovaným na funkci ψ získat vyjádření

$$F(h) = f_{yx}(\vartheta_3, \vartheta_4), \qquad \vartheta_3 \in (x_0, x_0 + h),\ \vartheta_4 \in (y_0, y_0 + h).$$

Pro $h \to 0$ platí $(\vartheta_1, \vartheta_2) \to (x_0, y_0)$ a $(\vartheta_3, \vartheta_4) \to (x_0, y_0)$. Ze spojitosti smíšených derivací v bodě (x_0, y_0) tudíž dostáváme, že

$$\lim_{h\to 0} F(h) = f_{xy}(x_0, y_0) \quad \text{a současně} \quad \lim_{h\to 0} F(h) = f_{yx}(x_0, y_0),$$

což znamená, že $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$. □

Podíváme-li se na smíšené derivace v příkladu 2.10, vidíme, že předpoklady předchozí věty jsou splněny v libovolném bodě jejich definičního oboru, takže tyto derivace jsou zaměnitelné.

Předchozí věta má jednu nevýhodu. Abychom ověřili její předpoklady, musíme spočítat f_{xy} a f_{yx} a zjistit, zda jsou spojité. Ale to už zároveň vidíme, jestli jsou i stejné. Takže použití věty není moc efektivní. To odstraňuje následující silnější verze.

Věta 2.12 (Schwarz[1]). *Nechť v nějakém okolí $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ bodu (x_0, y_0) pro funkci $f(x, y)$ platí:*

1) *existují první parciální derivace f_x a f_y,*
2) *existuje smíšená druhá parciální derivace f_{xy} (s případnou výjimkou bodu (x_0, y_0)),*
3) *existuje $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_{xy}(x, y) = K$.*

Pak obě smíšené parciální derivace $f_{xy}(x_0, y_0)$ a $f_{yx}(x_0, y_0)$ existují a platí

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) = K.$$

[1] **Hermann Amandus Schwarz** (1843–1921) (čti švarc) — významný německý matematik. Zabýval se analýzou a jejími aplikacemi v geometrii.

Třetí předpoklad věty je zejména splněn, je-li funkce f_{xy} spojitá v bodě (x_0, y_0). Z existence a spojitosti jedné smíšené parciální derivace tedy už plyne existence druhé a jejich zaměnitelnost. Tato věta je daleko užitečnější.

Důkaz. Nechť $M = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, $\delta > 0$, je čtverec, na němž existují f_x, f_y a f_{xy} (f_{xy} nemusí existovat v bodě (x_0, y_0)). Pro $0 < |h| < \delta$, $0 < |k| < \delta$ definujme pomocnou funkci

$$F(h,k) = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)}{hk}.$$

Z existence prvních parciálních derivací na M plyne, že

$$\lim_{h\to 0} F(h,k) = \frac{f_x(x_0, y_0+k) - f_x(x_0, y_0)}{k} \qquad \text{pro } k \neq 0, \tag{2.1}$$

$$\lim_{k\to 0} F(h,k) = \frac{f_y(x_0+h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h} \qquad \text{pro } h \neq 0. \tag{2.2}$$

Ukážeme, že existuje dvojná limita

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} F(h,k) = K. \tag{2.3}$$

Analogicky jako v důkazu věty 2.11 lze najít čísla ϑ_1, ϑ_2, kde ϑ_1 leží mezi nulou a h a ϑ_2 leží mezi nulou a k, taková, že $F(h,k) = F_{xy}(\vartheta_1, \vartheta_2)$. Tudíž pro $(h,k) \to (0,0)$ je $(\vartheta_1, \vartheta_2) \to (0,0)$. Z předpokladu 3) proto plyne, že platí (2.3).

Nyní použijeme větu 1.31. Vztahy (2.1) a (2.2) říkají, že existují obě vnitřní limity. Proto existují obě opakované limity a jsou rovny K. Avšak

$$\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} F(h,k) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(x_0, y_0+k) - f_x(x_0, y_0)}{k} = f_{xy}(x_0, y_0),$$

$$\lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} F(h,k) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(x_0+h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h} = f_{yx}(x_0, y_0),$$

což dokazuje větu. □

Podobné tvrzení platí i pro vyšší smíšené parciální derivace. Pro praktické účely je postačující následující věta.

Věta 2.13. *Nechť funkce $f(x, y)$ má na otevřené množině D spojité všechny parciální derivace řádu k, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqq 2$. Pak hodnoty všech smíšených parciálních derivací funkce $f(x, y)$ až do řádu k nezávisí na pořadí derivování, ale jen na tom, kolikrát se podle které proměnné derivuje.*

Důkaz. Naznačíme si pouze princip. Nejprve se indukcí s využitím důsledku 2.8 ukáže, že všechny parciální derivace řádu l, $1 \leqq l < k$, jsou na D spojité. Pak se opět indukcí s pomocí věty 2.11 dokáže, že hodnoty smíšených derivací nezávisí na pořadí derivování. □

Pokud je uvažovaná funkce vytvořena z elementárních funkcí jedné proměnné, jsou zřejmě takové i její parciální derivace. Vzhledem k úvahám na str. 17 jsou pak spojité na svých definičních oborech, a tudíž lze i předchozí větu účinně využít pro počítání smíšených parciálních derivací. Stačí spočítat např. f_{xxy}. Derivace f_{xyx} a f_{yxx} (o nichž sice nevíme, jak vypadají, ale víme, že jsou spojité) musí být stejné.

Příklad 2.14. Vypočtěte všechny čtvrté parciální derivace funkce

$$f: z = x^4 - 2x^2y^3 + 3xy^2 - y^5.$$

Řešení. Protože jde o mnohočlen dvou proměnných, budou parciální derivace zase obdobné mnohočleny, které jsou tudíž spojité na $\mathbb{R}^2$. Lze tedy použít předchozí větu. Postupně dostaneme:

$$\begin{aligned}
f_x &= 4x^3 - 4xy^3 + 3y^2, & f_y &= -6x^2y^2 + 6xy - 5y^4,\\
f_{xx} &= 12x^2 - 4y^3, & f_{yy} &= -12x^2y + 6x - 20y^3,\\
f_{xy} &= -12xy^2 + 6y = f_{yx}, & &\\
f_{xxx} &= 24x, & f_{yyy} &= -12x^2 - 60y^2,\\
f_{xxy} &= -12y^2 = f_{xyx} = f_{yxx}, & f_{yyx} &= -24xy + 6 = f_{yxy} = f_{xyy},\\
f_{xxxx} &= 24, & f_{xxxy} &= 0 = f_{xxyx} = f_{xyxx} = f_{yxxx},\\
f_{yyyy} &= -120y, & f_{yyyx} &= -24x = f_{yyxy} = f_{yxyy} = f_{xyyy},\\
f_{xxyy} &= -24y = f_{yyxx} = f_{xyxy} = f_{yxyx} = f_{xyyx} = f_{yxxy}, & &
\end{aligned}$$

▲

Všimněte si, že kdybychom v předchozím příkladu v derivování pokračovali, byly by všechny parciální derivace od jistého řádu identicky nulové. To se stane v případě mnohočlenu vždy.

Příklad 2.15. Ověřte, že $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$, je-li

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0),\\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

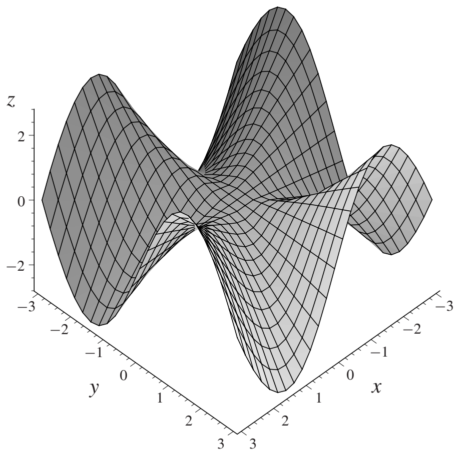
Řešení. Nejprve určíme smíšenou derivaci $f_{xy}(0,0)$. Pro její výpočet potřebujeme znát $f_x(0,y)$. Vypočteme tedy první parciální derivaci podle x.

Pro $(x,y) \neq (0,0)$ máme:

$$f_x = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}. \tag{2.4}$$

Hodnotu f_x v bodě $(0,0)$ musíme spočítat přímo z definice. Protože pro $x \neq 0$ je $f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0$, dostaneme

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0. \tag{2.5}$$



Obr. 2.3: Graf funkce s nezaměnitelnými smíšenými derivacemi v počátku

Ze vztahu (2.4) máme, že

$$f_x(0, y) = \frac{-y^5}{(y^2)^2} = -y \qquad \text{pro } y \neq 0.$$

Vzhledem ke vztahu (2.5) tedy je $f_x(0, y) = -y$ pro libovolné y, a tudíž $f_{xy}(0, 0) = -1$.

Naprosto analogicky (lze též využít vztah $f(x, y) = -f(y, x)$) vyjde $f_y(x, 0) = x$ pro libovolné x, takže $f_{yx}(0, 0) = 1$. Graf funkce je na obr. 2.3. ▲

Pro zájemce:

Analogicky jako pro funkce dvou proměnných lze dokázat, že pro funkce n proměnných, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 3$, platí obdoby vět 2.11, 2.12 a 2.13.

2.3 Směrové derivace

Na závěr této kapitoly si všimneme jistého zobecnění parciálních derivací. Označme V_2 množinu všech volných vektorů v rovině $\mathbb{R}^2$. Jestliže $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \in V_2$ a $t \in \mathbb{R}$, pak $A + t\boldsymbol{u}$ je bod o souřadnicích $(a_1 + tu_1, a_2 + tu_2)$.

Definice 2.16. Nechť f je funkce dvou proměnných, $A = (x, y) \in D(f)$ a $\boldsymbol{u} \in V_2$. Položme $\varphi(t) = f(A + t\boldsymbol{u})$, $t \in \mathbb{R}$. Má-li funkce φ derivaci v bodě $t = 0$, nazýváme tuto derivaci *derivací funkce f v bodě (x, y) ve směru vektoru $\boldsymbol{u}$* a značíme ji $f_{\boldsymbol{u}}(x, y)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(x, y)$.

Jestliže $f_{\boldsymbol{u}}(x, y)$ existuje, znamená to, že funkce φ je definovaná v okolí nuly, a tudíž že definiční obor $D(f)$ obsahuje úsečku, která má střed v bodě A a je rovnoběžná s vektorem $\boldsymbol{u}$.

Vzhledem k definici derivace funkce jedné proměnné platí:

$$f_{\boldsymbol{u}}(x, y) = \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(A + t\boldsymbol{u}) - f(A)}{t}. \tag{2.6}$$

Zvolíme-li za $\boldsymbol{u}$ jednotkový vektor ve směru osy x, tj. $\boldsymbol{u} = (1, 0)$, snadno vidíme porovnáním s definicí 2.1, že vyjde $f_{\boldsymbol{u}} = f_x$. Obdobně volbou jednotkového vektoru ve směru osy y, tj. $\boldsymbol{u} = (0, 1)$, dostaneme $f_{\boldsymbol{u}} = f_y$. Parciální derivace jsou tedy speciálním případem derivace ve směru.

Příklad 2.17. Vypočtěte derivaci funkce $f(x, y) = x^2 - 3xy - 2y^2$ v bodě $A = (-1, 1)$ ve směru $\boldsymbol{u} = (2, -1)$.

Řešení. Určíme pomocnou funkci φ:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= f(A + t\boldsymbol{u}) = f(-1 + 2t, 1 - t) = \\ &= (-1 + 2t)^2 - 3(-1 + 2t)(1 - t) - 2(1 - t)^2 = 8t^2 - 9t + 2.\end{aligned}$$

Odtud máme $\varphi'(t) = 16t - 9$, takže $\varphi'(0) = -9$, což znamená, že hledaná derivace existuje a platí $f_{\boldsymbol{u}}(-1, 1) = -9$. ▲

Příklad 2.18. Vypočtěte derivaci funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^4}{x^2 + y^2} & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

v bodě $A = (0, 0)$ ve směru $\boldsymbol{u} = (3, 1)$.

Řešení. Opět určíme pomocnou funkci φ. Pro $t \neq 0$ je

$$\varphi(t) = f(A + t\boldsymbol{u}) = f(3t, t) = \frac{27t^3 - t^4}{9t^2 + t^2} = \frac{27t - t^2}{10}$$

a pro $t = 0$ je $\varphi(0) = f(0, 0) = 0$. Pro libovolné t tudíž platí $\varphi(t) = (27t - t^2)/10$, takže $\varphi'(t) = (27 - 2t)/10$, tj. $\varphi'(0) = 27/10$. Hledaná směrová derivace tedy existuje a platí $f_{\boldsymbol{u}}(0, 0) = 27/10$. ▲

V předchozích příkladech jsme počítali derivaci ve směru přímo na základě její definice. V následující kapitole v oddíle 3.3 si ukážeme jiný, jednodušší způsob výpočtu.

Poznámka 2.19.

i) Protože derivace ve směru je definovaná jako obyčejná derivace pomocné funkce φ, platí pro ni všechna běžná pravidla pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu.

ii) Geometrický význam je podobný jako u parciálních derivací. Při označení z definice 2.16 nechť p je přímka tvořená body $A + t\boldsymbol{u}$, $t \in \mathbb{R}$ a ρ je rovina procházející p, která je rovnoběžná se souřadnicovou osou z. Pak průnikem roviny ρ s grafem funkce f je graf funkce φ. Derivace ve směru má význam směrnice tečny ke grafu funkce φ ležící v rovině ρ.

iii) Obdobně jako u parciálních derivací je možné zavést derivace ve směru vyšších řádů. Při pevně zvoleném $\boldsymbol{u} \in V_2$ je $f_{\boldsymbol{u}}(x, y)$ funkcí dvou proměnných x, y. Má-li tato funkce v nějakém bodě (x, y) derivaci ve směru $\boldsymbol{v} \in V_2$, nazveme ji *druhou směrovou derivací v bodě* (x, y) *ve směrech* $\boldsymbol{u}$ *a* $\boldsymbol{v}$ a označíme $f_{\boldsymbol{uv}}(x, y)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{u} \partial \boldsymbol{v}}(x, y)$. Analogicky se zavedou vyšší derivace.

iv) O derivacích ve směru vyšších řádů lze dokázat obdoby vět 2.11 až 2.13. Např. spojitost derivací $f_{\boldsymbol{uv}}(x, y)$ a $f_{\boldsymbol{vu}}(x, y)$ zaručuje jejich rovnost, nezáleží tedy na pořadí derivování. Podrobněji [2, 13, 16].

Pro zájemce:

Zavedení derivace ve směru pro funkce více proměnných je zcela analogické. Nechť f je funkce n proměnných, $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D(f)$ a $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n) \in V_n$, kde V_n je množina volných vektorů v $\mathbb{R}^n$. Zaveďme pomocnou funkci jedné proměnné $\varphi(t) = f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{u}) = f(x_1 + t u_1, \dots, x_n + t u_n)$, $t \in \mathbb{R}$. Existuje-li $\varphi'(0)$, nazýváme toto číslo derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{x}$ ve směru $\boldsymbol{u}$.

Značíme: $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(x_1, \dots, x_n)$ resp. $f_{\boldsymbol{u}}(x_1, \dots, x_n)$ nebo stručněji $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ resp. $f_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$. Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \varphi'(0).$$

O takto zavedené derivaci platí vše, co bylo řečeno v poznámce 2.19.

Pojmy k zapamatování

— parciální derivace prvního řádu

— parciální derivace vyšších řádů

— smíšené parciální derivace

— derivace funkce ve směru

Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pojmem parciální derivace funkce dvou proměnných?
2. Jak počítáme parciální derivaci funkce dvou proměnných?
3. Jaký je geometrický význam parciálních derivací?
4. Uveďte postačující podmínku využívající parciální derivace, která zaručuje, že funkce $z = f(x, y)$ bude na otevřené množině K spojitá?
5. Které parciální derivace nazýváme smíšené?
6. Jaké podmínky musí být splněny, aby smíšené druhé parciální derivace dané funkce byly zaměnitelné?
7. Uveďte příklad funkce, která má alespoň jednu nenulovou druhou parciální derivaci a všechny třetí parciální derivace identicky rovny nule.

8. Co rozumíme pojmem derivace funkce v daném bodě ve směru daného vektoru?

9. Jaký je vztah mezi parciálními derivacemi a směrovými derivacemi?

10. Jaký je geometrický význam směrových derivací?

Příklady k procvičení

!

1. Vypočtěte první parciální derivace funkce f v bodě A:

a) $f: z = \frac{\pi}{3} x^2 y, \quad A = (4, 6)$,
b) $f: z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}, \quad A = (1, 1)$,
c) $f: z = \mathrm{e}^{\alpha} \sin \beta, \quad A = (1, 2)$,
d) $f: z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \quad A = (0, 1)$,
e) $f: z = 3x^2 y + \mathrm{e}^{xy}, \quad A = (3, 2)$,
f) $f: z = \sqrt{2x^2 - 3y^2}, \quad A = (3, 2)$,
g) $f: z = \frac{\alpha \cos \varphi - \varphi \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + \sin \varphi}, \quad A = (0, 0)$,
h) $f: z = 4 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6}, \quad A = (0, 1)$,
i) $f: z = 3 + \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8}, \quad A = (0, 1)$,
j) $f: z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad A = (0, 0)$,
k) $f: z = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}$, $A = (0, 0)$,
l) $f: z = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad A = (0, 0)$.

2. Vypočtěte první parciální derivace funkce f:

a) $f(x, y) = 3x^3 + 5x^2 y - 2y^3$,
b) $f(x, y, z) = (2xy^2 + z^3)^{11}$,
c) $f(x, y, z) = yz + xz + xy$,
d) $f(u, v) = \frac{u^2}{v} + \frac{v^3}{u^4}$,
e) $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$,
f) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$,
g) $f(x, y) = y \sin x + \cos(x - y)$,
h) $f(m, n) = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}$,
i) $f(x, y) = x^3 y^2 - x^2 \sin y + 2^y$,
j) $f(\gamma, \delta) = \operatorname{arctg} \frac{\gamma + \delta}{\gamma - \delta}$,
k) $f(\gamma, \delta) = \operatorname{arctg} \frac{\gamma - \delta}{1 + \gamma\delta}$,
l) $f(u, v) = \mathrm{e}^{\frac{u}{v}} + u^v$,
m) $f(R, S) = RS\,\mathrm{e}^{R+2S}$,
n) $f(\alpha, \beta) = \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$,
o) $f(\alpha, \beta) = \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$,
p) $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$,
q) $f(x, y) = y^{x+1}$,
r) $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$,
s) $f(x, y) = \frac{3xy}{x - y}$,
t) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$,
u) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,
v) $f(x, y) = x \sin(x + y)$,
w) $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$,
x) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$,
y) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$,
z) $f(x, y) = \sin \frac{y^2}{x}$.

3. Vypočtěte první parciální derivace funkce f:

a) $f(x,y)=x^3+2x^2y+3xy^2+4x-5y+100$, b) $f(x,y,z)=\frac{z}{x^2+y^2}$,
c) $f(x,y)=\frac{x^3\sqrt{y}-3y}{\sqrt{x}}$, d) $f(x,y)=\ln(x+\ln y)$,
e) $f(x,y,z)=\ln\bigl(x+\ln(y+\ln z)\bigr)$, f) $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{x^2(1-y-z)}$.

4. Pro $f\colon z=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$ vypočtěte $f_x(x,1)$.

5. Ukažte, že funkce $f\colon z=\ln(x^2+y^2)$ vyhovuje rovnici $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

6. Ukažte, že funkce $f\colon z=y^2\sin(x^2-y^2)$ vyhovuje rovnici $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz$.

7. Ukažte, že pro funkce $u=\mathrm{e}^x\cos y$ a $v=\mathrm{e}^x\sin y$ platí $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ a $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

8. Ukažte, že ze stavové rovnice ideálního plynu $pV=nRT$, kde p je tlak, V objem, T absolutní teplota, n a R jsou konstanty, vyplývá

$$\frac{\partial p}{\partial V}\,\frac{\partial V}{\partial T}\,\frac{\partial T}{\partial p}=-1.$$

9. Vypočtěte první parciální derivace funkce f:

a) $f(x,y)=\ln\bigl(\frac{x+4}{y^2}\bigr)$, b) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$,
c) $f(x,y)=\arcsin\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, d) $f(x,y,z)=\ln\frac{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,
e) $f(x,y,z)=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}-z\sqrt{1-x^2-y^2}$,
f) $f(x,y)=x^{xy}$, g) $f(x,y)=xy\,\mathrm{e}^{\sin\pi xy}$,
h) $f(x,y)=2\sqrt{\frac{1-\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}}$, i) $f(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$,
j) $f(x,y)=xy\ln(x+y)$, k) $f(x,y)=\operatorname{arctg}(x-y)^2$,
l) $f(x,y,z)=x^{y^z}$, m) $f(x,y)=\sqrt{1-\bigl(\frac{x+y}{xy}\bigr)^2}+\arcsin\frac{x+y}{xy}$.

10. Vypočtěte druhé parciální derivace zadané funkce f:

a) $f\colon z=x^3-3x^4y+y^5$, b) $f\colon u=xyz$, c) $f\colon u=xy+yz+zx$,
d) $f\colon z=\sin xy$, e) $f\colon z=\frac{1}{3xy}$, f) $f\colon z=xy+\frac{y}{x}$,
g) $f\colon z=x^y$, h) $f\colon z=\ln\frac{x^2+1}{y^2-1}$, i) $f\colon z=xy+\cos(x-y)$,
j) $f\colon z=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{x+y}$, k) $f\colon z=\sqrt{x^2+y^2}$, l) $f\colon z=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$,
m) $f\colon z=\mathrm{e}^{xy}$, n) $f\colon u=\mathrm{e}^{xyz}$, o) $f\colon z=5x^3y^2-4x^3+5xy$.

11. Ukažte, že pro funkci $f\colon z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ platí $z_{xx}+z_{yy}=0$.

12. Ukažte, že pro funkci $f\colon z=xy+\cos(x-y)$ platí $z_{xy}+z_{xx}=1$ a $z_{xy}+z_{yy}=1$.

13. Ukažte, že pro funkci $f\colon z=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, platí $z_{xx}=\frac{1}{a^2}z_t$.

14. Ukažte, že pro funkci $g(r, \varphi)$, kde $g\colon u = r^m \cos m\varphi$, $m \in \mathbb{R}$, platí

$$u_{rr} + \frac{1}{r}\, u_r + \frac{1}{r^2}\, u_{\varphi\varphi} = 0.$$

15. Vypočtěte druhé parciální derivace funkce f:

a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$,
b) $f(x, y) = x^{x+y}$,
c) $f(x, y) = \frac{xy+x}{y}$,
d) $f(x, y) = \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$,
e) $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$,
f) $f(x, y) = \ln(x + y^2)$,
g) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,
h) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$,
i) $f(x, y) = x \sin(x + y)$,
j) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,
k) $f(x, y) = \frac{\cos x^2}{y}$,
l) $f(x, y) = (1 + x^2)^y$.

16. Nechť F a G jsou dvakrát diferencovatelné funkce jedné proměnné. Dokažte, že pak funkce $f(x, y)$ vyhovuje dané rovnici:

a) $f\colon z = F(x - 2t) + G(x + 2t)$, $\quad z_{tt} = 4z_{xx}$,
b) $f\colon z = x\, F\big(\frac{x}{y}\big) + y\, G\big(\frac{x}{y}\big)$, $\quad x^2 z_{xx} + 2xy\, z_{xy} + y^2 z_{yy} = 0$.

17. Nechť Φ je diferencovatelná funkce jedné proměnné. Dokažte, že pak funkce $f(x, y)$ resp. $f(x, y, z)$ vyhovuje dané rovnici:

a) $f\colon u = x\Phi(y^2 - x^2)$, $\quad \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{x^2}$,
b) $f\colon u = \Phi(x^2 + y^2)$, $\quad x\,\frac{\partial u}{\partial y} - y\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$,
c) $f\colon u = xy + y\Phi\big(\frac{x}{y}\big)$, $\quad x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} = xy + u$,
d) $f\colon u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \Phi(x - y - z)$, $\quad 2\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 2x + y + z$,
e) $f\colon u = xy\Phi(x^2 - y^2 - z^2)$, $\quad \frac{1}{2x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\big)\, u$.

18. Ověřte, že funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & \text{pro } |x| \geqq |y|, \\ 0 & \text{pro } |x| < |y| \end{cases}$$

má v počátku smíšené druhé parciální derivace, které nejsou zaměnitelné.

19. Vypočtěte derivace funkce f v bodě $R = (2, 0)$ ve směru vektoru $\boldsymbol{a} = (-2, 0)$, v bodě $S = (0, 3)$ ve směru vektoru $\boldsymbol{b} = (0, -3)$ a v bodě $T = (2, 3)$ ve směru vektoru $\boldsymbol{c} = (2, 3)$.

a) $f\colon z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y$,
b) $f\colon z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$,
c) $f\colon z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$,
d) $f\colon z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$,
e) $f\colon z = \sqrt{16 - y^2}$,
f) $f\colon z = 4 - x^2 + y^2,\ z \geqq 0$.

20. Vypočtěte derivace funkce f v bodě $R = (2, -1, 3)$ ve směru vektoru $\boldsymbol{q} = (1, 4, -2)$.

a) $f\colon u = 2(x - 1)^2 + 3(y + 2)^2 + z^2$,
b) $f\colon u = -x^2 + 2(y + 1)^2 - (z - 1)^2$,
c) $f\colon u = 4(x - 1) + 3y^2 + 5z^2$,
d) $f\colon u = \frac{z}{3} - 4xy$.

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $f_x(A) = 16\pi,\ f_y(A) = \frac{16}{3}\pi,$
   b) $f_u(A) = 0,\ f_v(A) = 0,$
   c) $f_\alpha(A) = \mathrm{e}\cdot\sin 2,\ f_\beta(A) = \mathrm{e}\cdot\cos 2,$
   d) $f_x(A) = 1,\ f_y(A) = 0,$
   e) $f_x(A) = 36 + 2\mathrm{e}^6,\ f_y(A) = 27 + 3\mathrm{e}^6,$
   f) $f_x(A) = \sqrt{6},\ f_y(A) = -\sqrt{6},$
   g) $f_\alpha(A) = \frac{1}{2}\,,\ f_\varphi(A) = -\frac{1}{2}\,,$
   h) $f_x(A) = 0,\ f_y(A) = -\frac{1}{3}\,,$
   i) $f_x(A) = 0,\ f_y(A) = -\frac{1}{4},$
   j) $f_x(A)$ a $f_y(A)$ neexistují,
   k) $f_x(A) = 1,\ f_y(A) = 1,$
   l) $f_x(A) = 0,\ f_y(A) = 0.$

2. a) $f_x = 9x^2 + 10xy, \quad f_y = 5x^2 - 6y^2,$
   b) $f_x = 22y^2(2xy^2 + z^3)^{10},\ f_y = 44xy(2xy^2 + z^3)^{10},\ f_z = 33z^2(2xy^2 + z^3)^{10},$
   c) $f_x = z + y, \quad f_y = z + x, \quad f_z = y + x,$
   d) $f_u = \frac{2u}{v} - \frac{4v^3}{u^5}\,, \quad f_v = -\frac{u^2}{v^2} + \frac{3v^3}{u^4}\,,$
   e) $f_x = \frac{1}{y} + \frac{z}{x^2}\,, \quad f_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}\,, \quad f_z = -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{x}\,,$
   f) $f_x = \frac{-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}\,, \quad f_y = \frac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}\,,$
   g) $f_x = y\cos x - \sin(x - y), \quad f_y = \sin x + \sin(x - y),$
   h) $f_m = \frac{-m}{\sqrt{(m^2+n^2)^3}}\,, \quad f_n = \frac{-n}{\sqrt{(m^2+n^2)^3}}\,,$
   i) $f_x = 3x^2y^2 - 2x\sin y, \quad f_y = 2x^3y - x^2\cos y + 2^y\ln 2,$
   j) $f_\gamma = -\frac{\delta}{\gamma^2+\delta^2}\,, \quad f_\delta = \frac{\gamma}{\gamma^2+\delta^2}\,,$
   k) $f_\gamma = \frac{1}{1+\gamma^2}\,, \quad f_\delta = -\frac{1}{1+\delta^2}\,,$
   l) $f_u = \frac{1}{v}\,\mathrm{e}^{\frac{u}{v}} + u^v\,\frac{v}{u}\,, \quad f_v = -\frac{u}{v^2}\,\mathrm{e}^{\frac{u}{v}} + u^v\ln u,$
   m) $f_R = S\,\mathrm{e}^{R+2S}(1 + R), \quad f_S = R\,\mathrm{e}^{R+2S}(1 + 2S),$
   n) $f_\alpha = \frac{-2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\,, \quad f_\beta = \frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\,,$
   o) $f_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,, \quad f_\beta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)}\,,$
   p) $f_x = \frac{1}{y^2}\,, \quad f_y = -\frac{2x}{y^3}\,,$
   q) $f_x = y^{x+1}\ln y, \quad f_y = (x + 1)y^x,$
   r) $f_x = \frac{2y}{(x+y)^2}\,, \quad f_y = \frac{-2x}{(x+y)^2}\,,$
   s) $f_x = \frac{-3y^2}{(x-y)^2}\,, \quad f_y = \frac{3x^2}{(x-y)^2}\,,$
   t) $f_x = \frac{-4xy^2}{(x^2-y^2)^2}\,, \quad f_y = \frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2}\,,$
   u) $f_x = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,, \quad f_y = \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,,$
   v) $f_x = \sin(x + y) + x\cos(x + y), \quad f_y = x\cos(x + y),$
   w) $f_x = \frac{x}{x^2+y^2}\,, \quad f_y = \frac{y}{x^2+y^2}\,,$
   x) $f_x = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\,, \quad f_y = \frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\,,$
   y) $f_x = \frac{-y}{x^2+y^2}\,, \quad f_x = \frac{x}{x^2+y^2}\,,$
   z) $f_x = -\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y^2}{x}\,, \quad f_y = \frac{2y}{x}\cos\frac{y^2}{x}\,.$

3. a) $f_x = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 4\,, \quad f_y = 2x^2 + 6xy - 5\,,$
   b) $f_x = \frac{-2xz}{(x^2+y^2)^2}\,, \quad f_y = \frac{-2yz}{(x^2+y^2)^2}\,, \quad f_z = \frac{1}{x^2+y^2}\,,$
   c) $f_x = \frac{5x^3\sqrt{y}+3y}{2\sqrt{x^3}}\,, \quad f_y = \frac{x^3-6\sqrt{y}}{2\sqrt{xy}}\,,$
   d) $f_x = \frac{1}{x+\ln y}\,, \quad f_y = \frac{1}{y(x+\ln y)}\,,$
   e) $f_x = \frac{1}{x+\ln(y+\ln z)}\,, \quad f_y = \frac{1}{(y+\ln z)\left(x+\ln(y+\ln z)\right)}\,, \quad f_z = \frac{1}{z(y+\ln z)\left(x+\ln(y+\ln z)\right)}\,,$
   f) $f_x = 2x(1 - y - z)\,\mathrm{e}^{x^2(1-y-z)}\,, \quad f_y = f_z = -x^2\,\mathrm{e}^{x^2(1-y-z)}\,.$

4. $f_x(x, 1) = 1.$

9. a) $f_x = \frac{1}{x+4}\,, \quad f_y = -\frac{2}{|y|}\,,$
   b) $f_x = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad f_y = -\frac{1}{1+y^2}\,,$
   c) $f_x = \frac{\sqrt{2}\,x|y|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\,, \quad f_y = -\frac{\sqrt{2}\,x^2\operatorname{sgn} y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\,,$
   d) $f_x = x\,\frac{2}{r(r^2-1)}\,, \quad f_y = y\,\frac{2}{r(r^2-1)}\,, \quad f_z = z\,\frac{2}{r(r^2-1)}\,,$ kde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,
   e) $f_x = \sqrt{1-y^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{xz}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,, \quad f_z = -\sqrt{1-x^2-y^2},$
   $f_y = -\frac{xy}{\sqrt{1-y^2}} + \sqrt{1-x^2} + \frac{yz}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,,$
   f) $f_x = yx^{xy}(1+\ln x), \quad f_y = x^{xy+1}\ln x,$
   g) $f_x = y\,\mathrm{e}^{\sin \pi xy}(1+\pi xy\cos \pi xy), \quad f_y = x\,\mathrm{e}^{\sin \pi xy}(1+\pi xy\cos \pi xy),$
   h) $f_x = -\frac{y}{\sqrt{xy-x^2y^2}(1+\sqrt{xy})}\,, \quad f_y = -\frac{x}{\sqrt{xy-x^2y^2}(1+\sqrt{xy})}\,,$
   i) $f_x = \frac{y}{z}\,x^{\frac{y}{z}-1}, \quad f_y = \frac{1}{z}\,x^{\frac{y}{z}}\ln x, \quad f_z = -\frac{y}{z^2}\,x^{\frac{y}{z}}\ln x,$
   j) $f_x = y\big[\ln(x+y) + \frac{x}{x+y}\big], \quad f_y = x\big[\ln(x+y) + \frac{y}{x+y}\big],$
   k) $f_x = \frac{2(x-y)}{1+(x-y)^4}\,, \quad f_y = -\frac{2(x-y)}{1+(x-y)^4}\,,$
   l) $f_x = y^z x^{y^z-1}, \quad f_y = x^{y^z} z y^{z-1}\ln x, \quad f_z = x^{y^z} y^z \ln x \ln y,$
   m) $f_x = -\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}\,, \quad f_y = -\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}\,.$

10. a) $f_{xx} = 6x - 36x^2y, \quad f_{xy} = -12x^2, \quad f_{yy} = 20y^3,$
    b) $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = 0, \quad f_{xy} = z, \quad f_{xz} = y, \quad f_{yz} = x,$
    c) $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = 0, \quad f_{xy} = f_{xz} = f_{yz} = 1,$
    d) $f_{xx} = -y^2\sin xy, \quad f_{xy} = \cos xy - xy\sin xy, \quad f_{yy} = -x^2\sin xy,$
    e) $f_{xx} = \frac{2}{3x^3y}\,, \quad f_{xy} = \frac{1}{3x^2y^2}\,, \quad f_{yy} = \frac{2}{3xy^3}\,,$
    f) $f_{xx} = \frac{2y}{x^3}\,, \quad f_{xy} = 1 - \frac{1}{x^2}\,, \quad f_{yy} = 0,$
    g) $f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad f_{xy} = x^{y-1}(1+y\ln x), \quad f_{yy} = x^y\ln^2 x,$
    h) $f_{xx} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}\,, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = \frac{2(1+y^2)}{(y^2-1)^2}\,,$
    i) $f_{xx} = -\cos(x-y), \quad f_{xy} = 1+\cos(x-y), \quad f_{yy} = -\cos(x-y),$
    j) $f_{xx} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,, \quad f_{xy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,, \quad f_{yy} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,,$
    k) $f_{xx} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,, \quad f_{xy} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,, \quad f_{yy} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,,$
    l) $f_{xx} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad f_{xy} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad f_{yy} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y}}\,,$
    m) $f_{xx} = y^2\mathrm{e}^{xy}, \quad f_{xy} = (xy+1)\,\mathrm{e}^{xy}, \quad f_{yy} = x^2\mathrm{e}^{xy}\,,$
    n) $f_{xx} = y^2z^2\mathrm{e}^{xyz}, \quad f_{yy} = x^2z^2\mathrm{e}^{xyz}, \quad f_{zz} = x^2y^2\mathrm{e}^{xyz},$
    $f_{xy} = (z+zyz^2)\,\mathrm{e}^{xyz}, \quad f_{xz} = (y+xy^2z)\,\mathrm{e}^{xyz}, \quad f_{xy} = (x+x^2yz)\,\mathrm{e}^{xyz},$
    o) $f_{xx} = 30y^2x - 24x, \quad f_{xy} = 30x^2y + 5, \quad f_{yy} = 10x^3.$

15. a) $f_{xx} = 12x^2 - 8y^2, \quad f_{xy} = -16xy, \quad f_{yy} = 12y^2 - 8x^2,$

b) $f_{xx} = x^{x+y}\big[\big(\ln x + \frac{x+y}{x}\big)^2 + \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\big], \quad f_{xy} = x^{x+y}\big[\ln^2 x + \frac{x+y}{x}\ln x + \frac{1}{x}\big],$

$f_{yy} = x^{x+y}\ln^2 x,$

c) $f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = -\frac{1}{y^2}, \quad f_{yy} = \frac{2x}{y^3},$

d) $f_{xx} = \frac{2x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \quad f_{xy} = \frac{2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \quad f_{yy} = -\frac{2x(x^2+2y^2)}{y^2\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$

e) $f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = -\frac{2}{y^3}, \quad f_{yy} = \frac{6x}{y^4},$

f) $f_{xx} = -\frac{1}{(x+y^2)^2}, \quad f_{xy} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}, \quad f_{yy} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2},$

g) $f_{xx} = -\frac{3xy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}, \quad f_{xy} = \frac{y(2x^2-y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}, \quad f_{yy} = -\frac{x(x^2-2y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}},$

h) $f_{xx} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{xy} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{yy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$

i) $f_{xx} = 2\cos(x+y) - x\sin(x+y), \quad f_{xy} = \cos(x+y) - x\sin(x+y),$

$f_{yy} = -x\sin(x+y),$

j) $f_{xx} = -\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{xy} = \frac{(x^2-y^2)\operatorname{sgn} y}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{yy} = \frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$

18. $f_x(0,y) = 0,\ f_y(x,0) = x,\ f_{xy}(0,0) = 0,\ f_{yx}(0,0) = 1.$

k) $f_{xx} = -\frac{2\sin x^2 + 4x^2\cos x^2}{y}, \quad f_{xy} = \frac{2x\sin x^2}{y^2}, \quad f_{yy} = \frac{2\cos x^2}{y^3},$

l) $f_{xx} = 2y(1+x^2)^{y-2}(-x^2 + 2x^2y + 1),$

$f_{xy} = 2x(1+x^2)^{y-1}[1 + y\ln(1+x^2)], \quad f_{yy} = (1+x^2)^y\ln^2(1+x^2).$

19. a) $f_{\boldsymbol{a}}(R) = 2, \quad f_{\boldsymbol{b}}(S) = \frac{4}{3}, \quad f_{\boldsymbol{c}}(T) = -\frac{8}{\sqrt{13}},$

b) $f_{\boldsymbol{a}}(R) = \frac{2}{\sqrt{21}}, \quad f_{\boldsymbol{b}}(S) = \frac{3}{4}, \quad f_{\boldsymbol{c}}(T) = -\sqrt{\frac{13}{12}},$

c) $f_{\boldsymbol{a}}(R) = 1, \quad f_{\boldsymbol{b}}(S) = 1, \quad f_c(T) = -1,$

d) $f_{\boldsymbol{a}}(R) = -1, \quad f_{\boldsymbol{b}}(S) = -\frac{2}{3}, \quad f_{\boldsymbol{c}}(T) = \frac{4}{\sqrt{13}},$

e) $f_{\boldsymbol{a}}(R) = 0, \quad f_{\boldsymbol{b}}(S) = \frac{3}{\sqrt{7}}, \quad f_{\boldsymbol{c}}(T) = -\frac{9}{\sqrt{91}},$

f) $f_{\boldsymbol{a}}(R) = 4, \quad f_{\boldsymbol{b}}(S) = -6, \quad f_{\boldsymbol{c}}(T) = \frac{10}{\sqrt{13}}.$

20. a) $f_{\boldsymbol{q}}(R) \doteq 3{,}49$, b) $f_{\boldsymbol{q}}(R) \doteq 0{,}87$, c) $f_{\boldsymbol{q}}(R) \doteq -17{,}46$, d) $f_{\boldsymbol{q}}(R) \doteq -6{,}26$.

Kapitola 3

Diferenciál funkce

Průvodce studiem

V diferenciálním počtu funkcí jedné proměnné jsme se mimo jiné zabývali otázkou, jak lze danou funkci v okolí nějakého bodu x_0 *(lokálně) aproximovat lineární funkcí. Chtěli jsme najít takové číslo* $A \in \mathbb{R}$*, aby v „dostatečné blízkosti“ bodu* x_0 *platilo:*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \doteq A \cdot h,$$

kde $|h|$ *je malé reálné číslo. Při tomto nahrazení se obecně dopouštíme jisté chyby* $\omega(h)$*:*

$$\omega(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - A \cdot h. \tag{3.1}$$

Zjišťovali jsme, zda existuje takové číslo A*, že funkce* $\omega(h)$ *definovaná vztahem* (3.1) *nabývá pro „dostatečně malá“* h *„velmi malých“ hodnot. Ukázali jsme, že je rozumné požadovat, aby* $\lim\limits_{h\to 0} \omega(h)/h = 0$*. V takovém případě totiž existuje nejvýše jedno číslo* $A \in \mathbb{R}$ *splňující vztah* (3.1)*.*

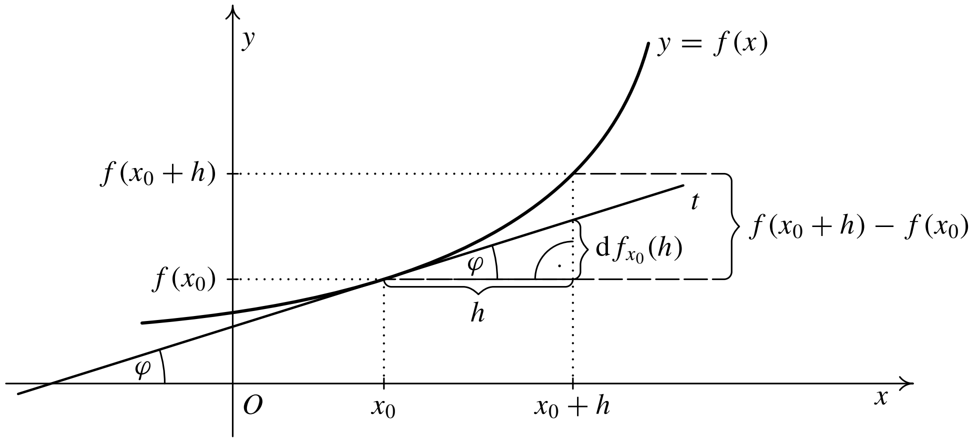
Jestliže tedy existuje takové číslo $A \in \mathbb{R}$*, že pro funkci* ω *definovanou vztahem* (3.1) *platí* $\lim\limits_{h\to 0} \omega(h)/h = 0$*, pak říkáme, že* funkce f je v bodě x_0 diferencovatelná*. Lineární funkci* $\mathrm{d}f_{x_0}$ *definovanou předpisem* $\mathrm{d}f_{x_0}(h) = A \cdot h$ *nazýváme* diferenciálem funkce f v bodě x_0*.*

Ukázali jsme, že existence diferenciálu neboli diferencovatelnost funkce je ekvivalentní existenci konečné první derivace funkce a že platí $\mathrm{d}f_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h$*.*

Geometricky jde o náhradu grafu funkce tečnou a diferenciál je přírůstek y*-ové souřadnice funkce na tečně — viz obr. 3.1.*

U funkce více proměnných má diferenciál podstatně větší význam. Jeho geometrický význam je sice podobný (náhrada grafu funkce tečnou rovinou), ale jeho souvislost s parciálními derivacemi je daleko složitější.

V této kapitole se budeme zabývat prvním diferenciálem a jeho geometrickým významem, zavedeme si pojem gradientu a ukážeme si souvislost mezi gradientem a derivací ve směru. Poslední část kapitoly bude věnována derivaci složené funkce.



Obr. 3.1

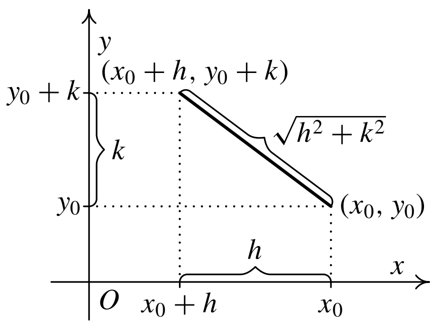
Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- definovat pojem diferencovatelnost funkce,
- určit diferenciál funkce v daném bodě,
- najít rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce v daném bodě,
- vysvětlit pojem gradientu funkce,
- vypočítat směrové derivace pomocí gradientu,
- vysvětlit vztah mezi diferenciálem, gradientem a směrovými derivacemi,
- derivovat složené funkce.

3.1 Diferencovatelné funkce, diferenciál

Nechť $f(x, y)$ je funkce a (x_0, y_0) libovolný pevně zvolený bod, v jehož okolí je tato funkce definovaná. Vezměme nyní malá čísla h, k (kladná nebo záporná) a posuňme se z bodu (x_0, y_0) do bodu $(x_0 + h, y_0 + k)$. Vlastně se posuneme z bodu (x_0, y_0) horizontálně o h a vertikálně o k — viz obr. 3.2, kde $h < 0$ a $k > 0$.



Obr. 3.2: Přírůstky

Čísla h a k nazýváme *přírůstky nezávisle proměnných.* Označíme-li $x = x_0 + h$ a $y = y_0 + k$, dostaneme $x - x_0 = h$ a $y - y_0 = k$.

Analogicky rozdíl funkčních hodnot v bodech $(x_0 + h, y_0 + k)$ a (x_0, y_0), tj.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0),$$

se nazývá *přírůstek závisle proměnné.*

Nyní chceme funkci f nahradit v jistém okolí $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ lineární funkcí (jejím grafem je rovina).

Tedy chceme najít taková čísla $A, B \in \mathbb{R}$, aby v „dostatečné blízkosti“ bodu (x_0, y_0) platilo:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \doteq A \cdot h + B \cdot k.$$

Při tomto nahrazení se dopouštíme jisté chyby. Označme si ji $\omega(h, k)$. Je to funkce proměnných h, k, pro niž tedy dostáváme:

$$\omega(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - A \cdot h - B \cdot k.$$

Chceme zjistit, zda existují taková čísla A, B, že funkce $\omega(h, k)$ nabývá pro „dostatečně malé“ hodnoty $|h|, |k|$ hodnot blízkých nule. Zde je třeba se zamyslet nad tím, co budeme rozumět pod pojmem „malá“ hodnota. Ukazuje se (stejně jako u funkcí jedné proměnné), že je rozumné požadovat, aby se limita funkce $\omega(h, k)$ dělená vzdáleností bodů (x_0, y_0) a $(x_0 + h, y_0 + k)$ rovnala nule pro $h \to 0$, $k \to 0$. Přitom euklidovská vzdálenost bodů (x_0, y_0) a $(x_0 + h, y_0 + k)$ je rovna $\sqrt{h^2 + k^2}$. Jedná se vlastně o velikost vektoru (h, k). Požadujeme tedy, aby

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Definice 3.1. Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ je definovaná v nějakém okolí $\mathscr{O}(x_0, y_0)$ bodu (x_0, y_0). Existují-li taková konečná reálná čísla A, B, že pro funkci $\omega(h, k)$ definovanou vztahem

$$\omega(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - A \cdot h - B \cdot k \tag{3.2}$$

platí $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$, pak říkáme, že funkce f je v bodě (x_0, y_0) *diferencovatelná*.
Lineární funkci $\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h, k) = Ah + Bk$ nazýváme *totálním diferenciálem* funkce f v bodě (x_0, y_0).
Vektor (A, B) nazýváme *gradientem* funkce f v bodě (x_0, y_0) a značíme jej $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$.

Totální diferenciál z předchozí definice se často nazývá jen *diferenciál* nebo *silný diferenciál* resp. *Fréchetův*[1] *diferenciál.*

Všimněme si nyní konstant A a B v definici 3.1. Předpokládejme, že je funkce $f(x, y)$ diferencovatelná v bodě (x_0, y_0) a diferenciál $\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h, k) = Ah + Bk$. Platí

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - A \cdot h - B \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Speciálně volbou $k = 0$ dostaneme

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - A \cdot h}{\sqrt{h^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - A \cdot h}{|h|} = 0.$$

[1] **Maurice René Fréchet** (1878–1973) (čti freše) — francouzský matematik. Významně přispěl k rozvoji obecné topologie a funkcionální analýzy.

Označme $\varphi(h) = f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) - A \cdot h$. Platí tedy $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h)/|h| = 0$. Protože pro $h \neq 0$ je výraz $|h|/h$ ohraničený (je roven ± 1), platí rovněž

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{|h|} \cdot \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0,$$

a tudíž také

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{\varphi(h)}{h} + A \right) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = A.$$

To však znamená, že existuje parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ a je rovna A.

Obdobně volbou $h = 0$ se odvodí, že existuje parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ a je rovna B.

Požadujeme-li tedy, aby $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$, pak existuje právě jedna dvojice čísel $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ splňující vztah (3.2). Platí tudíž následující věta.

Věta 3.2. *Nechť funkce $f(x, y)$ je diferencovatelná v bodě (x_0, y_0). Pak jsou čísla A, B ve vztahu (3.2) určena jednoznačně a platí:*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad a \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Tedy pro diferenciál funkce f v bodě (x_0, y_0) máme

$$\mathrm{d} f_{(x_0,y_0)}(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k \tag{3.3}$$

a pro gradient funkce f v bodě (x_0, y_0) máme

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right). \tag{3.4}$$

Poznámka 3.3. V literatuře s fyzikálním zaměřením se často přírůstky nezávisle proměnných h, k označují Δx a Δy. Tedy

$$h = x - x_0 = \Delta x \qquad \text{a} \qquad k = y - y_0 = \Delta y.$$

Podobně přírůstek závisle proměnné se značí $\Delta f(x, y)$ nebo Δz, tj.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \Delta f(x, y) = z - z_0 = \Delta z.$$

Je-li $f(x, y) = x$, dostaneme z (3.3), že $\mathrm{d} f(x, y) = \mathrm{d}x = 1\cdot h + 0\cdot k = h$. Obdobně pro $f(x, y) = y$ vyjde $\mathrm{d}y = k$. To je důvodem, proč se pro přírůstky nezávisle proměnných používá rovněž označení $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$.

Použijeme-li tedy různá označení přírůstků, dostáváme následující varianty označení:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k) &= f_x(x_0,y_0)\,h + f_y(x_0,y_0)\,k,\\
\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(x-x_0,y-y_0) &= f_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\,(y-y_0),\\
\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(\Delta x,\Delta y) &= f_x(x_0,y_0)\,\Delta x + f_y(x_0,y_0)\,\Delta y,\\
\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) &= f_x(x_0,y_0)\,\mathrm{d}x + f_y(x_0,y_0)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Další důležitý výsledek je obsažen v následující větě.

Věta 3.4. *Je-li funkce f diferencovatelná v bodě (x_0, y_0), je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz. Musíme dokázat, že $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$. Označíme-li $x - x_0 = h$ a $y - y_0 = k$, zřejmě platí $x \to x_0$ právě tehdy, když $h \to 0$, a $y \to y_0$ právě tehdy, když $k \to 0$.

Nejprve ověříme, že $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \omega(h,k) = 0$. Vzhledem k vlastnostem funkce ω je

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \omega(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\sqrt{h^2+k^2} = 0\cdot 0 = 0.$$

Nyní již snadno důkaz dokončíme. Z (3.2) a spojitosti funkcí Ah, Bk dostaneme

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h, y_0+k) =\\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \big(f(x_0,y_0) + Ah + Bk + \omega(h,k)\big) =\\
&= f(x_0,y_0) + A\cdot 0 + B\cdot 0 + 0 = f(x_0,y_0).
\end{aligned}$$
□

Příklad 3.5. Ověřte, že funkce f definovaná vztahem

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0 \text{ nebo } y = 0,\\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

není v bodě $(0, 0)$ diferencovatelná — viz příklad 2.5.

Řešení. V příkladu 2.5 jsme zjistili, že funkce f není spojitá v bodě $(0, 0)$, takže podle věty 3.4 zde nemůže být ani diferencovatelná. Všimněme si, že ve zmíněném příkladu jsme ověřili, že parciální derivace v bodě $(0, 0)$ existují, přičemž $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. ▲

Dosud neznáme jednoduchý nástroj, jak poznat, že je funkce diferencovatelná v nějakém bodě. Z předchozích vět plyne, že musí být v tomto bodě spojitá a musí zde mít první parciální derivace. To ale obecně nestačí (viz následující příklad).

Příklad 3.6. Ověřte, že funkce g definovaná vztahem

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0),\\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

je spojitá v bodě $(0, 0)$, má v tomto bodě parciální derivace, ale není zde diferencovatelná — viz příklad 1.28.

Řešení. V příkladu 1.28 jsme ověřili, že funkce je spojitá v bodě $(0,0)$. Určíme parciální derivace v tomto bodě. Platí:

$$g_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x,0)-g(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2\cdot 0}{x^2+0^2}-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

a obdobně $g_y(0,0) = 0$. Protože mimo počátek jde o racionální lomenou funkci dvou proměnných, je tato funkce dokonce spojitá a má parciální derivace v celé $\mathbb{R}^2$. Přesto v bodě $(0,0)$ není diferencovatelná.

Jinak by totiž muselo platit, že

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \quad \text{pro} \quad \omega(h,k) = g(0+h,0+k)-g(0,0)-Ah-Bk.$$

Protože $g(0,0)=0$ a $A = g_x(0,0) = 0$, $B = g_y(0,0) = 0$, muselo by platit

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^2k}{h^2+k^2}-0-0h-0k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k}{\sqrt{(h^2+k^2)^3}} = 0.$$

Pro body tvaru $(h,0)$, $h\to 0^+$, je

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h^2\cdot 0}{\sqrt{(h^2+0^2)^3}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{0}{h^3} = 0,$$

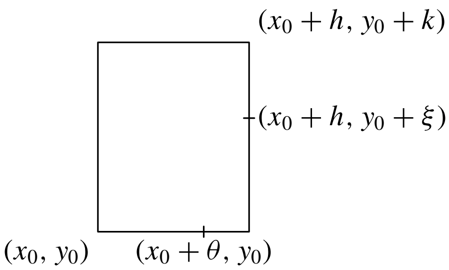
kdežto pro body tvaru (h,h), $h\to 0^+$, je

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h^2\cdot h}{\sqrt{(h^2+h^2)^3}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^3}{h^3\sqrt{8}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}},$$

takže uvedená limita vůbec neexistuje. ▲

Lze však dokázat, že platí:

Věta 3.7. *Má-li funkce $f(x,y)$ v bodě (x_0,y_0) spojité první parciální derivace, je v tomto bodě diferencovatelná.*



Obr. 3.3

Důkaz. Podle definice 3.1 potřebujeme dokázat, že pro funkci $\omega(h,k)$ definovanou vztahem (3.2) platí $\lim \omega(h,k) = 0$ pro $(h,k)\to(0,0)$. Z věty 3.2 víme, že pro konstanty A a B z (3.2) musí platit $A = f_x(x_0,y_0)$ a $B = f_y(x_0,y_0)$.

Předpoklady věty zaručují, že v dostatečně malém okolí bodu (x_0,y_0) je funkce definovaná, má zde parciální derivace a platí

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} f_x(x_0+h, y_0+k) &= f_x(x_0,y_0), \\ \lim_{(h,k)\to(0,0)} f_y(x_0+h, y_0+k) &= f_y(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ve zbytku důkazu předpokládáme, že jsme v tomto okolí. Pro určitost nechť např. $h > 0$ a $k > 0$.

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě 2.6 existují čísla θ, ξ, kde $0 < \theta < h$, $0 < \xi < k$, taková, že

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_y(x_0 + h, y_0 + \xi)k + f_x(x_0 + \theta, y_0)h.$$

K pravé straně této rovnosti přičteme a odečteme výraz $f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k$ a upravíme. Vyjde

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + \\ &+ \big(f_y(x_0 + h, y_0 + \xi) - f_y(x_0, y_0)\big)\, k + \big(f_x(x_0 + \theta, y_0) - f_x(x_0, y_0)\big)\, h. \end{aligned}$$

Zaveďme následující označení:

$$\begin{aligned} \omega_1(h, k) &= f_y(x_0 + h, y_0 + \xi) - f_y(x_0, y_0), \\ \omega_2(h) &= f_x(x_0 + \theta, y_0) - f_x(x_0, y_0), \\ \omega(h, k) &= \omega_1(h, k)k + \omega_2(h)h. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + \omega_1(h, k)k + \omega_2(h)h = \\ &= f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + \omega(h, k). \end{aligned}$$

Aby byla splněna podmínka (3.2), zbývá ukázat, že $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$. Vzhledem k poloze ξ a θ — viz obr. 3.3 — musí pro $(h, k) \to (0, 0)$ platit $\xi \to 0$ a $\theta \to 0$. Tedy podle (3.5) je $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \omega_1(h, k) = 0$ a $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \omega_2(h) = 0$. Tudíž

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega_1(h, k) \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega_2(h) \cdot h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Při výpočtu výše uvedených limit jsme využili faktu, že funkce $\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ a $\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$ jsou ohraničené ($\left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leqq 1$, $\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leqq 1$). □

Příklad 3.8. Ověřte, že funkce $f\colon z = 2xy - 3x^2y + y \ln x$ má v bodě $(1, 2)$ totální diferenciál, a najděte jej.

Řešení. Zadaný předpis má smysl pro libovolné $x > 0$ a libovolné y, tedy definiční obor je $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Vypočteme první parciální derivace a dosadíme:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2y - 6xy + \frac{y}{x}, & f_y(x, y) &= 2x - 3x^2 + \ln x, \\ f_x(1, 2) &= -6, & f_y(1, 2) &= -1. \end{aligned}$$

Protože jde o elementární funkce, jsou spojité na $D(f)$, zejména tedy v bodě $(1, 2)$, a tudíž totální diferenciál podle věty 3.7 existuje. Podle vzorce (3.3) dostaneme

$$\mathrm{d}f_{(1,2)}(h, k) = f_x(1, 2)\, h + f_y(1, 2)\, k = -6h - k$$

resp. v jiných symbolikách

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}f_{(1,2)}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = -6\,\mathrm{d}x - 1\,\mathrm{d}y,\\ &\mathrm{d}f_{(1,2)}(x-1, y-2) = -6(x-1) - (y-2) = -6x - y + 8.\end{aligned}$$

V posledním zápisu sice po roznásobení nevidíme přírůstky, ale tento zápis bude zase výhodný třeba při určování tečné roviny. ▲

Příklad 3.9. Ověřte, že funkce $g\colon z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ má v bodě $(-1, 1)$ totální diferenciál, a najděte jej.

Řešení. Zadaný předpis má smysl pro libovolné x a libovolné $y \neq 0$, tedy definiční obor je $D(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$. V příkladu 2.3 c) jsme vypočítali, že pro $y \neq 0$ je

$$g_x(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}\,, \qquad g_y(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}\,.$$

Protože derivace jsou na $D(g)$ spojité, totální diferenciál existuje. Je $g_x(-1, 1) = 1/2$ a $g_y(-1, 1) = 1/2$, takže

$$\mathrm{d}g_{(-1,1)}(h, k) = g_x(-1, 1)\, h + g_y(-1, 1)\, k = \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}k. \qquad ▲$$

Poznámka 3.10. Věta 3.7 udává postačující podmínku existence totálního diferenciálu. Spojitost parciálních derivací ale není nutnou podmínkou — viz následující část pro zájemce.

Pro zájemce:

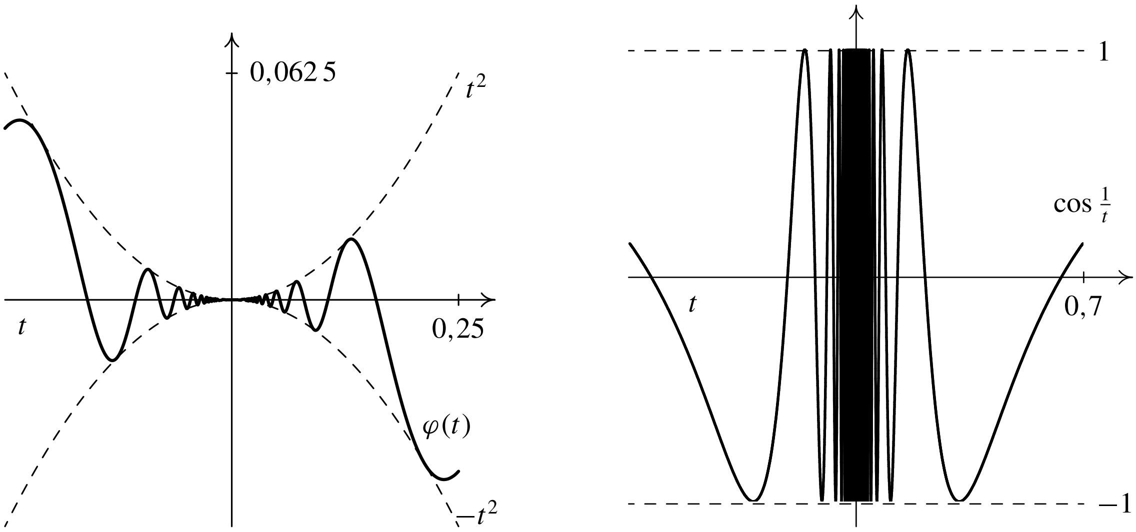
Uvedeme příklad, kde funkce bude diferencovatelná v bodě $(0, 0)$, ale nebude mít v tomto bodě spojité parciální derivace. Nalézt takovou funkci není zcela triviální.

Nejprve najdeme pomocnou funkci $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}^2$, která má derivaci na celém definičním oboru, jež ale není spojitá v $t = 0$ (uvědomte si, že funkce mající derivaci, se kterými běžně pracujeme, mají obvykle spojitou derivaci). Položme

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2 \sin \frac{1}{t} & \text{pro } t \neq 0,\\ 0 & \text{pro } t = 0.\end{cases} \qquad \text{(viz obr. 3.4 a))}$$

Pro $t \neq 0$ je

$$\varphi'(t) = 2t \sin \frac{1}{t} + t^2 \cos \frac{1}{t} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) = 2t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t}$$



a) Graf funkce $\varphi(t)$ b) Graf funkce $\cos\frac{1}{t}$

Obr. 3.4

a pro $t = 0$ vypočteme přímo z definice

$$\varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \sin\frac{1}{t} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} t \sin\frac{1}{t} = 0,$$

protože $\lim\limits_{t\to 0} t = 0$ a $-1 \leqq \sin\frac{1}{t} \leqq 1$, tedy $\sin\frac{1}{t}$ je ohraničená. Z toho současně plyne, že $\lim\limits_{t\to 0}\varphi'(t)$ neexistuje. V opačném případě by existovala i $\lim\limits_{t\to 0}\cos\frac{1}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\bigl(2t\sin\frac{1}{t} - \varphi'(t)\bigr)$, což není pravda, protože tato funkce při $t \to 0$ čím dál tím rychleji osciluje mezi -1 a 1 — viz obr. 3.4 b).

Nyní položme

$$f(x, y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Protože $f_x(0, 0) = \varphi'(0) = 0$ a $f_y(0, 0) = \varphi'(0) = 0$, musí podle vztahu (3.2) a věty 3.2 v bodě $(0, 0)$ platit pro $(h, k) \neq (0, 0)$

$$\omega(h, k) = f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h - f_y(0, 0)k = \varphi(h) + \varphi(k)\,.$$

Dále

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varphi(h)}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varphi(k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k^2 \sin\frac{1}{k}}{\sqrt{h^2 + k^2}}\,.$$

Vzhledem k ohraničenosti $h\big/\sqrt{h^2 + k^2}$ (platí $\bigl|h\big/\sqrt{h^2 + k^2}\bigr| \leqq 1$) a $\sin\frac{1}{h}$ je

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} h \sin\frac{1}{h}\,\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

a totéž platí pro druhý sčítanec. Tedy $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\omega(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ a funkce má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál. Parciální derivace v tomto bodě však nejsou spojité, protože $f_x(x,y) = \varphi'(x)$ a $f_y(x,y) = \varphi'(y)$.

Z předchozího výkladu je zřejmé, že vztahy mezi spojitostí, existencí parciálních derivací a diferencovatelností (tj. existencí totálního diferenciálu) jsou značně složité. Proto na závěr tohoto oddílu příslušné vztahy přehledně shrneme. Předpokládejme, že jde o funkci f, a vše uvažujeme v bodě (x_0, y_0).

$\mathrm{d}f$ existuje	$\Rightarrow$	f je spojitá	(věta 3.4)
$\mathrm{d}f$ existuje	$\Rightarrow$	f_x a f_y existují	(věta 3.2)
f_x a f_y existují	pak	$\mathrm{d}f$ nemusí existovat	(příklad 3.5)
f je spojitá a f_x a f_y existují	pak	$\mathrm{d}f$ nemusí existovat	(příklad 3.6)
f_x a f_y jsou spojité	$\Rightarrow$	$\mathrm{d}f$ existuje	(věta 3.7)
$\mathrm{d}f$ existuje	pak	f_x a f_y nemusí být spojité	(poznámka 3.10)

Poznamenejme, že žádnou z implikací nelze obrátit.

Pro zájemce:

Zavedení diferenciálu funkce více proměnných je jednoduché.

Nechť f je funkce n proměnných definovaná v okolí bodu $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Nechť $\boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Pak $\|\boldsymbol{h}\| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$. Nechť dále $\boldsymbol{A} = (A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{R}^n$. Uvažujme funkci

$$\omega(h_1, \dots, h_n) = f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) - A_1 h_1 - \dots - A_n h_n.$$

Tu můžeme stručněji zapsat $\omega(\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) - \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{h} \rangle$, kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je označení skalárního součinu na $\mathbb{R}^n$. (Toto označení má řadu předností před tím, které znají studenti znají ze střední školy, tj. označení tečkou $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{h}$.)

Předpokládejme, že existuje taková n-tice $\boldsymbol{A} = (A_1, \dots, A_n)$, že platí

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\omega(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) - \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{h} \rangle}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

Pak říkáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{x}$ a lineární funkci $\mathrm{d}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{h}) = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{h} \rangle$ nazýváme její diferenciál. Tedy

$$\mathrm{d}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{h}) = A_1 h_1 + \dots + A_n h_n.$$

Vektor $\boldsymbol{A}$ nazýváme gradient funkce f v bodě $\boldsymbol{x}$ a značíme jej grad $f(\boldsymbol{x})$. Snadno se opět ověří, že nutně $A_i = f_{x_i}(\boldsymbol{x})$, $i = 1, \dots, n$. Tudíž gradient je určen jednoznačně a platí

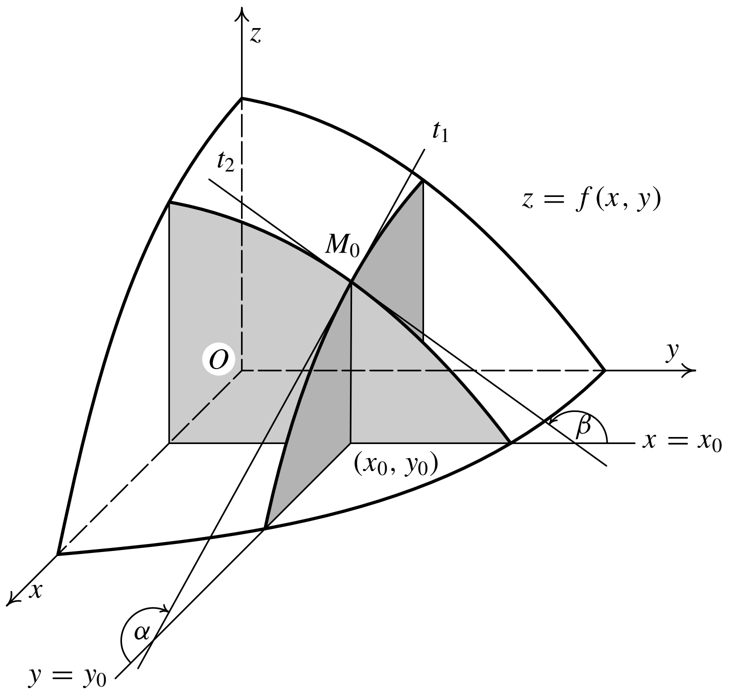
$$\mathrm{d}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{h}) = f_{x_1}(\boldsymbol{x}) h_1 + \dots + f_{x_n}(\boldsymbol{x}) h_n = \langle \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h} \rangle,$$
$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = (f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \dots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})).$$

Všechny uvedené výsledky platné pro diferenciál funkce dvou proměnných platí i pro obecný případ. Zejména spojitost všech prvních parciálních derivací v bodě $\boldsymbol{x}$ zajišťuje diferencovatelnost v tomto bodě.

3.2 Geometrický význam diferenciálu a jeho použití

Víme již, že z existence totálního diferenciálu v bodě (x_0, y_0) vyplývá existence parciálních derivací v tomto bodě. Vzhledem ke geometrickému významu parciálních derivací — viz obr. 2.2 — to znamená, že máme dvě přímky t_1, t_2, které jsou tečnami v bodě $M_0 = \big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ ke dvěma křivkám ležícím na grafu funkce $f(x, y)$, jež dostaneme jako průsečnice grafu s rovinami jdoucími bodem M_0 kolmo k osám x a y — viz obr. 3.5. Připomeňme, že $f_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha$ a $f_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\beta$.

Nejprve si řekněme, co to znamená, že rovina τ o rovnici $g\colon z = Ax + By + C$ je tečnou rovinou ke grafu funkce dvou proměnných. (Z našich úvah vyloučíme roviny, které nejsou grafem funkce, tj. jsou rovnoběžné s osou z, takže můžeme předpokládat, že koeficient u proměnné z v rovnici roviny τ je nenulový.)



Obr. 3.5: Tečny ke grafu funkce dvou proměnných

Definice 3.11. Rovina τ o rovnici $g\colon z = Ax + By + C$ se nazývá *tečnou rovinou* ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $M_0 = \big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$, jestliže

i) τ prochází bodem M_0,

ii) platí $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - Ax - By - C}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$

Nyní ukažme, že rovina určená přímkami t_1 a t_2 je tečnou rovinou ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě M_0.

Z podmínky i) dostáváme, že platí $f(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + C$, takže $C = f(x_0, y_0) - Ax_0 - By_0$ a po dosazení do rovnice roviny máme $g\colon z = A(x - x_0) - B(y - y_0) + f(x_0, y_0)$.

Čitatel v limitě druhé podmínky je roven $f(x, y) - g(x, y)$ a tato podmínka vlastně vyjadřuje, že poměr (vertikální) vzdálenosti mezi grafy obou funkcí v bodě (x, y) a vzdálenosti bodů (x, y) a (x_0, y_0) se neomezeně blíží k nule, jestliže se (x, y) blíží k (x_0, y_0), tudíž čitatel se blíží k nule rychleji než jmenovatel.

Dosadíme-li do druhé podmínky za C, vyjde

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Položíme-li $x = x_0 + h$ a $y = y_0 + k$ a porovnáme-li vzniklý vztah s definicí 3.1, je zřejmé, že tato podmínka je rovnocenná požadavku na existenci totálního diferenciálu v bodě (x_0, y_0). Musí tedy platit $A = f_x(x_0, y_0)$, $B = f_y(x_0, y_0)$. Celkově dostáváme:

Věta 3.12. *Tečná rovina τ ke grafu funkce f v bodě $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ existuje právě tehdy, když je funkce f diferencovatelná v bodě (x_0, y_0). Její rovnice je*

$$\tau\colon z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0), \tag{3.6}$$

resp. označíme-li $z_0 = f(x_0, y_0)$, stručněji

$$\tau\colon z - z_0 = \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(x - x_0, y - y_0). \tag{3.7}$$

Poznámka 3.13. Nechť τ je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $T = \big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$. Přímka n procházející dotykovým bodem T a kolmá k rovině τ se nazývá *normála ke grafu funkce f v bodě T*. Protože normálový vektor roviny τ je $\big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\big)$, její parametrické rovnice jsou

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t f_x(x_0, y_0), \\ y &= y_0 + t f_y(x_0, y_0), \qquad t \in \mathbb{R}, \\ z &= z_0 - t. \end{aligned}$$

Příklad 3.14. Najděte rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce $f\colon z = 2x^2 y - 3xy^3 + \frac{x}{y} + \mathrm{e}^{x+2y}$ v bodě $(-2, 1, ?)$.

Řešení. Vypočteme parciální derivace:

$$f_x = 4xy - 3y^3 + \frac{1}{y} + \mathrm{e}^{x+2y}, \qquad f_y = 2x^2 - 9xy^2 - \frac{x}{y^2} + 2\,\mathrm{e}^{x+2y}.$$

Protože jsou spojité v celém $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$, totální diferenciál a tudíž i tečná rovina existuje v každém bodě definičního oboru. Dosadíme:

$$f(-2, 1) = 8 + 6 - 2 + \mathrm{e}^0 = 13, \qquad f_y(-2, 1) = 8 + 18 + 2 + 2\,\mathrm{e}^0 = 30.$$
$$f_x(-2, 1) = -8 - 3 + 1 + \mathrm{e}^0 = -9,$$

Protože podle (3.3) je $\mathrm{d}f_{(-2,1)}(x+2,\, y-1) = -9(x+2)+30(y-1)$, z (3.7) dostaneme

$$z - 13 = -9(x+2) + 30(y-1) \qquad \Rightarrow \qquad 9x - 30y + z + 35 = 0.$$

Normálový vektor tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $(-2, 1, 13)$ je tudíž roven $\boldsymbol{n} = (-9, 30, -1)$, takže parametrické rovnice normály jsou

$$\begin{aligned} x &= -2 - 9t, \\ y &= 1 + 30t, \qquad t \in \mathbb{R}, \\ z &= 13 - t. \end{aligned}$$

▲

Příklad 3.15. Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = 2x^2 - y^2$, která je rovnoběžná s rovinou $\rho\colon 8x - 6y - z - 15 = 0$.

Řešení. Nechť τ značí hledanou tečnou rovinu. Protože je rovina τ rovnoběžná s rovinou ρ, jsou také rovnoběžné jejich normálové vektory, tj. $\boldsymbol{n}_\tau = k\boldsymbol{n}_\rho$, kde $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

Rovina ρ je zadána v obecném tvaru, z něhož ihned vidíme souřadnice normálového vektoru

$$\boldsymbol{n}_\rho = (8, -6, -1).$$

Pro normálový vektor tečné roviny ke grafu funkce f platí

$$\boldsymbol{n}_\tau = \big(f_x(x_0, y_0),\, f_y(x_0, y_0),\, -1\big).$$

Platí $\boldsymbol{n}_\tau = k\boldsymbol{n}_\rho$, tj. $\big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\big) = (8k, -6k, -k)$. Tedy $k = 1$. Porovnáním prvních dvou složek dostaneme rovnice

$$f_x(x_0, y_0) = 8, \qquad f_y(x_0, y_0) = -6.$$

Protože $f_x(x_0, y_0) = 4x_0$, $f_y(x_0, y_0) = -2y_0$, je $4x_0 = 8$ a $-2y_0 = -6$. První dvě souřadnice bodu dotyku tečné roviny jsou $x_0 = 2$ a $y_0 = 3$. Třetí souřadnici vypočteme dosazením do funkce f. Bod dotyku je

$$(x_0, y_0, z_0) = (2, 3, -1).$$

Zbývá dosadit bod dotyku a hodnoty parciálních derivací do rovnice tečné roviny:

$$\tau\colon z - (-1) = 8(x-2) - 6(y-3) \qquad \Rightarrow \qquad \tau\colon\ 8x - 6y - z + 1 = 0.$$

▲

Všimněme si podrobněji geometrického významu diferenciálu. Vyjdeme přitom z označení na obr. 3.6. (V našem případě jsou souřadnice všech dále uvažovaných vektorů nezáporné, takže se délky úseček na obrázku sečítají; obecně by mohlo jít i o rozdíl.)

Rovina ρ je vodorovná a prochází bodem $M_0 = \big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$. Určíme souřadnice vektorů $\overrightarrow{M_0N_1}$ a $\overrightarrow{M_0N_2}$. Z pravoúhlého trojúhelníku $M_0K_1N_1$ dostaneme

$$\|\overrightarrow{K_1N_1}\| = \|\overrightarrow{M_0K_1}\| \cdot \operatorname{tg} \sphericalangle(\overrightarrow{M_0K_1}, \overrightarrow{M_0N_1}) = hf_x(x_0, y_0),$$

takže

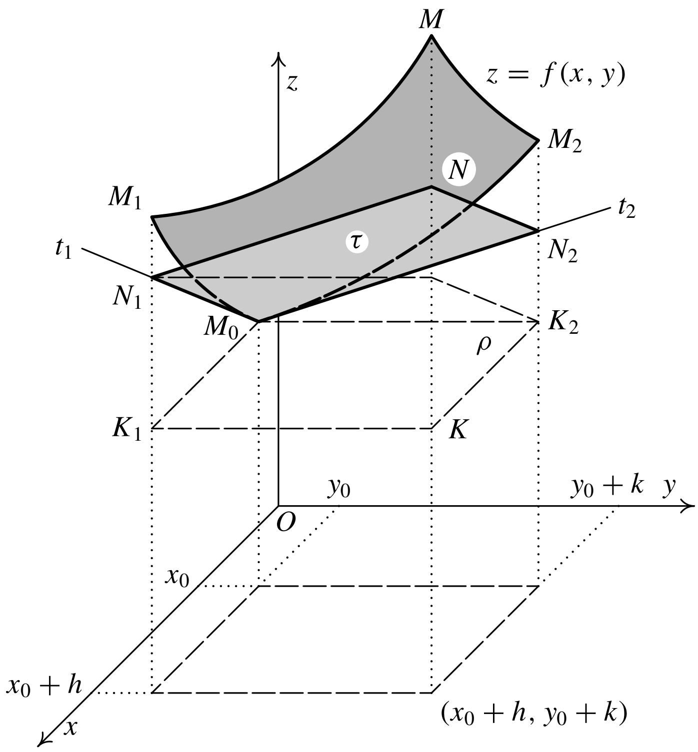
$$\overrightarrow{M_0N_1} = N_1 - M_0 = \big(h, 0, hf_x(x_0, y_0)\big).$$

Analogicky dostaneme z pravoúhlého trojúhelníku $M_0K_2N_2$, že

$$\overrightarrow{M_0N_2} = N_2 - M_0 = \big(0, k, kf_y(x_0, y_0)\big),$$

a tedy celkově

$$\overrightarrow{M_0N} = \overrightarrow{M_0N_1} + \overrightarrow{M_0N_2} = \big(h, k, hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0)\big) = \big(h, k, \mathrm{d}f_{(x_0, y_0)}(h, k)\big).$$



Obr. 3.6: Geometrický význam totálního diferenciálu

Avšak $\overrightarrow{M_0N} = (h, k, \|KN\|)$, což znamená, že $\|KN\| = \mathrm{d}f_{(x_0, y_0)}(h, k)$. Pro přírůstek závisle proměnné vyjde

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \|KM\| = \|KN\| + \|NM\| = \mathrm{d}f_{(x_0, y_0)}(h, k) + \|NM\|.$$

Srovnáme-li toto vyjádření se vztahem (3.2), vidíme, že $\|NM\| = \omega(h, k)$. Úsek $\|KN\| = \mathrm{d}f_{(x_0, y_0)}(h, k)$ se nazývá *lineární část přírůstku* (jde o lineární funkci), zatímco úsek $\|NM\| = \omega(h, k)$ *nelineární část přírůstku.*

Geometricky představuje diferenciál v daném bodě přírůstek funkce na tečné rovině. Skutečný přírůstek $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ je dán vztahem

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \mathrm{d}f_{(x_0, y_0)}(h, k) + \omega(h, k).$$

Pokud není tečná rovina τ rovnoběžná s žádnou z os x a y (tj. není $f_x(x_0, y_0) = 0$ ani $f_y(x_0, y_0) = 0$), je nelineární část přírůstku $\omega(h, k)$ podstatně menší než lineární část $\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h, k)$. Toho se využívá k přibližným výpočtům. Zanedbáním nelineární části dostaneme

$$f(x, y) \doteq f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h, k) \qquad \text{pro } (x, y) \text{ blízké } (x_0, y_0). \tag{3.8}$$

Dnes v době kalkulaček a počítačů ztratilo toto použití diferenciálu v numerické matematice na významu. Nic se ale nemění na jeho použití při odvozování řady vztahů ve fyzice (limitním přechodem se nelineární část přírůstku vůči lineární „ztratí") ani při náhradě složitých nelineárních úloh jednoduššími (i když méně „přesnými") lineárními úlohami (tzv. *linearizace*) v nejrůznějších oblastech matematiky, fyziky a disciplín na ně navazujících.

Diferenciál se často používá pro aproximaci *absolutních* a *relativních změn* veličin, které jsou zavedeny takto:

Absolutní změna: $\quad \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0).$

Relativní změna: $\quad \dfrac{\Delta f(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)}.$

Vzhledem ke vztahu (3.8) přibližně platí:

$$\Delta f(x_0, y_0) \doteq \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h, k), \tag{3.9}$$

$$\frac{\Delta f(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)} \doteq \frac{\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h, k)}{f(x_0, y_0)}. \tag{3.10}$$

Při těchto aproximacích se dopouštíme jisté chyby. Ta je dána v případě absolutní změny funkcí $\omega(h, k)$ ze vztahu (3.2) a v případě relativní změny výrazem $\omega(h, k)/f(x_0, y_0)$. Odhad této chyby je možné udělat pomocí Taylorova vzorce, se kterým se seznámíme v následující kapitole v oddílu 4.2.

Příklad 3.16. Vypočtěte pomocí diferenciálu přibližně následující hodnoty:

a) $1{,}04^{2{,}02}$, b) $\sqrt{2{,}98^2 + 4{,}05^2}$.

Řešení.

a) Označme $f(x, y) = x^y$. Máme určit $f(1{,}04; 2{,}02)$.
Zvolme $(x_0, y_0) = (1, 2)$ a $(x - 1, y - 2) = (h, k) = (0{,}04; 0{,}02)$. Podle (3.8) dále platí $f(1{,}04; 2{,}02) \doteq f(1, 2) + \mathrm{d}f_{(1,2)}(0{,}04, 0{,}02)$. Je

$$f_x = yx^{y-1}, \ f_y = x^y \ln x \quad \Rightarrow \quad f_x(1, 2) = 2 \cdot 1^1 = 2, \ f_y(1, 2) = 1^2 \ln 1 = 0.$$

Tedy $\mathrm{d}f_{(1,2)}(h, k) = 2h$ a celkem obdržíme

$$1{,}04^{2{,}02} \doteq f(1, 2) + \mathrm{d}f_{(1,2)}(0{,}04, 0{,}02) = 1^2 + 2 \cdot 0{,}04 = 1{,}08.$$

b) Označme $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Máme určit $g(2{,}98; 4{,}05)$.
Zvolme $(x_0, y_0) = (3, 4)$ a $(x - 3, y - 4) = (h, k) = (-0{,}02; 0{,}05)$. Opět podle (3.8) platí $g(2{,}98; 4{,}05) \doteq g(3, 4) + \mathrm{d}g_{(3,4)}(-0{,}02; 0{,}05)$. Je

$$g_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad g_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \Rightarrow \quad g_x(3, 4) = \frac{3}{5}, \quad g_y(3, 4) = \frac{4}{5}.$$

Tedy $\mathrm{d}g_{(3,4)}(h, k) = 0{,}6h + 0{,}8k$ a celkem obdržíme

$$\begin{aligned}\sqrt{2{,}98^2 + 4{,}05^2} &\doteq g(3, 4) + \mathrm{d}g_{(3,4)}(-0{,}02; 0{,}05) = \\ &= 5 - 0{,}6 \cdot 0{,}02 + 0{,}8 \cdot 0{,}05 = 5{,}028.\end{aligned}$$

▲

Příklad 3.17. Válcová nádoba měla mít podle návrhu poloměr podstavy 1 dm a výšku 5 dm. Nepřesností výroby byl poloměr větší o 0,03 dm a výška menší o 0,1 dm. Odhadněte pomocí diferenciálu absolutní a relativní změnu objemu.

Řešení. Objem nádoby je dán vzorcem $V(r, v) = \pi r^2 v$. Označme $r_0 = 1$, $v_0 = 5$, $\mathrm{d}r = 0{,}03$ a $\mathrm{d}v = -0{,}1$. Pro absolutní změnu dostaneme ze vzorce (3.9) odhad

$$\Delta V(r_0, v_0) \doteq \mathrm{d}V_{(r_0,v_0)}(\mathrm{d}r, \mathrm{d}v) = V_r(r_0, v_0)\,\mathrm{d}r + V_v(r_0, v_0)\,\mathrm{d}v.$$

Protože $V_r = 2\pi r v$ a $V_v = \pi r^2$, platí, že $\mathrm{d}V_{(r_0,v_0)}(\mathrm{d}r, \mathrm{d}v) = 2\pi r_0 v_0\,\mathrm{d}r + \pi r_0^2\,\mathrm{d}v$, a pro naše hodnoty bude

$$\mathrm{d}V_{(1,5)}(0{,}03; -0{,}1) = 2\pi \cdot 1 \cdot 5 \cdot 0{,}03 + \pi \cdot 1^2 \cdot (-0{,}1) = 0{,}2\pi \doteq 0{,}63.$$

Dále pomocí vzorce (3.10) odhadneme relativní změnu:

$$\frac{\Delta V(r_0, v_0)}{V(r_0, v_0)} \doteq \frac{\mathrm{d}V_{(r_0,v_0)}(\mathrm{d}r, \mathrm{d}v)}{V(r_0, v_0)} = \frac{\mathrm{d}V_{(r_0,v_0)}(\mathrm{d}r, \mathrm{d}v)}{\pi r_0^2 v_0},$$

takže pro naše hodnoty vyjde:

$$\frac{\mathrm{d}V_{(1,5)}(0{,}03; -0{,}1)}{\pi \cdot 1^2 \cdot 5} = \frac{0{,}2\pi}{5\pi} = 0{,}04.$$

Absolutní změna objemu je tedy přibližně 0,63 dm^3 a relativní změna objemu je přibližně 0,04, tj. 4 %. ▲

3.3 Vztah diferenciálu, gradientu a směrové derivace

V tomto oddílu si všimneme významu gradientu a jeho vztahu k derivaci ve směru.

Připomeňme, že pro dva vektory $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ z V_2 definujeme jejich skalární součin $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ vztahem $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$. (Na střední škole se používá označení $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, nový způsob označení je přehlednější.) Pro velikost vektoru $\|\boldsymbol{u}\|$ pak máme

$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ a pro úhel φ nenulových vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ platí $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\| \cos\varphi$, kde $0 \leqq \varphi \leqq \pi$.

Věta 3.18. *Nechť je funkce $f\colon z = f(x, y)$ diferencovatelná v bodě (x_0, y_0) a nechť $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \in V_2$ je libovolný vektor. Pak existuje derivace funkce f v bodě (x_0, y_0) ve směru vektoru $\boldsymbol{u}$ a platí*

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}(x_0, y_0) = \langle \operatorname{grad} f(x_0, y_0), \boldsymbol{u} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, u_2. \tag{3.11}$$

Důkaz. Označíme-li $\varphi(t) = f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)$, je $f_{\boldsymbol{u}}(x_0, y_0) = \varphi'(0)$. Protože f je diferencovatelná v (x_0, y_0), pro malá h a k je $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + \omega(h, k)$, kde $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \omega(h, k)\big/\sqrt{h^2 + k^2} = 0$. Tedy

$$\begin{aligned}\varphi'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f_x(x_0, y_0)tu_1 + f_y(x_0, y_0)tu_2 + \omega(tu_1, tu_2)}{t} = \\ &= f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 + \lim_{t\to 0} \frac{\omega(tu_1, tu_2)}{t} = \langle \operatorname{grad} f(x_0, y_0), \boldsymbol{u} \rangle,\end{aligned}$$

protože $\lim\limits_{t\to 0} \omega(tu_1, tu_2)/t = 0$. □

Ze vztahu (3.11) vyplývá, že je-li $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \boldsymbol{0} = (0, 0)$, je $f_{\boldsymbol{u}}(x_0, y_0) = 0$ pro každý vektor $\boldsymbol{u} \in V_2$.

Nechť $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \neq \boldsymbol{0}$. Najdeme vektor $\boldsymbol{u}$, pro který je $f_{\boldsymbol{u}}(x_0, y_0)$ největší resp. nejmenší. Aby nehrála roli velikost vektoru $\boldsymbol{u}$, omezíme se na jednotkové vektory, tj. budeme předpokládat, že $\|\boldsymbol{u}\| = 1$. Platí $f_{\boldsymbol{u}}(x_0, y_0) = \|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\| \cdot \|\boldsymbol{u}\| \cos\varphi = \|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\| \cos\varphi$, kde φ je úhel mezi jednotkovým vektorem $\boldsymbol{u}$ a vektorem $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$. Na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ nabývá funkce $\cos\varphi$ největší hodnoty, a to 1, pro $\varphi = 0$ a nejmenší hodnoty, a to -1, pro $\varphi = \pi$. Tedy derivace ve směru je maximální, je-li $\boldsymbol{u}$ jednotkový vektor souhlasně kolineární s gradientem, a je minimální, je-li $\boldsymbol{u}$ jednotkový vektor nesouhlasně kolineární s gradientem.

Je-li $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, pak $\boldsymbol{u}/\|\boldsymbol{u}\|$ je souhlasně kolineární jednotkový vektor a $-\boldsymbol{u}/\|\boldsymbol{u}\|$ je nesouhlasně kolineární jednotkový vektor s vektorem $\boldsymbol{u}$. Platí tudíž následující tvrzení.

Věta 3.19. *Nechť* $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \neq \boldsymbol{0}$. *Pak směrová derivace $f_{\boldsymbol{u}}(x_0, y_0)$ ve směru jednotkového vektoru $\boldsymbol{u}$ je největší pro vektor $\boldsymbol{u} = \frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|}$ a je nejmenší pro vektor $\boldsymbol{u} = -\frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|}$. Maximální hodnota je $f_{\boldsymbol{u}}(x_0, y_0) = \|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|$ a minimální hodnota je $f_{\boldsymbol{u}}(x_0, y_0) = -\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|$.*

Důkaz. Zbývá jen ověřit vzorce pro extremální hodnoty směrové derivace. Pro maximální hodnotu je

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{u}}(x_0, y_0) &= \left\langle \operatorname{grad} f(x_0, y_0), \frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|} \langle \operatorname{grad} f(x_0, y_0), \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \rangle = \\ &= \frac{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|^2}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|} = \|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|. \end{aligned}$$

Analogicky se určí minimální hodnota. □

Gradient tedy určuje směr, v němž je směrová derivace největší resp. nejmenší, tj. směr, v němž funkce nejrychleji roste resp. klesá.

Gradient můžeme přiblížit následujícím způsobem. Představme si lyžaře stojícího na šikmém svahu (jenž je grafem funkce $f(x, y)$) tak, že směr lyží je kolmý k vrstevnicím a špičky míří vzhůru. Pak velikost gradientu je rovna tangentě úhlu, který svírají lyže s vodorovnou rovinou. Kolmý průmět lyží do vodorovné roviny má stejný směr a orientaci (určenou špičkami) jako gradient.

Příklad 3.20. Najděte jednotkový vektor $\boldsymbol{u}$, pro nějž je směrová derivace $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}$ funkce $f(x, y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ v bodě $(x_0, y_0) = (2, 1)$ maximální, a určete její hodnotu.

Řešení. Podle věty 3.19 je směrová derivace maximální ve směru jednotkového vektoru $\boldsymbol{u} = \frac{\operatorname{grad} f(x_0, y_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\|}$, pokud je gradient nenulový. Stačí tedy vypočítat gradient a jeho velikost.

Nejprve vypočteme hodnoty parciálních derivací v zadaném bodě:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{2x}{2\sqrt{4 + x^2 + y^2}} \qquad \Rightarrow \qquad f_x(2, 1) = \frac{2}{3}, \\ f_y(x, y) &= \frac{2y}{2\sqrt{4 + x^2 + y^2}} \qquad \Rightarrow \qquad f_y(2, 1) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Gradient a jeho velikost jsou

$$\operatorname{grad} f(2, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \qquad \|\operatorname{grad} f(2, 1)\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Derivace je tedy maximální ve směru vektoru

$$\boldsymbol{u} = \frac{\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

a její hodnota je $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(2, 1) = \|\operatorname{grad} f(2, 1)\| = \frac{\sqrt{5}}{3}$. ▲

Příklad 3.21. Je dána funkce $f\colon z = 4 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ a body $A = (3, -1)$, $B = (1, 4)$. Určete:

1. gradient funkce f v bodech A a B,
2. derivaci funkce f ve směru vektoru $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{AB}$ v bodech A a B,
3. bod C ležící mezi A a B, v němž je derivace funkce f ve směru $\boldsymbol{u}$ rovna nule,
4. derivaci funkce f v bodě A ve směru jednotkového vektoru souhlasně kolineárního s grad $U(A)$.

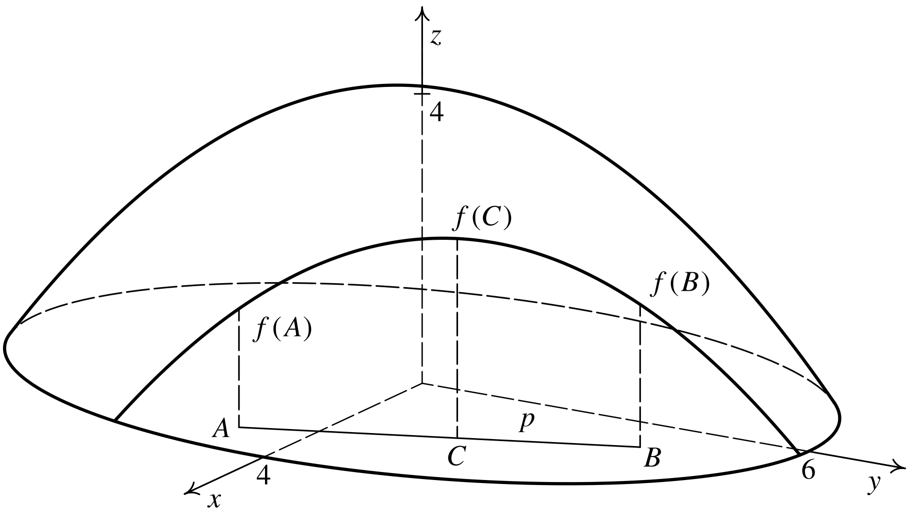
Řešení. Ze souřadnic bodů A a B určíme souřadnice vektoru $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 5)$. Body A a B je určena přímka p, jejíž rovnice je $5x + 2y = 13$.

Graf funkce f, úsečka určená body A a B a průsečnice roviny, která je rovnoběžná s osou z a prochází přímkou p, s grafem funkce f jsou znázorněny na obr. 3.7.

Vypočteme funkční hodnoty funkce f:

$$f(A) = 4 - \frac{3^2}{4} - \frac{1}{9} = \frac{59}{36}, \qquad f(B) = 4 - \frac{1}{4} - \frac{4^2}{9} = \frac{71}{36}.$$

Hodnoty $f(A)$ a $f(B)$ jsou znázorněny na obr. 3.7.



Obr. 3.7

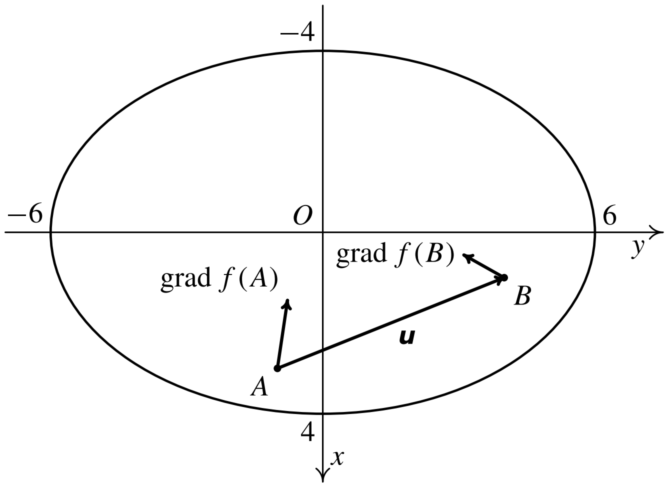
Ad 1. Vypočteme gradient v bodě (x, y):

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (-x/2, -2y/9).$$

Po dosazení souřadnic bodů A a B dostaneme gradienty v těchto bodech:

$$\operatorname{grad} f(A) = (-3/2, 2/9), \qquad \operatorname{grad} f(B) = (-1/2, -8/9).$$

Na obr. 3.8 jsou znázorněny vektory grad $f(A)$, grad $f(B)$ a $\boldsymbol{u}$.



Obr. 3.8

Ad 2. Derivace funkce f ve směru $\boldsymbol{u}$ v bodě (x, y) je podle věty 3.18:

$$f_{\boldsymbol{u}}(x, y) = \langle \operatorname{grad} f(x, y), \boldsymbol{u} \rangle = -\frac{x}{2} \cdot (-2) - \frac{2y}{9} \cdot 5 = \frac{9x - 10y}{9}.$$

Po dosazení souřadnic bodů máme:

$$f_{\boldsymbol{u}}(A) = \frac{37}{9}, \qquad f_{\boldsymbol{u}}(B) = \frac{-31}{9}.$$

Ad 3. Bod C, v němž je derivace $f_{\boldsymbol{u}}$ rovna nule, leží na přímce p, určené body A a B. Podle předchozího tedy jeho souřadnice musí splňovat rovnice

$$\frac{9x - 10y}{9} = 0, \qquad 5x + 2y = 13.$$

Jejich řešením dostaneme souřadnice bodu C:

$$x = 130/68, \qquad y = 117/68.$$

Ad 4. Označme $\boldsymbol{v}$ jednotkový vektor souhlasně kolineární s grad $f(A)$. Podle věty 3.19 pak platí:

$$f_{\boldsymbol{v}}(A) = \| \operatorname{grad} f(A) \| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{745}}{18}.$$

▲

Pro zájemce:

Je-li $f\colon z = f(x_1, \dots, x_n)$ funkce n proměnných, která je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, má v tomto bodě derivaci $f_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}^*)$ v libovolném směru $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n) \in V_n$. Přitom platí:

$$f_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}^*) = \langle \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{u} \rangle = f_{x_1}(\boldsymbol{x}^*) u_1 + \dots + f_{x_n}(\boldsymbol{x}^*) u_n.$$

Důkaz je zcela analogický jako v případě funkce dvou proměnných. Platí i věta 3.19.

3.4 Derivace složené funkce

Průvodce studiem

Podobně jako u funkcí jedné proměnné je důležité umět zderivovat složenou funkci, známe-li derivace vnější složky i vnitřních složek. Vzorce, které dále uvedeme, mají velký význam zejména při řešení parciálních diferenciálních rovnic. Pomocí nich je možné transformovat takové rovnice na jednodušší tvary. Při této aplikaci je vnější složkou neznámé řešení zadané rovnice, takže se bez podobných vzorců neobejdeme.

Nejprve si připomeňme, jak se derivuje složená funkce jedné proměnné. Nechť funkce $u = g(x)$ má derivaci v bodě x_0. Označme $u_0 = g(x_0)$. Má-li funkce $y = f(u)$ derivaci v bodě u_0, pak složená funkce $y = F(x) = f[g(x)]$ má derivaci v bodě x_0 a platí $F'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0)$.

U funkce dvou proměnných $f(u, v)$ budeme dosazovat za obě proměnné nové funkce $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ dvou proměnných x a y. Složená funkce tedy bude mít tvar $z = F(x, y) = f[u(x, y), v(x, y)]$. Navíc si všimněte, že v následující větě u vnější složky nestačí pouhý předpoklad existence parciálních derivací.

Věta 3.22. *Nechť funkce $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$ mají parciální derivace prvního řádu v bodě (x_0, y_0). Označme $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Dále nechť funkce $z = f(u, v)$ je diferencovatelná v bodě (u_0, v_0).*
Pak složená funkce $z = F(x, y) = f[u(x, y), v(x, y)]$ má parciální derivace prvního řádu v bodě (x_0, y_0) a platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\,\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Zkráceně píšeme

$$F_x = f_u\, u_x + f_v\, v_x, \qquad F_y = f_u\, u_y + f_v\, v_y \tag{3.13}$$

nebo také

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{3.14}$$

Důkaz. Dokážeme např. první vztah v (3.12). Podle definice parciální derivace je

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f[u(x, y_0), v(x, y_0)] - f[u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)]}{x - x_0}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Označme $\varphi(x) = u(x, y_0)$, $\psi(x) = v(x, y_0)$. Z definice diferencovatelnosti f v (u_0, v_0) plyne existence funkce $\omega(h, k)$, $\lim \omega(h, k)/\sqrt{h^2 + k^2} = 0$ pro $(h, k) \to (0, 0)$, takové, že

$$f[\varphi(x), \psi(x)] - f(u_0, v_0) = \\ = f_u(u_0, v_0)(\varphi(x) - u_0) + f_v(u_0, v_0)(\psi(x) - v_0) + \omega[\varphi(x) - u_0, \psi(x) - v_0].$$

Po dosazení do (3.15) vyjde:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f_u(u_0, v_0)(\varphi(x) - u_0) + f_v(u_0, v_0)(\psi(x) - v_0)}{x - x_0} + \right. \\ \left. + \frac{\omega[\varphi(x) - u_0, \psi(x) - v_0)]}{x - x_0} \right]. \tag{3.16}$$

Dále

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - u_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0),$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{\psi(x) - v_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Nyní pro $x \neq x_0$ je

$$\frac{\omega[\varphi(x) - u_0, \psi(x) - v_0)]}{x - x_0} = \\ = \frac{\omega[\varphi(x) - u_0, \psi(x) - v_0)]}{\sqrt{(\varphi(x) - u_0)^2 + (\psi(x) - v_0)^2}} \sqrt{\left(\frac{\varphi(x) - u_0}{x - x_0}\right)^2 + \left(\frac{\psi(x) - v_0}{x - x_0}\right)^2} \cdot \operatorname{sgn}(x - x_0).$$

Z existence parciálních derivací u a v podle x v bodě (x_0, y_0) plyne, že funkce $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ jsou spojité v x_0, tj. $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$ a $\lim_{x \to x_0} \psi(x) = v_0$. Tedy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\omega[\varphi(x) - u_0, \psi(x) - v_0)]}{\sqrt{(\varphi(x) - u_0)^2 + (\psi(x) - v_0)^2}} = 0,$$
$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{\left(\frac{\varphi(x) - u_0}{x - x_0}\right)^2 + \left(\frac{\psi(x) - v_0}{x - x_0}\right)^2} = \sqrt{u_x^2(x_0, y_0) + v_x^2(x_0, y_0)}.$$

Protože výraz $\operatorname{sgn}(x - x_0)$ je ohraničený, je celkově

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\omega[\varphi(x) - u_0, \psi(x) - v_0)]}{x - x_0} = 0.$$

Nyní z (3.16) máme

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = f_u(u_0, v_0) \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - u_0}{x - x_0} + f_v(u_0, v_0) \lim_{x \to x_0} \frac{\psi(x) - v_0}{x - x_0} + \\ + \lim_{x \to x_0} \frac{\omega[\varphi(x) - u_0, \psi(x) - v_0)]}{x - x_0} = \\ = f_u(u_0, v_0) u_x(x_0, y_0) + f_v(u_0, v_0) v_x(x_0, y_0).$$

▲

Příklad 3.23. Je dána funkce $f(u, v) = u^2 + v^2$, kde $u = x - y$, $v = \frac{x}{y}$. Určete první parciální derivace složené funkce $F(x, y) = f(x - y, \frac{x}{y})$.

Řešení. Všechny funkce mají spojité parciální derivace ve svých definičních oborech, takže můžeme použít vzorec (3.13). Platí:

$$\begin{aligned}
f(u, v) &= u^2 + v^2 &\Rightarrow\quad & f_u = 2u, & f_v &= 2v,\\
u(x, y) &= x - y &\Rightarrow\quad & u_x = 1, & u_y &= -1,\\
v(x, y) &= \frac{x}{y} &\Rightarrow\quad & v_x = \frac{1}{y}, & v_y &= -\frac{x}{y^2}.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
F_x &= 2u \cdot 1 + 2v \cdot \frac{1}{y} = 2(x - y) + 2\,\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} = 2x - 2y + \frac{2x}{y^2},\\
F_y &= 2u \cdot (-1) + 2v \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -2(x - y) - 2\,\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y^2} = -2x + 2y - \frac{2x^2}{y^3}.
\end{aligned}$$

Funkce F má tvar $F(x, y) = (x - y)^2 + \frac{x^2}{y^2}$, takže předchozí výsledek snadno obdržíme přímým derivováním (ověřte si to pro kontrolu) a vzorec pro derivování složené funkce vůbec nepotřebujeme. Pokud však vnější složka není známá, je použití tohoto vzorce nezbytné — viz např. následující příklad. ▲

Příklad 3.24. Transformujte diferenciální výraz $y f_x(x, y) - x f_y(x, y)$ do polárních souřadnic $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Předpokládáme, že funkce f má spojité první parciální derivace.

Řešení. Jak uvidíme, budeme potřebovat vyjádření ρ a φ pomocí x a y. Dostaneme

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 \quad &\Rightarrow\quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2},\\
\frac{y}{x} = \frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi \quad &\Rightarrow\quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \ \text{ pro } x > 0\,.
\end{aligned}$$

(Pro $x < 0$ musíme přičíst π.) Dále máme

$$f(x, y) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = F(\rho, \varphi) = F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right).$$

Ve vzorci (3.13) se nám tedy zaměnila role f a F a vnitřní složky jsou označeny ρ a φ místo u a v. Nyní si připravíme parciální derivace vnitřních složek.

$$\begin{aligned}
\rho_x &= \frac{1}{2}\,(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, &\quad \varphi_x &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2},\\
\rho_y &= \frac{1}{2}\,(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, &\quad \varphi_y &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}.
\end{aligned}$$

Odtud a ze (3.13)

$$f_x = F_\rho \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - F_\varphi \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad f_y = F_\rho \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + F_\varphi \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Po dosazení do zadaného výrazu obdržíme

$$\begin{aligned} y f_x(x,y) - x f_y(x,y) &= F_\rho \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - F_\varphi \frac{y^2}{x^2+y^2} - F_\rho \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - F_\varphi \frac{x^2}{x^2+y^2} \\ &= -F_\varphi \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = -F_\varphi. \end{aligned}$$

▲

V parciálních diferenciálních rovnicích, které se vyskytují v matematické fyzice, hrají důležitou roli rovnice druhého řádu, tj. rovnice obsahující druhé parciální derivace neznámé funkce. Podíváme se proto, jak budou vypadat vzorce pro druhé parciální derivace složené funkce. Lze dokázat následující větu:

Věta 3.25. *Nechť funkce $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$ mají parciální derivace druhého řádu v bodě (x_0, y_0). Označme $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Dále nechť funkce $z = f(u, v)$ má parciální derivace druhého řádu v okolí bodu (u_0, v_0), které jsou v tomto bodě spojité. Pak složená funkce $z = F(x, y) = f[u(x, y), v(x, y)]$ má parciální derivace druhého řádu v bodě (x_0, y_0) a platí:*

$$\begin{aligned} F_{xx} &= f_{uu}\, u_x^2 + 2 f_{uv}\, u_x v_x + f_{vv}\, v_x^2 + f_u\, u_{xx} + f_v\, v_{xx}, \\ F_{xy} &= f_{uu}\, u_x u_y + f_{uv}\, u_x v_y + f_{uv}\, u_y v_x + f_{vv}\, v_x v_y + f_u\, u_{xy} + f_v\, v_{xy}, \\ F_{yy} &= f_{uu}\, u_y^2 + 2 f_{uv}\, u_y v_y + f_{vv}\, v_y^2 + f_u\, u_{yy} + f_v\, v_{yy}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Parciální derivace funkcí F, u a v mají argument (x_0, y_0), parciální derivace funkce f mají argument (u_0, v_0).

Důkaz. Dokážeme např. první vzorec, důkaz ostatních je analogický.

Podle důsledku 2.8 aplikovaného na f_u a f_v dostaneme, že v jistém okolí bodu (u_0, v_0) jsou f_u a f_v spojité, a tedy podle věty 3.7 je funkce f v tomto okolí diferencovatelná. Zejména tudíž v bodě (x_0, y_0) platí vztahy (3.13), tj. $F_x = f_u\, u_x + f_v\, v_x$.

Uvažme, že $F_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} F_x = \frac{\partial}{\partial x}(f_u\, u_x + f_v\, v_x)$. Výraz, který máme derivovat, má tvar součtu a každý sčítanec má tvar součinu. Při derivování f_u a f_v využijeme skutečnosti, že $f_u = f_u[u(x, y), v(x, y)]$ a $f_v = f_v[u(x, y), v(x, y)]$ jsou opět složené funkce proměnných x a y, a proto můžeme k výpočtu jejich derivací využít vztahů (3.13), ve kterých místo f dosadíme f_u resp. f_v (tyto funkce jsou diferencovatelné podle věty 3.7, protože mají spojité první parciální derivace — to je zajištěno předpokladem o existenci spojitých druhých parciálních derivací funkce f). Při úpravách pak vezmeme v úvahu, že podle věty 2.11 je $f_{uv} = f_{vu}$.

$$
\begin{aligned}
F_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} F_x = \frac{\partial}{\partial x}(f_u\, u_x + f_v\, v_x) = \frac{\partial}{\partial x}(f_u\, u_x) + \frac{\partial}{\partial x}(f_v\, v_x) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(f_u)\, u_x + f_u\, u_{xx} + \frac{\partial}{\partial x}(f_v)\, v_x + f_v\, v_{xx} = \\
&= (f_{uu}\, u_x + f_{uv}\, v_x)\, u_x + f_u\, u_{xx} + (f_{vu}\, u_x + f_{vv}\, v_x)\, v_x + f_v\, v_{xx} = \\
&= f_{uu}\, u_x^2 + f_{uv}\, v_x u_x + f_{vv}\, v_x^2 + f_{vu}\, u_x v_x + f_u\, u_{xx} + f_v\, v_{xx} = \\
&= f_{uu}\, u_x^2 + 2 f_{uv}\, u_x v_x + f_{vv}\, v_x^2 + f_u\, u_{xx} + f_v\, v_{xx}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Poznámka 3.26.

i) Vzorec pro F_{yx} bude obdobný jako pro F_{xy}, jen místo u_{xy} a v_{xy} bude obsahovat u_{yx} a v_{yx} (předpoklady obecně nezaručují zaměnitelnost).

ii) Pro snadnější zapamatování vzorců (3.17) existuje mnemotechnická pomůcka. Např. pro F_{xx} umocníme pravou stranu vzorce $F_x = f_u\, u_x + f_v\, v_x$ na druhou. Vyjde $f_u^2\, u_x^2 + 2 f_u f_v\, u_x v_x + f_v^2\, v_x^2$. Nahradíme-li nyní druhé mocniny nebo součin prvních derivací f_u a f_v odpovídajícími druhými derivacemi, tj. $f_u^2 \to f_{uu}$, $f_u f_v \to f_{uv}$ a pod., dostaneme $f_{uu}\, u_x^2 + 2 f_{uv}\, u_x v_x + f_{vv}\, v_x^2$, což jsou právě první tři členy ve vzorci pro F_{xx}. Nesmíme zapomenout přidat zbývající dva členy $f_u\, u_{xx} + f_v\, v_{xx}$, které odpovídají druhým sčítancům při derivování součinů $f_u\, u_x$ a $f_v\, v_x$.
Vzorec F_{xy} dostaneme formálním roznásobením $(f_u\, u_x + f_v\, v_x)(f_u\, u_y + f_v\, v_y)$, náhradou za součiny f_u a f_v a doplněním dvou posledních členů.

Příklad 3.27. Vypočtěte druhé parciální derivace funkce $f(2x - 3y, 3x + y)$, víte-li, že f má spojité parciální derivace druhého řádu.

Řešení. Označme $F(x, y) = f(2x - 3y, 3x + y)$ a $u = 2x - 3y$, $v = 3x + y$. Pak

$$
\begin{aligned}
&u_x = 2, && u_y = -3, && u_{xx} = u_{yy} = u_{xy} = u_{yx} = 0,\\
&v_x = 3, && v_y = 1, && v_{xx} = v_{yy} = v_{xy} = v_{yx} = 0.
\end{aligned}
$$

Podle (3.13) je $F_x = 2f_u + 3f_v$, $F_y = -3f_u + f_v$ a podle (3.17) je

$$
\begin{aligned}
F_{xx} &= f_{uu}\, 2^2 + 2 f_{uv}\, 2 \cdot 3 + f_{vv}\, 3^2 = 4 f_{uu} + 12 f_{uv} + 9 f_{vv},\\
F_{xy} &= f_{uu}\, 2 \cdot (-3) + f_{uv}\, 2 \cdot 1 + f_{uv}\, (-3) \cdot 3 + f_{vv}\, 3 \cdot 1 = -6 f_{uu} - 7 f_{uv} + 3 f_{vv},\\
F_{yy} &= f_{uu}\, (-3)^2 + 2 f_{uv}\, (-3) \cdot 1 + f_{vv}\, 1^2 = 9 f_{uu} - 6 f_{uv} + f_{vv}.
\end{aligned}
$$

Ze spojitosti plyne, že $F_{yx} = F_{xy}$. Vzhledem k tomu, že druhé derivace vnitřních složek jsou nulové (to se stane vždy, když to budou lineární funkce tvaru $ax + by$), je výhodné použít poznámku 3.26 ii). Např. $F_x = 2f_u + 3f_v$ a formálním umocněním a náhradou $(f_u)^2 \to f_{uu}$ a pod. snadno dostaneme výsledek pro F_{xx}. ▲

Příklad 3.28. Transformujte do polárních souřadnic laplacián $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$.

Řešení. Využijeme označení a výpočty z příkladu 3.24. Opět máme

$$f(x, y) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = F(\rho, \varphi) = F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right),$$

takže ve vzorcích (3.17) máme bohužel zaměněny role F a f. Dále jsme vypočítali, že

$$\rho_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \rho_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \varphi_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad \varphi_y = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Odtud dostaneme druhé derivace (ρ_{yy} a φ_{yy} určíme ze symetrie):

$$\begin{aligned}
\rho_{xx} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, &\qquad \rho_{yy} &= \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},\\
\varphi_{xx} &= -\frac{0 - y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, &\qquad \varphi_{yy} &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Dále podle (3.17) je (předpokládáme, že f má spojité druhé parciální derivace)

$$\begin{aligned}
f_{xx} = F_{\rho\rho}\,\rho_x^2 + 2F_{\rho\varphi}\,\rho_x\varphi_x + F_{\varphi\varphi}\,\varphi_x^2 + F_\rho\,\rho_{xx} + F_\varphi\,\varphi_{xx} &= \\
= F_{\rho\rho}\,\frac{x^2}{x^2 + y^2} - 2F_{\rho\varphi}\,\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + F_{\varphi\varphi}\,\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} &+ \\
+ F_\rho\,\frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + F_\varphi\,\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}&,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{yy} = F_{\rho\rho}\,\rho_y^2 + 2F_{\rho\varphi}\,\rho_y\varphi_y + F_{\varphi\varphi}\,\varphi_y^2 + F_\rho\,\rho_{yy} + F_\varphi\,\varphi_{yy} &= \\
= F_{\rho\rho}\,\frac{y^2}{x^2 + y^2} + 2F_{\rho\varphi}\,\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + F_{\varphi\varphi}\,\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} &+ \\
+ F_\rho\,\frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} - F_\varphi\,\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}&.
\end{aligned}$$

Celkově dostaneme po úpravě (je $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$):

$$f_{xx} + f_{yy} = F_{\rho\rho} + F_{\varphi\varphi}\,\frac{1}{x^2 + y^2} + F_\rho\,\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = F_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2}\,F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho}\,F_\rho.$$

▲

Pro zájemce:

Uvedeme nyní vzorec pro první parciální derivace složené funkce v obecném případě. Uvědomme si, že vnější složka a vnitřní složky mohou mít obecně různé počty proměnných.

Předpokládejme, že funkce $f: z = f(\boldsymbol{y})$, kde $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{y} = (y_1^*, \dots, y_m^*)$. Nechť dále funkce $\varphi_1: y_1 = \varphi_1(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_m: y_m = \varphi_m(\boldsymbol{x})$, kde $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, mají parciální derivace v bodě $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, přičemž $\varphi_i(\boldsymbol{x}^*) = y_i^*$, $i = 1, \dots, m$. Pak složená funkce

$$F(x_1, \dots, x_n) = f[\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)]$$

neboli stručně $F(\boldsymbol{x}) = f[\varphi_1(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_m(\boldsymbol{x})]$ má v bodě $\boldsymbol{x}^*$ parciální derivace prvního řádu, přičemž platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*) = \frac{\partial f}{\partial y_1}(\boldsymbol{y}^*) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*) + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_m}(\boldsymbol{y}^*) \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*),$$

$i = 1, \dots, n$. Stručně

$$F_{x_i} = f_{y_1}\varphi_{1|x_i} + \dots + f_{y_m}\varphi_{m|x_i}.$$

Obdobně lze derivováním předchozích rovností odvodit vzorce pro druhé derivace. Výsledky jsou však dost nepřehledné a je výhodnější použít maticové zápisy.

Pojmy k zapamatování

— diferenciál funkce

— diferencovatelné funkce

— gradient funkce

— tečná rovina ke grafu funkce

— normála ke grafu funkce

— derivace složené funkce

Kontrolní otázky

1. Kdy je funkce dvou proměnných diferencovatelná v daném bodě?
2. Vysvětlete pojem totální diferenciál.
3. Vysvětlete geometrický význam totálního diferenciálu.
4. Co je to gradient funkce v daném bodě?
5. Jaký je vztah gradientu a směrové derivace?
6. Jak počítáme derivaci prvního řádu složené funkce dvou proměnných?
7. Jak počítáme derivaci druhého řádu složené funkce dvou proměnných?
8. Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce v daném bodě.
9. Popište možnosti využití diferenciálu dané funkce v praxi.

! Příklady k procvičení

1. Vypočtěte totální diferenciál funkce f v bodě A pro dané $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$, popř. $\mathrm{d}z$:

   a) $f: z = \frac{x^2-y^2}{xy}$, $A = (2, 2)$, $\mathrm{d}x = 0{,}03$; $\mathrm{d}y = 0{,}01$;
   b) $f: z = x + y - \sqrt{x^2+y^2}$, $A = (3, 4)$, $\mathrm{d}x = 0{,}1$; $\mathrm{d}y = 0{,}2$;
   c) $f: z = \mathrm{e}^{xy}$, $A = (1, 2)$, $\mathrm{d}x = -0{,}1$; $\mathrm{d}y = 0{,}1$;
   d) $f: z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $A = (1, 3)$, $\mathrm{d}x = 0{,}01$; $\mathrm{d}y = -0{,}05$;
   e) $f: z = \operatorname{arccotg}\frac{x}{y}$, $A = (2, 1)$, $\mathrm{d}x = 0{,}01$; $\mathrm{d}y = 0{,}05$;
   f) $f: u = 2^x \sin y \operatorname{arctg} z$, $A = (-4, \frac{\pi}{2}, 0)$, $\mathrm{d}x = 0{,}05$; $\mathrm{d}y = 0{,}06$; $\mathrm{d}z = 0{,}08$.

2. Porovnejte totální diferenciál $\mathrm{d}f(A)$ a přírůstek $\Delta f(A)$ pro f, A a přírůstky $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$:

   a) $f: z = 4xy$, $A = (3, 2)$, $\mathrm{d}x = -0{,}2$; $\mathrm{d}y = 0{,}2$;
   b) $f: z = 4xy$, $A = (3, 2)$, $\mathrm{d}x = -0{,}02$; $\mathrm{d}y = 0{,}02$;
   c) $f: z = \ln(x^2+y^2)$, $A = (2, 1)$, $\mathrm{d}x = 0{,}1$; $\mathrm{d}y = -0{,}1$;
   d) $f: z = \frac{x-y}{x+y}$, $A = (1, 3)$, $\mathrm{d}x = 0{,}1$; $\mathrm{d}y = -0{,}2$.

3. Vypočtěte totální diferenciály prvního řádu funkce f v obecném bodě:

   a) $f: z = 3x^2 - 2y^3$, b) $f: z = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$, c) $f: z = y\ln 2x$,
   d) $f: z = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$, e) $f: z = x^y$, f) $f: z = \operatorname{arctg} xy$,
   g) $f: u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, h) $f: u = \frac{xy}{z}$, i) $f: z = (x-y)^2$,
   j) $f: z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, k) $f: z = \ln\operatorname{cotg}\frac{x}{y}$, l) $f: z = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{x+y}$.

4. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně:

   a) $\operatorname{arctg}\frac{1{,}02}{0{,}95}$, b) $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$, c) $\frac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98\cdot 1{,}05^4}}$,
   d) $\arcsin\frac{0{,}48}{1{,}05}$, e) $\ln(0{,}97^2 + 0{,}05^2)$, f) $\mathrm{e}^{0{,}05^3-0{,}02}$.

V následujících příkladech použijte pro výpočet totální diferenciál a vzorce (3.10).

5. Vypočtěte s přesností na dvě desetinná místa objem kužele V a určete odhad absolutní změny objemu, jestliže výška kužele je $h = (15 \pm 0{,}3)$ cm a poloměr základny je $r = (8 \pm 0{,}2)$ cm. Určete relativní změnu objemu.

6. Strany trojúhelníka jsou $a = (200 \pm 2)$ m, $b = (300 \pm 5)$ m, úhel mezi nimi je $\gamma = (60 \pm 1)°$. Vypočtěte s přesností na dvě desetinná místa délku strany c a odhad absolutní změny délky strany. Určete relativní změnu strany c.

7. Odvěsny pravoúhlého trojúhelníka, měřené s přesností 0,1 cm, jsou 12 a 16 cm. Vypočtěte s přesností na dvě desetinná místa délku přepony c a odhad absolutní změny této délky. Určete její relativní změnu.

8. Rotační kužel má poloměr základny $r = (10{,}2 \pm 0{,}1)$ cm a délku pobočné hrany $s = (44{,}6 \pm 0{,}1)$ cm. Vypočtěte s přesností na dvě desetinná místa jeho objem V a odhad absolutní změny tohoto objemu. Určete jeho relativní změnu.

9. Rovnoramenný trojúhelník má délku ramene $a = (25 \pm 1)$ cm a úhel při základně $\alpha = (30 \pm 1)^\circ$. Vypočtěte s přesností na dvě desetinná místa jeho obsah P a odhad absolutní změny tohoto obsahu. Určete relativní změnu obsahu.

10. O kolik cm^3 se změní přibližně objem kužele s poloměrem podstavy $r = 10\,\mathrm{cm}$ a výškou $h = 10\,\mathrm{cm}$, zvětšíme-li poloměr podstavy o 5 mm a výšku o 5 mm zmenšíme?

11. O kolik přibližně musíme změnit výšku komolého jehlanu se čtvercovou základnou s délkami hran $a = 2\,\mathrm{m}$, $b = 1\,\mathrm{m}$ a výškou $v = 1\,\mathrm{m}$, jestliže a zvětšíme o 7 cm a b zmenšíme o 7 cm, chceme-li, aby objem zůstal nezměněn?

12. Rozhodněte, zda je funkce z příkladu 2.15 diferencovatelná v bodě $(0, 0)$.

13. Ověřte, že funkce $f\colon z = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$, je spojitá a má parciální derivace v $\mathbb{R}^2$, ale není v bodě $(0, 0)$ diferencovatelná.

14. Vypočtěte parciální derivace $f_x(0, 0)$ a $f_y(0, 0)$. Je funkce f diferencovatelná v bodě $(0, 0)$?

    a) $f\colon z = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}\,, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0\,, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ b) $f\colon z = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}\,, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0\,, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

15. Najděte rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce f v bodě T:

    a) $z = 2x^2y^2 + 3xy^3\,,\ T(1, -1, ?)$,
    b) $z = \ln(2x^3 - 8y^2)\,,\ T(2, 1, ?)$,
    c) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}\,,\ T(1, -2, ?)$,
    d) $z = \frac{x+y}{x-y}\,,\ T(2, 1, ?)$,
    e) $z = x\,\mathrm{e}^{3x+2y}\,,\ T(-2, 3, ?)$,
    f) $z = (x^2 + y^2)\sin \pi x\,,\ T(1, -2, ?)$,
    g) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,,\ T(-2, 2, ?)$,
    h) $z = \mathrm{e}^{4-x^2-y^2}\,,\ T(2, 0, ?)$.

16. Na grafu funkce f najděte bod, v němž je tečná rovina rovnoběžná s rovinou ρ:

    a) $f\colon z = x^3 + y^3,\ \rho\colon 12x + 3y - z = 0$,
    b) $f\colon z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ \rho\colon ax + by - z = 0$,
    c) $f\colon z = x^2 - y^2,\ \rho\colon x + y + z = 0$,
    d) $f\colon z = x^y,\ \rho\colon x - z = 0$.

17. Najděte jednotkový vektor $\boldsymbol{u}$, pro nějž je směrová derivace $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}$ funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) maximální, a určete její hodnotu.

    a) $f(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4,\ (x_0, y_0) = (1, 1)$,
    b) $f(x, y) = \operatorname{cotg}(xy),\ (x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, 1)$,
    c) $f(x, y) = (x - y)^4,\ (x_0, y_0) = (2, 1)$,
    d) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y},\ (x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,
    e) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2),\ (x_0, y_0) = (1, 2)$,
    f) $f(x, y) = \frac{4}{x^2+y^2},\ (x_0, y_0) = (-1, 2)$,
    g) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z,\ (x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 0)$.

18. Určete největší spád grafu funkce $f: z = \sqrt{xy}$ v bodě (4, 2).

19. Vypočtěte první a druhé derivace složené funkce $F(x, y) = f[u(x, y), v(x, y)]$, víte-li, že f je diferencovatelná:

    a) $f(2x - 3y, x + 2y)$, b) $f(x + y, x - y)$, c) $f(-3x + y, 2x - 3y)$,
    d) $f(xy, x^2 - y^2)$, e) $f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$, f) $f(x \cos y, y \cos x)$.

20. Transformujte diferenciální rovnici pro neznámou funkci $z = f(x, y)$ na rovnici s neznámou funkcí $Z = F(u, v)$, kde $f(x, y) = F[u(x, y), v(x, y)]$:

    a) $xz_{xx} + yz_{xy} = 0, \quad u = y, \ v = \frac{y}{x}$,
    b) $z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} + 2z_x = 0, \quad u = x + y, \ v = y$,
    c) $x^2 z_{xx} - 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy} = 0, \quad u = xy, \ v = y$,
    d) $z_{xx} + 3z_{xy} + 2z_{yy} = x + y, \quad u = y - 2x, \ v = y - x$,
    e) $z_{xx} + 2z_{xy} - 3z_{yy} = 0, \quad u = -3x + y, \ v = x + y$.

21. Transformujte do polárních souřadnic $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ diferenciální výraz V — viz příklad 3.24. Funkce f má spojité první parciální derivace:

    a) $V = xf_y - yf_x$, b) $V = f_x^2 + f_y^2$, c) $V = yf_y + xf_x$.

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) 0,02; b) 0,08; c) −0,739; d) 0,008; e) 0,018; f) 0,005.

2. a) $\mathrm{d}f(A) = 0{,}8$; $\Delta f(A) = 0{,}64$; b) $\mathrm{d}f(A) = 0{,}08$; $\Delta f(A) = 0{,}0784$;
   c) $\mathrm{d}f(A) = 0{,}04$; $\Delta f(A) = 0{,}0431$; d) $\mathrm{d}f(A) = 0{,}0625$; $\Delta f(A) = 0{,}0641$.

3. a) $6x\,\mathrm{d}x - 6y^2\,\mathrm{d}y$, b) $\frac{4xy(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)}{(x^2-y^2)^2}$, c) $\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + \ln 2x\,\mathrm{d}y$,
   d) $\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y\right)$, e) $x^{y-1}(y\,\mathrm{d}x + x \ln x\,\mathrm{d}y)$, f) $\frac{1}{1+x^2y^2}(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$,
   g) $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z)$,
   h) $\frac{1}{z^2}(yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y - xy\,\mathrm{d}z)$, i) $2(x - y)(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y)$,
   j) $\frac{1}{x^2+y^2}(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)$, k) $-\frac{2}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$, l) $\frac{1}{x^2+y^2}(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$.

4. a) $\frac{\pi}{4} + 0{,}035 \doteq 0{,}8204$; b) 2,95; c) 1;
   d) $\frac{\pi}{6} - \frac{0{,}09}{\sqrt{3}} \doteq 0{,}4716$; e) −0,06; f) 0,98.

5. $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$, $V = (1005{,}31 \pm 70{,}37)\ \mathrm{cm}^3$, 7 %.

6. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$, $c = (264{,}58 \pm 7{,}59)$ m, 2,9 %.

7. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $c = (20 \pm 0{,}14)$ cm, 0,7 %.

8. $V = \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{s^2 - r^2}$, $V = (4730{,}41 \pm 101{,}39)\ \mathrm{cm}^3$, 2,1 %.

9. $P = \frac{a^2}{2} \sin 2\alpha$, $P = (270{,}63 \pm 27{,}10)\ \mathrm{cm}^2$, 10 %.

10. $V = \frac{\pi}{3}\, r^2 h$, $\mathrm{d}V(10, 10) = \frac{50\pi}{3} \doteq 52{,}36\,\mathrm{cm}^3$.

11. $V = \frac{h}{3}\,(a^2 + ab + b^2)$, $\mathrm{d}V(2, 1) = 0 \Rightarrow \mathrm{d}h = -0{,}01$, tedy zmenšit o 1 cm.

12. Je. Buď přímo z definice ($f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$), nebo ověřte, že f_x a f_y jsou spojité v $(0, 0)$ a použijte větu 3.7.

13. $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$.

14. a) $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$. Není, protože není spojitá — viz příklad 1.24.
    b) $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$. Není, protože není spojitá — viz příklad 1.25.

15. a) $x + 5y - z + 3 = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z+1}{-1}$,
    b) $3x - 2y - z - 4 + \ln 8 = 0$, $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-\ln 8}{-1}$,
    c) $x - 2y + 2z - 9 = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-2}{2}$,
    d) $2x - 4y + z - 3 = 0$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-3}{1}$,
    e) $5x + 4y + z = 0$, $\frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+2}{1}$,
    f) $5\pi x + z - 5\pi = 0$, $\frac{x-1}{5\pi} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{1}$,
    g) $x + y + 2z + 2 = 0$, $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+\pi/4}{2}$,
    h) $4x + z - 9 = 0$, $\frac{x-2}{4} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{1}$.

16. a) $(2, 1, 9)$, $(2, -1, 7)$, $(-2, 1, -7)$, $(-2, -1, -9)$.
    b) $\left(\frac{-a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \frac{-b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\right)$,
    c) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$,
    d) $(1, 1, 1)$.

17. a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\|\operatorname{grad} f(1, 1)\| = 6\sqrt{2}$,
    b) $\left(-\frac{2}{\sqrt{\pi^2+4}}, -\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+4}}\right)$, $\|\operatorname{grad} f(\pi/2, 1)\| = \frac{\sqrt{\pi^2+4}}{2}$,
    c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\|\operatorname{grad} f(2, 1)\| = 4\sqrt{2}$,
    d) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\|\operatorname{grad} f(\sqrt{3}/2, 1/2)\| = 1$,
    e) $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $\|\operatorname{grad} f(1, 2)\| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
    f) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\|\operatorname{grad} f(-1, 2)\| = \frac{8\sqrt{5}}{25}$,
    g) $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\|\operatorname{grad} f(2, 0, 0)\| = 2\sqrt{5}$.

18. $-\operatorname{grad} f(4, 2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\|\operatorname{grad} f(4, 2)\| = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

19. a) $F_x = 2f_u + f_v$, $F_y = -3f_u + 2f_v$,
    $F_{xx} = 4f_{uu} + 4f_{uv} + f_{vv}$, $F_{xy} = -6f_{uu} + f_{uv} + 2f_{vv}$,
    $F_{yy} = 9f_{uu} - 12f_{uv} + 4f_{vv}$,
    b) $F_x = f_u + f_v$, $F_y = f_u - f_v$,
    $F_{xx} = f_{uu} + 2f_{uv} + f_{vv}$, $F_{xy} = f_{uu} - f_{vv}$,
    $F_{yy} = f_{uu} - 2f_{uv} + f_{vv}$,
    c) $F_x = -3f_u + 2f_v$, $F_y = f_u - 3f_v$,
    $F_{xx} = 9f_{uu} - 12f_{uv} + 4f_{vv}$, $F_{xy} = -3f_{uu} + 11f_{uv} - 6f_{vv}$,
    $F_{yy} = f_{uu} - 6f_{uv} + 9f_{vv}$,
    d) $F_x = yf_u + 2xf_v$, $F_y = xf_u - 2yf_v$,
    $F_{xx} = y^2 f_{uu} + 4xyf_{uv} + 4x^2 f_{vv} + 2f_v$,
    $F_{xy} = xyf_{uu} + 2(x^2 - y^2)\, f_{uv} - 4xyf_{vv} + f_u$,
    $F_{yy} = x^2 f_{uu} - 4xyf_{uv} + 4y^2 f_{vv} - 2f_v$,

e) $F_x = \frac{1}{y} f_u - \frac{y}{x^2} f_v$, $F_y = -\frac{x}{y^2} f_u + \frac{1}{x} f_v$,
$F_{xx} = \frac{1}{y^2} f_{uu} - \frac{2}{x^2} f_{uv} + \frac{y^2}{x^4} f_{vv} + \frac{2y}{x^3} f_v$,
$F_{xy} = -\frac{x}{y^3} f_{uu} + \frac{2}{xy} f_{uv} - \frac{y}{x^3} f_{vv} - \frac{1}{y^2} f_u - \frac{1}{x^2} f_v$,
$F_{yy} = \frac{x^2}{y^4} f_{uu} - \frac{2}{y^2} f_{uv} + \frac{1}{x^2} f_{vv} + \frac{2x}{y^3} f_u$,

f) $F_x = \cos y\, f_u - y \sin x\, f_v$, $F_y = -x \sin y\, f_u + \cos x\, f_v$,
$F_{xx} = \cos^2 y\, f_{uu} - 2y \sin x \cos y\, f_{uv} + y^2 \sin^2 x\, f_{vv} - y \cos x\, f_v$,
$F_{xy} = -x \sin y \cos y\, f_{uu} + (xy \sin x \sin y + \cos x \cos y)\, f_{uv} -$
$- y \sin x \cos x\, f_{vv} - \sin y\, f_u - \sin x\, f_v$,
$F_{yy} = x^2 \sin^2 y\, f_{uu} - 2x \sin y \cos x\, f_{uv} + \cos^2 x\, f_{vv} - x \cos y\, f_u$.

20. a) $-v^2 Z_{uv} + \frac{v^2}{u} Z_v = 0$, b) $Z_{vv} + 2Z_u = 0$, c) $Z_{vv} - \frac{2u}{v^2} Z_u = 0$,
d) $Z_{uv} = -3v + 2u$, e) $Z_{uv} = 0$.

21. a) F_φ , b) $F_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} F_\varphi^2$, c) ρF_ρ .

Kapitola 4

Vyšší diferenciály a Taylorův vzorec

Průvodce studiem

V této kapitole se seznámíme s diferenciály vyšších řádů. Dále si zavedeme pojem Taylorův mnohočlen řádu m funkce dvou a více proměnných se středem v daném bodě.

U funkcí jedné proměnné jsme si ukázali, jak lze pomocí Taylorova mnohočlenu (polynomu) nahradit danou (většinou složitou) funkci v okolí bodu x_0 funkcí jednodušší, jejíž hodnoty lze snadno spočítat. Také jsme si řekli, jak zvolit tuto polynomiální funkci, abychom se při výpočtu funkční hodnoty dopustili co nejmenší chyby, jak lze tuto chybu odhadnout, jak závisí chyba aproximace na tom, jak daleko jsme od zadaného bodu, atd.

Podobným otázkám se budeme věnovat v této kapitole pro funkce dvou a více proměnných.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- definovat pojem totální diferenciál m-tého řádu,
- napsat vzorec pro totální diferenciál druhého a třetího řádu,
- definovat Taylorův mnohočlen řádu m a napsat Taylorův vzorec,
- vyjádřit zbytek v Taylorově vzorci,
- vypočítat přibližné hodnoty funkcí pomocí Taylorova vzorce (bez použití kalkulačky).

4.1 Diferenciály vyšších řádů

U funkcí jedné proměnné se zavádí pojem vyšších diferenciálů. Pro $m \in \mathbb{N}$ symbol $\mathrm{d}^m f_{(x_0)}(h)$ značí m-tý diferenciál funkce f v bodě x_0. Platí $\mathrm{d}^m f_{(x_0)}(h) = f^{(m)}(x_0)h^m$. Přitom h značí přírůstek nezávisle proměnné. Existence takového diferenciálu je tudíž rovnocenná existenci m-té derivace funkce f v bodě x_0.

Obdobný pojem nyní zavedeme pro funkci dvou proměnných. Bylo by možné postupovat induktivně, tj. druhý diferenciál by byl diferenciálem prvního diferenciálu atd. Precizní definice tohoto druhu je ale formálně dost obtížná (je nutné zavést pojmy z lineární algebry jako m-lineární formy, m-indexové matice, tenzorový součin vektorů apod. — viz např. [13, str. 44, 58]). Proto dáme přednost definici, v níž přímo uvedeme konečný tvar.

Definice 4.1. Předpokládejme, že funkce $f\colon z = f(x, y)$ má v nějakém okolí bodu (x_0, y_0) parciální derivace m-tého řádu, kde $m \in \mathbb{N}$, které jsou v tomto bodě spojité. *Totálním diferenciálem m-tého řádu* funkce f v bodě (x_0, y_0) rozumíme funkci dvou proměnných $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tvaru

$$\mathrm{d}^m f_{(x_0,y_0)}(h, k) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j} \partial y^j}(x_0, y_0)\, h^{m-j} k^j. \tag{4.1}$$

Poznamenejme, že z důsledku 2.8 vyplývá, že za předpokladu předchozí definice jsou v jistém okolí bodu (x_0, y_0) všechny parciální derivace až do řádu $m - 1$ spojité. Tedy u smíšených parciálních derivací až do řádu m nezávisí v bodě (x_0, y_0) na pořadí derivování.

Výše zavedený totální diferenciál m-tého řádu je vlastně tzv. *homogenním mnohočlenem stupně m* dvou proměnných h, k (všechny jeho členy mají stejný stupeň m).

Podívejme se, co nám dá vzorec (4.1) pro $m = 1, 2, 3$.

Pro $m = 1$ dostaneme

$$\mathrm{d} f_{(x_0,y_0)}(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k$$

resp. ve stručnější symbolice

$$\mathrm{d} f_{(x_0,y_0)}(h, k) = f_x(x_0, y_0)\, h + f_y(x_0, y_0)\, k,$$

což je (první) totální diferenciál z předchozí kapitoly.

Pro $m = 2$ dostaneme vzorec pro *totální diferenciál druhého řádu*

$$\mathrm{d}^2 f_{(x_0,y_0)}(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\, h^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\, hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\, k^2. \tag{4.2}$$

Ve stručnější symbolice vypadá takto:

$$\mathrm{d}^2 f_{(x_0,y_0)}(h, k) = f_{xx}(x_0, y_0)\, h^2 + 2 f_{xy}(x_0, y_0)\, hk + f_{yy}(x_0, y_0)\, k^2.$$

Poznámka 4.2. Pro zapamatování vztahu (4.1) a rychlejší nalezení výsledku nám může posloužit následující pomůcka vycházející z rozvoje mocniny dvojčlenu $(a + b)^m$ podle binomické věty a z „formálního“ vzorce

$$\mathrm{d}^m f_{(x_0,y_0)}(h, k) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x_0, y_0)$$

pro m-tý totální diferenciál. Nejprve je potřeba formálně umocnit dvojčlen $\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k$, pak jej „roznásobit“ $f(x_0, y_0)$ a nakonec provést jisté náhrady (viz dále).

Pro $m = 2$ jde o známý vzorec $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Po formálním umocnění a roznásobení f je třeba provést náhrady $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f \to \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f \to \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ apod., zatímco přírůstky h a k se „normálně“ umocní.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 f_{(x_0,y_0)}(h,k) &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f(x_0,y_0)\,h^2 + 2\,\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0)\,hk + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)\,k^2 = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\,h^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\,hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\,k^2.
\end{aligned}$$

Pro $m = 3$ dostaneme s využitím předchozí poznámky a vzorce $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ po potřebných úpravách vzorec pro *totální diferenciál třetího řádu*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}^3 f_{(x_0,y_0)}(h,k) = \\
&= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)\,h^3 + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0,y_0)\,h^2k + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0,y_0)\,hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)\,k^3
\end{aligned}$$

nebo ve stručnější symbolice

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}^3 f_{(x_0,y_0)}(h,k) = \\
&= f_{xxx}(x_0,y_0)\,h^3 + 3f_{xxy}(x_0,y_0)\,h^2k + 3f_{xyy}(x_0,y_0)\,hk^2 + f_{yyy}(x_0,y_0)\,k^3. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Poznámka 4.3. Proměnné h a k v totálním diferenciálu m-tého řádu mají opět charakter přírůstků nezávisle proměnných x a y v bodě (x_0, y_0). Proto se pro ně používají i další označení zavedená v kapitole o diferenciálu. Tedy $h = x - x_0 = \Delta x = \mathrm{d}x$ a $k = y - y_0 = \Delta y = \mathrm{d}y$.

Příklad 4.4. Určete druhý totální diferenciál funkce $f\colon z = x^2y^3$ v bodě $(1, -2)$.

Řešení. Protože funkce f má spojité parciální derivace druhého řádu v libovolném bodě v $\mathbb{R}^2$, diferenciál existuje. Podle (4.2) potřebujeme vypočítat druhé parciální derivace v bodě $(1, -2)$.

$$f_x = 2xy^3, \qquad f_y = 3x^2y^2, \qquad f_{xx} = 2y^3, \qquad f_{xy} = 6xy^2, \qquad f_{yy} = 6x^2y,$$

a tedy

$$f_{xx}(1,-2) = -16, \qquad f_{xy}(1,-2) = 24, \qquad f_{yy}(1,-2) = -12.$$

Dosazením do (4.2) vyjde

$$\mathrm{d}^2 f_{(1,-2)}(h,k) = -16h^2 + 48hk - 12k^2$$

nebo při označení přírůstků $h = x - 1$ a $k = y + 2$

$$\mathrm{d}^2 f_{(1,-2)}(x-1,\, y+2) = -16(x-1)^2 + 48(x-1)(y+2) - 12(y+2)^2$$

resp. při označení přírůstků pomocí $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$

$$\mathrm{d}^2 f_{(1,-2)}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = -16\,\mathrm{d}x^2 + 48\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 12\,\mathrm{d}y^2.$$

▲

Pro zájemce:

V obecném případě funkce více proměnných $f(\boldsymbol{x})$, kde $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, se totální diferenciál m-tého řádu, $m \in \mathbb{N}$, v bodě $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ zavádí vztahem

$$\mathrm{d}^m f_{\boldsymbol{x}^*}(\boldsymbol{h}) = \sum_{\substack{j_1+\dots+j_n=m \\ j_1,\dots,j_n\in\mathbb{N}_0}} \frac{m!}{j_1!\dots j_n!} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}(\boldsymbol{x}^*)\, h_1^{j_1}\cdots h_n^{j_n},$$

kde $\boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Přitom předpokládáme, že funkce f má v nějakém okolí bodu $\boldsymbol{x}^*$ všechny parciální derivace m-tého řádu, které jsou v tomto bodě spojité.

Tento vzorec lze formálně zapsat vztahem

$$\mathrm{d}_m f_{\boldsymbol{x}^*}(\boldsymbol{h}) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f(\boldsymbol{x}^*),$$

z něhož umocněním a příslušnými náhradami, popsanými v poznámce 4.2 dostaneme předchozí vyjádření. Připomeňme, že obdobou binomické formule je pro větší počet sčítanců *multinomická formule*

$$(a_1 + \dots + a_n)^m = \sum_{\substack{j_1+\dots+j_n=m \\ j_1,\dots,j_n\in\mathbb{N}_0}} \frac{m!}{j_1!\dots j_n!} a_1^{j_1}\cdots a_n^{j_n}.$$

4.2 Taylorův vzorec

Průvodce studiem

Z diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné známe Taylorův[1] mnohočlen a Taylorův vzorec. Nyní zavedeme tyto pojmy i pro funkce více proměnných. Jednou z jejich důležitých aplikací bude studium lokálních extrémů funkcí více proměnných. S nimi a rovněž s globálními extrémy se seznámíme v následujících kapitolách.

Taylorův mnohočlen řádu m se středem x_0 funkce jedné proměnné měl tvar (x_0 označuje střed, x jeho proměnnou; označení středu někdy pro jednoduchost vynecháváme)

$$T_m(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \\ + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)(x - x_0)^m \tag{4.4}$$

[1] **Brook Taylor** (1685–1731) (čti tejlor) — anglický matematik. Zabýval se analýzou, mechanikou a balistikou.

a platilo pro něj, že

$$T_m(x_0; x_0) = f(x_0),\ T'_m(x_0; x_0) = f'(x_0),\ \dots,\ T_m^{(m)}(x_0; x_0) = f^{(m)}(x_0).$$

To, že se shodovaly hodnoty funkcí a jejich derivací v bodě x_0 *až do poměrně vysokého řádu, geometricky znamenalo, že* $f(x)$ *a* $T_m(x; x_0)$ *si byly v jistém okolí* $\mathscr{O}(x_0)$ *velmi blízké.*

Protože u funkce jedné proměnné je $\mathrm{d}^m f_{x_0}(x - x_0) = f^{(m)}(x_0)(x - x_0)^m$*, je možné předchozí vztah zapsat pomocí diferenciálů takto:*

$$T_m(x; x_0) = f(x_0) + \mathrm{d}f_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f_{x_0}(x - x_0) + \dots + \frac{1}{m!}\mathrm{d}^m f_{x_0}(x - x_0)\,. \quad (4.5)$$

Taylorův vzorec pak říkal, že $f(x) = T_m(x, x_0) + R_m(x)$*, kde zbytek lze vyjádřit ve tvaru* $R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}$*, kde* $0 < \theta < 1$*, tj.* $x_0 + \theta(x - x_0)$ *je číslo mezi* x_0 *a* x*. Tedy*

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m + \\ &+ \frac{f^{(m+1)}\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Vztah je opět možné přepsat pomocí diferenciálů.

Analogicky jako u funkce jedné proměnné, budeme i u funkce dvou proměnných $f(x, y)$ chtít najít mnohočlen dvou proměnných, který bude mít v nějakém bodě (x_0, y_0) stejnou funkční hodnotu a stejné hodnoty všech parciálních derivací až do řádu m, $m \in \mathbb{N}$. Ukazuje se, že takový mnohočlen, jehož stupeň je nejvýše m, existuje právě jeden. Jeho zápis ve tvaru (4.4) je, jak uvidíme dále, velmi komplikovaný. Ale jeho zápis pomocí diferenciálů vyšších řádů je téměř shodný s (4.5). To je obsahem následující definice.

Definice 4.5. Nechť funkce f má v okolí bodu (x_0, y_0) všechny parciální derivace m-tého řádu, $m \in \mathbb{N}$, které jsou v tomto bodě spojité. Položme $h = x - x_0$, $k = y - y_0$. Pak mnohočlen

$$\begin{aligned} T_m(x, y; x_0, y_0) = f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h, k) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f_{(x_0,y_0)}(h, k) + \dots + \\ + \frac{1}{(m-1)!}\mathrm{d}^{m-1} f_{(x_0,y_0)}(h, k) + \frac{1}{m!}\mathrm{d}^m f_{(x_0,y_0)}(h, k) \end{aligned} \quad (4.7)$$

nazýváme *Taylorovým mnohočlenem* řádu m funkce f se středem v bodě (x_0, y_0).

Tedy x, y jsou proměnné mnohočlenu T_m a x_0, y_0 jsou souřadnice středu. Pro stručnost často vynecháváme označení středu a píšeme jen $T_m(x, y)$, pokud je střed jasný z kontextu. Lze ukázat, že je to jediný mnohočlen stupně nejvýše m s požadovanými vlastnostmi.

Označme $R_m(x,y) = f(x,y) - T_m(x,y;x_0,y_0)$. Lze dokázat následující větu (všimněte si, že oproti předchozí definici přibyl předpoklad i na $(m+1)$-ní parciální derivace):

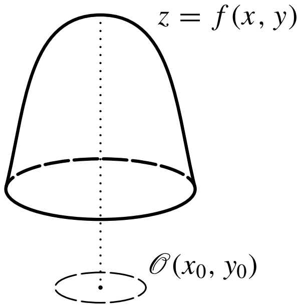
Věta 4.6 (Taylor). *Nechť funkce f má v nějakém okolí $\mathcal{O}(x_0,y_0)$ bodu (x_0,y_0) spojité parciální derivace řádu $m+1$, $m \in \mathbb{N}$. Pak pro libovolný bod $(x,y) \in \mathcal{O}(x_0,y_0)$ platí Taylorův vzorec*

$$f(x,y) = T_m(x,y;x_0,y_0) + R_m(x,y), \tag{4.8}$$

přičemž tzv. zbytek v Taylorově vzorci $R_m(x,y)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$R_m(x,y) = \frac{1}{(m+1)!}\, \mathrm{d}^{m+1} f_{(\xi,\eta)}(x-x_0, y-y_0)\,, \tag{4.9}$$

kde (ξ,η) je vnitřní bod úsečky spojující body (x_0,y_0) a (x,y).



Obr. 4.1

Tedy parciální derivace v $\mathrm{d}^{m+1} f$ se počítají v jistém bodě (ξ,η) — viz obr. 4.1, ale přírůstky $x - x_0$ a $y - y_0$ jsou „normální“. Bod (ξ,η) tedy závisí na x a y.

Geometricky jde o náhradu funkce f jednodušším typem funkce — mnohočlenem — v okolí bodu (x_0,y_0). Zbytek zanedbáme a přibližně platí $f(x,y) \doteq T_m(x,y)$. Pro $m = 1$ jde o náhradu tečnou rovinou — viz (3.8). Jak uvidíme později, pro $m = 2$ bude (v nedegenerovaném případě) grafem $T_2(x,y)$ eliptický nebo hyperbolický paraboloid — str. 194.

Pokud se domluvíme, že diferenciál nultého řádu je roven funkční hodnotě, tj. $\mathrm{d}^0 f_{(x_0,y_0)}(h,k) = f(x_0,y_0)$, je možné rovnost (4.8) zapsat s ohledem na (4.7) ve tvaru (připomeňme, že $0! = 1$)

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\, \mathrm{d}^k f_{(x_0,y_0)}(x-x_0, y-y_0) + R_m(x,y)\,. \tag{4.10}$$

Důkaz věty 4.6. Zvolme pevně (x,y) a označme $h = x - x_0$ a $k = y - y_0$. Zaveďme pomocnou funkci jedné proměnné $\varphi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$. Platí $\varphi(1) = f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x,y)$ a $\varphi(0) = f(x_0,y_0)$. Na funkci $\varphi(t)$ definovanou na intervalu $\langle 0,1\rangle$ použijeme Taylorův vzorec pro funkci jedné proměnné (4.6), v němž zvolíme $x_0 = 0$ a $x = 1$. Dostáváme:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \cdots + \frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0) + \frac{1}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\theta),$$

kde $\theta \in (0,1)$. Při výpočtu derivací funkce φ využijeme vztahů pro parciální derivace složených funkcí. Vyjde

$$
\begin{aligned}
\varphi'(0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t)|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + th,\, y_0 + tk)|_{t=0} = f_x(x_0, y_0)\, h + f_y(x_0, y_0)\, k, \\
\varphi''(0) &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\varphi(t)|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f(x_0 + th,\, y_0 + tk)|_{t=0} = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[f_x(x_0 + th,\, y_0 + tk)\, h + f_y(x_0 + th,\, y_0 + tk)\, k \big]\big|_{t=0} = \\
&= f_{xx}(x_0, y_0)\, h^2 + 2 f_{xy}(x_0, y_0)\, hk + f_{yy}(x_0, y_0)\, k^2.
\end{aligned}
$$

Obecně indukcí obdržíme

$$
\varphi^{(l)}(0) = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} \frac{\partial^l f}{\partial x^{l-j} y^j}(x_0, y_0) h^{l-j} k^j,
$$

$l = 1, \dots, m$. Stejně postupujeme i při výpočtu zbytku $R_m(x, y)$. Po úpravě $\varphi^{(m+1)}(\vartheta)$ dostaneme, že $(\xi, \eta) = (x_0, y_0) + (\vartheta h, \vartheta k)$. □

Příklad 4.7. Najděte Taylorův vzorec druhého řádu funkce $f\colon z = x^3 y + x^2 y^2$ v bodě $(1, -2)$ a vyjádřete zbytek.

Řešení. Podle (4.10) bude platit

$$
f(x, y) = f(1, -2) + \mathrm{d} f_{(1,-2)}(h, k) + \frac{1}{2} \mathrm{d}^2 f_{(1,-2)}(h, k) + R_2(x, y)\,,
$$

kde $(h, k) = (x - 1,\, y + 2)$ Budeme potřebovat parciální derivace do třetího řádu. Protože jde o mnohočleny, jsou spojité, a tedy nebude záviset na pořadí derivování.

$$
\begin{aligned}
f_x &= 3x^2 y + 2xy^2, & f_{xx} &= 6xy + 2y^2, & f_{xxx} &= 6y, \\
f_y &= x^3 + 2x^2 y, & f_{yy} &= 2x^2, & f_{yyy} &= 0, \\
& & f_{xy} &= 3x^2 + 4xy, & f_{xxy} &= 6x + 4y, \\
& & & & f_{xyy} &= 4x.
\end{aligned}
$$

Po dosazení vyjde

$$
\begin{aligned}
f(1, -2) &= 2, & f_x(1, -2) &= 2, & f_y(1, -2) &= -3, \\
f_{xx}(1, -2) &= -4, & f_{yy}(1, -2) &= 2, & f_{xy}(1, -2) &= -5.
\end{aligned}
$$

Dále podle (3.3) a (4.2) dostaneme

$$
\mathrm{d} f_{(1,-2)}(h, k) = 2h - 3k, \qquad \mathrm{d}^2 f_{(1,-2)}(h, k) = -4h^2 - 10hk + 2k^2,
$$

takže po dosazení za h a k máme

$$
\begin{aligned}
T_2(x, y) &= f(1, -2) + \mathrm{d} f_{(1,-2)}(x - 1, y + 2) + \frac{1}{2} \mathrm{d}^2 f_{(1,-2)}(x - 1, y + 2) = \\
&= 2 + 2(x - 1) - 3(y + 2) - 2(x - 1)^2 - 5(x - 1)(y + 2) + (y + 2)^2 .
\end{aligned}
$$

Konečně podle (4.9) k vyjádření zbytku potřebujeme $\mathrm{d}^3 f_{(\xi,\eta)}(h, k)$. Podle (4.3) platí

$$\mathrm{d}^3 f_{(\xi,\eta)}(h, k) = 6\eta h^3 + 3(6\xi + 4\eta)h^2 k + 12\xi h k^2 \,,$$

tedy

$$\begin{aligned} R_2(x, y) &= \frac{1}{6}\,\mathrm{d}^3 f_{(\xi,\eta)}(x-1, y+2) = \\ &= \eta(x-1)^3 + (3\xi + 2\eta)(x-1)^2(y+2) + 2\xi(x-1)(y+2)^2 \,. \end{aligned}$$

Spojením jednotlivých výsledků dostaneme

$$\begin{aligned} f(x, y) &= T_2(x, y) + R_2(x, y) = \\ &= 2 + 2(x-1) - 3(y+2) - 2(x-1)^2 - 5(x-1)(y+2) + (y+2)^2 + \\ &\quad + \eta(x-1)^3 + (3\xi + 2\eta)(x-1)^2(y+2) + 2\xi(x-1)(y+2)^2 \,, \end{aligned}$$

kde (ξ, η) je vnitřní bod úsečky spojující body $(1, -2)$ a (x, y). ▲

Poznámka 4.8. Je-li $f(x, y)$ mnohočlen stupně m a napíšeme-li jeho Taylorův vzorec řádu m se středem (x_0, y_0), bude vyjádření zbytku obsahovat $(m+1)$-ní parciální derivace. Ty však budou identicky nulové, takže pro libovolné (x, y) bude platit $R_m(x, y) = 0$ a bude platit zcela přesně $f(x, y) = T_m(x, y)$. To lze využít k řešení následující úlohy: *Vyjádřete daný mnohočlen pomocí mocnin $x - x_0$ a $y - y_0$.* Nebo přesněji: *Najděte mnohočlen $Q(u, v)$ takový, aby $P(x, y) = Q(x - x_0, y - y_0)$.* Stačí napsat Taylorův vzorec se středem (x_0, y_0) dostatečně vysokého řádu. Např. v předchozím příkladě by platilo $x^3 y + x^2 y^2 = f(1, -2) + \mathrm{d} f_{(1,-2)}(x-1, y+2) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f_{(1,-2)}(x-1, y+2) + {}$ $+ \frac{1}{6}\,\mathrm{d}^3 f_{(1,-2)}(x-1, y+2) + \frac{1}{24}\,\mathrm{d}^4 f_{(1,-2)}(x-1, y+2)$.

Příklad 4.9. Mnohočlen $P(x, y) = x^3 + 3y^3 + xy^2 + 2x^2 + xy + x - 2y$ vyjádřete v mocninách $u = x + 1$, $v = y - 2$.

Řešení. Podle předchozí poznámky stačí najít $T_3(x, y)$ se středem $(-1, 2)$. Pak bude

$$\begin{aligned} P(x, y) = T_3(x, y) &= P(-1, 2) + \mathrm{d}P_{(-1,2)}(x+1, y-2) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 P_{(-1,2)}(x+1, y-2) + \frac{1}{6}\,\mathrm{d}^3 P_{(-1,2)}(x+1, y-2). \end{aligned}$$

Připravíme si potřebné derivace.

$$\begin{array}{lll} P_x = 3x^2 + y^2 + 4x + y + 1, & P_{xxx} = 6, & P_x(-1, 2) = 6, \\ P_y = 9y^2 + 2xy + x - 2, & P_{xxy} = 0, & P_y(-1, 2) = 29, \\ P_{xx} = 6x + 4, & P_{xyy} = 2, & P_{xx}(-1, 2) = -2, \\ P_{xy} = 2y + 1, & P_{yyy} = 18, & P_{xy}(-1, 2) = 5, \\ P_{yy} = 18y + 2x, & & P_{yy}(-1, 2) = 34. \end{array}$$

Dále podle (3.3), (4.2) a (4.3) dostaneme

$$P(-1,2) = 14, \qquad \mathrm{d}P_{(-1,2)}(h,k) = 6h + 29k,$$
$$\mathrm{d}^2 P_{(-1,2)}(h,k) = -2h^2 + 10hk + 34k^2, \qquad \mathrm{d}^3 P_{(-1,2)}(h,k) = 6h^3 + 6hk^2 + 18k^3.$$

Celkově tedy po dosazení $h = x + 1$ a $k = y - 2$ platí

$$\begin{aligned} P(x,y) = 14 + 6(x+1) + 29(y-2) - {}&\\ - (x+1)^2 + 5(x+1)(y-2) + 17(y-2)^2 + {}&\\ + (x+1)^3 + (x+1)(y-2)^2 + 3(y-2)^3.& \end{aligned}$$

Mnohočlen $Q(u,v)$ z poznámky 4.8 má tvar

$$Q(u,v) = 14 + 6u + 29v - u^2 + 5uv + 17v^2 + u^3 + uv^2 + 3v^3. \qquad \blacktriangle$$

Příklad 4.10. Pomocí Taylorova mnohočlenu druhého řádu vypočtěte přibližně následující výrazy.

a) $1{,}04^{2{,}02}$, b) $\sqrt{2{,}98^2 + 4{,}05^2}$.

Výsledek porovnejte s příkladem 3.16 a s hodnotou výrazu získanou na kalkulačce.

Řešení. Vyjdeme ze vztahu $f(x,y) \doteq T_2(x,y)$. Přitom použijeme výpočty z příkladu 3.16, takže budeme vidět srovnání při náhradě $T_1(x,y)$ a $T_2(x,y)$.

a) Zvolíme $f(x,y) = x^y$, $(x_0,y_0) = (1,2)$ a $(h,k) = (0{,}04; 0{,}02)$. Druhé derivace jsme již jednou spočítali — viz příklad 2.10 c).

$$f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \qquad f_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x, \qquad f_{yy} = x^y \ln^2 x,$$
$$f_{xx}(1,2) = 2, \qquad f_{xy}(1,2) = 1, \qquad f_{yy}(1,2) = 0.$$

Tedy
$$\mathrm{d}^2 f_{(1,2)}(h,k) = 2h^2 + 2hk,$$
tj.
$$\mathrm{d}^2 f_{(1,2)}(0{,}04; 0{,}02) = 2\cdot 0{,}04^2 + 2\cdot 0{,}04\cdot 0{,}02 = 0{,}004\,8$$

a vzhledem k 3.16 a) dostáváme

$$\begin{aligned} 1{,}04^{2{,}02} &\doteq f(1,2) + \mathrm{d}f_{(1,2)}(0{,}04; 0{,}02) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f_{(1,2)}(0{,}04; 0{,}02) = \\ &= 1{,}08 + 0{,}002\,4 = 1{,}082\,4. \end{aligned}$$

Pro porovnání, hodnota určená kalkulačkou je $1{,}082\,448\,755\,31\ldots$

b) Zvolíme $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (3, 4)$ a $(h, k) = (-0{,}02; 0{,}05)$. Druhé derivace jsme již jednou spočítali (až na g_{xy}) — viz příklad 3.28.

$$g_{xx} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \qquad g_{xy} = \frac{-xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \qquad g_{yy} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$
$$g_{xx}(3, 4) = \frac{16}{125}, \qquad g_{xy}(3, 4) = -\frac{12}{125}, \qquad g_{yy}(3, 4) = \frac{9}{125}.$$

Tedy
$$\mathrm{d}^2 g_{(3,4)}(h, k) = 0{,}128h^2 - 0{,}192hk + 0{,}072k^2,$$
tj.
$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 g_{(3,4)}(-0{,}02; 0{,}05) &= 0{,}128 \cdot 0{,}000\,4 + 0{,}192 \cdot 0{,}001 + 0{,}072 \cdot 0{,}002\,5 = \\ &= 0{,}000\,423\,2\end{aligned}$$

a vzhledem k 3.16 b) dostáváme
$$\begin{aligned}\sqrt{2{,}98^2 + 4{,}05^2} &\doteq g(3, 4) + \mathrm{d}g(3, 4) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 g(3, 4) = \\ &= 5{,}028 + 0{,}000\,211\,6 = 5{,}028\,211\,6.\end{aligned}$$

Pro porovnání, hodnota určená kalkulačkou je 5,028 210 417 23 . . . ▲

Pro zájemce:

Definice Taylorova mnohočlenu řádu m, $m \in \mathbb{N}$, funkce $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, n proměnných se středem v bodě $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ je formálně stejná jako u funkce dvou proměnných:

$$T_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^*) = f(x^*) + \mathrm{d}f_{x^*}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f_{x^*}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) + \dots + \frac{1}{m!}\,\mathrm{d}^m f_{x^*}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*).$$

Přitom předpokládáme, že funkce f má v okolí bodu $\boldsymbol{x}^*$ všechny parciální derivace m-tého řádu, které jsou v tomto bodě spojité.

Taylorova věta 4.6 zůstává v platnosti, vyjádření zbytku $R_m(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - T_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^*)$ je naprosto analogické.

Pojmy k zapamatování

— totální diferenciál druhého a třetího řádu
— totální diferenciál m-tého řádu
— Taylorův mnohočlen řádu m
— Taylorův vzorec
— zbytek v Taylorově vzorci

Kontrolní otázky

?

1. Co rozumíme pojmem totální diferenciál m-tého řádu?
2. Napište vzorec pro totální diferenciál druhého a třetího řádu.
3. Jaké podmínky musí splňovat funkce f, aby existoval její totální diferenciál m-tého řádu v bodě (x_0, y_0)?
4. Co je to Taylorův mnohočlen řádu m?
5. Jaký má smysl nahrazení funkce Taylorovým mnohočlenem?
6. Napište Taylorův vzorec.
7. Jak lze vyjádřit zbytek v Taylorově vzorci?
8. Jak bude vypadat zbytek po nahrazení mnohočlenu stupně m Taylorovým vzorcem řádu m?
9. Za jakých podmínek bude Taylorův mnohočlen dobrou náhradou funkce $f(x, y)$ v okolí bodu (x_0, y_0)?
10. Pro jaké funkce platí zcela přesně rovnost $f(x, y) = T_m(x, y)$?
11. Popište princip výpočtu přibližné hodnoty funkcí (bez použití kalkulačky).

Příklady k procvičení

!

1. Najděte totální diferenciály druhého a třetího řádu funkce f v bodě A:

a) $f : z = x^3y + x^2y^2 - xy^3$, $A = (1, -1)$,
b) $f : z = \mathrm{e}^{x+2y}$, $A = (-2, 1)$,
c) $f : z = \ln(x + y)$, $A = (2, 1)$,
d) $f : z = \frac{x}{y}$, $A = (-3, 1)$.

2. Najděte Taylorův mnohočlen druhého řádu funkce $z = f(x, y)$ se středem A:

a) $z = \frac{x}{y}$, $A = (1, 1)$,
b) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,
c) $z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $A = (0, 1)$,
d) $z = \operatorname{arctg} \frac{1+x+y}{1-x+y}$, $A = (0, 0)$,
e) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $A = (1, 1)$,
f) $z = \frac{\cos x}{\cos y}$, $A = (0, 0)$,
g) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $A = (1, 1)$,
h) $z = \sin x \sin y$, $A = (0, 0)$.

3. Napište Taylorův mnohočlen se středem $(0, 0)$ (někdy nazývaný Maclaurinův[1] mnohočlen) řádu m pro funkci f:

a) $f(x, y) = \frac{1}{1-x-y+xy}$, $m = 2$,
b) $f(x, y) = \mathrm{e}^x \sin y$, $m = 3$,
c) $f(x, y) = \mathrm{e}^x \ln(1 + y)$, $m = 3$,
d) $f(x, y) = \mathrm{e}^{-2x-3y}$, $m = 3$.

[1] **Colin Maclaurin** (1698–1746) (čti meklorin) — skotský matematik, zabýval se analýzou a geometrií.

4. Vyjádřete mnohočleny $P(x, y)$ v mocninách u a v:

   a) $P(x, y) = 24 + 11x - 9y - x^2 - 2xy + y^2 - x^3,\ u = x + 2,\ v = y - 1,$
   b) $P(x, y) = 46 + 32x - 28y - 4x^2 - 20xy + 4y^2 + 3xy^2 - 2x^3,\ u = x + 1,\ v = y - 3,$
   c) $P(x, y) = 9 - 16x - 5y + 8x^2 - xy - 7y^2 - x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3,$
   $u = x - 2,\ v = y + 1,$
   d) $P(x, y) = 2 + 4x + 2y + 3x^2 + xy - y^2 + x^3 + x^2y + xy^2 + y^3,$
   $u = x + 1,\ v = y - 1,$
   e) $P(x, y) = 13 + 16x - 4y + 11x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x^3 - xy^2 - y^3,$
   $u = x + 2,\ v = y - 2,$
   f) $P(x, y) = 9 - 10x - 8y + x^2 - 4xy - 8y^2 - xy^2 - 2y^3,\ u = x - 3,\ v = y + 2.$

5. Pomocí Taylorova mnohočlenu druhého řádu vypočtěte přibližně následující výrazy a porovnejte je s výsledkem získaným na kalkulačce:

   a) $\operatorname{arctg} \frac{1{,}04}{0{,}98}$, b) $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$, c) $\sqrt[3]{2 - 1{,}02 \cdot 0{,}98}$.

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $d^2 f = -4h^2 - 8hk + 8k^2$, $d^3 f = -6h^3 + 6h^2k + 30hk^2 - 6k^3$,
   b) $d^2 f = h^2 + 4hk + 4k^2$, $d^3 f = h^3 + 6h^2k + 12hk^2 + 8k^3$,
   c) $d^2 f = -\frac{1}{9} h^2 - \frac{2}{9} hk - \frac{1}{9} k^2$, $d^3 f = \frac{2}{27} h^3 + \frac{2}{9} h^2k + \frac{2}{9} hk^2 + \frac{2}{27} k^3$,
   d) $d^2 f = -2hk - 6k^2$, $d^3 f = 6hk^2 + 18k^3$.

2. a) $1 + (x - 1) - (y - 1) - (x - 1)(y - 1) - (y - 1)^2$,
   b) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right)\right] - \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right]$,
   c) $x - x(y - 1)$, d) $\frac{\pi}{4} + x - \frac{xy}{2}$,
   e) $\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}[(x - 1) + (y - 1)] - \frac{1}{2}(x - 1)(y - 1)$, f) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$,
   g) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1) + \frac{1}{4}(x - 1)^2 - \frac{1}{4}(y - 1)^2$, h) xy.

3. a) $1 + x + y + x^2 + xy + y^2$, b) $y + xy + \frac{x^2y}{2} - \frac{y^3}{6}$,
   c) $y + xy - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2y}{2} - \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3}$, d) $1 - \frac{2x+3y}{1!} + \frac{(2x+3y)^2}{2!} - \frac{(2x+3y)^3}{3!}$.

4. a) $2 + (x + 2) - 3(y - 1) + 5(x + 2)^2 - 2(x + 2)(y - 1) + (y - 1)^2 - (x + 2)^3$,
   b) $-3 + (x + 1) - 2(y - 3) + 2(x + 1)^2 - 2(x + 1)(y - 3) + (y - 3)^2 +$
   $+ 3(x + 1)(y - 3)^2 - 2(x + 1)^3$,
   c) $(x - 2)(y + 1) + 2(y + 1)^2 - (x - 2)^3 + 2(x - 2)^2(y + 1) +$
   $+ 3(x - 2)(y + 1)^2 - (y + 1)^3$,
   d) $1 + (x + 1) + (y - 1) + (x + 1)^2 + (x + 1)(y - 1) + (y - 1)^2 + (x + 1)^3 +$
   $+ (x + 1)^2(y - 1) + (x + 1)(y - 1)^2 + (y - 1)^3$,
   e) $1 - (x + 2)^2 + 2(x + 2)^3 - (x + 2)(y - 2)^2 - (y - 2)^3$,
   f) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 - (x - 3)(y + 2)^2 - 2(y + 2)^3$.

5. a) $\frac{\pi}{4} + 0{,}029\,7 \doteq 0{,}815\,098$; výsledek získaný na kalkulačce: $0{,}815\,092\,403\,004\ldots$,
   b) $\frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} + \frac{2\sqrt{6}-4\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{2\cdot 180^2} \doteq 0{,}504\,445$;
   výsledek získaný na kalkulačce: $0{,}502\,035\,058\,182\ldots$,
   c) $1{,}000\,1\bar{3}$; výsledek získaný na kalkulačce: $1{,}000\,133\,315\,56\ldots$

Kapitola 5

Lokální extrémy

Průvodce studiem

Připomeňme si, že lokální extrém funkce jedné proměnné je společný název pro lokální maximum a minimum dané funkce. Lokální minimum znamená, že v určitém okolí bodu x_0 nemá $f(x)$ menší hodnotu než $f(x_0)$. V některém vzdálenějším bodě tomu však již tak být nemusí. Podobně lokální maximum znamená, že v jistém okolí bodu x_0 nemá $f(x)$ větší hodnotu než $f(x_0)$.

Z předcházejícího studia již víme, že funkce může mít lokálních extrémů více, nebo dokonce nekonečně mnoho (např. funkce $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ má nekonečně mnoho bodů lokálního maxima („vrcholků“) i minima („dolíků“).

Je-li v nějakém okolí $\mathscr{O}(x_0)$ bodu x_0 hodnota $f(x_0)$ skutečně největší, tj. platí-li $f(x) < f(x_0)$ pro $x \in \mathscr{O}(x_0)$, $x \neq x_0$, nebo nejmenší, tj. $f(x) > f(x_0)$ pro $x \in \mathscr{O}(x_0)$, $x \neq x_0$, mluvíme o ostrých lokálních extrémech.

V této kapitole nám půjde o podobný problém — určení lokálních extrémů funkce dvou a více proměnných. Nejprve si zformulujeme podmínky pro existenci extrémů funkcí dvou proměnných, a poté, což je náročnější, i pro funkce tří a více proměnných. Budeme tedy hledat body, v nichž je funkční hodnota dané funkce v jistém okolí největší nebo nejmenší. Podobný bude i postup. Nejprve nalezneme „podezřelé“ body a pak rozhodneme, ve kterých z nich je extrém.

Při formulaci dostatečných podmínek pro existenci lokálních extrémů funkcí více proměnných v obecném případě budeme potřebovat z algebry některé poznatky o kvadratických formách. Ty jsou uvedeny v oddílu 5.2.

Připomeňme si nejprve princip výpočtu pro funkci jedné proměnné. Naším cílem bylo najít body, v nichž má daná funkce $f(x)$ lokální extrémy (tj. musí jít o vnitřní body definičního oboru uvažované funkce). Postup měl dva kroky:

1) Vytipujeme „podezřelé“ body (tj. body, v nichž by mohl být lokální extrém; v jiných bodech extrém být nemůže).
2) Rozhodneme, ve kterém „podezřelém“ bodě extrém je (byl „podezřelý“ právem) a ve kterém extrém není (byl „podezřelý“ neprávem).

Které body mohou být „podezřelé“? Z prvního semestru víme, že jestliže funkce $f(x)$ má derivaci, která je nenulová, pak $f(x)$ je v tomto bodě rostoucí nebo klesající a v takovém bodě zřejmě nemůže být extrém. Pokud tedy derivace existuje, přicházejí v úvahu pouze body, v nichž je $f'(x) = 0$. Ty nazýváme *stacionární body*. Geometrický význam je jasný — tečna ke grafu funkce je v takovém bodě rovnoběžná s osou x (tj. je vodorovná). Druhou možností je, že $f'(x)$ v daném bodě neexistuje, tj. graf zde nemá tečnu.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- nalézt stacionární body funkcí dvou (resp. více) proměnných,
- formulovat postačující podmínku pro existenci lokálního extrému funkce dvou (resp. více) proměnných,
- rozhodnout, zda ve stacionárním bodě nastane extrém,
- určit typ daného extrému — tj. lokální minimum či maximum,
- rozhodnout, zda se jedná o ostrý či neostrý extrém,
- definovat kvadratické formy,
- rozhodnout o druhu definitnosti kvadratické formy.

5.1 Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

Nejprve se budeme zabývat funkcemi dvou proměnných, kde je situace poněkud jednodušší, zejména pokud jde o postačující podmínky existence lokálních extrémů. Navíc pro lepší pochopení problematiky máme možnost grafického znázornění.

Definice 5.1. Nechť $f(x, y)$ je funkce dvou proměnných a $(x_0, y_0) \in D(f)$.

a) Řekneme, že funkce f má v bodě (x_0, y_0) *lokální maximum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ takové, že pro každé $(x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0)$ platí $f(x, y) \leqq f(x_0, y_0)$.

b) Řekneme, že funkce f má v bodě (x_0, y_0) *lokální minimum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ takové, že pro každé $(x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0)$ platí $f(x, y) \geqq f(x_0, y_0)$.

Jestliže pro $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ jsou předchozí nerovnosti ostré, mluvíme o *ostrém lokálním maximu* resp. *minimu*. Společný název pro (ostré) lokální maximum a minimum je *(ostrý) lokální extrém*.

Na obr. 5.1 je schematicky znázorněno, jak mohou vypadat body lokálního maxima. Obrázky představují pouze výřez z celého grafu funkce f. Přívlastkem „hladký“ se v následujícím textu rozumí, že funkce má spojité parciální derivace, tj. její graf má spojitě se měnící tečné roviny a je tudíž „oblý“.

a) V bodě (x_0, y_0) je ostré lokální maximum. Graf („klobouk“) je „hladký“.

b) V bodě (x_0, y_0) je ostré lokální maximum. Graf (kuželová plocha) není v tomto bodě „hladký“.

c) V bodě (x_0, y_0) je neostré lokální maximum. V jeho sebemenším okolí jsou vždy další body, v nichž jsou stejné funkční hodnoty jako v (x_0, y_0). Na obrázku tvoří úsečku v $\mathscr{O}(x_0, y_0)$, která odpovídá hřebenu „střechy“. Graf („lomená střecha“) není v tomto bodě „hladký“.

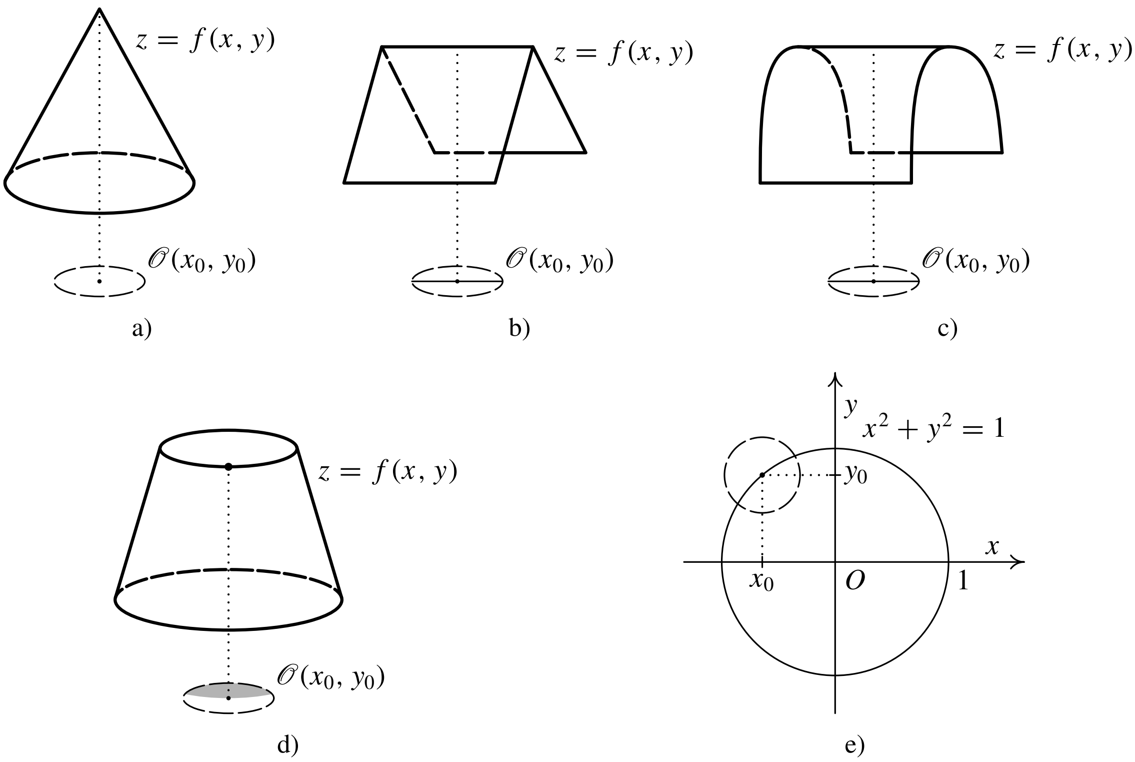
d) V bodě (x_0, y_0) je neostré lokální maximum. V jeho sebemenším okolí jsou vždy další body, v nichž jsou stejné funkční hodnoty jako v (x_0, y_0). Na obrázku tvoří úsečku v $\mathscr{O}(x_0, y_0)$, která odpovídá hřebenu „střechy“. Graf („kulatá střecha“) je v tomto bodě „hladký“.

e) V bodě (x_0, y_0) je neostré lokální maximum. V jeho sebemenším okolí jsou vždy další body, v nichž jsou stejné funkční hodnoty jako v (x_0, y_0). Na obrázku tyto body vyplňují část $\mathscr{O}(x_0, y_0)$ (vyznačeno šedě). Graf (komolý kužel) není v tomto bodě „hladký“.

Poznámka 5.2.

1) Představíme-li si graf funkce f jako plastickou mapu, hledáme vlastně „kopečky“ a „dolíky“. Je zřejmé, že lokální extrémy nemusí existovat, ale na druhé straně jich může být nekonečně mnoho.

2) Z definice 5.1 vyplývá, že bod lokálního extrému musí být *vnitřním* bodem definičního



Obr. 5.1 : Lokální maxima

oboru $D(f)$. Požaduje se totiž, že f musí být definovaná v jistém okolí bodu (x_0, y_0). Definice by se snadno dala modifikovat i na hraniční body. Stačilo by požadovat, aby příslušná nerovnost platila pouze pro $(x, y) \in \mathscr{O}(x_0, y_0) \cap D(f)$ — viz obr. 1.9 b) a definice 5.16. Pak by však formulace následujících vět byla podstatně složitější.

3) Z předchozích obrázků je zřejmé, že pojem ostrý lokální extrém nemá nic společného s tím, zda graf funkce je „zakulacený" nebo ne. Tato vlastnost jen znamená, že v jistém okolí bodu (x_0, y_0) je $f(x_0, y_0)$ největší (nejmenší) funkční hodnotou a ostatní jsou ostře menší (větší).

Věta 5.3. *Nechť funkce f má v bodě (x_0, y_0) lokální extrém. Pak platí:*

a) *Parciální derivace $f_x(x_0, y_0)$ buď neexistuje, nebo je $f_x(x_0, y_0) = 0$.*

b) *Parciální derivace $f_y(x_0, y_0)$ buď neexistuje, nebo je $f_y(x_0, y_0) = 0$.*

Důkaz. Uvažujme funkci jedné proměnné $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Ta je definovaná v nějakém okolí bodu x_0 tvaru $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, a má v bodě x_0 nutně extrém. To ovšem znamená, že pokud zde má derivaci, ta musí být nulová — viz [11, str. 249]. Ale podle definice 2.1 je $\varphi'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$ — viz též obr. 2.2. Analogicky se dokáže druhá část tvrzení. □

Předchozí věta říká, že pokud v bodě lokálního extrému existují parciální derivace, tj. pomocné funkce jedné proměnné mají tečny (viz obr. 3.5), musejí být tyto tečny vodorovné. Totéž pak musí platit pro tečnou rovinu (pokud existuje). Tak by tomu bylo na obr. 5.1 a) a 5.1 d), zatímco na obr. 5.1 b), 5.1 c) a 5.1 e) aspoň jedna parciální derivace neexistuje.

Protože my budeme pracovat většinou s funkcemi majícími parciální derivace, zavedeme následující pojem.

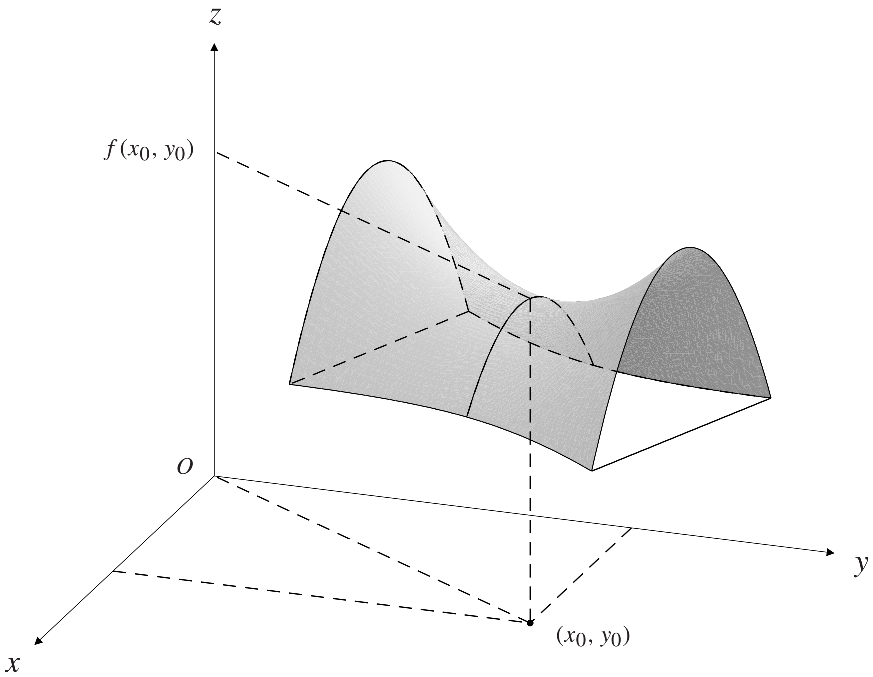
Definice 5.4. Řekneme, že bod (x_0, y_0) je *stacionárním bodem* funkce f, jestliže platí $f_x(x_0, y_0) = 0$ a $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Z předchozí věty potom dostáváme následující nutnou podmínku existence lokálního extrému.

Důsledek 5.5. *Nechť funkce f má v bodě (x_0, y_0), v němž existují první parciální derivace funkce f, lokální extrém. Pak (x_0, y_0) je stacionární bod.*

Ve stacionárním bodě extrém může být, ale nemusí, jak ukazuje obr. 5.2. Na něm je znázorněna funkce $f: z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)(y - y_0)$, která má stacionární bod (x_0, y_0), avšak v tomto bodě není lokální extrém (takový bod se nazývá *sedlo*).

Následující věta udává postačující podmínku existence lokálního extrému pro funkce dvou proměnných.



Obr. 5.2: Stacionární bod typu sedlo

Věta 5.6. *Nechť funkce f má v bodě (x_0, y_0) a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a nechť (x_0, y_0) je její stacionární bod.*
Označme

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y).$$

Pak platí:

1) *Jestliže je $J(x_0, y_0) > 0$, je v bodě (x_0, y_0) ostrý lokální extrém.*
   Je-li $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, je to minimum, je-li $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, je to maximum.
2) *Jestliže je $J(x_0, y_0) < 0$, není v bodě (x_0, y_0) lokální extrém.*
3) *Jestliže je $J(x_0, y_0) = 0$, nedává věta odpověď (extrém zde může být, ale nemusí).*

Důkaz. Naznačíme jen princip důkazu. Vzhledem k předpokladům lze funkci f vyjádřit ve tvaru $f(x, y) = T_2(x, y) + R_2(x, y)$, kde $T_2(x, y)$ je Taylorův mnohočlen se středem v (x_0, y_0). Protože tento bod je stacionární, je první diferenciál nulový a mnohočlen má tvar

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \mathrm{d}^2 f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 +$$
$$+ f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2.$$

Lze ukázat, že v případě 1) je grafem eliptický paraboloid (viz obr. 1.8 a), popř. otočený dolů) a v případě 2) je grafem hyperbolický paraboloid (viz obr. 5.2). V případě 1) tedy má $T_2(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) lokální extrém a v případě 2) nemá. Dále lze ukázat, že v těchto dvou případech je zbytek $R_2(x, y)$ v okolí vyšetřovaného bodu tak malý, že funkce f se chová obdobně. Rozhodující je tedy diferenciál druhého řádu. V případě 1) proto nastane extrém a v případě 2) nenastane. V případě 3) zbytek zanedbat obecně nelze.

Úplný důkaz, provedený poněkud jinou technikou, uvedeme později pro obecnější případ — viz věta 5.20 a důsledek 5.21. □

Poznámka 5.7.

1) Všimněte si, že v případě 1) předchozí věty nemůže být $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$. Jinak by $J(x_0, y_0) = -f_{xy}^2(x, y) \leqq 0$, což je spor. Totéž platí pro $f_{yy}(x_0, y_0)$. Dokonce musejí mít tato čísla stejné znaménko, protože jinak by $f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) < 0$ a bylo by oproti předpokladu $J(x_0, y_0) < 0$. K rozhodnutí o maximu resp. minimu lze tedy použít rovnocenně $f_{yy}(x_0, y_0)$.
2) Ukážeme na příkladech, že v případě 3) extrém může nastat, ale nemusí.
   a) Pro funkci $f\colon z = x^4 + y^4$ je $f_x = 4x^3$, $f_y = 4y^3$ a z rovnic $4x^3 = 0$, $4y^3 = 0$ dostáváme jediný stacionární bod $(0, 0)$. Dále $f_{xx} = 12x^2$, $f_{yy} = 12y^2$, $f_{xy} = 0$, tedy $J(x, y) = 144x^2y^2$ a $J(0, 0) = 0$. V bodě $(0, 0)$ je lokální minimum, protože $f(0, 0) = 0$ a pro libovolné jiné (x, y) (ne jen v okolí) je $f(x, y) > 0$.
   b) Pro funkci $f\colon z = x^3 + y^3$ je $f_x = 3x^2$, $f_y = 3y^2$ a z rovnic $3x^2 = 0$, $3y^2 = 0$ dostáváme jediný stacionární bod $(0, 0)$. Dále $f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 6y$, $f_{xy} = 0$, tedy $J(x, y) = 36xy$ a $J(0, 0) = 0$. V bodě $(0, 0)$ není lokální extrém, protože $f(0, 0) = 0$ a $f(x, 0) = x^3$, takže pro $x > 0$ je $f(x, 0) > 0$ a pro $x < 0$ je $f(x, 0) < 0$, což znamená, že v libovolně malém okolí jsou jak větší tak menší funkční hodnoty než $f(0, 0)$.

Vyšetřování lokálních extrémů tedy můžeme shrnout do následujících bodů:

- Nejprve vytipujeme pomocí věty 5.3 nebo důsledku 5.5 „podezřelé“ body, v nichž by mohl být extrém (v ostatních bodech být nemůže).

  Nejčastěji půjde o nalezení stacionárních bodů, což znamená řešit dvě rovnice pro dvě neznámé. Obecně jde o nelineární rovnice, jejichž řešení může být velmi obtížné. Žádný univerzální postup neexistuje. Pokud je aspoň jedna z nich lineární, je možné z ní vyjádřit jednu proměnnou pomocí druhé a dosadit do zbývající rovnice. Tím dostaneme rovnici (obecně opět nelineární) pro jednu neznámou, jejíž řešení je přece jen snazší. I v případě obou nelineárních rovnic někdy lze z jedné rovnice vyjádřit jednu neznámou pomocí druhé a dosadit nebo nějakými úpravami vyloučit jednu neznámou.

  Často je účinné, pokud se nám podaří rozložit levé strany rovnic na součin; na pravých stranách musí být nula. Aby součin byl nulový, musí být nulový některý činitel. Stačí tudíž kombinovat jednotlivé činitele z obou rovnic, čímž dostaneme několik většinou jednodušších rovnic. Pokud vše selže, nezbývá než použít numerické metody a nalézt kořeny alespoň přibližně.

- O každém „podezřelém“ bodu rozhodneme, zda v něm lokální extrém je nebo není. K tomu použijeme větu 5.6, pokud jsou splněny její předpoklady.

  Pokud její předpoklady splněny nejsou, nebo pokud v případě 3) nedá odpověď, je potřeba použít nějaký speciální obrat. To může být někdy velmi jednoduché, někdy naopak značně netriviální. Univerzální návod bohužel neexistuje.

Příklad 5.8. Najděte lokální extrémy funkce $f\colon z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

Řešení. Funkce f je spojitá v $\mathbb{R}^2$ a má zde spojité parciální derivace (všech řádů). Podle důsledku 5.5 mohou být lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech. Vypočteme první parciální derivace a určíme, kde jsou současně nulové:

$$\begin{aligned} z_x &= 2x + y - 6, \\ z_y &= x + 2y - 9, \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} 2x + y - 6 &= 0, \\ x + 2y - 9 &= 0. \end{aligned}$$

Dostali jsme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, jejímž řešením snadno dostaneme $x = 1$, $y = 4$. Máme tedy jediný „podezřelý“ stacionární bod $(1, 4)$.

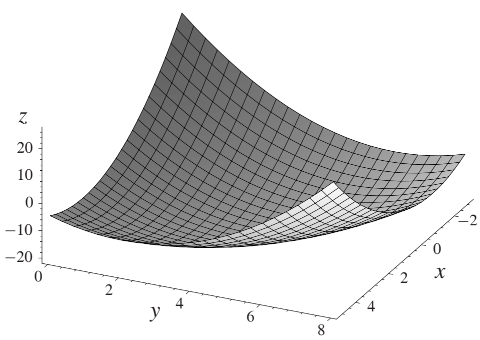
Nyní vypočteme druhé parciální derivace:

$$z_{xx} = 2, \qquad z_{yy} = 2, \qquad z_{xy} = 1.$$

Abychom mohli použít větu 5.6, určíme $J(x, y)$:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

V tomto případě je hodnota konstantní (obecně je to funkce x a y, za něž musíme dosadit souřadnice stacionárních bodů). Protože je kladná, je v bodě $(1, 4)$ ostrý lokální extrém. Jelikož $z_{xx} = 2 > 0$, jde o ostré lokální minimum. Je $f(1, 4) = -21$. Graf funkce je znázorněn na obr. 5.3 (jde o eliptický paraboloid). ▲



Obr. 5.3: Graf funkce $f\colon z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$

Příklad 5.9. Najděte lokální extrémy funkce $f\colon z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Řešení. Funkce f je spojitá v $\mathbb{R}^2$ a má zde spojité parciální derivace (všech řádů). Podle důsledku 5.5 mohou být lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech. Vypočteme první parciální derivace a určíme, kde jsou současně nulové:

$$\begin{aligned} z_x &= 3x^2 - 3y, \\ z_y &= 3y^2 - 3x, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0, \\ 3y^2 - 3x &= 0, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x^2 &= y, \\ y^2 &= x. \end{aligned}$$

Dostali jsme soustavu dvou nelineárních rovnic, ale naštěstí velmi jednoduchou. Z první rovnice lze dosadit do druhé a vzniklou rovnici pak vyřešit. Postupně vyjde:

$$(x^2)^2 = x \quad \Rightarrow \quad x^4 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x^3 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

K rozkladu výrazu $x^3 - 1$ si buď vzpomeneme na středoškolský vzoreček $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, nebo najdeme celočíselný kořen 1 a použijeme např. Hornerovo schéma. Aby vzniklý součin byl roven nule, musí být buď $x = 0$, nebo $x - 1 = 0$, nebo $x^2 + x + 1 = 0$. Ale kvadratická rovnice $x^2 + x + 1 = 0$ má diskriminant $D = 1 - 4 = -3 < 0$, takže má komplexní kořeny, které nás nezajímají. Tedy buď $x = 0$, nebo $x = 1$.

Nyní z rovnice $x^2 = y$ vypočteme, že pro $x = 0$ je $y = 0$ a pro $x = 1$ je $y = 1$. Našli jsme tedy dva stacionární body $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

Při řešení nelineárních rovnic musíme být opatrní. Kdybychom pro určení hodnoty y použili rovnici $y^2 = x$, vyšlo by nám $x = 1 \Rightarrow y = \pm 1$. Ale bod $(1, -1)$ nevyhovuje rovnici $x^2 = y$. Je tedy rozumné (spíše nezbytné) udělat zkoušku všech stacionárních bodů a vyloučit případná chybná řešení. Je důležité při úpravách žádné řešení „neztratit“, ale také nesmíme žádné nesprávné „přidat“.

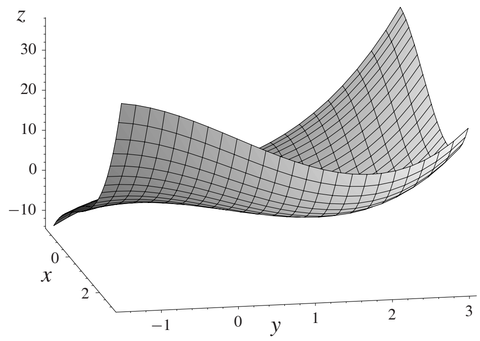
Nyní vypočteme druhé parciální derivace a určíme $J(x, y)$:

$$\begin{aligned} z_{xx} &= 6x, \\ z_{yy} &= 6y, \\ z_{xy} &= -3, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad J(x, y) = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9.$$

Podle věty 5.6 dostaneme:

$$\begin{aligned} J(0, 0) &= -9 < 0 & &\Rightarrow & &\text{v bodě } (0, 0) \text{ není lokální extrém}, \\ J(1, 1) &= 27 > 0 & &\Rightarrow & &\text{v bodě } (1, 1) \text{ je ostrý lokální extrém}. \end{aligned}$$

Protože $z_{xx}(1, 1) = 6 > 0$, jde o ostré lokální minimum. Je $f(1, 1) = -1$. Graf funkce je znázorněn na obr. 5.4. ▲



Obr. 5.4: Graf funkce $f\colon z = x^3 + y^3 - 3xy$

V dalších příkladech uvedeme funkce, které budou mít i neostré lokální extrémy.

Příklad 5.10. Najděte lokální extrémy funkce $f\colon z = (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Řešení. Funkce f je spojitá v $\mathbb{R}^2$ a má zde spojité parciální derivace (všech řádů). Podle důsledku 5.5 mohou být lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech. Vypočteme tedy první parciální derivace (při výpočtu z_y využijeme symetrie):

$$
\begin{aligned}
z_x &= 2x\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(-2x) = 2x(1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2},\\
z_y &= 2y(1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}.
\end{aligned}
$$

Nyní napíšeme rovnice pro stacionární body. Přitom zvážíme, že pro libovolné x a y je $\mathrm{e}^{-x^2-y^2} > 0$:

$$
\begin{aligned}
2x(1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} &= 0,\\
2y(1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} &= 0,
\end{aligned}
\qquad\Rightarrow\qquad
\begin{aligned}
x(1 - x^2 - y^2) &= 0,\\
y(1 - x^2 - y^2) &= 0.
\end{aligned}
$$

Protože obě pravé strany jsou nulové, v každé rovnici musí být aspoň jeden činitel nulový. Pokud platí $1 - x^2 - y^2 = 0$, jsou automaticky splněny obě rovnice. Celkem dostaneme dvě kombinace:

$$
\begin{aligned}
&x = 0,\ y = 0 \quad\Rightarrow\quad (0, 0),\\
&1 - x^2 - y^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad (x, y) \text{ takové, že } x^2 + y^2 = 1.
\end{aligned}
$$

Máme tedy nekonečně mnoho stacionárních bodů: počátek $(0, 0)$ a body na kružnici se středem $(0, 0)$ a poloměrem 1.

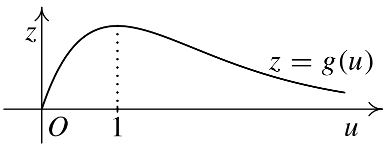
Nejprve si všimneme bodu $(0, 0)$. Je $f(0, 0) = 0$. Pro $(x, y) \neq (0, 0)$ je $x^2 + y^2 > 0$ a $\mathrm{e}^{-x^2-y^2} > 0$, takže pro libovolný bod různý od $(0, 0)$ (ne jen v okolí tohoto bodu) je $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$. Proto je v bodě $(0, 0)$ ostré lokální minimum.

Zkusíme vyšetřit tentýž bod pomocí věty 5.6. Vypočítáme druhé parciální derivace (u z_{yy} využijeme symetrii):

$$
\begin{aligned}
z_{xx} &= (2-6x^2-2y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + (2x-2x^3-2xy^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(-2x) = \\
&= (2-10x^2+4x^4+4x^2y^2-2y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \;\Rightarrow\; z_{xx}(0,0)=2, \\
z_{yy} &= (2-2x^2+4y^4+4x^2y^2-10y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \;\Rightarrow\; z_{yy}(0,0)=2, \\
z_{xy} &= 2x(-2y)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + 2x(1-x^2-y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(-2y) = \\
&= (4x^3y+4xy^3-8xy)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \;\Rightarrow\; z_{xy}(0,0)=0.
\end{aligned}
$$

Dostaneme tudíž $J(0,0) = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 4 > 0$, takže extrém zde je. Protože $z_{xx}(0,0) = 2 > 0$, je to ostré lokální minimum.

Výsledek je pochopitelně stejný, ale výpočet daleko pracnější. Ne vždy je tedy výhodné použití věty 5.6, jiná metoda může být mnohem rychlejší.



Obr. 5.5

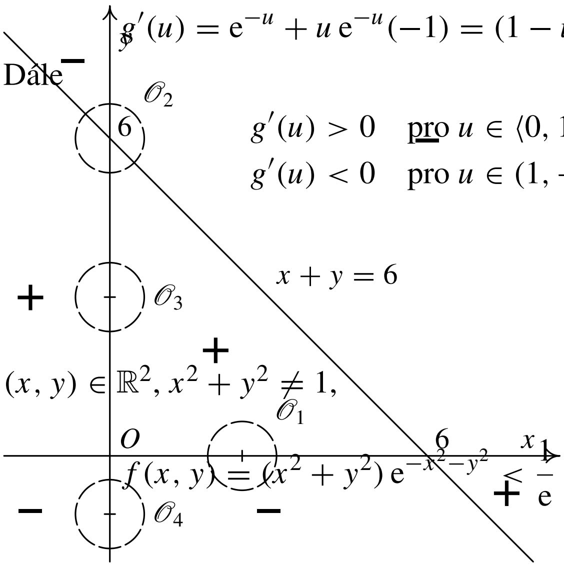
Nyní si všimneme stacionárních bodů na jednotkové kružnici. Je-li $x_0^2 + y_0^2 = 1$, je $f(x_0, y_0) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$, takže funkční hodnota ve všech těchto bodech je stejná. V libovolném okolí takového bodu (x_0, y_0) jsou tedy body se stejnou funkční hodnotou (viz obr. 5.5), takže zde nemůže být ostrý lokální extrém a určitě neplatí $J(x_0, y_0) > 0$. Buď zde extrém není, nebo je neostrý (což pomocí věty 5.6 nelze zjistit). Pokud by vyšlo $J(x_0, y_0) < 0$, extrém by nenastal, pokud by vyšlo $J(x_0, y_0) = 0$ (což skutečně platí, o čemž se po chvíli počítání můžeme přesvědčit — my to zjistíme i bez toho z dalších úvah), odpověď bychom nedostali. Použijeme proto rovnou jiný způsob.

Budeme uvažovat pomocnou funkci jedné proměnné $g(u) = u\,\mathrm{e}^{-u}$, $u \geqq 0$. Ta je nezáporná, spojitá, má spojitou derivaci a $f(x,y) = g(x^2+y^2)$. Vyšetříme její průběh. Je

$$
g'(u) = \mathrm{e}^{-u} + u\,\mathrm{e}^{-u}(-1) = (1-u)\,\mathrm{e}^{-u}, \qquad \text{tedy } g'(u) = 0 \text{ pro } u = 1.
$$

Dále

$$
\begin{aligned}
g'(u) > 0 \quad &\text{pro } u \in \langle 0, 1) \quad \Rightarrow \quad \text{g zde roste,} \\
g'(u) < 0 \quad &\text{pro } u \in (1, +\infty) \quad \Rightarrow \quad \text{g zde klesá.}
\end{aligned}
$$

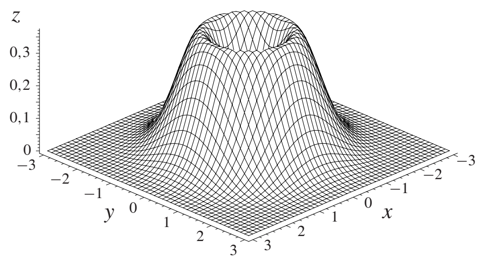


Obr. 5.6

To znamená (viz obr. 5.6), že v $u = 1$ je největší hodnota a pro $u \in \langle 0, +\infty)$, $u \neq 1$, je $g(u) < g(1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Protože $f(x,y) = g(x^2+y^2)$, platí pro libovolné $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2+y^2 \neq 1$,

$$
f(x,y) = (x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} < \frac{1}{\mathrm{e}} = f(x_0, y_0), \qquad \text{kde } x_0^2 + y_0^2 = 1.
$$

Tedy v libovolném bodě ležícím mimo jednotkovou kružnici (ať vně nebo uvnitř) je funkční hodnota menší než v bodech této kružnice. Proto je v libovolném bodě jednotkové kružnice neostré lokální maximum. To potvrzuje, že nutně v těchto bodech platí $J(x_0, y_0) = 0$ a větu 5.6 nelze použít. Graf funkce f („kráter“) je znázorněn na obr. 5.7. ▲



Obr. 5.7: Graf funkce $f\colon z = (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$

Příklad 5.11. Najděte lokální extrémy funkce $f\colon z = x^2y^3(6 - x - y)$.

Řešení. Funkce f je spojitá v $\mathbb{R}^2$ a má zde spojité parciální derivace (všech řádů). Podle důsledku 5.5 mohou být lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech. Vypočteme první parciální derivace:

$$z_x = 2xy^3(6 - x - y) - x^2y^3, \qquad z_y = 3x^2y^2(6 - x - y) - x^2y^3.$$

Pro stacionární body dostaneme:

$$\begin{aligned} 2xy^3(6 - x - y) - x^2y^3 &= 0,\\ 3x^2y^2(6 - x - y) - x^2y^3 &= 0, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} xy^3(12 - 3x - 2y) &= 0,\\ x^2y^2(18 - 3x - 4y) &= 0. \end{aligned}$$

V každé rovnici musí být aspoň jeden činitel nulový. Pro $x = 0$ nebo $y = 0$ jsou splněny automaticky obě rovnice. Celkově dostáváme tři kombinace:

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &\Rightarrow \quad (0, y),\ y \in \mathbb{R}\ (\text{osa } y),\\ y = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x, 0),\ x \in \mathbb{R}\ (\text{osa } x),\\ \begin{aligned} 3x + 2y &= 12,\\ 3x + 4y &= 18, \end{aligned} \quad &\Rightarrow \quad (x, y) = (2, 3). \end{aligned}$$

Máme nekonečně mnoho stacionárních bodů: bod $(2, 3)$ a všechny body na osách x a y.

Nejprve si všimneme bodu $(2, 3)$. Použijeme větu 5.6. Vypočteme druhé parciální derivace a určíme jejich hodnoty v tomto bodě:

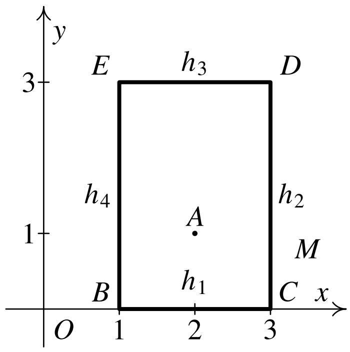
$$\begin{aligned} z_{xx} &= y^3(12 - 3x - 2y) - 3xy^3 & &\Rightarrow & z_{xx}(2, 3) &= -6 \cdot 27,\\ z_{yy} &= 2x^2y(18 - 3x - 4y) - 4x^2y^2 & &\Rightarrow & z_{yy}(2, 3) &= -6 \cdot 24,\\ z_{xy} &= 3xy^2(12 - 3x - 2y) - 2xy^3 & &\Rightarrow & z_{xy}(2, 3) &= -6 \cdot 18. \end{aligned}$$

Je tedy

$$J(2,3) = z_{xx}(2,3)\cdot z_{yy}(2,3) - z_{xy}^2(2,3) = 36\cdot 27\cdot 24 - 36\cdot 18^2 =$$
$$= 36(2^3\cdot 3^4 - 2^2\cdot 3^4) = 36\cdot 2^2\cdot 3^4 > 0,$$

což znamená, že je zde extrém. Protože $z_{xx}(2,3) = -6\cdot 27 < 0$, je to ostré lokální maximum. Platí $f(2,3) = 108$.

Nyní vyšetříme stacionární body na osách x a y. Zřejmě jak $J(x,0) = 0$, tak $J(0,y) = 0$, takže větu 5.6 nelze použít. Dále si všimněme, že $f(x,0) = f(0,y) = 0$, takže ve všech těchto stacionárních bodech je stejná funkční hodnota, a to 0.



Obr. 5.8

Vyšetříme znaménko funkce $f(x,y) = x^2y^3(6-x-y)$. Protože funkce má tvar součinu, je funkční hodnota nulová právě tehdy, když $x = 0$ nebo $y = 0$ nebo $x + y = 6$. To jsou rovnice tří přímek, které nám rozdělí rovinu $\mathbb{R}^2$ na sedm částí — viz obr. 5.8. Ve vnitřních bodech těchto částí je funkční hodnota f nenulová. Jelikož f je všude spojitá, je znaménko uvnitř jednotlivých částí konstantní.

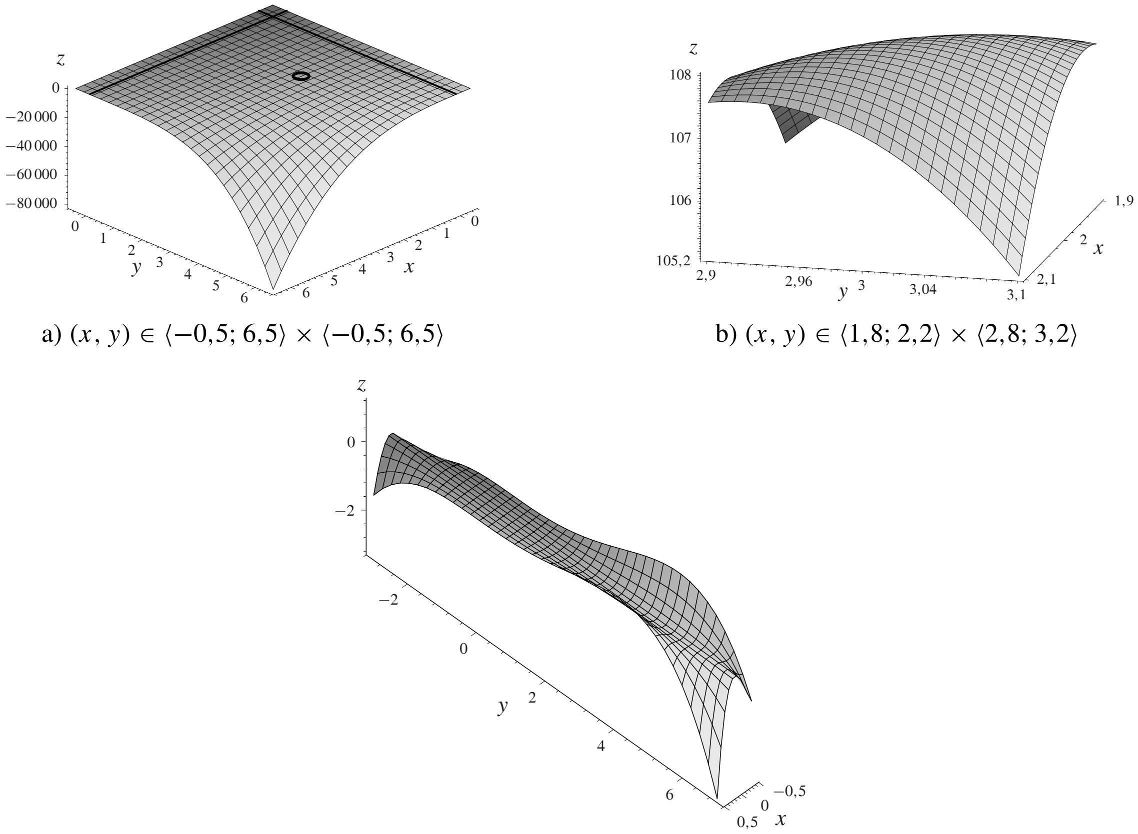
Jinak by totiž existovaly dva různé body (x_1, y_1), (x_2, y_2) v téže části takové, že $f(x_1,y_1)\cdot f(x_2,y_2) < 0$. Úsečka spojující tyto body by ležela celá v příslušné části. Uvažujme funkci f jen na této úsečce. To je jistá funkce jedné proměnné (dosadíme-li parametrické rovnice úsečky do f), která je spojitá na uzavřeném intervalu (oboru parametrů úsečky) a má v krajních bodech tohoto intervalu opačná znaménka. Podle Cauchyovy-Bolzanovy věty (viz [11, str. 225]) existuje vnitřní bod intervalu, v němž je tato funkce rovna nule, tj. uvnitř úsečky je f v některém bodě nulová. To je ale spor (úsečka neprotíná žádnou ze tří přímek, v jejichž bodech je jedině f rovna nule).

Stačí tedy v každé ze sedmi částí určit v jednom vnitřním bodě znaménko f, které je platné pro celý vnitřek této části. Výsledek je znázorněn na obr. 5.8. Nyní už je snadné rozhodnout, ve kterých stacionárních bodech os x a y jsou lokální extrémy a ve kterých ne. Připomeňme, že v těchto bodech je nulová funkční hodnota.

V libovolném okolí bodu na ose x jsou body jak s kladnými tak zápornými funkčními hodnotami, takže zde lokální extrémy nejsou — viz okolí $\mathcal{O}_1$ na obr. 5.8.

Pokud jde o body na ose y, ze stejného důvodu není lokální extrém v bodě $(0,0)$ (to už víme) a $(0,6)$ — viz okolí $\mathcal{O}_2$ na obr. 5.8. V bodech $(0,y)$, $0 < y < 6$, je neostré lokální minimum, protože v dostatečně malém okolí nabývá f jen kladné a nulové hodnoty — viz okolí $\mathcal{O}_3$ na obr. 5.8. V bodech $(0,y)$, $y < 0$ nebo $y > 6$, je neostré lokální maximum, protože v dostatečně malém okolí nabývá f jen záporné a nulové hodnoty — viz okolí $\mathcal{O}_4$ na obr. 5.8.

Graf funkce f je znázorněn na obr. 5.9. Funkce velmi prudce klesá (všimněte si, že měřítko na ose z na obr. 5.9 a) je naprosto odlišné od měřítek na osách x a y). Chování v okolí bodu $(2,3)$, v němž je ostré lokální maximum, je zcela nezřetelné. Kroužek



a) $(x, y) \in \langle -0{,}5; 6{,}5\rangle \times \langle -0{,}5; 6{,}5\rangle$

b) $(x, y) \in \langle 1{,}8; 2{,}2\rangle \times \langle 2{,}8; 3{,}2\rangle$

c) $(x, y) \in \langle -0{,}5; 0{,}5\rangle \times \langle -4; 7\rangle$

Obr. 5.9: Graf funkce $f: z = x^2 y^3 (6 - x - y)$

označuje funkční hodnotu v tomto bodě, která je rovna 108. Tlustší čáry vyznačují hodnoty ve stacionárních bodech na osách x a y (jsou nulové).

Představme si, že bychom chtěli vyrobit model části tohoto grafu a mít na všech osách stejné jednotky, např. centimetry. Pokud bychom vzali za definiční obor množinu $\langle 0, 6\rangle \times \langle 0, 6\rangle$, měli bychom čtverec o straně 6 cm. Funkční hodnoty na dvou stranách tohoto čtverce odpovídajících osám x a y jsou nulové. Funkční hodnota v bodě $(2, 3)$ je však 108, tedy něco přes metr. Ale funkční hodnota v bodě $(6, 6)$ je $-6^6 = -46\,656$, tedy přes 466 metrů hluboko! Pokud bychom čtverec z každé strany zvětšili o půl centimetru, tj. uvažovali definiční obor $\langle -0{,}5; 6{,}5\rangle \times \langle -0{,}5; 6{,}5\rangle$ jako na obr. 5.9 a), byla by hodnota funkce v bodě $(6{,}5; 6{,}5)$ už $-7 \cdot 6{,}5^5 = -81\,220{,}34375$, tudíž přes 812 metrů hluboko!

Nyní je jasné, proč na obr. 5.9 a) není vidět ani chování v lokálním maximu $(2, 3)$, ani v okolí extrémů na ose y. Funkční hodnoty v okolí těchto bodů jsou nepatrné ve srovnání s hodnotami kolem bodu $(6{,}5; 6{,}5)$, takže se zcela „ztratily“.

Na obr. 5.9 b) je detail grafu v okolí bodu (2, 3) a na obr. 5.9 c) zase detail v úzkém pásu kolem osy y. Teprve z něho je částečně vidět, že v úseku mezi 0 a 6 je jakýsi „kaňon“ (jsou zde neostrá lokální minima), jehož „úbočí“ je směrem k bodům (0, 0) a (0, 6) čím dál plošší. V těchto bodech jsou „sedla“ (nejsou tam extrémy) a za nimi má graf tvar „hřbetu“ (jsou zde neostrá lokální maxima). ▲

Představit si chování grafu funkce z předchozího příkladu, jejíž předpis je vcelku velmi jednoduchý a nenaznačuje předem nějaké problémy, je bez možností, které nám poskytují soudobé programy s kvalitním grafickým výstupem jako např. Maple, Mathematica, Matlab, Mathcad apod., velmi obtížné. I s nimi to však nemusí být snadná záležitost a bez důkladného teoretického rozboru nám obrázky jako např. 5.9 a) téměř nic neřeknou. Možnosti těchto programů často vedou uživatele k domněnce, že teorii vlastně vůbec nepotřebují. Předchozí příklad (a to šlo o dost jednoduchou funkci!) snad jasně ukázal, že je to naprostý omyl. Pouze spojením obojího jsme něco rozumného zjistili. Teorie nám řekla, kde hledat zajímavá místa (lokální extrémy), a program nám je zobrazil a umožnil udělat si prostorovou představu.

5.2 Kvadratické formy

Abychom mohli zformulovat dostatečné podmínky existence lokálních extrémů funkcí více proměnných, budeme potřebovat z algebry tzv. kvadratické formy a některé jejich základní vlastnosti.

Kvadratickými formami nazýváme homogenní mnohočleny (neboli polynomy) stupně dva. Podrobněji, je-li $a \in \mathbb{R}$ a $k_1, \dots, k_n$ jsou nezáporná celá čísla, je $ax_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ *jednočlenem*, jehož stupeň je $k_1 + \dots + k_n$. Součet konečně mnoha takových jednočlenů nazýváme *mnohočlen n proměnných*. Jestliže mají všechny jeho členy stejný stupeň, nazývá se tento mnohočlen *homogenní*. A jak již bylo řečeno, homogenní mnohočleny stupně dva se nazývají *kvadratické formy*. Jsou to tedy funkce n reálných proměnných definované na celém $\mathbb{R}^n$, jejichž tvar je

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq n \\ 1 \leqq j \leqq n \\ i<j}} 2a_{ij} x_i x_j. \tag{5.1}$$

Reálná čísla a_{ij} nazýváme koeficienty kvadratické formy. Koeficient u smíšených členů je psán ve tvaru $2a_{ij}$, $i \neq j$, z následujícího důvodu: Sestavíme symetrickou matici $A = (a_{ij})$, tj. $a_{ij} = a_{ji}$. Chápeme-li $\boldsymbol{x}$ jako n-rozměrný sloupcový vektor a znamená-li symbol ^{T} transponování, snadno se ověří vynásobením matic, že platí $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$. Tedy každé kvadratické formě odpovídá symetrická matice a naopak každá symetrická matice určuje nějakou kvadratickou formu.

Další zápis můžeme získat pomocí skalárního součinu. Protože $A\boldsymbol{x}$ je n-rozměrný sloupcový vektor, platí $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle$. V dalším budeme používat právě tento zápis.

Připomeňme ještě, že s kvadratickými formami se setkáváme v rovnicích kuželoseček (pro $n = 2$) a kvadratických ploch (pro $n = 3$) — viz kapitola 9.

Definice 5.12. Symetrická matice A se nazývá

i) *kladně* neboli *pozitivně definitní*, jestliže $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle > 0$ pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$,

ii) *kladně* neboli *pozitivně semidefinitní*, jestliže $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \geqq 0$ pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

iii) *záporně* neboli *negativně definitní*, jestliže $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle < 0$ pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$,

iv) *záporně* neboli *negativně semidefinitní*, jestliže $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \leqq 0$ pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

v) *indefinitní*, jestliže nemá žádnou z předchozích čtyř vlastností.

Společný název pro vlastnosti i) a iii) je *určitě definitní* a pro ii) a iv) *určitě semidefinitní*. Určitě definitní matice je současně určitě semidefinitní stejného typu. Protože symetrickou matici lze jednoznačně ztotožnit s příslušnou kvadratickou formou, mluví se často o kladně definitní kvadratické formě místo matici a obdobně je tomu u ostatních vlastností. Existuje algebraické kritérium, jak zjistit druh definitnosti dané symetrické matice. Souvisí to se znaménkem *minorů*, tj. determinantů podmatic vybraných z matice A. Minor se nazývá *hlavní*, je-li vybrán z týchž řádků a sloupců matice A. Hlavní minor se nazývá *rohový*, je-li vytvořen z prvního až k-tého řádku a sloupce, $1 \leqq k \leqq n$.

Věta 5.13 (Sylvestrovo[1] kritérium). *Nechť A je symetrická matice. Pak platí:*

1) *A je kladně definitní právě tehdy, když všechny její rohové hlavní minory jsou kladné, tj. když*

$$a_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \dots, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

2) *A je záporně definitní právě tehdy, když její rohové hlavní minory pravidelně střídají znaménko počínaje záporným, tj. když*

$$a_{11} < 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \dots, \qquad (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

3) *A je kladně semidefinitní právě tehdy, když všechny její hlavní minory jsou nezáporné.*

4) *A je záporně semidefinitní právě tehdy, když všechny její hlavní minory mající lichý počet řádků jsou nekladné a všechny hlavní minory mající sudý počet řádků jsou nezáporné.*

5) *A je indefinitní právě tehdy, když nenastane žádný z případů 1 až 4.*

Důkaz. Viz např. [12, str. 181]. □

[1]**James Joseph Sylvester** (1814–1897) — anglický matematik. Zabýval se algebrou, teorií invariantů, teorií matic, matematickou fyzikou a teoretickou a aplikovanou kinematikou.

Příklad 5.14. Určete, kdy je kvadratická forma $f(\boldsymbol{x}) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ kladně definitní, kdy záporně definitní, kdy kladně semidefinitní, ale ne definitní, kdy záporně semidefinitní, ale ne definitní a kdy indefinitní.

Řešení. Matice kvadratické formy je $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$. Podle Sylvestrova kritéria je daná forma

1) kladně definitní právě tehdy, když $a > 0$, $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right| = ac - b^2 > 0$,
2) záporně definitní právě tehdy, když $a < 0$, $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right| = ac - b^2 > 0$,
3) kladně semidefinitní právě tehdy, když $a \geqq 0$, $c \geqq 0$, $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right| = ac - b^2 \geqq 0$,
4) záporně semidefinitní právě tehdy, když $a \leqq 0$, $c \leqq 0$, $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right| = ac - b^2 \geqq 0$,
5) indefinitní v ostatních případech.

Výsledek lze podstatně zjednodušit. Je-li $ac - b^2 > 0$, nemůže být rozhodně $a = 0$, a proto nastane případ 1 nebo 2 (a rovněž i 3 nebo 4, protože a a c musí mít stejné znaménko). Je-li $ac - b^2 = 0$, tj. $ac = b^2$, je pro $b = 0$ aspoň jedno z čísel a, c nula a pro $b \neq 0$ jsou a i c nenulová a stejného znaménka. Každopádně tedy nastává případ 3 nebo 4. Případ 5 proto nastane právě pro $ac - b^2 < 0$. Celkově tudíž platí, že kvadratická forma ve dvou proměnných je

i) určitě definitní právě tehdy, když $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right| = ac - b^2 > 0$,
ii) určitě semidefinitní, ale ne definitní právě tehdy, když $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right| = ac - b^2 = 0$,
iii) indefinitní právě tehdy, když $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right| = ac - b^2 < 0$.

Pro kvadratické formy s větším počtem neznámých než dvě podobně jednoduchý výsledek neexistuje. ▲

Kromě Sylvestrova kritéria existuje tzv. Lagrangeův[1] algoritmus, kterým se daná kvadratická forma převede na součty a rozdíly čtverců; z výsledného tvaru je opět vidět typ definitnosti. Postup využívá vzorec

$$(b_1 + \cdots + b_k)^2 = b_1^2 + \cdots + b_k^2 + 2 \sum_{1 \leqq i < j \leqq k} b_i b_j,$$

který je zobecněním elementárního vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Z dané kvadratické formy jsou postupně „ubírány“ druhé mocniny závorek. Jestliže např. ve formě (5.1) je $a_{11} \neq 0$, figuruje x_1 obecně dále ještě v dalších členech v součinech s ostatními neznámými. Z formy (5.1) vyčleníme druhou mocninu závorky tak, že ve zbytku se již nebude vyskytovat neznámá x_1. Využijeme rovnosti

[1]**Joseph Louis Lagrange** (1736–1813) (čti lagranž) — významný francouzský matematik a mechanik. Zabýval se mechanikou, geometrií, diferenciálními rovnicemi, analýzou, algebrou, teorií čísel a dalšími matematickými obory a též teoretickou astronomií. Rozpracoval základní pojmy variačního počtu.

$$a_{11}x_1^2 + 2(a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n) =$$
$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 -$$
$$-\left(\frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 + \cdots + \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}x_n^2\right) - 2\sum_{2\leqq i<j\leqq n}\frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}x_ix_j.$$

Na zbytek kvadratické formy, který obsahuje již pouze $n-1$ neznámých, postup opakujeme atd. Stane-li se, že zbytek formy již neobsahuje žádný kvadrát neznámé, ale pouze smíšené členy, např. $a_{ij}x_ix_j$, $a_{ij} \neq 0$, zavedeme pomocné substituce $x_i = y + z$, $x_j = y - z$, které dosadíme do dosud neupravené části kvadratické formy. Tím dostaneme opět kvadráty neznámých, neboť $x_ix_j = y^2 - z^2$, a můžeme pokračovat v předchozím postupu. Výsledkem úprav bude součet nejvýše n kvadrátů závorek, u nichž jsou kladné nebo záporné koeficienty.

Z definice 5.12 se celkem snadno nahlédne, že platí následující tvrzení:

Forma (5.1) je

1) kladně definitní právě tehdy, když v upraveném tvaru je n kvadrátů závorek a u všech stojí kladné koeficienty,
2) záporně definitní právě tehdy, když v upraveném tvaru je n kvadrátů závorek a u všech stojí záporné koeficienty,
3) kladně semidefinitní právě tehdy, když v upraveném tvaru je méně než n kvadrátů závorek a u všech stojí kladné koeficienty,
4) záporně semidefinitní právě tehdy, když v upraveném tvaru je méně než n kvadrátů závorek a u všech stojí záporné koeficienty,
5) indefinitní právě tehdy, když v upraveném tvaru jsou kvadráty závorek s kladnými i zápornými koeficienty.

Přesné zdůvodnění lze nalézt např. v [12]. Postup si ukážeme na příkladu.

Příklad 5.15. Rozhodněte Lagrangeovou metodou o typu definitnosti kvadratické formy

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4}x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_4.$$

Řešení. Nejprve vyčleníme např. x_1. Dostaneme

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4}x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_4 =$$
$$= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{1}{4}x_2^2 - \frac{1}{4}x_3^2 - \frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4}x_3^2 +$$
$$+ x_2x_3 + x_2x_4 = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{1}{2}x_2x_3 + x_2x_4.$$

Protože nemáme další kvadrát neznámé, použijeme např. substituci $x_2 = y+z, x_3 = y-z$. Dostaneme

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2 + yx_4 + zx_4 = \\
&= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{1}{2}\left(y^2 + 2yx_4\right) - \frac{1}{2}z^2 + zx_4 = \\
&= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{1}{2}(y + x_4)^2 - \frac{1}{2}x_4^2 - \frac{1}{2}z^2 + zx_4 = \\
&= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{1}{2}(y + x_4)^2 - \frac{1}{2}\left(x_4^2 - 2zx_4\right) - \frac{1}{2}z^2 = \\
&= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{1}{2}(y + x_4)^2 - \frac{1}{2}(x_4 - z)^2 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z^2 = \\
&= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{1}{2}(y + x_4)^2 - \frac{1}{2}(x_4 - z)^2 .
\end{aligned}
$$

Dostáváme tři kvadráty, přičemž u dvou je koeficient kladný a u jednoho záporný. Tedy forma je indefinitní. ▲

5.3 Lokální extrémy funkcí více proměnných

Nyní již můžeme přistoupit ke studiu lokálních extrémů funkcí n proměnných, kde $n \in \mathbb{N}$. Výklad tedy zahrne i funkce jedné a dvou proměnných, které byly probírány již dříve. Formulace výsledků i provedení důkazů bude stručnější a elegantnější, ale pro začínajícího čtenáře náročnější. Pokud však čtenář symboliku a zápisy pochopí a osvojí si je, bude moci ocenit jejich přednosti, zejména stručnost, srozumitelnost a přesnost. Elementárnější přístup by byl (zejména pokud jde o zápis) příliš komplikovaný.

Začneme definicí lokálních extrémů. Ta je obdobná jako v případě funkce dvou proměnných — viz definice 5.1. S ohledem na problematiku vázaných extrémů, kterou budeme studovat v kapitole 8, však nebudeme předpokládat, že uvažovaný bod musí být nutně vnitřní.

Definice 5.16. Nechť funkce f je definovaná na množině $A \subset \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{x}_0 \in A$.
Řekneme, že f má v bodě $\boldsymbol{x}_0$ *lokální minimum*, jestliže existuje okolí $\mathscr{O}(\boldsymbol{x}_0)$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathscr{O}(\boldsymbol{x}_0) \cap A$ platí $f(\boldsymbol{x}) \geqq f(\boldsymbol{x}_0)$. Jestliže pro $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$ je dokonce $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}_0)$, mluvíme o *ostrém lokálním minimu*.
Analogicky se definuje *lokální maximum* resp. *ostré lokální maximum*, pouze se uvažuje nerovnost $f(\boldsymbol{x}) \leqq f(\boldsymbol{x}_0)$ resp. $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}_0)$ Společný název je *lokální* resp. *ostré lokální extrémy*.

Poznámka 5.17.

1) Jestliže $\boldsymbol{x}_0$ je vnitřní bod A, lze v definici lokálních extrémů předpokládat, že požadované okolí $\mathscr{O}(\boldsymbol{x}_0)$ je tak malé, že leží celé v definičním oboru funkce f, tj. v A. Tak tomu bylo v definici 5.1 v případě funkcí dvou proměnných. Pokud je ovšem $\boldsymbol{x}_0$ hraniční bod, není f nikdy definovaná na celém okolí tohoto bodu, ať je jakkoliv malé.
2) Funkce f může mít na A více (i nekonečně mnoho) lokálních extrémů. Stačí vzít např. funkci $\sin x$ na celé reálné přímce $\mathbb{R}$. Zkuste najít jiné příklady, kde lokálních extrémů bude nekonečně mnoho, ale funkční hodnoty v nich budou různé.

Označení a terminologie

V další části této kapitoly a rovněž v kapitole 8 budeme převážně pracovat s funkcemi, které mají první nebo druhé (parciální) derivace, popř. další vlastnosti podobného typu. Abychom mohli snáze zformulovat další výsledky, zavedeme některá nová označení.

Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ a $f : A \to \mathbb{R}$. *Derivací* funkce f ve vnitřním bodě $\boldsymbol{x}^*$ rozumíme n-tici $f'(\boldsymbol{x}^*) = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_n}\right)$. Je-li f diferencovatelná v $\boldsymbol{x}^*$, jde vlastně o gradient funkce f v tomto bodě — srovnej část *Pro zájemce* na str. 68.

V analýze je často potřeba vyjádřit, že jedna veličina je „hodně menší“ než druhá. Používá se následující terminologie. Nechť funkce jedné proměnné $\varphi(\alpha)$ a $\psi(\alpha)$ jsou definované v okolí nuly. Řekneme, že $\varphi(\alpha)$ je *„malé o“* $\psi(\alpha)$, a píšeme $\varphi(\alpha) = o(\psi(\alpha))$, pokud platí $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)} = 0$ (tj. čitatel $\varphi(\alpha)$ je v blízkosti nuly mnohem menší než jmenovatel $\psi(\alpha)$).

Skutečnost, že funkce f je *diferencovatelná* v bodě $\boldsymbol{x}^*$, lze pak zapsat takto:

$$f(\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}^*) + \langle f'(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{h}\rangle + o(\|\boldsymbol{h}\|). \tag{5.2}$$

Připomeňme, že pro diferenciál platí

$$\mathrm{d}f_{\boldsymbol{x}^*}(\boldsymbol{h}) = \langle f'(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{h}\rangle = \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_n} h_n.$$

Funkce f se nazývá *spojitě diferencovatelná* v bodě $\boldsymbol{x}^*$, jestliže $f'(\boldsymbol{x}^*)$ existuje v nějakém okolí bodu $\boldsymbol{x}^*$ a je spojitá v $\boldsymbol{x}^*$. Přitom spojitostí n-tice rozumíme spojitost každé její složky. Z kapitoly 3 víme, že ze spojité diferencovatelnosti vyplývá diferencovatelnost, ale opak neplatí.

Druhou derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{x}^*$ rozumíme matici $f''(\boldsymbol{x}^*) = \left(\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, kterou rovněž nazýváme *hessián*.[1] Tedy

$$f''(\boldsymbol{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

[1] **Ludwig Otto Hesse** (1811–1874) — německý matematik. Zabýval se projektivní geometrií, teorií algebraických funkcí a teorií invariantů. Zavedl pojem hessiánu.

Funkce f se nazývá *dvakrát diferencovatelná* v bodě $\boldsymbol{x}^*$, jestliže existuje matice $f''(\boldsymbol{x}^*)$, jež je symetrická, a pro všechna dostatečně malá $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$f(\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}^*) + \langle f'(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{h} \rangle + \frac{1}{2} \langle f''(\boldsymbol{x}^*)\, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h} \rangle + o(\|\boldsymbol{h}\|^2). \tag{5.3}$$

Přitom

$$\langle f''(\boldsymbol{x}^*)\, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j.$$

Všimněte si, že vztahy (5.2) a (5.3) jsou vlastně Taylorovy vzorce řádu jedna a dvě.

Funkce f se nazývá *dvakrát spojitě diferencovatelná* v bodě $\boldsymbol{x}^*$, jestliže $f''(\boldsymbol{x}^*)$ existuje v nějakém okolí bodu $\boldsymbol{x}^*$ a je spojitá v $\boldsymbol{x}^*$. Opět platí, že je-li f dvakrát spojitě diferencovatelná, je i dvakrát diferencovatelná, ale opak neplatí. Symetričnost matice $f''(\boldsymbol{x}^*)$, tj. zaměnitelnost druhých parciálních derivací, je důsledkem Schwarzovy věty 2.12.

Řekneme, že funkce f je diferencovatelná (spojitě diferencovatelná, dvakrát diferencovatelná, dvakrát spojitě diferencovatelná) na množině X, má-li příslušnou vlastnost v každém bodě množiny X. Uvědomte si, že f musí být definovaná v okolí každého bodu množiny X, tedy pokud není X otevřená, musí být f definovaná na nějaké otevřené nadmnožině množiny X.

V dalším se budeme zabývat úlohou, kterou formálně můžeme zapsat následovně:

$$f(\boldsymbol{x}) \to \text{ext}, \qquad \boldsymbol{x} \in P, \quad P = \operatorname{int} P. \tag{5.4}$$

Zápisem $f(\boldsymbol{x}) \to$ ext rozumíme nalezení lokálního extrému, tj. maxima resp. minima funkce f na *otevřené* množině P. (Připomeňme, že int P značí vnitřek množiny P.)

V podmínkách, které odvodíme, se budou vyskytovat první resp. druhé derivace funkce f. V prvním případě mluvíme o *podmínkách prvního řádu*, ve druhém o *podmínkách druhého řádu*.

5.3.1 Podmínky prvního řádu

Věta 5.18. *Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{x}^*$. Je-li v $\boldsymbol{x}^*$ lokální extrém úlohy (5.4), platí $f'(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$.*

Důkaz. Nechť jde např. o lokální minimum. Pak pro libovolný vektor $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ a dostatečně malé α platí $f(\boldsymbol{x}^* + \alpha\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}^*) \geqq 0$. Protože f je v $\boldsymbol{x}^*$ diferencovatelná, je podle (5.2) pro malá kladná (i záporná) α splněno $\langle f'(\boldsymbol{x}^*), \alpha\boldsymbol{h} \rangle + o(\alpha) \geqq 0$. Protože $\langle f'(\boldsymbol{x}^*), \alpha\boldsymbol{h} \rangle = \alpha \langle f'(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{h} \rangle$, dostaneme vydělením číslem $\alpha > 0$ a limitním přechodem (ten zachovává neostré nerovnosti), že

$$0 \leqq \lim_{\alpha \to 0^+} \left[\frac{\langle f'(\boldsymbol{x}^*), \alpha\boldsymbol{h} \rangle}{\alpha} + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \right] = \langle f'(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{h} \rangle + \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = \langle f'(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{h} \rangle.$$

Jelikož $\boldsymbol{h}$ bylo libovolné, můžeme volit např. $\boldsymbol{h} = -f'(\boldsymbol{x}^*)$. Dostáváme tedy, že platí $-\langle f'(\boldsymbol{x}^*), f'(\boldsymbol{x}^*)\rangle \geqq 0$. Avšak podle vlastností skalárního součinu současně platí rovněž $\langle f'(\boldsymbol{x}^*), f'(\boldsymbol{x}^*)\rangle \geqq 0$. To však znamená, že $\langle f'(\boldsymbol{x}^*), f'(\boldsymbol{x}^*)\rangle = 0 = \|f'(\boldsymbol{x}^*)\|^2$. Nulovou normu má ale jedině nulový vektor, tedy $f'(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$, což jsme měli dokázat. □

Protože $f'(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$ právě tehdy, když všechny složky tohoto vektoru, tj. (parciální) derivace v bodě $\boldsymbol{x}^*$, jsou nulové, dostáváme pro $n = 1$ běžně známé tvrzení ze základního kurzu diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné a pro $n = 2$ výsledek z prvního oddílu této kapitoly — viz důsledek 5.5. Body, v nichž $f'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, se nazývají *stacionární*.

Čtenáři, kterému se zdá, že v předchozím důkazu by jako důsledek vztahu (5.2) mělo správně být $o(\|\alpha\boldsymbol{h}\|)$ místo $o(\alpha)$, doporučujeme, aby zvážil, že pro libovolné pevné $\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$ je $o(\|\alpha\boldsymbol{h}\|) = o(|\alpha|\|\boldsymbol{h}\|) = o(|\alpha|) = o(\alpha)$, což se snadno ověří výpočtem příslušných limit. Pro $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$ je platnost příslušné rovnosti triviální. Podobných „prohřešků“ se dopustíme i v dalším textu, aniž na to budeme upozorňovat.

5.3.2 Podmínky druhého řádu

V základním kurzu se obvykle uvádějí jen postačující podmínky druhého řádu. My si uvedeme i nutné podmínky, už proto, že jejich důkaz je poměrně snadný. Současně uvidíme užitečnost různých druhů definitnosti symetrických matic.

Věta 5.19. *Nechť funkce f je dvakrát diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{x}^*$. Je-li v $\boldsymbol{x}^*$ lokální minimum (maximum) úlohy (5.4), je matice $f''(\boldsymbol{x}^*)$ kladně (záporně) semidefinitní.*

Důkaz. Dokážeme tvrzení např. pro lokální minimum. Podle věty 5.18 je $f'(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$. Dále pro libovolné $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ a dostatečně malé číslo $\alpha \neq 0$ z toho, že v $\boldsymbol{x}^*$ je lokální minimum, plyne, že $f(\boldsymbol{x}^* + \alpha\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}^*) \geqq 0$. Tedy z (5.3) dostáváme

$$0 \leqq \frac{1}{2}\langle f''(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{h}), \alpha\boldsymbol{h}\rangle + o(\alpha^2) = \frac{\alpha^2}{2}\langle f''(\boldsymbol{x}^*)\,\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}\rangle + o(\alpha^2).$$

Předchozí vztah vydělíme číslem α^2 a uděláme limitu pro $\alpha \to 0$. Protože je $\lim\limits_{\alpha\to 0} o(\alpha^2)/\alpha^2 = 0$ a limita zachovává neostré nerovnosti, dostáváme odtud, že $\langle f''(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}\rangle \geqq 0$, což je definice kladně semidefinitní matice. □

Nulovost první derivace a semidefinitnost druhé derivace jsou tedy *nutnými podmínkami* existence lokálního extrému úlohy (5.4). Ukazuje se, že když zesílíme semidefinitnost druhé derivace na definitnost, stávají se tyto podmínky *postačujícími* pro existenci lokálního extrému, který je pak dokonce ostrý.

V důkazu následující věty budeme potřebovat některé poznatky o posloupnostech bodů v $\mathbb{R}^n$. Ty lze nalézt např. v [3] nebo [16]. Formálně jsou ale analogické jako u posloupností reálných čísel.

Věta 5.20. *Nechť funkce f je dvakrát diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{x}^*$. Předpokládejme, že $f'(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$ a matice $f''(\boldsymbol{x}^*)$ je kladně (záporně) definitní. Pak má úloha (5.4) v $\boldsymbol{x}^*$ ostré lokální minimum (maximum), které je izolované.*

Důkaz. Nechť např. $f''(\boldsymbol{x}^*)$ je kladně definitní. Připusťme, že v $\boldsymbol{x}^*$ není ostré lokální minimum. Pak libovolně blízko tohoto bodu lze nalézt jiný bod, v němž je funkční hodnota stejná nebo menší. Je tedy možné zkonstruovat posloupnost $\{\boldsymbol{x}_k\}$ takovou, že

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}^*, \qquad \boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}^*, \qquad f(\boldsymbol{x}_k) \leqq f(\boldsymbol{x}^*).$$

Položme $\alpha_k = \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}^*\|$, $\boldsymbol{h}_k = (\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}^*)/\alpha_k$. Pak je $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}^* + \alpha_k \boldsymbol{h}_k$. Protože je $\|\boldsymbol{h}_k\| = 1$, je tato posloupnost ohraničená, a lze z ní tudíž vybrat konvergentní podposloupnost $\{\boldsymbol{h}_{k_l}\}$, $\boldsymbol{h}_{k_l} \to \boldsymbol{h}$, $\|\boldsymbol{h}\| = 1$ (viz např. [16, str. 119]). Pro jednodušší označení předpokládejme, že přímo posloupnost $\{\boldsymbol{h}_k\}$ je konvergentní. Z (5.3) dostáváme

$$\begin{aligned} 0 \geqq f(\boldsymbol{x}_k) - f(\boldsymbol{x}^*) &= \frac{1}{2}\langle f''(\boldsymbol{x}^*)(\alpha_k \boldsymbol{h}_k), \alpha_k \boldsymbol{h}_k\rangle + o(\alpha_k^2) = \\ &= \frac{\alpha_k^2}{2}\langle f''(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{h}_k, \boldsymbol{h}_k\rangle + o(\alpha_k^2). \end{aligned}$$

Po vydělení α_k^2 a limitním přechodu dostaneme, že $\langle f''(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}\rangle \leqq 0$ pro nenulové $\boldsymbol{h}$, což znamená, že $f''(\boldsymbol{x}^*)$ není kladně definitní. To je však spor s předpokladem.

Připusťme nyní, že $\boldsymbol{x}^*$ není izolovaný lokální extrém. Pak libovolně blízko tohoto bodu lze nalézt jiný bod, v němž je lokální extrém. Je tedy možné zkonstruovat posloupnost $\{\boldsymbol{x}_k\}$ takovou, že

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}^*, \qquad \boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}^*, \qquad f \text{ má v } \boldsymbol{x}_k \text{ lokální extrém.}$$

Analogicky jako v první části důkazu při stejném označení najdeme konvergentní posloupnost $\boldsymbol{h}_k$. Nyní výraz $\langle \boldsymbol{h}_k, f'(\boldsymbol{x}_k)\rangle$ vyjádříme pomocí (5.2). Podle tohoto vztahu platí

$$\begin{aligned} f_{x_1}(\boldsymbol{x}_k) - f_{x_1}(\boldsymbol{x}^*) &= \langle f'_{x_1}(\boldsymbol{x}^*), \alpha_k \boldsymbol{h}_k\rangle + o(\alpha_k), \\ f_{x_2}(\boldsymbol{x}_k) - f_{x_2}(\boldsymbol{x}^*) &= \langle f'_{x_2}(\boldsymbol{x}^*), \alpha_k \boldsymbol{h}_k\rangle + o(\alpha_k), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{x_n}(\boldsymbol{x}_k) - f_{x_n}(\boldsymbol{x}^*) &= \langle f'_{x_n}(\boldsymbol{x}^*), \alpha_k \boldsymbol{h}_k\rangle + o(\alpha_k). \end{aligned}$$

Nyní první rovnost vynásobíme h_1, druhou h_2 atd. až poslední h_n a všechny je sečteme. Uvědomíme-li si, že $f'_{x_i}(\boldsymbol{x}^*) = (f_{x_i x_1}(\boldsymbol{x}^*), \dots, f_{x_i x_1}(\boldsymbol{x}^*))$, $i = 1, \dots, n$, dostaneme, že

$$\langle \boldsymbol{h}_k, f'(\boldsymbol{x}_k)\rangle = \langle \boldsymbol{h}_k, f'(\boldsymbol{x}^*)\rangle + \langle \boldsymbol{h}_k, f''(\boldsymbol{x}^*)\alpha_k \boldsymbol{h}_k\rangle + o(\alpha_k).$$

Podle věty 5.18 je $f'(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{0}$ a rovněž $f'(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$. Tedy

$$0 = \alpha_k \langle \boldsymbol{h}_k, f''(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{h}_k\rangle + o(\alpha_k).$$

Po vydělení α_k a limitním přechodu dostaneme, že $\langle f''(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}\rangle = 0$ pro nenulové $\boldsymbol{h}$, což je opět spor. □

Z důkazu je zřejmé, že v jistém okolí bodu $\boldsymbol{x}^*$ nemůže být ani žádný stacionární bod různý od $\boldsymbol{x}^*$.

Z předchozích dvou vět a příkladu 5.14 dostáváme bezprostředně následující výsledek, který je mírným zobecněním věty 5.6 (navíc je tvrzení o izolovanosti).

Důsledek 5.21. *Nechť funkce dvou proměnných $f(x, y)$ je definovaná na otevřené množině P a má spojité druhé parciální derivace v bodě (x_0, y_0). Nechť dále platí $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.*

1) *Je-li $f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$, je v bodě (x_0, y_0) izolovaný ostrý lokální extrém. Pro $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ je to minimum, pro $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ je to maximum.*
2) *Je-li $f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) < 0$, není v bodě (x_0, y_0) lokální extrém.*
3) *Je-li $f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) = 0$, může, ale nemusí být v bodě (x_0, y_0) lokální extrém.*

Postup budeme ilustrovat na příkladech.

Příklad 5.22. Najděte lokální extrémy funkce $f(\boldsymbol{x}) = x_1^4 + x_2^4 - 4x_1x_2$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$.

Řešení. Tento úlohu jsme mohli řešit už v úvodním oddílu této kapitoly — srovnejte podobný příklad 5.9. Nyní ale provedeme řešení v „nové“ symbolice.

Funkce f má spojité parciální derivace všech řádů, zejména je tedy v každém bodě dvakrát diferencovatelná. Nejprve musíme podle věty 5.18 určit „podezřelé“ čili stacionární body. Spočítáme první derivaci a položíme ji rovnu nule:

$$f'(\boldsymbol{x}) = (f_{x_1}, f_{x_2}) = (4x_1^3 - 4x_2, 4x_2^3 - 4x_1) = (0, 0).$$

Dostáváme rovnice $x_1^3 = x_2$, $x_2^3 = x_1$. Dosazením první rovnice do druhé vyjde

$$x_1^9 = x_1 \quad \Longrightarrow \quad x_1(x_1 - 1)(x_1 + 1)(x_1^2 + 1)(x_1^4 + 1) = 0,$$

odkud

$$x_1 = 0 \ \text{ nebo } \ x_1 = -1 \ \text{ nebo } \ x_1 = 1.$$

Z rovnice $x_2 = x_1^3$ určíme odpovídající hodnoty $x_2 = 0$, $x_2 = -1$ resp. $x_2 = 1$. Celkově existují tři stacionární body $A = (0, 0)$, $B = (-1, -1)$ a $C = (1, 1)$. Jen v těchto bodech mohou být lokální extrémy.

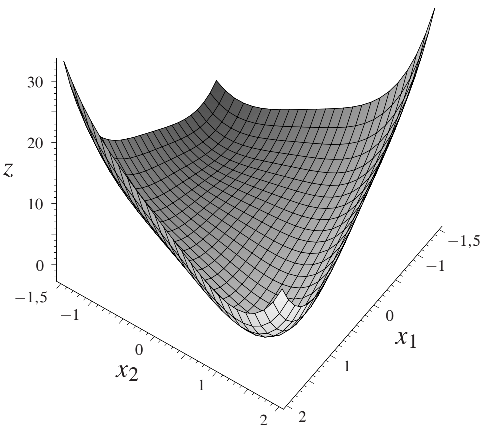
Dále vypočteme druhou derivaci:

$$f''(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & -4 \\ -4 & 12x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Odtud

$$\det f''(A) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16, \qquad \det f''(B) = \det f''(C) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 128.$$

Podle důsledku 5.21 v bodě A není lokální extrém a v bodech B a C jsou izolované ostré lokální extrémy, a to minima s hodnotami $f(-1, -1) = f(1, 1) = -2$. Graf funkce je znázorněn na obr. 5.10. ▲



Obr. 5.10: Graf funkce $f\colon z = x_1^4 + x_2^4 - 4x_1x_2$

Příklad 5.23. Najděte lokální extrémy funkce

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1^3 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - 3x_1x_3 - 2x_2 + 2x_3,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Řešení. Stejně jako v předchozím případě jsou splněny požadavky na hladkost funkce f, protože funkce f má spojité parciální derivace všech řádů. Pro stacionární body je

$$f'(\boldsymbol{x}) = (3x_1^2 - 3x_3, 2x_2 - 2, x_3 - 3x_1 + 2) = (0, 0, 0),$$

tj.

$$x_1^2 = x_3, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 3x_1 - 2.$$

Dosazením třetí rovnice do první vyjde kvadratická rovnice $x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0$, která má dvě řešení $x_1 = 1$ a $x_1 = 2$. Ze třetí rovnice dostaneme po řadě odpovídající hodnoty $x_3 = 1$ a $x_3 = 4$. Existují tedy dva stacionární body $A = (1, 1, 1)$ a $B = (2, 1, 4)$.

Druhá derivace je

$$f''(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

K posouzení jejího typu definitnosti použijeme Lagrangeovu metodu.

V bodě A má kvadratická forma tvar

$$\langle f''(1, 1, 1)\,\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}\rangle = 6h_1^2 + 2h_2^2 + h_3^2 - 6h_1h_3 = 6\Big(h_1 - \frac{1}{2}h_3\Big)^2 + 2h_2^2 - \frac{1}{2}h_3^2$$

a je indefinitní. Není tedy splněna nutná podmínka (semidefinitnost) z věty 5.19, a proto v bodě A není lokální extrém.

V bodě B má kvadratická forma tvar

$$\langle f''(2,1,4)\,\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}\rangle = 12h_1^2 + 2h_2^2 + h_3^2 - 6h_1h_3 = 12\Big(h_1 - \frac{1}{4}\,h_3\Big)^2 + 2h_2^2 + \frac{1}{4}\,h_3^2$$

a je kladně definitní. Podle věty 5.20 je tedy v bodě B ostré lokální minimum, jehož hodnota je $f(2,1,4) = -1$. ▲

Poznámka 5.24. Věta 5.18 nám dává pro nalezení stacionárních bodů obecně soustavu n nelineárních rovnic. Její řešení může být velmi obtížné nebo explicitně vůbec neproveditelné. Pak by bylo nutné použití numerických metod. Tato situace může nastat už i u algebraických rovnic, tj. rovnic, na jejichž stranách stojí mnohočleny jedné nebo více proměnných. Stejné komplikace budou i v další části textu týkající se vázaných extrémů. Z tohoto pohledu lze nalezení stacionárních bodů považovat za nejobtížnější místo při hledání lokálních extrémů. Uváděné příklady jsou pochopitelně voleny tak, aby stacionární body bylo možné explicitně a bez velkých obtíží určit. Čtenář by však neměl propadnout dojmu, že je tomu tak vždy. Hlavně u úloh vzniklých při řešení reálných problémů např. z inženýrské praxe je situace zcela jiná a bez numerických metod se většinou neobejdeme.

Pojmy k zapamatování

— stacionární body funkcí dvou (a více) proměnných
— lokální extrémy funkce dvou (a více) proměnných
— lokální minimum (maximum) funkce dvou (a více) proměnných
— ostré lokální minimum (maximum) funkce dvou (a více) proměnných
— neostré lokální minimum (maximum) funkce dvou (a více) proměnných
— kladně (záporně) definitní symetrická matice
— kladně (záporně) semidefinitní symetrická matice
— indefinitní symetrická matice
— kvadratické formy
— kladně (záporně) definitní kvadratická forma
— kladně (záporně) semidefinitní kvadratická forma
— indefinitní kvadratická forma
— Lagrangeův algoritmus
— Sylvestrovo kritérium
— izolovaný lokální extrém

? Kontrolní otázky

1. Jaká je nutná podmínka pro existenci lokálního extrému funkce dvou (a více) proměnných?
2. Jaká je postačující podmínka pro existenci lokálního extrému funkce dvou (a více) proměnných?
3. Na základě čeho můžete rozhodnout, zda ve stacionárním bodě nastane extrém funkce dvou (a více) proměnných?
4. Jak určíte typ daného extrému — tj. lokální minimum či maximum — funkce dvou (a více) proměnných?
5. Podle jakých skutečností rozhodnete, zda se jedná o ostrý či neostrý extrém funkce dvou (a více) proměnných?
6. Načrtněte příklad grafu funkce, která má v daném bodě ostré (resp. neostré) lokální maximum.
7. Bod, ve kterém může nastat lokální extrém, je vzhledem k množině $A \subset \mathbb{R}^2$ na níž je funkce definována:
   - vnitřní,
   - vnější,
   - hraniční?
8. Co jsou to kvadratické formy a k čemu nám slouží?
9. Kdy se symetrická matice A nazývá:
   - kladně definitní,
   - záporně definitní,
   - kladně semidefinitní,
   - záporně semidefinitní?
10. Kdy se symetrická matice A nazývá:
    - určitě definitní,
    - určitě semidefinitní,
    - indefinitní?

! Příklady k procvičení

1. Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$:

a)	$z = 1 + 6y - y^2 - xy - x^2$,	b)	$z = 4 - (x-2)^2 - (y+3)^2$,
c)	$z = 5 + 6x - 4x^2 - 3y^2$,	d)	$z = x(x-1) + y(y-1) - xy + 2$,
e)	$z = x(x-6) + y(y-9) + xy$,	f)	$z = 2x^2 - 6xy + 5y^2 - x + 3y + 2$,

g) $z = x^2 - 2y^2 - 3x + 5y - 1$, h) $z = x^2 - y^2 + 2x - 2y$,
i) $z = x^3 + y^3 - 18xy + 215$, j) $z = 27x^2y + 14y^3 - 69y - 54x$,
k) $z = x^4 + y^4 + 4(x^3 - y^3) + 5(x^2 + y^2) + 4(x - y) - 2xy + 2$,

2. Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$:

a) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, b) $z = \mathrm{e}^{x^2-y}(5 - 2x + y)$,
c) $z = (x - y + 6)^2$, d) $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$,
e) $z = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$, f) $z = xy\ln(x^2 + y^2)$,
g) $z = (x + y^2)\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, h) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$,
i) $z = (x - 1)^3(y + 2)^3$, j) $z = x^2 + 4xy + 6y^2 - 2x + 8y - 5$,
k) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$, l) $z = x^4 - 3x^2y + 3y - y^3$,
m) $z = x^3 - 3x^2 + y^3 - 3y + 1$, n) $z = \mathrm{e}^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.

3. Najděte lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$:

a) $z = -3x^4 - 5y^4$, b) $z = x^2 + xy + y^2 + 9x + 6y$,
c) $z = 2xy - 2x - 4y$, d) $z = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$,
e) $z = x^3 - 3xy - y^3$, f) $z = (5x + 7y - 25)\,\mathrm{e}^{-(x^2+xy+y^2)}$,
g) $z = (x^2 + y)\,\mathrm{e}^y$, h) $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$, $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$,
i) $z = x^3 + 27y^3 - 6xy + 11$,
j) $z = 3(x^2 + y^2)^2$, k) $z = 8x^3 + y^3 - 6xy + 4$,
l) $z = x^3 + xy^2 + 6xy$, m) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$,
n) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ o) $z = \sin x + \sin y + \sin(x - y)$, $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$,
p) $z = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$,
q) $z = xy(4 - x - y)$, r) $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$,
s) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$, t) $z = x^2 + xy + y^2 - \ln x - \ln y$,
u) $z = y\sqrt{1 + x} + x\sqrt{1 + y}$, v) $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$, $a \in \mathbb{R}$.

4. Najděte lokální extrémy funkce $u = f(x, y, z)$:

a) $u = xyz(12 - x - 2y - 3z)$, b) $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $x, y, z > 0$,
c) $u = \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{xz} + \frac{z^2}{xy}$, $x, y, z > 0$,
d) $u = x_1x_2^2 \cdot \dots \cdot x_n^n(1 - x_1 - 2x_2 - \ldots - nx_n)$, $x_1, x_1, \ldots, x_n > 0$,
e) $u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n}$, $x_1, \ldots, x_n > 0$.
f) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$, g) $u = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$,
h) $u = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{2}$, $x, y, z > 0$, i) $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

Nápověda: V d) užijte AG nerovnost.

Klíč k příkladům k procvičení

V následujícím m značí lokální minimum, M lokální maximum a S stacionární bod, v němž není lokální extrém.

1. a) $M(-2, 4)$, b) $M(2, -3)$, c) $M\left(\frac{3}{4}, 0\right)$, d) $m(1, 1)$,
e) $m(1, 4)$, f) $m\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$, g) $S\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$, h) $S(-1, -1)$,

i) $m(6,6)$, $S(0,0)$, j) $m(1,1)$, $M(-1,-1)$, $S\left(\frac{\sqrt{14}}{3}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$, $S\left(-\frac{\sqrt{14}}{3}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$,
k) $m(0,2)$, $m(-2,0)$, $S(-1,1)$.

2. a) $M(0,0)$, b) $S(1,-2)$, c) m v bodech přímky $x - y + 6 = 0$,
d) $m(1,2)$, e) $m(2,2)$,
f) $m\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $M\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $S(\pm 1, 0)$, $S(0, \pm 1)$, g) $m(-2,0)$,
h) $m(0,0)$, $S\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$, $S(1, \pm 4)$, i) $S(1, y)$, $S(x, -2)$, $x, y \in \mathbb{R}$,
j) $m(7,-3)$, k) $m(1,1)$, $m(-1,-1)$, $S(0,0)$,
l) $m(0,-1)$, $M(0,1)$, $m\left(\pm\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$, $S\left(\pm\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$,
m) $M(0,-1)$, $m(2,1)$, $S(0,1)$, $S(2,-1)$, n) $m(0,0)$, $S\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$.

Návod: V k) u $S(-1,1)$ zvažte, že $f(x,y) = \mathrm{d}^4 f(-1,1)$, do diferenciálu dosaďte $u = x + 1$, $v = y - 1$, výraz upravte a vyšetřete v okolí $(0,0)$.

3. a) $M(0,0)$, b) $m(-4,-1)$, c) $S(2,1)$, d) $M(6,4)$,
e) $M(-1,1)$, $S(0,0)$, f) $M(1,3)$, $m\left(-\frac{1}{26}, -\frac{3}{26}\right)$, g) $m(0,-1)$,
h) $M\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, i) $m\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{9}\right)$, $S(0,0)$, j) $m(0,0)$,
k) $m\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $S(0,0)$, l) $m(\sqrt{3}, -3)$, $M(-\sqrt{3}, -3)$, $S(0,0)$, $S(0,-6)$,
m) $M(4,4)$, n) $m(5,2)$, o) $M\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, p) $m(1,0)$,
q) $M\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $S(0,0)$, $S(0,4)$, $S(4,0)$, r) $S(1,1)$, s) $M(2,-2)$,
t) $m(1,1)$, u) $m\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, v) $m\left(\frac{a}{\sqrt[3]{3}}, \frac{a}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

4. a) $M\left(3, \frac{3}{2}, 1\right)$, $u_{\max} = \frac{27}{2}$, b) $m(\frac{1}{2}, 1, 1)$, $u_{\min} = 4$,
c) lokální minima splňující podmínku $x = y = z = t$, $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$,
d) $M(x_1 = \dots = x_n = \frac{2}{n^2+n+2})$, $u_{\max} = \left(\frac{2}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$,
e) $m(x_1 = 2^{\frac{1}{n+1}}, x_2 = 2^{\frac{2}{n+1}}, \dots, x_n = 2^{\frac{n}{n+1}})$, $u_{\min} = (n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$,
f) $m(-1,-2,3)$, $u_{\min} = -14$, g) nemá lokální extrém,
h) $m\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{2}\right)$, $u_{\min} = \frac{15}{8} \cdot \sqrt[3]{4}$, i) $S(0,0,-1)$, $m(24,-144,-1)$, $u_{\min} = -6913$.

Kapitola 6

Globální extrémy funkcí

Průvodce studiem

Na rozdíl od předchozí kapitoly, kde nás zajímalo lokální chování funkcí dvou (resp. více) proměnných, tj. pouze v okolí nějakého bodu, budeme teď studovat jejich chování na celém definičním oboru a hledat body s největšími a nejmenšími funkčními hodnotami. Hledání těchto bodů je obecně obtížné. Proto se omezíme pouze na definici a vyšetřování ve speciálním případě, kdy bude existence toho, co hledáme, zajištěna. Uvedeme si obdobu Weierstrassovy věty pro funkci jedné proměnné, která nám existenci extrému zaručí. Pouze na jednom slovním příkladu si ukážeme, jaké problémy lze obecně očekávat a jak se přistupuje k jejich řešení.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- rozhodnout o existenci globálních extrémů funkce dvou (resp. více) proměnných,
- rozhodnout, zda ve stacionárním bodě funkce dvou (resp. více) proměnných nastane globální extrém,
- určit typ globálního extrému funkce dvou (resp. více) proměnných.

Definice 6.1. Uvažujme funkci $f(x, y)$ na množině $M \subset D(f) \subset \mathbb{R}^2$. Řekneme, že funkce f nabývá v bodě $(x_0, y_0) \in M$ *globálního* neboli *absolutního maxima* na M, jestliže pro každé $(x, y) \in M$ platí $f(x_0, y_0) \geqq f(x, y)$.
Analogicky definujeme *globální* neboli *absolutní minimum*. Společný název je *globální* neboli *absolutní extrémy*.

Poznámka 6.2.
1) Bod, ve kterém nabývá funkce své největší nebo nejmenší hodnoty, nemusí být jediný. Např. o funkci $f\colon z = (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ z příkladu 5.10 jsme ukázali, že

$$f(0,0) = 0 \leqq (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \leqq \frac{1}{\mathrm{e}} = f(x_0, y_0), \qquad \text{kde } x_0^2 + y_0^2 = 1.$$

To znamená, že v bodě $(0, 0)$ je globální minimum a v bodech jednotkové kružnice, kterých je nekonečně mnoho, jsou globální maxima. Hodnota globálního minima je 0 a hodnota globálního maxima je $1/\mathrm{e}$ — viz obr. 5.7.

2) Globální extrémy (jeden nebo oba) nemusí existovat. Podívejme se na několik příkladů.

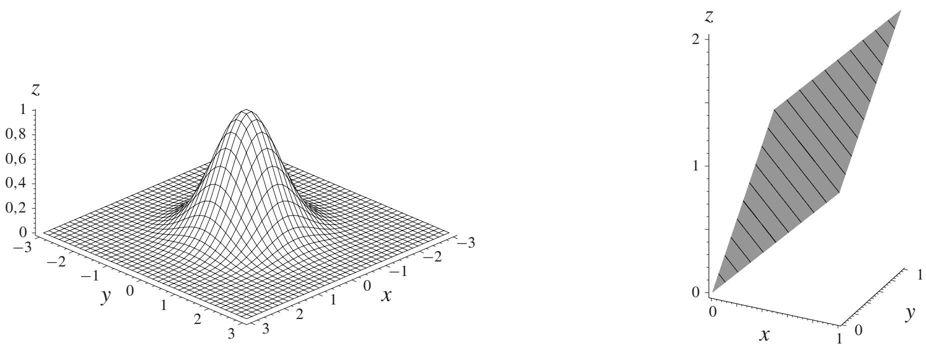
- Funkce $f: z = x + y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nabývá jak libovolně velkých hodnot (když x a y budou velká kladná čísla) tak libovolně malých hodnot (když x a y budou velká záporná čísla). Žádná funkční hodnota tedy nebude ani největší ani nejmenší. Důvodem neexistence globálních extrémů je neohraničenost množiny funkčních hodnot.

- Funkce $g: z = \operatorname{tg} x$, $(x, y) \in (-\pi/2, \pi/2) \times (-1, 1)$ (že explicitně nezávisí na y, nevadí) je rovněž neohraničená shora i zdola, protože funkce tangens je na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ shora i zdola neohraničená. Na rozdíl od předchozího příkladu je její definiční obor ohraničený.

- Funkce $h: z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nabývá v bodě $(0, 0)$ globálního maxima. Je totiž $h(0, 0) = \mathrm{e}^0 = 1$. Protože pro $(x, y) \neq (0, 0)$ je $-x^2 - y^2 < 0$ a exponenciála e^u je rostoucí, je $\mathrm{e}^{-x^2-y^2} < \mathrm{e}^0 = 1$. Tato funkce ale nemá globální minimum. Pro (v absolutní hodnotě) velká x a y je $-x^2 - y^2$ velmi malé. Protože $\lim\limits_{u \to -\infty} \mathrm{e}^u = 0$, nabývá funkce h libovolně malých kladných hodnot, ale nuly nikdy nedosáhne, protože exponenciála je vždy kladná — viz obr. 6.1 a). Definiční obor je neohraničený.

- Pokud bychom změnili definici funkce h v bodě $(0, 0)$ a položili $h(0, 0) = 1/2$, neexistovalo by ani globální maximum. V okolí počátku by se totiž funkční hodnoty přibližovaly jedné, ale této hodnoty změněná funkce h nenabývá (počátek byl jediným takovým bodem). Všimněte si, že po předefinování by přestala být h spojitá v počátku.

- Funkce $k: z = x + y$, $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$, nemá žádný globální extrém. Platí $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, takže $0 < x + y < 2$. Obor hodnot je tudíž otevřený interval $(0, 2)$, který neobsahuje ani nejmenší ani největší číslo — viz obr. 6.1 b). Definiční obor je tentokrát ohraničený.



a) $h: z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ b) $k: z = x + y$

Obr. 6.1: Grafy funkcí

3) Při vyšetřování globálních extrémů často neuvažujeme funkce na maximálních definičních oborech, které předpisy funkcí připouštějí. Viz definice 6.1, kde $M \subset D(f)$, ale může být $M \neq D(f)$. Na to nesmíme zapomínat, abychom omylem nezahrnuli i funkční hodnoty v bodech ležících sice v $D(f)$, ale neležících v M — viz funkce k z předchozího příkladu, jejíž maximální definiční obor by byl $\mathbb{R}^2$.

Viděli jsme, že důvody neexistence globálních extrémů jsou v podstatě dva: Buď je množina funkčních hodnot neohraničená, nebo se hodnoty neomezeně přibližují nějakému číslu, ale nikdy je nedosáhnou. Předpoklady následující věty, která je obdobou tvrzení pro funkce jedné proměnné, zajišťují, že se nic takového nemůže stát. Předchozí příklady ukazují, že žádný z předpokladů nelze vynechat.

Věta 6.3 (Weierstrass[1]). *Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá na ohraničené a uzavřené množině $M \subset D(f)$. Pak existují globální extrémy této funkce na M, tj. existují body $(x_1, y_1) \in M$ a $(x_2, y_2) \in M$ takové, že $f(x_1, y_1) \leqq f(x, y) \leqq f(x_2, y_2)$ pro libovolné $(x, y) \in M$.*

Při vyšetřování globálních extrémů funkce $f(x, y)$, $(x, y) \in M \subset D(f)$, vyjdeme z toho, že tyto extrémy existují. To většinou zaručíme pomocí předchozí věty. Pak je možné postupovat podle následujícího návodu. Zdůrazněme ještě jednou, že předpokládáme, že to, co hledáme, existuje! Pokud tomu tak není, můžeme dostat naprostý nesmysl (najdeme něco, co neexistuje).

Jestliže extrém nastane v bodě $(x_0, y_0) \in M \subset D(f)$, pak je tento bod buď vnitřním nebo hraničním bodem M.

1) Je-li to vnitřní bod, pak je funkce f definovaná v jistém okolí tohoto bodu, a tudíž zde má rovněž lokální extrém. Podle věty 5.3 resp. důsledku 5.5 najdeme body, v nichž některá parciální derivace neexistuje, nebo je nulová. V nich vypočteme funkční hodnoty. Nebudeme zjišťovat, zda jde skutečně o lokální extrémy. Tím sice možná zbytečně zahrneme některé „přebytečné“ body, ale rozhodování, zda jde o extrém nebo ne, je obvykle mnohem pracnější než (zbytečný) výpočet funkční hodnoty. Body „neprávem“ zahrnuté se stejně neuplatní.
2) Je-li to hraniční bod, musíme vyšetřit hodnoty f na hranici množiny $M \subset D(f)$. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že hranice je tvořena „rozumnými“ křivkami. Přesněji, hranici lze rozdělit na části, které představují grafy funkce jedné proměnné tvaru $y = g(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ nebo $x = g(y)$, $y \in \langle a, b\rangle$, popř. obecněji jsou popsané tzv. parametrickými rovnicemi tvaru $x = g(t)$, $y = h(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ (speciálním případem jsou parametrické rovnice přímky).
   Rovnice hranice dosadíme do funkce $f(x, y)$. Podle typů dostaneme $f[x, g(x)]$ nebo $f[g(y), y]$, popř. $f[g(t), h(t)]$, čímž úlohu převedeme na vyšetřování globálních extrémů funkce jedné proměnné na intervalu $\langle a, b\rangle$ — viz [11, str. 287]. I zde platilo, že

[1] **Karl Theodor Wilhelm Weierstrass** (1815–1897) (čti vajerštras) — významný německý matematik. Zabýval se matematickou analýzou, analytickými funkcemi, variačním počtem, diferenciální geometrií a lineární algebrou. Jeden z nejvýznamnějších matematiků všech dob.

extrém může být pouze ve vnitřním bodě intervalu, kde je současně lokální extrém, nebo v krajním bodě intervalu.
Najdeme všechny „podezřelé“ body (opět nerozhodujeme, zda jde skutečně o lokální extrémy) pro všechny části hranice a vypočteme v nich funkční hodnoty funkce f.

3) Ze všech takto získaných funkčních hodnot vybereme největší a nejmenší. Ty představují globální maximum a minimum vyšetřované funkce.

Pokud není zaručena existence globálních extrémů, předchozí postup v podstatě dává největší lokální maxima resp. nejmenší lokální minima. To však rozhodně nemusí být globální extrémy (funkce může být např. neohraničená). Nicméně i v tomto případě můžeme říci, že jinde než ve vytipovaných bodech globální extrémy být nemohou. Musíme však nakonec dokázat, zda o globální extrémy jde nebo ne. To může být jednodušší, když už víme, kolik by extremální hodnota mohla jedině být a ve kterém bodě by nastala. Neexistuje ovšem žádný univerzální návod, jak postupovat, a obecně jde o velmi obtížnou úlohu.

Příklad 6.4. Najděte globální extrémy funkce $f\colon z = x^2 + 4xy - 8x - 8y + 20$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqq x \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq 3\}$.

Řešení. Uvažovaným oborem je obdélník. Protože je to uzavřená a ohraničená množina a funkce f je spojitá (dokonce na $\mathbb{R}^2$ — jde o mnohočlen), globální extrémy podle věty 6.3 existují. Podle předchozího návodu si všimneme nejprve lokálních extrémů uvnitř tohoto obdélníku. Protože f má parciální derivace (všech řádů), lokální extrémy mohou podle důsledku 5.5 nastat pouze ve stacionárních bodech.

$$\begin{aligned} f_x &= 2x + 4y - 8, \\ f_y &= 4x - 8, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2x + 4y &= 8, \\ 4x &= 8, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x = 2, \quad y = 1.$$

Protože stacionární bod $A = (2, 1)$ leží uvnitř M, je to první „podezřelý“ bod.

Hranice M je tvořena čtyřmi úsečkami rovnoběžnými se souřadnými osami. Označíme je postupně h_1, h_2, h_3 a h_4 — viz obr. 6.2 a). Platí:

$$\begin{aligned}
h_1\colon y = 0,\ x \in \langle 1, 3\rangle \quad &\Rightarrow \quad f(x, y) = f(x, 0) = x^2 - 8x + 20 = g_1(x),\\
h_2\colon x = 3,\ y \in \langle 0, 3\rangle \quad &\Rightarrow \quad f(x, y) = f(3, y) = 4y + 5 = g_2(y),\\
h_3\colon y = 3,\ x \in \langle 1, 3\rangle \quad &\Rightarrow \quad f(x, y) = f(x, 3) = x^2 + 4x - 4 = g_3(x),\\
h_4\colon x = 1,\ y \in \langle 0, 3\rangle \quad &\Rightarrow \quad f(x, y) = f(3, y) = -4y + 13 = g_4(y).
\end{aligned}$$

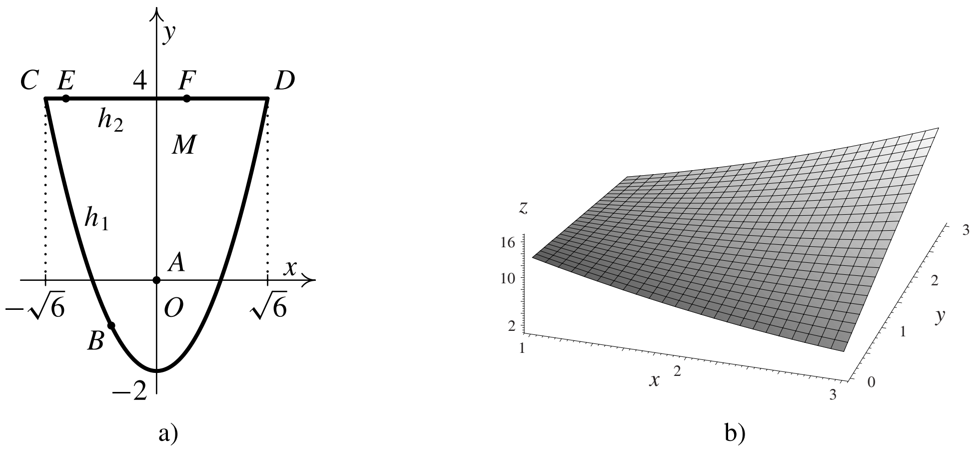
Nyní vyšetříme globální extrémy vzniklých čtyř funkcí jedné proměnné. Všechny jsou definované na ohraničených uzavřených intervalech a mají derivaci. Zajímají nás tedy stacionární body uvnitř jednotlivých intervalů a krajní body.

$$\begin{aligned}
g_1'(x) &= 2x - 8 = 0 &\Rightarrow\quad & x = 4 \notin \langle 1, 3\rangle,\\
& & & \text{krajní body } B = (1,0),\ C = (3,0),\\
g_2'(y) &= 4 &\Rightarrow\quad & \text{nemá stacionární bod,}\\
& & & \text{krajní body } C = (3,0),\ D = (3,3),\\
g_3'(x) &= 2x + 4 = 0 &\Rightarrow\quad & x = -2 \notin \langle 1, 3\rangle,\\
& & & \text{krajní body } E = (1,3),\ D = (3,3),\\
g_4'(y) &= -4 &\Rightarrow\quad & \text{nemá stacionární bod,}\\
& & & \text{krajní body } B = (1,0),\ E = (1,3).
\end{aligned}$$

Našli jsme tudíž pět bodů. Vypočteme funkční hodnoty a vybereme největší a nejmenší:

$$f(A) = 8, \qquad f(B) = 13, \qquad f(C) = 5, \qquad f(D) = 17, \qquad f(E) = 1.$$

Globální maximum $f_{\max} = 17$ je v bodě $(3, 3)$, globální minimum $f_{\min} = 1$ je v bodě $(1, 3)$. Graf vyšetřované funkce je znázorněn na obr. 6.2 b). ▲



Obr. 6.2: $f: z = x^2 + 4xy - 8x - 8y + 20,\ 1 \leqq x \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq 3$

Příklad 6.5. Najděte globální extrémy funkce $f: z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2 \leqq y \leqq 4\}$.

Řešení. Uvažovaným oborem je úseč paraboly. Protože je to uzavřená a ohraničená množina a funkce f je spojitá (dokonce na $\mathbb{R}^2$ — jde o mnohočlen), globální extrémy podle věty 6.3 existují. Opět si nejprve všimneme lokálních extrémů uvnitř M. Protože f má parciální derivace (všech řádů), lokální extrémy mohou podle důsledku 5.5 nastat pouze ve stacionárních bodech.

$$\begin{aligned}
f_x &= 6x^2 + 8x - 2y, & & 6x^2 + 8x - 2y = 0, & & x = y,\\
f_y &= 2y - 2x, & \Rightarrow\quad & 2y - 2x = 0, & \Rightarrow\quad & 6x^2 + 6x = 0.
\end{aligned}$$

Rovnice $x^2 + x = x(x+1) = 0$ má řešení $x = 0$ a $x = -1$. Máme tudíž dva stacionární body $(0,0)$ a $(-1,-1)$. Stacionární bod $A = (0,0)$ leží uvnitř M. Bod $(-1,-1)$ leží na hranici (vyhovuje rovnici $x^2 - 2 = y$), takže jej zatím nebudeme uvažovat. Dostaneme se k němu později při vyšetřování hranice.

Hranice M je tvořena obloukem paraboly h_1 a úsečkou h_2 — viz obr. 6.3 a). Platí:

$$
\begin{aligned}
&h_1\colon\ y = x^2 - 2,\ \ x \in \langle -\sqrt{6}, \sqrt{6}\rangle \quad \Rightarrow \\
&\qquad f(x,y) = f(x, x^2-2) = 2x^3 + 4x^2 + (x^2-2)^2 - 2x(x^2-2) = \\
&\qquad\qquad = x^4 + 4x + 4 = g_1(x), \\
&h_2\colon\ y = 4,\ \ x \in \langle -\sqrt{6}, \sqrt{6}\rangle \quad \Rightarrow \\
&\qquad f(x,y) = f(x,4) = 2x^3 + 4x^2 + 4^2 - 2x\cdot 4 = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 = g_2(x).
\end{aligned}
$$

Nyní vyšetříme globální extrémy těchto dvou funkcí jedné proměnné. Obě jsou definované na ohraničených uzavřených intervalech a mají derivaci. Zajímají nás tedy stacionární body uvnitř jednotlivých intervalů a krajní body.

$$
\begin{aligned}
&g_1'(x) = 4x^3 + 4 = 0 && \Rightarrow && x^3 = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \in \langle -\sqrt{6}, \sqrt{6}\rangle, \\
& && && \text{stacionární bod } B = (-1,-1), \\
& && && \text{krajní body } C = (-\sqrt{6}, 4),\ \ D = (\sqrt{6}, 4), \\
&g_2'(x) = 6x^2 + 8x - 8 = 0 && \Rightarrow && x_{1,2} = \tfrac{-8 \pm \sqrt{64+192}}{12} = \begin{cases} -2 \\ 2/3 \end{cases} \in \langle -\sqrt{6}, \sqrt{6}\rangle, \\
& && && \text{stacionární body } E = (-2, 4),\ \ F = (2/3, 4), \\
& && && \text{krajní body } C = (-\sqrt{6}, 4),\ \ D = (\sqrt{6}, 4).
\end{aligned}
$$

Našli jsme tudíž šest bodů. Vypočteme funkční hodnoty a vybereme největší a nejmenší:

$$
\begin{aligned}
&f(A) = 0, && f(B) = 1, && f(C) = 40 - 4\sqrt{6} \doteq 30{,}2, \\
&f(D) = 40 + 4\sqrt{6} \doteq 49{,}8, && f(E) = 32, && f(F) = 352/27 \doteq 13{,}03.
\end{aligned}
$$

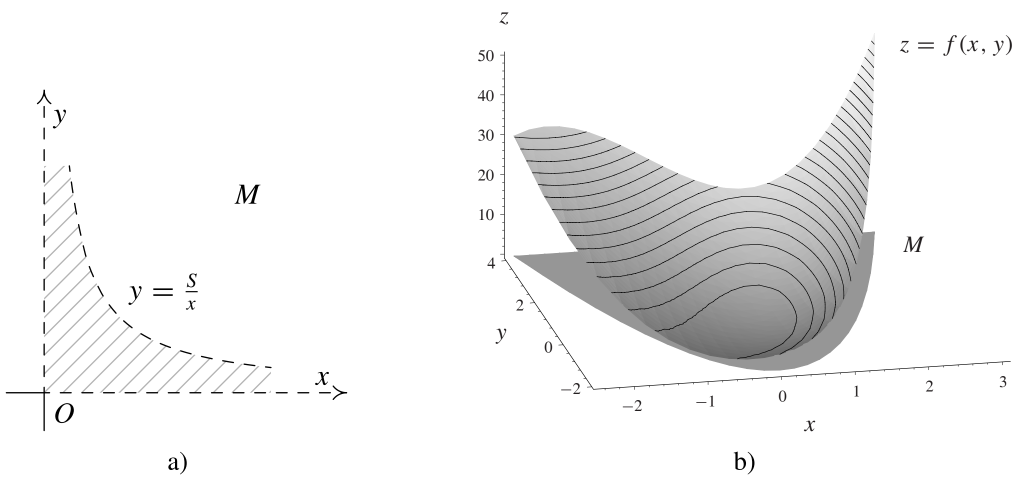
Globální maximum $f_{\max} = 40 + 4\sqrt{6}$ je v bodě $(\sqrt{6}, 4)$, globální minimum $f_{\min} = 0$ je v bodě $(0,0)$. Graf vyšetřované funkce je znázorněn na obr. 6.3 b). ▲

V závěrečném příkladu budeme potřebovat následující lemma, které hraje v úlohách na globální extrémy často významnou roli. Jeho význam je ale mnohem širší.

Lemma 6.6. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ (tj. jsou to kladná čísla). Pak platí:*

$$
\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leqq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \tag{6.1}
$$

Přitom rovnosti nastanou právě jen v případě, že všechna čísla x_i, $i = 1, \dots, n$, jsou stejná, tj. $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.



Obr. 6.3: $f: z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy,\ x^2 - 2 \leqq y \leqq 4$

Důkaz pravé nerovnosti viz např. [19, str. 29]. Použijeme-li pak tuto nerovnost na čísla $1/x_i$, dostaneme levou nerovnost. Výraz na levé straně (6.1) se nazývá *harmonický průměr* čísel $x_1, \dots, x_n$, výraz uprostřed *geometrický průměr* čísel $x_1, \dots, x_n$ a výraz na pravé straně *aritmetický průměr* čísel $x_1, \dots, x_n$. Proto se předchozí nerovnost nazývá nerovnost mezi aritmetickým, geometrickým a harmonickým průměrem.

Příklad 6.7. Mezi všemi kvádry o daném povrchu najděte ten, který má největší objem.

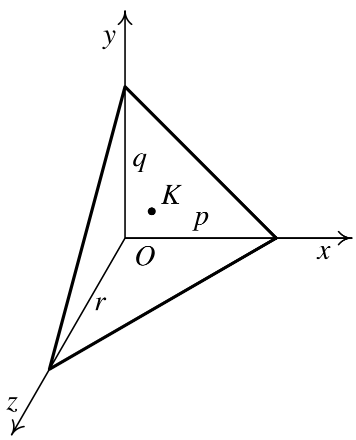
Řešení. Označme x, y, z rozměry kvádru, $x, y, z > 0$, $2S$ povrch kvádru, kde $S > 0$ je dané číslo, a V jeho objem. Pak platí

$$2(xy + xz + yz) = 2S \quad \Rightarrow \quad z(x + y) = S - xy \quad \Rightarrow \quad z = \frac{S - xy}{x + y}. \tag{6.2}$$

Předchozí vztah dává (při daném povrchu $2S$) vazbu mezi rozměry x, y a z. Protože $x, y, z > 0$ a $S > 0$, musí být $xy < S$. Zvolíme-li tudíž libovolná $x, y > 0$ tak, aby $xy < S$, vždy existuje kvádr o rozměrech x, y a $z = \frac{S-xy}{x+y}$. Pro objem pak platí

$$V = xyz = \frac{xy(S - xy)}{x + y} = \frac{Sxy - x^2y^2}{x + y} = f(x, y), \quad \text{přičemž } x, y > 0,\ xy < S.$$

Díky vazebné podmínce (6.2) se můžeme zbavit jedné proměnné, a na výraz pro objem se lze proto dívat jako na funkci jen dvou proměnných $f(x, y)$, uvažovanou na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, xy < S\}$ — viz obr. 6.4. Množina M není ani uzavřená (naopak je otevřená) ani ohraničená, takže nelze použít větu 6.3. Nemáme tudíž zaručeno, že globální maximum, které hledáme, existuje. Pokud ano, musí to být bod lokálního maxima, protože žádný hraniční bod do M nepatří — viz komentář na str. 134 před příkladem 6.4.



Obr. 6.4

Funkce f má na M spojité parciální derivace (všech řádů), takže lokální extrém může nastat podle důsledku 5.5 pouze ve stacionárním bodě.

$$f_x = \frac{(Sy - 2xy^2)(x+y) - (Sxy - x^2y^2)\cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{y^2(S - x^2 - 2xy)}{(x+y)^2},$$
$$f_y = \frac{x^2(S - y^2 - 2xy)}{(x+y)^2} \qquad \text{(ze symetrie)}.$$

Aby $f_x = 0$, $f_y = 0$, musí být nulové čitatele předchozích zlomků. Ty mají tvar součinů. Protože $x > 0$, $y > 0$, je jedinou možností, že

$$\begin{aligned} S - x^2 - 2xy &= 0, \\ S - y^2 - 2xy &= 0, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{po odečtení } x^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad x = y, \quad \text{protože } x, y > 0.$$

Dále

$$\begin{aligned} S - x^2 - 2xy &= 0, \\ x &= y, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad S - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{S}{3}} = y.$$

Ze (6.2) vyjde

$$z = \frac{S - \sqrt{\frac{S}{3}}\sqrt{\frac{S}{3}}}{\sqrt{\frac{S}{3}} + \sqrt{\frac{S}{3}}} = \sqrt{\frac{S}{3}}, \qquad \text{a tudíž} \qquad V = xyz = \left(\sqrt{\frac{S}{3}}\right)^3 = \sqrt{\frac{S^3}{27}}.$$

Jde tedy o krychli s objemem $\sqrt{S^3/27}$. Pomocí druhých derivací bychom mohli zjistit, jestli jde o lokální maximum. To by bylo dost pracné a stejně bychom nevěděli, zda je tento extrém globální.

Zatím tedy jenom víme, že pokud globální maximum existuje, musí to být v bodě $\left(\sqrt{\frac{S}{3}}, \sqrt{\frac{S}{3}}, \sqrt{\frac{S}{3}}\right)$ a půjde o krychli. K důkazu toho, že tomu tak opravdu je, použijeme lemma 6.6. Pro $n = 3$ položíme $x_1 = xy$, $x_2 = xz$ a $x_3 = yz$. Z pravé nerovnosti ve (6.1) dostaneme s ohledem na (6.2) (x, y, z jsou rozměry kvádru)

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = (xyz)^{2/3} \leqq \frac{xy + xz + yz}{3} = \frac{S}{3} \quad \Rightarrow \quad xyz \leqq \left(\sqrt{\frac{S}{3}}\right)^3. \tag{6.3}$$

Nalezený stacionární bod je tedy skutečně globálním maximem a (jediným) řešením naší úlohy je krychle. ▲

Na závěr poznamenejme, že celou úlohu jsme mohli vyřešit jen s pomocí lemmatu 6.6 a mnohem snáz. Nerovnost (6.3) totiž platí pro libovolná tři kladná čísla x, y, z taková, že $xy + xz + yz = S > 0$. Zmíněné lemma ale ještě upřesňuje, že k rovnosti dojde právě v případě, když $xy = xz = yz$, z čehož plyne $x = y = z$. Z vazební podmínky $xy + xz + yz = S$ tak dostaneme, že $3x^2 = S$, tedy $x = y = z = \sqrt{\frac{S}{3}}$, což je nám již známý výsledek. Předchozí výpočet parciálních derivací a hledání stacionárních bodů byly tedy zcela zbytečné, výsledek šlo získat mnohem jednodušším způsobem. To ukazuje, jak mocným nástrojem je nerovnost mezi algebraickým a geometrickým průměrem.

Pro zájemce:

Podívejme se ještě pro zajímavost na to, zda funkce $f(x, y)$ z předchozího příkladu 6.7 má i globální minimum. Zřejmě $f(x, y) > 0$ pro $(x, y) \in M$. Pro body $(x, 1) \in M$ platí

$$\lim_{x\to 0^+} f(x, 1) = \lim_{x\to 0^+} \frac{Sx - x^2}{x+1} = \frac{0}{1} = 0,$$

což znamená, že f nabývá neomezeně malých kladných hodnot. Protože ale nuly nikdy nedosáhne, globální minimum neexistuje. Zkuste si představit, jak bude vypadat kvádr, jehož povrch bude předepsaná hodnota $2S$ a objem bude velice malý. (Volte např. $x = y$ malá a ze (6.2) určete z.)

Situace se změní, když rozšíříme f i na hranici množiny M, která je tvořena dvěma polopřímkami a jednou větví hyperboly — viz obr. 6.4. Na této hranici je f rovna nule (kromě počátku, kde není definovaná). Pokud tedy uvažujeme f na uzávěru $\overline{M}$ (dodefinujeme např. $f(0, 0) = 0$), existuje i globální minimum, jehož hodnota je nula a funkce ho nabývá v každém hraničním bodě $\overline{M}$.

Takto dodefinovaná funkce je dokonce spojitá, což nyní dokážeme. Pro $(x, y) \neq (0, 0)$ je to zřejmé. V bodě $(0, 0)$ musíme vypočítat limitu. K tomu použijeme lemma 1.27. Funkci f vyjádříme v polárních souřadnicích (v (1.3) volíme $x_0 = y_0 = 0$). Po vykrácení vyjde

$$f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \frac{\rho\cos\varphi\sin\varphi(S - \rho^2\cos\varphi\sin\varphi)}{\cos\varphi + \sin\varphi}\,.$$

Položme v lemmatu 1.27

$$g(\rho) = \rho, \qquad h(\rho, \varphi) = \frac{\cos\varphi\sin\varphi(S - \rho^2\cos\varphi\sin\varphi)}{\cos\varphi + \sin\varphi} \qquad \text{a} \qquad L = 0.$$

Přitom $\rho \in (0, \rho_0\rangle$, kde $\rho_0 < \sqrt{2S}$ (pak $S - xy = S - \rho^2\cos\varphi\sin\varphi > 0$), a dále $\varphi \in I = \langle 0, \pi/2\rangle$ (zajímají nás jen body v prvním kvadrantu). Je $\lim\limits_{\rho\to 0} g(\rho) = 0$.

Ukážeme, že $h(\rho, \varphi)$ je ohraničená. Pro $\varphi \in I$ je $\cos\varphi \geqq 0$, $\sin\varphi \geqq 0$. Protože sinus a kosinus nejsou nikdy současně rovny nule, je $\cos\varphi + \sin\varphi > 0$. Tedy

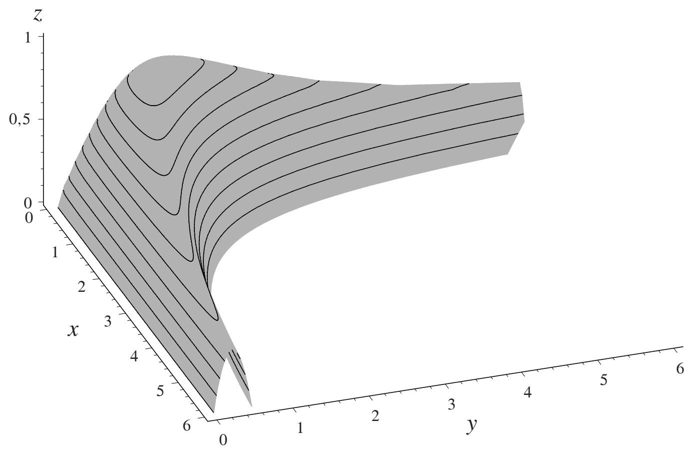
$$\begin{aligned}
&0 \leqq \sin\varphi \leqq \cos\varphi + \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad 0 \leqq \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi} \leqq 1,\\
&0 \leqq \cos\varphi \leqq 1,\\
&0 < S - \rho^2\cos\varphi\sin\varphi \leqq S.
\end{aligned}$$

Vynásobením těchto nerovností dostaneme, že $0 \leqq h(\rho, \varphi) \leqq S$. Podle lemmatu 1.27 je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = L = 0 = f(0, 0),$$

takže f je v tomto bodě spojitá. Větu 6.3 přesto nemůžeme ani teď použít, protože $\overline{M}$ je neohraničená. Graf funkce pro $S = 3$ je znázorněn na obr. 6.5.

S předchozím příkladem souvisí tzv. *úlohy na vázané extrémy*. Jde o úlohy najít lokální resp. globální extrémy funkce dvou nebo více proměnných, která je definovaná na množině, jejíž body vyhovují nějaké rovnici popř. soustavě rovnic nebo obecněji soustavě



Obr. 6.5: $f : z = \frac{3xy - x^2y^2}{x+y}$, $0 \leqq x < +\infty$, $0 \leqq y \leqq \frac{3}{x}$

rovnic a neostrých nerovnic (tzv. *vazebné podmínky*). Např. předchozí příklad lze chápat jako úlohu najít globální maximum funkce tří proměnných $g(x, y, z) = xyz$ na množině bodů (x, y, z) vyhovujících rovnici $xy + xz + yz = S$.

Vyšetřování takových úloh souvisí s tzv. *Lagrangeovou funkcí*. Touto problematikou a formulací nutných a postačujících podmínek existence lokálních vázaných extrémů se budeme zabývat v kapitole 8.

Pro zájemce:

Všechny pojmy zaváděné v této kapitole se snadno přenesou na funkce více proměnných. V platnosti zůstává i Weierstrassova věta. Vyšetřování na hranicích množin je ale pro větší počet proměnných často obtížné.

Má-li funkce f v bodě $\boldsymbol{x}_0$ globální extrém, musí zde být pochopitelně i lokální extrém. Tedy nutné podmínky pro existenci lokálních extrémů jsou současně nutnými podmínkami pro existenci bodů globálních extrémů. Pokud máme existenci globálních extrémů nějak zajištěnou, stačí nalézt všechny body lokálních extrémů a z nich vybrat ty, v nichž je největší a nejmenší funkční hodnota. Pokud však existence zaručena není, může být tento postup naprosto chybný.

Pojmy k zapamatování

— globální (absolutní) extrémy funkce dvou proměnných
— globální (absolutní) minimum funkce dvou proměnných
— globální (absolutní) maximum funkce dvou proměnných
— Weierstrassova věta
— nerovnosti mezi aritmetickým, geometrickým a harmonickým průměrem

Kontrolní otázky

?

1. Vysvětlete postup výpočtu globálních (absolutních) extrémů funkce dvou a více proměnných.
2. Definujte globální extrémy funkce dvou proměnných.
3. Udejte příklad takové funkce f definované na množině M, která nemá globální extrém.
4. Udejte postačující podmínky, aby funkce f měla na množině M globální extrém.
5. Muže mít funkce více proměnných na dané množině více bodů v nichž nabývá svého globálního maxima (minima)?
6. Ve kterých bodech množiny $M \subset D(f)$ mohou nastat globální extrémy funkce f?

Příklady k procvičení

!

1. Najděte globální extrémy funkce $z = f(x, y)$, $(x, y) \in M$:

   a) $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1,\ M = \{x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ y \leqq 3 - x\}$,
   b) $z = xy^2(4 - x - y),\ M = \{x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 6\}$,
   c) $z = x^3 + y^3 - 3xy,\ M$ je obdélník s vrcholy $A = (0, -1),\ B = (2, -1),$ $C = (2, 2),\ D = (0, 2)$,
   d) $z = x^2 - y^2,\ M$ je kruh $x^2 + y^2 \leqq 4$,
   e) $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(3x^2 + 2y^2),\ M$ je kruh $x^2 + y^2 \leqq 4$,
   f) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27,\ M = \{0 \leqq x \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq 4\}$,
   g) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y,\ M$ je obdélník ohraničený přímkami $x = 0,$ $x = 1,\ y = 0,\ y = 2$,
   h) $z = 3xy,\ M$ je kruh $x^2 + y^2 \leqq 2$,
   i) $z = 3x^2 - y^2,\ M$ je kruh $x^2 + y^2 \leqq 4$,
   j) $z = x\sqrt{1 - x^2 - y^2},\ M$ je kruh $x^2 + y^2 \leqq 1$,
   k) $z = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2},\ M$ je kruh $x^2 + y^2 \leqq 1$,
   l) $z = x^2 + y^2 + \frac{1}{2}(x + y + 16)^2,\ M$ je kruh $x^2 + y^2 \leqq 16$,
   m) $z = x^2 + xy - 4x - 8y,\ M$ je obdélník s vrcholy $A = (0, 0),\ B = (3, 0),$ $C = (3, 2),\ D = (0, 2)$,
   n) $z = x^2 + y^2 + 16x - 12y,\ M$ je kruh $x^2 + y^2 \leqq 25$,
   o) $z = \sin x + \sin y - \sin(x + y),\ M = \{x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 2\pi\}$.

2. Řešte slovní úlohy na globální extrémy:

   a) Součet tří kladných čísel je 21. Určete jednotlivé sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.
   b) Kladné číslo a rozložte na součin čtyř kladných čísel tak, aby jejich součet byl minimální.
   c) Určete rozměry bazénu majícího tvar kvádru tak, aby při daném objemu $V > 0$ byl součet obsahů jeho dna a stěn minimální.
   d) Určete rozměry rovnoběžnostěnu o daném objemu $V > 0$ tak, aby jeho povrch byl minimální.
   e) Z pásu plechu o šířce 24 cm se má vyformovat žlab, jehož průřezem je rovnoramenný lichoběžník, nahoře otevřený, tak, aby průtočnost byla maximální. Určete délku a bočních stěn a jejich úhel α se základnou.

f) Určete rozměry kvádru o maximálním objemu, který je vepsán do elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a, b, c > 0$, a má hrany rovnoběžné se souřadnými osami.

g) Bodem $K = (3, 6, 12) \in \mathbb{R}^3$ veďte rovinu, která společně se souřadnými rovinami $x = 0$, $y = 0$ a $z = 0$ určuje čtyřstěn o nejmenším objemu.

h) Určete strany trojúhelníka o obvodu 120 m tak, aby měl co největší obsah.
Návod: Použijte Heronův[1] vzorec $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = \frac{a+b+c}{2}$.

i) Mezi všemi trojúhelníky vepsanými do kruhu o poloměru $r > 0$ najděte ten, jehož obsah je největší.
Návod: Za neznámé volte středové úhly odpovídající stranám trojúhelníka.

3. Určete stacionární body funkce $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (resp. $u = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$), a ověřte, zda jsou v nich lokální popř. globální extrémy.

a) $z = x\mathrm{e}^x - (1 + \mathrm{e}^x)\cos y$,
b) $z = (x + y)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$,
c) $u = (x + y + z)\,\mathrm{e}^{-x-y-z}$,
d) $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$,
e) $z = 3xy - x^2y - xy^2$.

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $f_{\min} = -19$ v $(0, 3)$, $f_{\max} = -1$ v $(0, 0)$,
b) $f_{\min} = -64$ v $(2, 4)$, $f_{\max} = 4$ v $(1, 2)$,
c) $f_{\min} = -1$ v $(0, -1)$ a $(1, 1)$, $f_{\max} = 13$ v $(2, -1)$,
d) $f_{\min} = -4$ v $(0, \pm 2)$, $f_{\max} = 4$ v $(\pm 2, 0)$,
e) $f_{\min} = 0$ v $(0, 0)$, $f_{\max} = 2/\mathrm{e}$ v $(0, \pm 1)$,
f) $f_{\min} = 0$ v $(3, 3)$, $f_{\max} = 91$ v $(4, 0)$ a $(0, 4)$,
g) $f_{\min} = -3$ v $(1, 0)$, $f_{\max} = 17$ v $(1, 2)$,
h) $f_{\min} = -3$ v $(1, -1)$ a $(-1, 1)$, $f_{\max} = 3$ v $(1, 1)$ a $(-1, -1)$,
i) $f_{\min} = -4$ v $(0, \pm 2)$, $f_{\max} = 12$ v $(\pm 2, 0)$,
j) $f_{\min} = -1/2$ v $(-1/\sqrt{2}, 0)$, $f_{\max} = 1/2$ v $(1/\sqrt{2}, 0)$,
k) $f_{\min} = -1/3$ v $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ a $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$,
$f_{\max} = 1/3$ v $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ a $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$,
l) $f_{\min} = 160 - 64\sqrt{2}$ v $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $f_{\max} = 160 + 64\sqrt{2}$ v $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$,
m) $f_{\min} = -17$ v $(1, 2)$, $f_{\max} = 0$ v $(0, 0)$,
n) $f_{\min} = -75$ v $(-4, 3)$, $f_{\max} = 125$ v $(4, -3)$,
o) $f_{\min} = 0$ na celé hranici , $f_{\max} = 3\sqrt{3}/2$ v $(2\pi/3, 2\pi/3)$.

2. a) $S = xyz$, $x + y + z = 21$, $x = y = z = 7$, $S_{\max} = 343$,

[1]**Heron Alexandrijský** (asi 1. stol. n. l.) — starořecký mechanik a inženýr, odvodil mj. obsahy resp. objemy některých geometrických útvarů v rovině a v prostoru.

b) $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $x_1x_2x_3x_4 = a$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \sqrt[4]{a}$, $S_{\min} = 4\sqrt[4]{a}$ (použijte lemma 6.6),

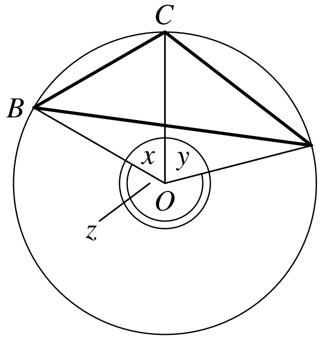
c) $S = xy + 2xz + 2yz$, $xyz = V$, $x = y = \sqrt[3]{2V}$, $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$, $S_{\max} = 3\sqrt[3]{4V^2}$,

d) $S = 2(xy + xz + yz)$, $V = xyz$, $x = y = z = \sqrt[3]{V}$, $S_{\min} = 6\sqrt[3]{V^2}$,

e) $P = a\sin\alpha(24 - 2a + a\cos\alpha)$, $a = 8\,\text{cm}$, $\alpha = \pi/3$, $P_{\max} = 48\sqrt{3}$,

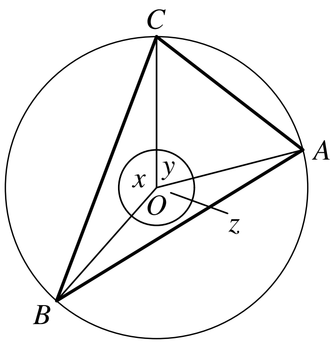
f) $V = 8xyz$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$, $V_{\max} = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}$ (nejrychleji vede k cíli použití lemmatu 6.6 na funkci $\frac{V^2}{64a^2b^2c^2} = \frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{b^2} \cdot \frac{z^2}{c^2}$),

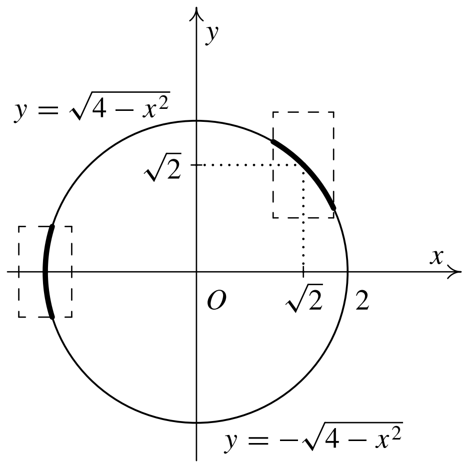
g) $V = \frac{1}{6}pqr$, $\frac{3}{p} + \frac{6}{q} + \frac{12}{r} = 1$ (z úsekové rovnice roviny), $p = 9$, $q = 18$, $r = 36$, $V_{\min} = 972$. Ověřit, že jde o globální minimum, lze pomocí lemmatu 6.6 (nerovnost mezi harmonickým a geometrickým průměrem). Celou úlohu lze řešit jen pomocí tohoto lemmatu (bez použití derivací), což je nerychlejší.



h) $S = \sqrt{60(60-a)(60-b)(60-c)}$, $a + b + c = 120$, $a = b = c = 40$, $S_{\max} = 400\sqrt{3}$,

i) $S = \frac{1}{2}r^2(\sin x + \sin y + \sin z)$, $x + y + z = 2\pi$, $x = y = z = \frac{2\pi}{3}$, $S_{\max} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$. Při odvození vzorce pro obsah zvažte dvě možnosti — viz následující obrázky.





3. Označení: lm (lM) ... lokální minimum (maximum), gm (gM) ... globální minimum (maximum), sb ... stacionární bod, v němž není extrém.

a) lm v $(0, 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, sb v $(0, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,

b) gM v $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, gm v $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$,

c) nekonečně mnoho gM v bodech, které splňují vztah $x + y + z = 1$,

d) gm v $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$,

e) lM v $(1, 1)$, sb v $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$.

Kapitola 7

Implicitní funkce

Průvodce studiem

Funkce, se kterými jsme se dosud setkali, tj. zejména funkce jedné proměnné a funkce dvou proměnných, vyjadřují závislost jednoho čísla na jednom čísle resp. jednoho čísla na dvou číslech. Vyjádření této závislosti ve tvaru $y = f(x)$ *resp.* $z = f(x, y)$ *nazýváme* explicitní *a říkáme, že funkce* f *je* zadaná explicitně *čili přímo.*

Někdy ale známe např. pouze rovnici $F(x, y) = 0$ *o dvou neznámých vyjadřující vazbu mezi čísly* x *a* y *a chtěli bychom vyjádřit* y *v závislosti na* x*, tj. vypočítat z této rovnice* y *pomocí* x*, tedy vyjádřit je ve tvaru* $y = f(x)$*. Pak říkáme, že funkce* f *je rovnicí* $F(x, y) = 0$ zadaná implicitně *čili nepřímo.*

Obdobně můžeme chtít z rovnice o třech neznámých $F(x, y, z) = 0$ *vypočítat veličinu* z *v závislosti na* x *a* y *ve tvaru* $z = f(x, y)$*. Obecně pak z několika takových rovnic o více neznámých můžeme vyjadřovat některé z nich pomocí zbývajících. Touto problematikou se zabývají tzv. věty o implicitním zobrazení. Při tomto přístupu jde vlastně o teorii řešení systémů (nelineárních) rovnic o více neznámých. Situace je podstatně složitější než u systémů lineárních rovnic, které známe z lineární algebry.*

My se omezíme s podrobnějším výkladem pouze na jednu rovnici a případ funkcí s počtem proměnných jedna a dva. Uvedeme přesnou definici toho, co bude znamenat, že funkce je zadaná implicitně, a zformulujeme existenční větu. Dále si všimneme otázky spojitosti a existence derivací funkce zadané implicitně. V části Pro zájemce *naznačíme možná zobecnění.*

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- definovat funkci jedné proměnné danou implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$,
- definovat funkci dvou proměnných danou implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$,
- vysvětlit rozdíl mezi funkcí zadanou explicitně a implicitně,

- rozhodnout, zda daná rovnice zadává v okolí daného bodu implicitně funkci jedné resp. dvou proměnných,
- spočítat derivaci funkce jedné proměnné dané implicitně,
- spočítat parciální derivace funkce dvou proměnných dané implicitně,
- napsat rovnici tečny a normály v daném bodě k funkci dané implicitně,
- určit stacionární body funkce dané implicitně,
- nalézt lokální extrémy funkce jedné proměnné dané implicitně,
- nalézt lokální extrémy funkce dvou proměnných dané implicitně,
- definovat a určit Taylorův mnohočlen funkce jedné proměnné dané implicitně,
- definovat a určit Taylorův mnohočlen funkce dvou proměnných dané implicitně.

7.1 Funkce jedné proměnné dané implicitně

Pokud je možné z rovnice $F(x, y) = 0$ o dvou neznámých *jednoznačně* vypočítat y pomocí x ve tvaru $y = f(x)$, znamená to, že množina řešení této rovnice (tj. dvojice znázorněné jako body v rovině) tvoří graf funkce jedné proměnné. Obecně ovšem zdaleka není pravda, že množina řešení takové rovnice tvoří graf funkce jedné proměnné.

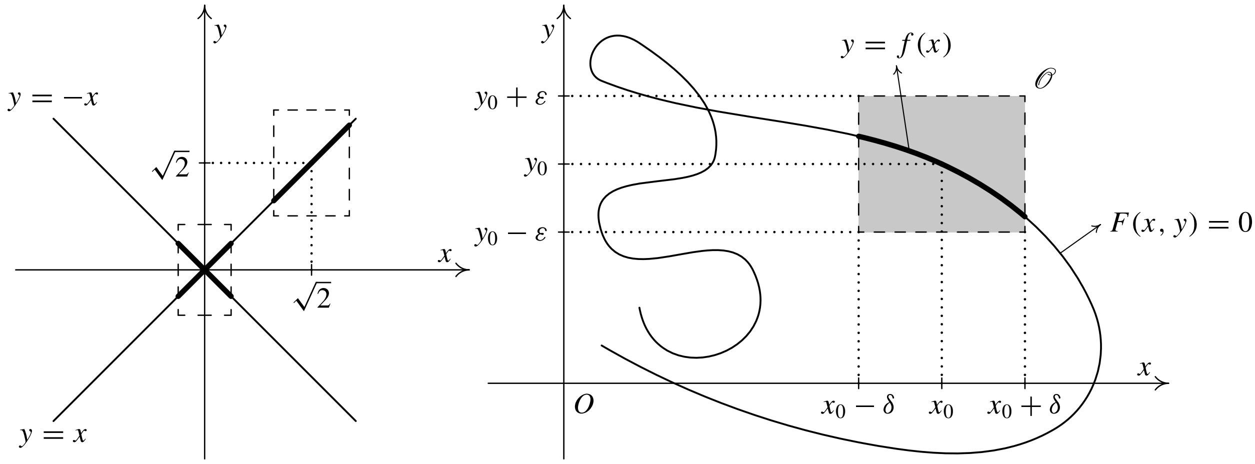
Ilustrujme si tuto situaci na dvou příkladech. Množina řešení rovnice $x^2 + y^2 - 4 = 0$ tvoří kružnici se středem v počátku a poloměrem 2 — viz obr. 7.1 a). Množina řešení rovnice $x^2 - y^2 = 0$ je tvořena dvojicí přímek — viz obr. 7.1 b). Ani v jednom případě tyto množiny nepředstavují graf funkce jedné proměnné (libovolná rovnoběžka s osou y by totiž musela protínat množinu řešení nejvýše jednou).

Z rovnice $x^2 + y^2 - 4 = 0$ je možné vypočítat $y = \sqrt{4 - x^2}$ nebo $y = -\sqrt{4 - x^2}$, $-2 \leqq x \leqq 2$, což jsou rovnice horní resp. dolní půlkružnice, a to už jsou grafy funkce. V tomto případě se nám tedy podařilo rozdělit množinu všech řešení na dva grafy funkcí, jejichž vzoreček jsme navíc snadno určili. Tento příklad ale není typický. Obecně vůbec není snadné osamostatnit z rovnice $F(x, y) = 0$ neznámou y, představte si např. ne příliš složitou rovnici $y + x\,\mathrm{e}^y - 1 = 0$. Příklad s kružnicí rovněž ukazuje, že jedné rovnici může odpovídat více funkcí daných touto rovnicí implicitně.

Před námi tudíž stojí následující problémy:

- Množina řešení rovnice $F(x, y) = 0$ nemusí být grafem funkce jedné proměnné (většinou vůbec nevíme, jak vypadá).
- Neznámou y nedokážeme z rovnice $F(x, y) = 0$ vypočítat (vyjádřit pomocí elementárních funkcí proměnné x), i když by množina řešení tvořila graf funkce jedné proměnné.

Právě v této situaci je nutné postupovat „nepřímo“ a informace o funkci f (jejíž existenci musíme nejprve ověřit) získávat, aniž známe její vzoreček.



a) $x^2 + y^2 - 4 = 0$ b) $x^2 - y^2 = 0$

Obr. 7.1: Funkce dané implicitně

Poznámka 7.1.

1) K rovnici $F(x, y) = 0$ můžeme dojít také tak, že vyšetřujeme vrstevnici úrovně nula funkce $z = F(x, y)$. Její rovnice je podle (1.1) právě $F(x, y) = 0$. Je zřejmé, že vůbec nemusí jít o graf funkce jedné proměnné. V „rozumných“ případech půjde o „spleť“ křivek, které se mohou navzájem složitě protínat a dotýkat. Ale ani to nemusí být pravda. Např. konstantní funkce $z \equiv 0$ má za vrstevnici nulové úrovně celou rovinu $\mathbb{R}^2$. Podobně funkce, jejímž grafem je komolý kužel mající „dno“ ve výšce nula, má za vrstevnici nulové úrovně kruh.
2) O rovnici, kterou uvažujeme, předpokládáme, že má nulovou pravou stranu. To není nijak na újmu obecnosti. Obecnou rovnici $G(x, y) = H(x, y)$ lze totiž vždy upravit a převést všechny její členy na levou stranu, tj. $G(x, y) - H(x, y) = 0$. Pak stačí položit $F = G - H$.

Nyní přistoupíme k definici funkce zadané implicitně. Budeme předpokládat, že známe jedno řešení (x_0, y_0) rovnice, tj. že platí $F(x_0, y_0) = 0$. I když obecně nemusí být celá množina řešení grafem funkce, budeme chtít, aby aspoň v jistém okolí bodu (x_0, y_0) tato řešení tvořila graf. Přesněji, budeme požadovat, aby existovalo obdélníkové okolí $\mathscr{O}$ (s tím se nám bude lépe pracovat než s kruhovým — viz poznámka 1.4 iii)) se středem v (x_0, y_0) takové, že množina všech řešení rovnice $F(x, y) = 0$, která padnou do $\mathscr{O}$, bude tvořit graf funkce procházející bodem (x_0, y_0). Formálně vypadá definice takto:

Definice 7.2. Nechť $F(x_0, y_0) = 0$. Předpokládejme, že existuje obdélníkové okolí $\mathscr{O} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, s následující vlastností:

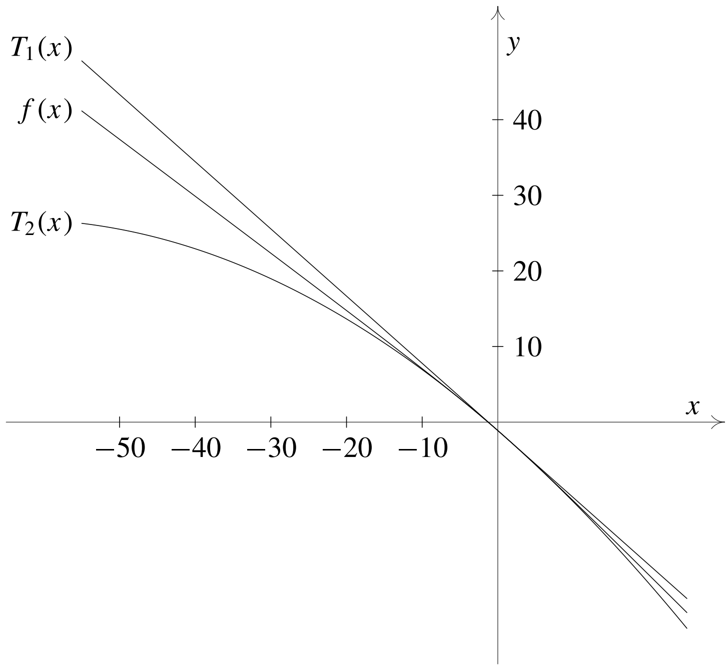
K libovolnému $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ existuje v intervalu $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ právě jedno y takové, že $F(x, y) = 0$. Označme tuto hodnotu $y = f(x)$.

Pak o takto definované funkci $f(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, říkáme, že je *zadaná implicitně* rovnicí $F(x, y) = 0$ v okolí bodu (x_0, y_0).

Z předchozí definice přímo vyplývá, že

$$F[x, f(x)] = 0, \; x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \qquad \text{a} \qquad f(x_0) = y_0. \tag{7.1}$$

Situace je zachycena na obr. 7.2. Na libovolné rovnoběžce s osou y procházející obdélníkem $\mathcal{O}$ leží v tomto obdélníku právě jedno řešení rovnice $F(x, y) = 0$ (mimo tento obdélník na ní pochopitelně mohou ležet další řešení). Souřadnice bodu, který odpovídá tomuto řešení, jsou $\big(x, f(x)\big)$.



Obr. 7.2: Funkce daná implicitně

Podíváme se nyní na rovnice, jejichž řešení jsou znázorněna na obr. 7.1, a zvážíme, v okolí kterých bodů jsou splněny požadavky definice 7.2.

Z obr. 7.1 a) je zřejmé, že rovnice $x^2 + y^2 - 4 = 0$ zadává implicitně v okolí bodu $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ funkci, a to $y = \sqrt{4 - x^2}$. Stejně tak je zřejmé, že v sebemenším okolí bodu $(-2, 0)$ nebudou řešení rovnice tvořit graf funkce proměnné x (ať zvolíme jakkoli malý obdélník se středem v tomto bodě, rovnoběžky s osou y procházející vpravo od -2, ale libovolně blízko tohoto čísla, budou mít s množinou řešení, tj. kružnicí, uvnitř zvoleného obdélníku dva průsečíky). Obdobná situace je v bodě $(2, 0)$. Ve všech ostatních bodech je touto rovnicí dána implicitně buď funkce $y = \sqrt{4 - x^2}$ nebo $y = -\sqrt{4 - x^2}$. Všimněte si, že kdybychom zaměnili role x a y, výřez kružnice v okolí bodů $(2, 0)$ a $(-2, 0)$ by představoval graf funkce proměnné y („špatné“ by naopak byly body $(0, 2)$ a $(0, -2)$).

Podobně z obr. 7.1 b) je zřejmé, že rovnice $x^2 - y^2 = 0$ zadává implicitně v okolí bodu $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ funkci, a to $y = x$. Naopak v sebemenším okolí bodu $(0, 0)$ nebudou řešení rovnice tvořit graf funkce proměnné x (ať zvolíme jakkoli malý obdélník se středem v tomto bodě, rovnoběžky s osou y blízké počátku budou mít — kromě osy y — s množinou řešení, tj. dvojicí přímek, uvnitř zvoleného obdélníku dva průsečíky). Ve všech ostatních bodech je touto rovnicí dána implicitně buď funkce $y = x$ nebo $y = -x$. Všimněte si, že záměna proměnných x a y by v bodě $(0, 0)$ tentokrát nepomohla.

Předchozí úvahy byly založeny na tom, že jsme věděli, jak vypadá množina řešení dané rovnice, a dokonce jsme uměli vypočítat proměnnou y v závislosti na x. V takovém případě vystačíme s dosavadními znalostmi o funkcích jedné proměnné. Nás však zajímají případy, kdy tomu tak nebude. Proto uvedeme nyní větu, která udává postačující podmínky, aby rovnice o dvou neznámých zadávala implicitně jistou funkci. Věta nás zároveň informuje o vlastnostech této funkce.

Věta 7.3. *Nechť funkce $F(x, y)$ má spojité první parciální derivace v okolí bodu (x_0, y_0) a platí:*

1) $F(x_0, y_0) = 0$, 2) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak rovnice $F(x, y) = 0$ zadává v okolí bodu (x_0, y_0) implicitně funkci $y = f(x)$. Tato funkce je spojitá a má spojitou první derivaci, pro niž platí

$$f'(x) = -\frac{F_x[x, f(x)]}{F_y[x, f(x)]}. \tag{7.2}$$

Důkaz. Nejprve dokážeme existenci funkce f. Z předpokladů věty vyplývá existence uzavřeného obdélníku $\mathscr{O}(x_0, y_0) = \langle x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1\rangle \times \langle y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2\rangle$ takového, že na něm $F_y \neq 0$. Předpokládejme pro určitost, že např. $F_y > 0$. To znamená, že funkce $\varphi(y) = F(x_0, y)$ je na intervalu $\langle y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2\rangle$ rostoucí, protože $\varphi'(y) = F_y(x_0, y) > 0$. Poněvadž $\varphi(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$, platí, že $\varphi(y_0 - \delta_2) < 0$ a $\varphi(y_0 + \delta_2) > 0$. Vzhledem ke spojitosti funkce F lze proto najít číslo δ_0, $0 < \delta_0 < \delta_1$, tak, že $F(x, y_0 - \delta_2) < 0$ a $F(x, y_0 + \delta_2) > 0$ pro $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. Pro libovolné pevně zvolené $\bar{x}$ z tohoto intervalu je tudíž funkce $\psi(y) = F(\bar{x}, y)$ rostoucí na intervalu $\langle y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2\rangle$, protože opět $\psi'(y) = F_y(\bar{x}, y) > 0$, a $\psi(y_0 - \delta_2) < 0$, $\psi(y_0 + \delta_2) > 0$. Podle Cauchyovy--Bolzanovy věty proto existuje číslo $\bar{y} \in (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$, pro něž $\psi(\bar{y}) = 0$. Vzhledem k ryzí monotonii funkce ψ je toto číslo jediné. Položme $f(\bar{x}) = \bar{y}$, $\bar{x} \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. Pak $F[\bar{x}, f(\bar{x})] = 0$, tj. $f(\bar{x})$ je jediné řešení rovnice $F(\bar{x}, y) = 0$ na intervalu $(y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$. Zejména $f(x_0) = y_0$.

Dále dokážeme spojitost funkce f v bodě x_0. Zvolme libovolné číslo ε, $0 < \varepsilon < \delta_2$. Postup z předchozího odstavce lze nyní zopakovat s výchozím obdélníkem $\langle x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1\rangle \times \langle y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon\rangle$ a najít δ, $0 < \delta < \delta_0$, takové, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je $f(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. To však znamená, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, a tedy funkce f je spojitá v bodě x_0.

Nyní dokážeme spojitost v libovolném bodě $\bar{x} \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. Označme $\bar{y} = f(\bar{x})$. Protože $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ a $F_y(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$, jsou splněny předpoklady dokazované věty, zaměníme-li bod (x_0, y_0) bodem $(\bar{x}, \bar{y})$. Z již dokázaných částí však plyne existence implicitně dané funkce g, definované v okolí bodu $\bar{x}$, která je v tomto bodě spojitá. Ale vzhledem k jednoznačnosti musí platit $f(x) = g(x)$. To znamená, že funkce f je spojitá v $\bar{x}$.

(Všimněte si, že v dosavadních částech důkazu jsme vůbec nepotřebovali existenci parciální derivace F_x. Podobně existence F_y a její nenulovost byly potřeba pouze k důkazu monotónnosti $F(x, y)$ vzhledem k y. Část věty o implicitní funkci týkající se existence a spojitosti by tedy bylo možné zobecnit a předpokládat jen spojitost funkce F a monotónnost vzhledem k y.)

Konečně dokážeme, že f má derivaci. Nechť $x_1, x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$, $x_1 \neq x$. Pak platí $F[x_1, f(x_1)] = 0$ a $F[x, f(x)] = 0$. Označme $f(x_1) = y_1$. Protože funkce F je diferencovatelná v bodě (x_1, y_1) (má spojité spojité parciální derivace — věta 3.7), platí

$$\begin{aligned} 0 &= F[x, f(x)] - F[x_1, f(x_1)] = \\ &= \mathrm{d}F_{(x_1,y_1)}[x - x_1, f(x) - f(x_1)] + \omega[x - x_1, f(x) - f(x_1)], \end{aligned}$$

kde $\lim \omega(h, k)/\sqrt{h^2 + k^2} = 0$ pro $(h, k) \to (0, 0)$. Dosazením za diferenciál a úpravou dostaneme z předchozí rovnosti

$$\begin{aligned} 0 = {} & F_x(x_1, y_1) \cdot (x - x_1) + F_y(x_1, y_1) \cdot \big(f(x) - f(x_1)\big) + \\ & + \frac{\omega[x - x_1, f(x) - f(x_1)]}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - f(x_1))^2}} \left(\frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - f(x_1))^2}} (x - x_1) + \right. \\ & \left. + \frac{f(x) - f(x_1)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - f(x_1))^2}} \big(f(x) - f(x_1)\big) \right). \end{aligned}$$

Označme

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{\omega[x - x_1, f(x) - f(x_1)]}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - f(x_1))^2}}, \\ \tau_1(x) &= \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - f(x_1))^2}}, \\ \tau_2(x) &= \frac{f(x) - f(x_1)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (f(x) - f(x_1))^2}}. \end{aligned}$$

S využitím tohoto označení má předchozí rovnost podobu

$$\begin{aligned} 0 = {} & F_x(x_1, y_1) \cdot (x - x_1) + F_y(x_1, y_1) \cdot \big(f(x) - f(x_1)\big) + \\ & + \tau(x)\tau_1(x)(x - x_1) + \tau(x)\tau_2(x)\big(f(x) - f(x_1)\big). \end{aligned}$$

Po úpravě máme

$$0 = \big[F_x(x_1, y_1) + \tau(x)\tau_1(x)\big](x - x_1) + \big[F_y(x_1, y_1) + \tau(x)\tau_2(x)\big]\big(f(x) - f(x_1)\big).$$

Protože je funkce f spojitá v bodě x_1, je $\lim\limits_{x \to x_1} \big(f(x) - f(x_1)\big) = 0$. Vzhledem k vlastnosti funkce ω to znamená, že $\lim\limits_{x \to x_1} \tau(x) = 0$. Funkce $\tau_1(x)$ a $\tau_2(x)$ jsou zřejmě ohraničené — $|\tau_1(x)| \leqq 1$, $|\tau_2(x)| \leqq 1$ — takže $\lim\limits_{x \to x_1} \tau(x)\tau_1(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_1} \tau(x)\tau_2(x) = 0$. Z toho mimo jiné plyne, že pro x blízká x_1 je $F_y(x_1, y_1) + \tau(x)\tau_2(x) \neq 0$, neboť $F_y(x_1, y_1) \neq 0$. Vzhledem k tomu můžeme z předchozí rovnosti vypočítat, že

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = -\frac{F_x(x_1, y_1) + \tau(x)\tau_1(x)}{F_y(x_1, y_1) + \tau(x)\tau_2(x)}.$$

Limitním přechodem nyní vyjde

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = -\frac{F_x(x_1, y_1)}{F_y(x_1, y_1)} = -\frac{F_x[x_1, f(x_1)]}{F_y[x_1, f(x_1)]} = f'(x_1).$$

Tudíž funkce f má v libovolném bodě intervalu $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ derivaci. Zároveň z jejího vyjádření a skutečnosti, že F i f jsou spojité, plyne spojitost f'. □

Poznámka 7.4.

1) Věta neříká nic o velikosti definičního oboru $D(f)$. Zaručuje jen, že v dostatečně malém obdélníku majícím střed v (x_0, y_0) tvoří řešení rovnice $F(x, y) = 0$ graf jisté funkce $f(x)$ podobně jako na obr. 7.2. Obdélník samozřejmě není určen jednoznačně (lze ho např. zmenšit). I v definici 7.2 se jen předpokládala existence takového obdélníku.
2) Vzorec (7.2) sice udává hodnotu derivace $f'(x)$ v libovolném bodě definičního oboru $D(f)$, k jeho použití však potřebujeme znát hodnotu $f(x)$, kterou, jak už jsme vysvětlili, až na triviální případy neznáme. S jedinou výjimkou — z (7.1) víme, že $f(x_0) = y_0$. V tomto bodě je tedy jeho použití efektivní. Zdálo by se tudíž, že vzorec nemá velkou cenu. Jak ale uvidíme, není tomu tak. Známe-li $f'(x_0)$, můžeme najít rovnici tečny v bodě x_0, která je přibližnou náhradou grafu funkce $y = f(x)$ v okolí bodu x_0. A až si dále řekneme o existenci vyšších derivací, budeme moci funkci nahradit přesněji Taylorovým mnohočlenem vyššího řádu, k jehož sestrojení potřebujeme jen derivace v bodě x_0.
3) Vzorec (7.2) se často píše ve tvaru $f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$ nebo ještě stručněji $y' = -\frac{F_x}{F_y}$. Musíme mít ale na paměti, že dvojice (x, y) musí vyhovovat rovnici $F(x, y) = 0$, tj. $y = f(x)$.

Ilustrujme si použití věty 7.3 na rovnicích, jejichž řešení je na obr. 7.1.

a) Uvažujme rovnici $x^2 + y^2 - 4 = 0$ a bod $(x_0, y_0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Funkce $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ má spojité parciální derivace. Platí:

$$F(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 4 = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Dále:

$$F_y = 2y \quad \Rightarrow \quad F_y(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \neq 0.$$

Předpoklady věty 7.3 jsou tedy splněny, a tudíž uvedená rovnice zadává v okolí bodu $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ implicitně funkci $y = f(x)$, pro niž platí $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Vypočteme derivaci $f'(x)$ a určíme její hodnotu v $x_0 = \sqrt{2}$.

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad f'(\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1. \tag{7.3}$$

Z předchozího ale víme, že vzorec funkce je $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. Můžeme tedy přímo vypočítat derivaci a výsledek ověřit:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}} = -1.$$

Všimněte si, že pokud bychom uvažovali stejnou funkci, ale bod $(-2, 0)$, pak bychom větu 7.3 nemohli použít, protože $F_y(-2, 0) = 0$. Ale $F_x(-2, 0) = -4$, takže záměnou x a y je možné dokázat, že rovnice v okolí bodu $(-2, 0)$ implicitně zadává funkci $x = g(y)$. Stejná situace je v bodě $(2, 0)$.

b) Uvažujme rovnici $x^2 - y^2 = 0$ a bod $(x_0, y_0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Funkce $F(x, y) = x^2 - y^2$ má spojité parciální derivace. Platí:

$$F(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 - 2 = 0.$$

Dále:

$$F_y = -2y \quad \Rightarrow \quad F_y(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \neq 0.$$

Předpoklady věty 7.3 jsou tedy splněny, a tudíž rovnice zadává v okolí bodu $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ implicitně funkci $y = f(x)$, pro niž platí $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Vypočteme derivaci $f'(x)$ a určíme její hodnotu v $x_0 = \sqrt{2}$.

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad f'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$$

I v tomto případě známe f: je totiž $f(x) = x$, takže $f'(x) = 1$, tj. i $f'(\sqrt{2}) = 1$, což je stejný výsledek.
Všimněte si, že pokud bychom uvažovali stejnou funkci, ale bod $(0, 0)$, pak bychom větu 7.3 nemohli použít, protože $F_y(0, 0) = 0$. Tentokrát je ale také $F_x(0, 0) = 0$, takže ani záměna x a y nepomůže.

Příklad 7.5. Ověřte, že rovnice $4xy^2 - 3x^3y^2 + \ln(x^2 + y^2 - 1) - 1 = 0$ zadává v bodě $(1, -1)$ implicitně funkci $y = f(x)$, a najděte rovnice tečny a normály ke grafu této funkce v bodě $(1, -1)$.

Řešení. Je $F(x, y) = 4xy^2 - 3x^3y^2 + \ln(x^2 + y^2 - 1) - 1$ a $(x_0, y_0) = (1, -1)$. Funkce F má ve svém definičním oboru spojité parciální derivace. Platí:

$$F(1, -1) = 4 \cdot 1 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot 1^3 \cdot (-1)^2 + \ln(1^2 + (-1)^2 - 1) - 1 = 4 - 3 + 0 - 1 = 0.$$

Dále:

$$F_y = 8xy - 6x^3y + \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad F_y(1, -1) = -8 + 6 - 2 = -4 \neq 0.$$

Předpoklady věty 7.3 jsou splněny, a tudíž rovnice zadává v okolí bodu $(1, -1)$ implicitně funkci $y = f(x)$, pro niž platí $f(1) = -1$. Ještě určíme:

$$F_x = 4y^2 - 9x^2y^2 + \frac{2x}{x^2 + y^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad F_x(1, -1) = 4 - 9 + 2 = -3.$$

Ze vzorce (7.2) máme

$$f'(1) = -\frac{F_x(1, -1)}{F_y(1, -1)} = -\frac{-3}{-4} = -\frac{3}{4}.$$

Rovnice přímky procházející bodem (x_0, y_0) o směrnici k je $y - y_0 = k(x - x_0)$. Pro tečnu je $k_t = f'(x_0)$ a normálu (kolmice k tečně jdoucí dotykovým bodem) je $k_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$. V našem případě je $k_t = -\frac{3}{4}$ a $k_n = \frac{4}{3}$. Tedy:

$$\begin{aligned} t\colon y - (-1) &= -\frac{3}{4}(x - 1) &\quad \Rightarrow \quad && 3x + 4y + 1 = 0,\\ n\colon y - (-1) &= \frac{4}{3}(x - 1) &\quad \Rightarrow \quad && 4x - 3y - 7 = 0. \end{aligned}$$

▲

Ukážeme si ještě jeden způsob výpočtu první derivace funkce dané implicitně. Z (7.1) víme, že $f(x)$ splňuje rovnici $F[x, f(x)] = 0$ na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Víme-li, že existuje $f'(x)$, a zderivujeme-li předchozí rovnost podle x s využitím vzorce (3.13) pro derivaci složené funkce, dostaneme

$$F_x[x, f(x)] \cdot 1 + F_y[x, f(x)]f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{F_x[x, f(x)]}{F_y[x, f(x)]},$$

což je znovu vzorec (7.2). Např. pro rovnici $x^2 + y^2 - 4 = 0$ z obr. 7.1 a) vyjde

$$x^2 + [f(x)]^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2f(x)f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{x}{f(x)}.$$

Pro stručnost často píšeme místo $f'(x)$ jen y'. Musíme ale dávat pozor a správně rozlišovat, kdy provádíme parciální derivaci podle x (pak se y chová jako konstanta) a kdy y představuje zkrácený zápis pro $f(x)$. Předchozí výpočet derivace by ve zkrácené symbolice vypadal takto:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y},$$

což je stejný výsledek jako v (7.3).

Ukažme si ještě, jak by vypadal formální výpočet derivace v příkladu 7.5:

$$4xy^2 - 3x^3y^2 + \ln(x^2 + y^2 - 1) - 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$4y^2 + 8xyy' - 9x^2y^2 - 6x^3yy' + \frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2 - 1} = 0$$

a odtud vypočteme

$$y'\left(8xy - 6x^3y + \frac{2y}{x^2+y^2-1}\right) = 9x^2y^2 - 4y^2 - \frac{2x}{x^2+y^2-1} \quad \Rightarrow$$

$$y' = \frac{(9x^2y^2 - 4y^2)(x^2+y^2-1) - 2x}{(8xy - 6x^3y)(x^2+y^2-1) + 2y} =$$

$$= \frac{9x^4y^2 + 9x^2y^4 - 13x^2y^2 - 4y^4 + 4y^2 - 2x}{-6x^5y - 6x^3y^3 + 14x^3y + 8xy^3 - 8xy + 2y}.$$

Po dosazení $(1, -1)$ za (x, y) vyjde $y'(1) = \frac{9+9-13-4+4-2}{6+6-14-8+8-2} = -\frac{3}{4}$, což je stejný výsledek jako v příkladu 7.5.

Tento způsob derivování nám umožní získat vyšší derivace funkce $f(x)$ dané implicitně. Základem je následující věta, která se snadno dokáže indukcí s použitím vztahu (7.2).

Věta 7.6. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 7.3 a funkce F má v okolí bodu (x_0, y_0) spojité parciální derivace do řádu k, $k \in \mathbb{N}$. Pak implicitně daná funkce $y = f(x)$ má spojité derivace do řádu k. Jejich vzorce dostaneme opakovaným derivováním vztahu (7.2).*

Použití věty si ukážeme v následujícím příkladu.

Příklad 7.7. Ověřte, že rovnice $3x^2+4y^2+7xy-5 = 0$ zadává v bodě $(1, -2)$ implicitně funkci $y = f(x)$, a najděte Taylorův mnohočlen druhého řádu této funkce se středem 1.

Řešení. Je $F(x, y) = 3x^2 + 4y^2 + 7xy - 5$ a $(x_0, y_0) = (1, -2)$. Funkce F má spojité parciální derivace (všech řádů) v $\mathbb{R}^2$. Platí:

$$F(1, -2) = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot (-2)^2 + 7 \cdot 1 \cdot (-2) - 5 = 0.$$

Dále:

$$F_y(x, y) = 8y + 7x \quad \Rightarrow \quad F_y(1, -2) = 8(-2) + 7 \cdot 1 = -9 \neq 0.$$

Podle věty 7.6 je tedy touto rovnicí v okolí bodu $(1, -2)$ implicitně dána funkce $y = f(x)$ mající derivace všech řádů, pro niž platí $f(1) = -2$. Protože $F_x(x, y) = 6x + 7y$, je podle (7.2)

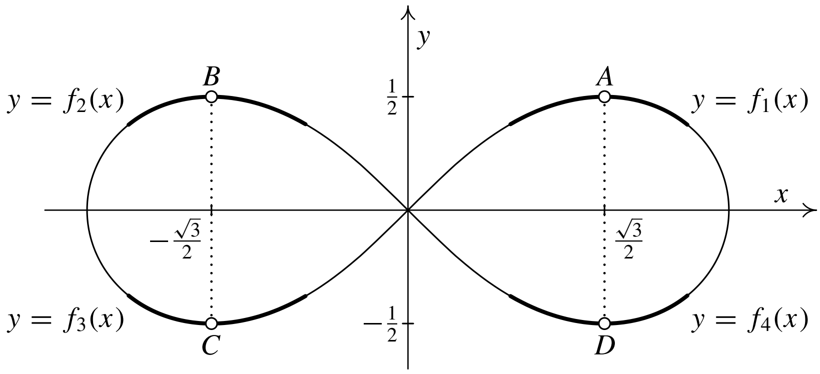
$$y' = f'(x) = -\frac{6x+7y}{8y+7x} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = -\frac{6-14}{-16+7} = -\frac{8}{9}.$$

Pro napsání Taylorova mnohočlenu $T_2(x)$ potřebujeme ještě druhou derivaci $f''(x)$. Podle věty 7.6 derivováním první derivace dostaneme

$$y'' = (y')' = \left(-\frac{6x+7y}{8y+7x}\right)' = -\frac{(6+7y')(8y+7x) - (6x+7y)(8y'+7)}{(8y+7x)^2} =$$

$$= -\frac{\left(6 - 7 \cdot \frac{6x+7y}{8y+7x}\right)(8y+7x) - (6x+7y)\left(-8 \cdot \frac{6x+7y}{8y+7x} + 7\right)}{(8y+7x)^2} =$$

$$= \frac{6x^2 + 14xy + 8y^2}{(8y+7x)^3}.$$



Obr. 7.3: Graf funkce dané implicitně

Odtud

$$f''(1) = \frac{6 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 \cdot (-2) + 8 \cdot (-2)^2}{(8 \cdot (-2) + t \cdot 1)^3} = -\frac{10}{729}\,.$$

Taylorův mnohočlen $T_2(x)$ má tvar

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2, \qquad \text{kde } x_0 = 1,$$

tudíž

$$T_2(x) = -2 - \frac{8}{9}(x - 1) - \frac{5}{729}(x - 1)^2.$$

Výsledek je znázorněn na obr. 7.3. Grafem $T_2(x)$ je parabola. Na obrázku je znázorněna i tečna. Její rovnice je $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ — viz příklad 7.5. Tedy

$$y + 2 = -\frac{8}{9}(x - 1) \qquad \Rightarrow \qquad y = -2 - \frac{8}{9}(x - 1),$$

což je právě Taylorův mnohočlen řádu jedna $T_1(x)$. Všechny tři grafy v okolí bodu $x = 1$ téměř splývají. Uvědomte si, že vzorec $f(x)$ lze explicitně najít, protože zadaná rovnice je vůči y kvadratickou rovnicí. Vyjde

$$f(x) = \frac{-7x - \sqrt{x^2 + 80}}{8}\,.$$

▲

Poznámka 7.8. I vyšší derivace lze obdobně jako první derivaci vypočítat opakovaným derivováním rovnice $F(x, y) = 0$ — viz příklad 8 z autotestu 2 na str. 216.

V závěrečném příkladu si ukážeme, jak lze postupovat při vyšetřování lokálních extrémů funkce jedné proměnné zadané implicitně.

Příklad 7.9. Najděte stacionární body funkcí jedné proměnné zadaných implicitně rovnicí $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$ a zjistěte, zda jsou v těchto bodech lokální extrémy.

Řešení. Označme $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$. Budeme hledat body (x_0,y_0) vyhovující zadané rovnici, tj. body, pro něž platí $F(x_0,y_0)=0$, přičemž $F_y(x_0,y_0)\neq 0$. Podle věty 7.3 rovnice $F(x,y)=0$ zadává v okolí každého takového bodu implicitně jistou funkci $y=f(x)$. Dále budeme chtít, aby tato funkce měla v bodě x_0 stacionární bod, tj. aby $f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)} = 0$. To bude platit, právě když $F_x(x_0,y_0)=0$. Hledané body tudíž dostaneme jako řešení soustavy rovnic $F(x,y)=0$ a $F_x(x,y)=0$.

Protože v našem případě $F_x(x,y) = 2(x^2+y^2)2x - 4x$, dostaneme soustavu rovnic

$$(x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0 \qquad \text{a} \qquad 4(x^2+y^2)x - 4x = 0.$$

Z druhé rovnice po vytknutí dostaneme

$$4x(x^2+y^2-1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x=0 \ \text{ nebo } \ x^2+y^2=1.$$

Po dosazení do první rovnice vyjde:

$$\begin{aligned}
&\text{Pro } x=0\colon \quad y^4+2y^2=0, \quad \text{tj.} \quad y^2(y^2+2)=0 \quad \Rightarrow \quad y=0,\\
&\text{Pro } x^2+y^2=1,\ \text{tj. } y^2=1-x^2\colon \quad 1-2\bigl(x^2-(1-x^2)\bigr)=0 \quad \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad x^2=\frac{3}{4}, \quad y^2=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y=\pm\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

V druhém případě jsou možné všechny kombinace znamének. Dostali jsme body

$$O=(0,0),\ A=\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2},\tfrac{1}{2}\right),\ B=\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2},\tfrac{1}{2}\right),\ C=\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2},-\tfrac{1}{2}\right),\ D=\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2},-\tfrac{1}{2}\right).$$

Nyní vypočteme F_y a ověříme, zda je v získaných bodech nenulová. Je $F_y(x,y) = 2(x^2+y^2)2y + 4y = 4y(x^2+y^2+1)$. Po dosazení dostaneme

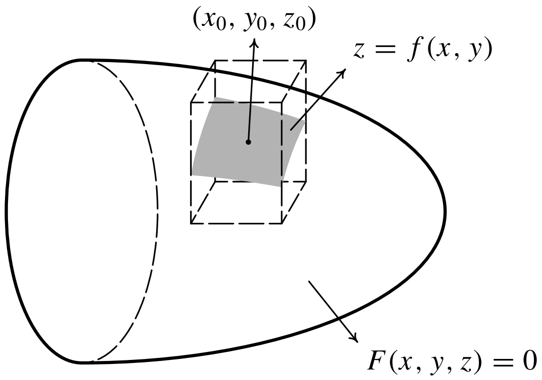
$$F_y(O)=0, \quad F_y(A)=4, \quad F_y(B)=4, \quad F_y(C)=-4, \quad F_y(D)=-4.$$

Bod O tedy z dalších úvah vyloučíme. V okolí každého ze čtyř zbývajících bodů A,B,C,D je rovnicí $F(x,y)=0$ implicitně zadána funkce jedné proměnné. Označme tyto funkce postupně $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$.

Nyní musíme určit druhé derivace těchto čtyř funkcí a rozhodnout podle jejich znaménka, zda jde o lokální extrém a jaký. Podle (7.2) platí (uvědomte si, že je jedno, o kterou z funkcí $f_1,\dots,f_4$ jde)

$$f_i'(x) = -\frac{4x(x^2+y^2-1)}{4y(x^2+y^2+1)}, \qquad i=1,\dots,4.$$

Přímý výpočet jako v příkladu 7.7 by byl sice možný, ale značně zdlouhavý. Zkusíme postupovat důmyslněji. Označme na chvíli f kteroukoli z funkcí $f_1,\dots,f_4$. Vypočteme



Obr. 7.4: Bernoulliova lemniskáta

nejprve $f''(x)$ obecně. K tomu musíme derivovat vztah $f'(x) = -\frac{F_x[x, f(x)]}{F_y[x, f(x)]}$. Nejprve si rozmyslíme, jak budeme derivovat samostatně výrazy v čitateli a jmenovateli. Podle vzorce (3.13) (v našem případě je vnější složka F_x resp. F_y a vnitřní složky jsou x a $f(x)$) dostaneme (smíšené druhé parciální derivace F_{xy} a F_{yx} jsou zaměnitelné)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_x[x, f(x)] = F_{xx}[x, f(x)] \cdot 1 + F_{xy}[x, f(x)] \cdot f'(x) = F_{xx} + F_{xy}y',$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_y[x, f(x)] = F_{yx}[x, f(x)] \cdot 1 + F_{yy}[x, f(x)] \cdot f'(x) = F_{xy} + F_{yy}y'.$$

Platí tedy

$$f''(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{F_x[x, f(x)]}{F_y[x, f(x)]}\right) = -\frac{(F_{xx} + F_{xy}y')F_y - F_x(F_{xy} + F_{yy}y')}{F_y^2}.$$

V bodech x_0, které nás zajímají, je $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = 0$ a $F_x(x_0, y_0) = 0$. Protože $F_{xx}(x, y) = 4(x^2 + y^2 - 1) + 4x \cdot 2x$, dosazením do předchozího vztahu dostaneme

$$f''(x_0) = -\frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} = -\frac{4(x_0^2 + y_0^2 - 1) + 8x_0^2}{4y_0(x_0^2 + y_0^2 + 1)} = -\frac{3x_0^2 + y_0^2 - 1}{y_0(x_0^2 + y_0^2 + 1)}.$$

Postupně tudíž vyjde

$$f_1''\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\tfrac{3}{2}, \quad f_2''\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\tfrac{3}{2}, \quad f_3''\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tfrac{3}{2}, \quad f_4''\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tfrac{3}{2}.$$

Je-li druhá derivace ve stacionárním bodě kladná, je zde lokální minimum, je-li záporná, je zde maximum. Funkce $f_1(x)$ má tedy v bodě $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ lokální maximum s hodnotou $\frac{1}{2}$ a totéž platí pro funkci $f_2(x)$ v bodě $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Funkce $f_3(x)$ má v bodě $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ lokální minimum s hodnotou $-\frac{1}{2}$ a totéž platí pro funkci $f_4(x)$ v bodě $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Řešení rovnice $F(x, y) = 0$ je znázorněno na obr. 7.4. Jde o křivku, která se nazývá *Bernoulliova*[1] *lemniskáta*. Její rovnice v polárních souřadnicích ρ a φ — viz obr. 1.14 — je

[1] **Jacob Bernoulli** (1654–1705) (čti bernuli) — významný švýcarský matematik. Pracoval v matematické analýze, teorii diferenciálních rovnic, variačním počtu, pravděpodobnosti atd. Jeden z rozsáhlé rodiny významných matematiků téhož jména (přes 10 osob). Článek o křivce publikoval v r. 1694.

$\rho^2 = 2\cos 2\varphi$, o čemž se lze snadno přesvědčit dosazením vztahů $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ do zadané rovnice a úpravou. Pomocí tohoto vyjádření, které je mnohem jednodušší než v kartézských souřadnicích, ji lze snadno nakreslit. Z obrázku je vidět, že v žádném okolí bodu $O = (0, 0)$ rovnice nevyjadřuje implicitně funkci jedné proměnné x. Tlusté čáry značí grafy funkcí $f_i(x)$, $i = 1, \dots, 4$. ▲

7.2 Funkce dvou proměnných dané implicitně

Problematika je velmi podobná obsahu předchozího oddílu, proto budeme postupovat stručněji a rychleji.

Množina všech trojic (x, y, z) chápaných jako souřadnice bodů v $\mathbb{R}^3$, které jsou řešeními rovnice $F(x, y, z) = 0$, nemusí být grafem funkce dvou proměnných (grafem je, právě když libovolná rovnoběžka s osou z protne takovou množinu nejvýše jednou — viz věta **??**). Příkladem je kulová plocha mající rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ — viz obr. 9.1 a). Bude nás zajímat, zda alespoň v nějakém okolí bodu (x_0, y_0, z_0), který je řešením uvažované rovnice, tvoří řešení graf funkce dvou proměnných. Místo kulového okolí se nám bude lépe hodit kvádrové okolí.

Definice 7.10. Nechť $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Předpokládejme, že existuje kvádrové okolí $\mathscr{O} = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2) \times (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\varepsilon > 0$, s následující vlastností:

> K libovolné dvojici $(x, y) \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ existuje v intervalu $(z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$ právě jedno z takové, že $F(x, y, z) = 0$. Označme tuto hodnotu $z = f(x, y)$.

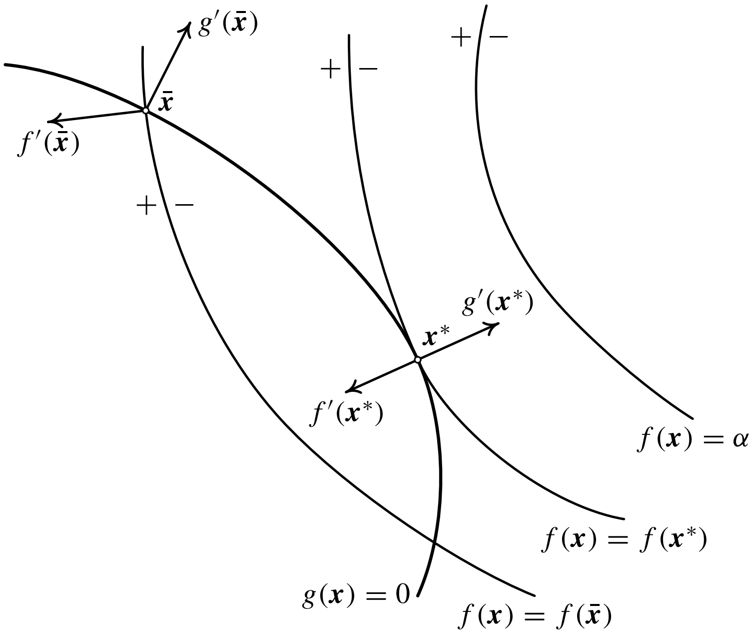
Pak o takto definované funkci $f(x, y)$, $(x, y) \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$, říkáme, že je *zadaná implicitně* rovnicí $F(x, y, z) = 0$ v okolí bodu (x_0, y_0, z_0).

Situace je znázorněna na obr. 7.5.

Z definice vyplývá, že platí

$$\begin{aligned} &F[x, y, f(x, y)] = 0,\ \ (x, y) \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2), \\ &\text{a} \qquad f(x_0, y_0) = z_0. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Uvedeme postačující podmínky, aby rovnice o třech neznámých zadávala implicitně jistou funkci dvou proměnných. Dále nás bude zajímat spojitost a existence parciálních derivací funkce dané implicitně. To vše je obsahem následující věty, která se dokáže analogicky jako věta 7.3.



Obr. 7.5: Funkce dvou proměnných daná implicitně

Věta 7.11. *Nechť funkce $F(x, y, z)$ má spojité první parciální derivace v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) a platí:*

1) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, 2) $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Pak rovnice $F(x, y, z) = 0$ zadává v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) implicitně funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$. Tato funkce je spojitá a má spojité první parciální derivace, pro něž platí

$$f_x(x, y) = -\frac{F_x[x, y, f(x, y)]}{F_z[x, y, f(x, y)]}, \qquad f_y(x, y) = -\frac{F_y[x, y, f(x, y)]}{F_z[x, y, f(x, y)]}. \tag{7.5}$$

Platí obdoba poznámky 7.4. Zejména používáme stručnější označení

$$f_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \text{resp.} \qquad f_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{F_y}{F_z},$$

kde trojice (x, y, z) vyhovuje rovnici $F(x, y, z) = 0$. Vzorce jsou efektivní pro výpočet v bodě (x_0, y_0, z_0).

Spojité parciální derivace zaručují existenci totálního diferenciálu a tudíž i tečné roviny — viz věta 3.12. Postup jejího nalezení si ukážeme v následujícím příkladu.

Příklad 7.12. Ověřte, že rovnice $3xyz - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ zadává v okolí bodu $(1, -1, -1)$ implicitně funkci $z = f(x, y)$, a najděte rovnici tečné roviny ke grafu f v tomto bodě.

Řešení. Ověříme předpoklady věty 7.11 pro funkci $F(x, y, z) = 3xyz - x^2 - y^2 - z^2$. Zřejmě $F(1, -1, -1) = 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - 1^2 - (-1)^2 - (-1)^2 = 0$. Dále

$$F_z = 3xy - 2z \qquad \Rightarrow \qquad F_z(1, -1, -1) = 3 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) = -1 \neq 0.$$

Tím je zajištěna existence spojité funkce f, pro niž platí $f(1,-1) = -1$. Tato funkce má spojité parciální derivace. Podle (7.5) je

$$F_x = 3yz - 2x \quad \Rightarrow \quad f_x = -\frac{3yz - 2x}{3xy - 2z} \quad \Rightarrow \quad f_x(1,-1) = 1,$$
$$F_y = 3xz - 2y \quad \Rightarrow \quad f_y = -\frac{3xz - 2y}{3xy - 2z} \quad \Rightarrow \quad f_y(1,-1) = -1.$$

Podle věty 3.7 tudíž existuje totální diferenciál $\mathrm{d}f_{(1,-1)}$, což podle věty 3.12 znamená, že existuje hledaná tečná rovina. Její rovnice je podle (3.7)

$$z - (-1) = 1 \cdot (x - 1) + (-1) \cdot (y - (-1)) \quad \Rightarrow \quad x - y - z - 3 = 0. \qquad \blacktriangle$$

Podobně jako u funkce jedné proměnné dané implicitně i v případě funkce dvou proměnných je možné odvodit vzorce pro parciální derivace s použitím vzorce pro derivaci složené funkce. Protože v okolí bodu (x_0, y_0) platí $F[x, y, f(x, y)] = 0$, vyjde např. pro derivaci podle x:

$$F_x[x, y, f(x, y)] \cdot 1 + F_y[x, y, f(x, y)] \cdot 0 + F_z[x, y, f(x, y)] \cdot f_x(x, y) = 0,$$

z čehož dostaneme první vzorec v (7.5). Derivaci $f_x(x, y)$ pro stručnost označujeme z_x.

Nyní si všimneme existence a výpočtu vyšších derivací funkce dvou proměnných dané implicitně. To je obsahem následující věty.

Věta 7.13. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 7.11 a funkce F má v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) spojité parciální derivace do řádu k, $k \in \mathbb{N}$. Pak implicitně daná funkce $z = f(x, y)$ má spojité parciální derivace do řádu k. Jejich vzorce dostaneme opakovaným derivováním vztahů (7.5).*

Použití si ukážeme v následujícím příkladu.

Příklad 7.14. Ověřte, že rovnice $x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 4y - 2z + 29 = 0$ zadává v okolí bodu $(1, -2, 4)$ implicitně funkci $z = f(x, y)$. Rozhodněte, zda má tato funkce f v bodě $(1, -2)$ lokální extrém, a pokud ano, určete jaký.

Řešení. Ověříme předpoklady věty 7.11 pro funkci $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 4y - 2z + 29 = 0$. Je

$$F(1, -2, 4) = 1^2 + (-2)^2 - 4^2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) - 2 \cdot 4 + 29 = 0.$$

Dále

$$F_z = -2z - 2 \quad \Rightarrow \quad F_z(1, -2, 4) = -2 \cdot 4 - 2 = -10 \neq 0.$$

Existuje tedy spojitá funkce f, pro niž $f(1, -2) = 0$. Protože F má spojité parciální derivace libovolného řádu, platí podle věty 7.13 totéž pro funkci f. První derivace $z_x = f_x(x, y)$ a $z_y = f_y(x, y)$ určíme derivováním rovnice

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 4y - 2z + 29 = 0.$$

Odtud derivováním podle x dostaneme

$$2x + 0 - 2zz_x - 2 + 0 - 2z_x = 0 \quad \Rightarrow \quad z_x = \frac{x-1}{z+1}$$

a podobně derivováním podle y vyjde

$$0 + 2y - 2zz_y - 0 + 4 - 2z_y = 0 \quad \Rightarrow \quad z_y = \frac{y+2}{z+1}.$$

Platí tudíž $z_x(1, -2) = 0$ a $z_y(1, -2) = 0$, takže bod $(1, -2)$ je stacionární. Nyní použijeme větu 5.6. Nejprve vypočteme druhé parciální derivace funkce f.

$$\begin{aligned}
z_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} z_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-1}{z+1}\right) = \frac{1\cdot(z+1) - (x-1)z_x}{(z+1)^2} &&\Rightarrow \quad z_{xx}(1,-2) = \frac{1}{5},\\
z_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} z_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y+2}{z+1}\right) = \frac{1\cdot(z+1) - (y+2)z_y}{(z+1)^2} &&\Rightarrow \quad z_{yy}(1,-2) = \frac{1}{5},\\
z_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} z_x = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-1}{z+1}\right) = \frac{0\cdot(z+1) - (x-1)z_y}{(z+1)^2} &&\Rightarrow \quad z_{xy}(1,-2) = 0.
\end{aligned}$$

Hessián je $J(x, y) = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2$, tedy $J(1, -2) = 1/5 \cdot 1/5 - 0^2 = 1/25 > 0$, takže v bodě $(1, -2)$ má f extrém. Protože $z_{xx}(1, -2) = 1/5 > 0$, jde o lokální minimum. ▲

Poznámka 7.15. Rovněž u funkce dvou proměnných $f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$ lze vyšetřovat lokální extrémy. Postup je obdobný jako u funkce jedné proměnné v příkladu 7.9. Hledané body musí splňovat rovnici $F(x, y, z) = 0$ a podmínku $F_z(x, y, z) \neq 0$. Aby šlo o stacionární body, musí platit $f_x = -\frac{F_x}{F_z} = 0$ a $f_y = -\frac{F_y}{F_z} = 0$, tedy $F_x(x, y, z) = 0$ a $F_y(x, y, z) = 0$. Body tudíž najdeme řešením soustavy tří rovnic

$$F(x, y, z) = 0, \qquad F_x(x, y, z) = 0, \qquad F_y(x, y, z) = 0.$$

Pro zájemce:

Předchozí výsledky lze podstatně zobecnit.

Uvažujme nejprve jednu rovnici o $n + 1$ neznámých, $n \in \mathbb{N}$, tvaru $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$. Označíme-li $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, máme stručněji $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$. Nechť $(\boldsymbol{x}^*, y^*) = (x_1^*, \dots, x_n^*, y^*)$ je řešení této rovnice. Předpokládejme, že F má v okolí bodu $(\boldsymbol{x}^*, y^*)$ spojité první parciální derivace a $F_y(\boldsymbol{x}^*, y^*) \neq 0$. Pak uvažovaná rovnice vyjadřuje v okolí bodu $(\boldsymbol{x}^*, y^*)$ implicitně spojitou funkci $f(\boldsymbol{x})$ o n proměnných. Důkaz je analogický jako pro $n = 1$ resp. $n = 2$.

Podrobněji existuje kvádrové okolí $(x_1^* - \delta_1, x_1^* + \delta_1) \times \dots \times (x_n^* - \delta_n, x_n^* + \delta_n) \times (y^* - \varepsilon, y^* + \varepsilon)$, $\delta_1, \dots, \delta_n, \varepsilon > 0$, s vlastností, že pro libovolné $\boldsymbol{x} \in (x_1^* - \delta_1, x_1^* + \delta_1) \times \dots \times (x_n^* - \delta_n, x_n^* + \delta_n)$ existuje právě jedno $y \in (y^* - \varepsilon, y^* + \varepsilon)$ takové, že $(\boldsymbol{x}, y)$ splňuje danou rovnici. Označíme $y = f(\boldsymbol{x})$. Tedy $F[\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})] = 0$.

Funkce f má spojité parciální derivace, pro něž platí $f_{x_i}(\boldsymbol{x}) = -\frac{F_{x_i}[\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})]}{F_y[\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})]}$. Má-li funkce F v okolí bodu $(\boldsymbol{x}^*, y^*)$ spojité parciální derivace až do řádu k, $k \in \mathbb{N}$, má i f spojité parciální derivace až do řádu k, které lze obdržet derivováním předchozího vztahu obdobně jako u implicitně dané funkce jedné nebo dvou proměnných. Důkaz tvrzení je stejný jako u věty 7.3.

Obecněji lze uvažovat soustavu m rovnic o $m+n$ neznámých, $m, n \in \mathbb{N}$, tvaru

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0,\\ F_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0. \end{aligned}$$

Označíme-li $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, můžeme soustavu zapsat stručněji: $F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$, $F_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0, \dots, F_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$. Nechť $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) = (x_1^*, \dots, x_n^*, y_1^*, \dots, y_m^*)$ je řešení této soustavy. Předpokládejme, že $F_1, \dots, F_m$ mají v okolí bodu $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ spojité první parciální derivace a determinant

$$\begin{vmatrix} F_{1|y_1}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) & F_{1|y_2}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) & \dots & F_{1|y_m}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)\\ F_{2|y_1}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) & F_{2|y_2}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) & \dots & F_{2|y_m}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ F_{m|y_1}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) & F_{m|y_2}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) & \dots & F_{m|y_m}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak uvažovaná soustava rovnic vyjadřuje v okolí bodu $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ implicitně m-tici spojitých funkcí $f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_m(\boldsymbol{x})$ o n proměnných.

Podrobněji existuje okolí $(x_1^*-\delta_1, x_1^*+\delta_1) \times \dots \times (x_n^*-\delta_n, x_n^*+\delta_n) \times (y_1^* - \varepsilon_1, y_1^* + \varepsilon_1) \times \dots \times (y_m^*-\varepsilon_m, y_m^*+\varepsilon_m)$, $\delta_1, \dots, \delta_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m > 0$, takové, že pro libovolné $\boldsymbol{x} \in (x_1^* - \delta_1, x_1^* + \delta_1) \times \dots \times (x_n^* - \delta_n, x_n^* + \delta_n)$ existuje právě jedno $\boldsymbol{y} \in (y_1^* - \varepsilon_1, y_1^* + \varepsilon_1) \times \dots \times (y_m^* - \varepsilon_m, y_m^* + \varepsilon_m)$ takové, že $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ splňuje danou soustavu rovnic. Označme $y_1 = f_1(\boldsymbol{x}), \dots, y_m = f_m(\boldsymbol{x})$. Tedy $F_i[\boldsymbol{x}, f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_m(\boldsymbol{x})] = 0$, $i = 1, \dots, m$.

Funkce $f_1, \dots, f_m$ mají spojité parciální derivace. Jejich vyjádření lze získat řešením (např. pomocí Cramerova pravidla) soustavy lineárních algebraických rovnic s neznámými $f_{1|x_j}(\boldsymbol{x})$ až $f_{m|x_j}(\boldsymbol{x})$, kterou dostaneme derivováním identit $F_i[\boldsymbol{x}, f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_m(\boldsymbol{x})] = 0$, $i = 1, \dots, m$, podle proměnné x_j, $j = 1, \dots, n$, s využitím vzorců pro derivaci složené funkce. Označíme-li pro stručnost $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \dots, f_m(\boldsymbol{x}))$, je její tvar

$$\begin{aligned} F_{1|x_j}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] + F_{1|y_1}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] f_{1|x_j}(\boldsymbol{x}) + \dots + F_{1|y_m}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] f_{m|x_j}(\boldsymbol{x}) &= 0,\\ F_{2|x_j}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] + F_{2|y_1}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] f_{1|x_j}(\boldsymbol{x}) + \dots + F_{2|y_m}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] f_{m|x_j}(\boldsymbol{x}) &= 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\ F_{m|x_j}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] + F_{m|y_1}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] f_{1|x_j}(\boldsymbol{x}) + \dots + F_{m|y_m}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})] f_{m|x_j}(\boldsymbol{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Předpoklady zaručují, že determinant matice soustavy je v okolí bodu $\boldsymbol{x}^*$ nenulový.

Mají-li funkce $F_1, \dots, F_m$ v okolí bodu $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ spojité parciální derivace až do řádu k, $k \in \mathbb{N}$, mají i funkce $f_1, \dots, f_m$ spojité parciální derivace až do řádu k, které lze obdržet derivováním vzorců pro první parciální derivace $f_{i|x_j}(\boldsymbol{x})$.

Tvrzení lze dokázat indukcí vzhledem k počtu rovnic m — viz např. [8]. Jiný důkaz lze udělat pomocí Banachovy věty o pevném bodu — viz např. [2, 13].

$\boxed{\Sigma}$ Pojmy k zapamatování

— funkce jedné proměnné daná implicitně

— funkce dvou proměnných daná implicitně
— funkce daná explicitně
— derivace funkce jedné proměnné dané implicitně
— derivace funkce dvou proměnných dané implicitně
— lokální extrémy funkce jedné proměnné dané implicitně
— lokální extrémy funkce dvou proměnných dané implicitně
— Taylorův mnohočlen funkce jedné proměnné dané implicitně
— Taylorův mnohočlen funkce dvou proměnných dané implicitně

Kontrolní otázky

1. Definujte funkci jedné proměnné danou implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$.
2. Vysvětlete, za jakých podmínek existuje funkce jedné proměnné daná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$.
3. Jak derivujeme funkci jedné proměnné danou implicitně?
4. Jaký je geometrický význam podmínky $F_y(x_0, y_0) \neq 0$?
5. Definujte funkci dvou proměnných danou implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$.
6. Vysvětlete, za jakých podmínek existuje funkce dvou proměnných daná implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$.
7. Jak spočítáte derivaci funkce dvou proměnných dané implicitně?
8. Jak spočítáte vyšší derivaci funkce dvou proměnných dané implicitně?
9. Jaký je geometrický význam podmínky $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$?
10. Jak najdete lokální extrémy funkce dané implicitně?

Příklady k procvičení

1. Rozhodněte, zda daná rovnice zadává v okolí bodu $A = (x_0, y_0)$ implicitně funkci jedné proměnné $y = f(x)$. Pokud ano, vypočtěte její první derivaci a napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě (x_0, y_0).

a) $y^4 - x^2 = 0,\ A = (1, -1)$,
b) $x^2 + xy + y^2 = 3,\ A = (1, 1)$,
c) $x^3 + 3xy + y^2 = -3,\ A = (-1, 2)$,
d) $x - y + \sin y = 0,\ A = (\pi, \pi)$,
e) $y^2(2 - x) = x^2,\ A = (1, -1)$,
f) $y^2(2 - x) = x,\ A = (1, -1)$,
g) $y^2(x - 2) = x^2,\ A = (3, -3)$,
h) $x^y = y^x,\ A = (1, 1)$,
i) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},\ A = (1, 0)$,
j) $x^4 + x = y^4 + y,\ A = (2, 2)$,
k) $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y + y^3,\ A = (0, 1)$,
l) $x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 2,\ A = (1, 1)$,
m) $\ln(y^2 - 2x^2) + y + x = 1,\ A = (0, 1)$,
n) $x \sin y + \mathrm{e}^x \cos y + \cos x = 1,\ A = (0, \pi/2)$,
o) $x^3y - 3xy^3 + x^2 - 2y^2 = 0,\ A = (-2, 1)$,
p) $xy + x^2y^2 + x^3y^3 + x^4y^4 = 0,\ A = (1, -1)$.

2. Najděte stacionární body funkcí jedné proměnné daných implicitně následujícími rovnicemi a zjistěte, zda jsou v těchto bodech lokální extrémy.

a) $x^4 + y^3 + 2x^2y + 2 = 0$,
b) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x = -1$,
c) $3x^2 + 2xy - y^2 - 3y + x - \frac{5}{4} = 0$,
d) $x^2y^2 - 2xy^4 - 7y^3 + 8 = 0$.

3. Ověřte, že daná rovnice zadává v okolí bodu $A = (x_0, y_0)$ implicitně funkci $f(x)$. Vypočtěte její první a druhou derivaci a napište její Taylorův mnohočlen $T_2(x)$ se středem x_0.

   a) $3x \ln y - y^3 + 1 = 0,\ A = (2, 1)$,
   b) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + y = 3,\ A = (1, 1)$,
   c) $xy + x^2y^2 - x - y = 0,\ A = (1, 1)$,
   d) $x\mathrm{e}^y - y\mathrm{e}^x = 0,\ A = (0, 0)$,
   e) $x \sin x + y \cos y = 0,\ A = (\pi, 0)$,
   f) $\ln(x^2 + y^2) + y = 1,\ A = (0, 1)$,
   g) $x^3 + xy - y^3 = 7,\ A = (2, -1)$,
   h) $x\mathrm{e}^{x+y} + y^2 = 0,\ A = (-1, 1)$.

4. Rozhodněte, zda daná rovnice zadává v okolí bodu $A = (x_0, y_0, z_0)$ implicitně funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$. Pokud ano, vypočtěte její první parciální derivace a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě (x_0, y_0, z_0).

   a) $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 2,\ A = (1, -1, 1)$,
   b) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + z^3 + xyz = 0,\ A = (1, 1, -1)$,
   c) $z(x - y)^2 + x^3y^2 + xz^2 = 9,\ A = (2, 1, -1)$,
   d) $\ln(x^2 + y^2 - 3z^2) + xy - z = 8,\ A = (3, 2, -2)$,
   e) $xy\mathrm{e}^{z-1} + x^3 + y^3 + z\mathrm{e}^{x+y} + 3 = 0,\ A = (2, -2, 1)$,
   f) $(x + y) \sin z + xz \cos xy = \pi^2,\ A = (\pi, 1, -\pi)$,
   g) $xyz + x^2y^2z^2 + x^3y^3z^3 = 3,\ A = (1, 1, 1)$,
   h) $(x + y - z)^2 + \ln(x + y + z) = 1,\ A = (-1, 1, 1)$.

5. Najděte stacionární body funkcí dvou proměnných daných implicitně následujícími rovnicemi a zjistěte, zda jsou v těchto bodech lokální extrémy.

   a) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - \sqrt{2}yz = 1$,
   b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z = 10$,
   c) $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z = -8$,
   d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11$,
   e) $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z = 8$,
   f) $3x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 6x + 8y = -23$,
   g) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z = 2$.

6. Najděte body, v nichž pro následující rovnici nejsou splněny předpoklady věty 7.3 o existenci implicitně dané funkce $y = f(x)$.

   a) $x^2 + 2xy - y^2 = 8$,
   b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0$.

7. Najděte body, v nichž pro následující rovnici nejsou splněny předpoklady věty 7.11 o existenci implicitně dané funkce $z = f(x, y)$.

   a) $z^2 - 2px = 0,\ p > 0$,
   b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ a, b, c > 0$.

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $t\colon x + 2y + 1 = 0, \quad n\colon 2x - y - 3 = 0$,
   b) $t\colon x + y - 2 = 0, \quad n\colon x - y = 0$,

c) $t: 9x + y + 7 = 0, \quad n: x - 9y + 19 = 0,$
d) $t: x - 2y + \pi = 0, \quad n: 2x + y - 3\pi = 0,$
e) $t: 3x + 2y - 1 = 0, \quad n: 2x - 3y - 5 = 0,$
f) $t: x + y = 0, \quad n: x - y - 2 = 0,$
g) $t: x - 2y - 9 = 0, \quad n: 2x + y - 3 = 0,$
h) $t: x - y = 0, \quad n: x + y - 2 = 0,$
i) $t: x - y - 1 = 0, \quad n: x + y - 1 = 0,$
j) $t: x - y = 0, \quad n: x + y - 4 = 0,$
k) $t: y - 1 = 0, \quad n: x = 0,$
l) $t: x + y - 2 = 0, \quad n: x - y = 0,$
m) $t: x + 3y - 3 = 0, \quad n: 3x - y + 1 = 0,$
n) $t: x - y + \pi/2 = 0, \quad n: x + y - \pi/2 = 0,$
o) $t: 5x + 6y + 4 = 0, \quad n: 6x - 5y + 17 = 0,$
p) $t: x - y - 2 = 0, \quad n: x + y = 0.$

2. a) $y_{\max} = -1$ v $x = 1$, $\quad y_{\max} = -1$ v $x = -1$, $\quad y_{\min} = -\sqrt[3]{2}$ v $x = 0$,
b) $y_{\max} = 0$ v $x = -1$, $\quad y_{\min} = -2$ v $x = -3$,
c) $y_{\min} = -1/2$ v $x = 0$, $\quad y_{\max} = -2$ v $x = 1/2$,
d) $y_{\min} = 1$ v $x = 1$, $\quad y_{\max} = -2$ v $x = 4$.

3. a) $T_2(x) = 1,$ b) $T_2(x) = 1 - (x-1)^2,$
c) $T_2(x) = 1 - (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2,$ d) $T_2(x) = x,$
e) $T_2(x) = \pi(x - \pi) + (x - \pi)^2,$ f) $T_2(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2,$
g) $T_2(x) = -1 + 11(x-2) + 380(x-2)^2,$ h) $T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x+1)^2.$

4. a) $x - y + z - 3 = 0,$ b) $x + y - 4z - 6 = 0,$
c) $11x + 18y - 3z - 43 = 0,$ d) $8x + 7y + 11z - 16 = 0,$
e) $11x + 15y - 3z + 11 = 0,$ f) $\pi x - (2\pi + 1)z - 3\pi^2 - \pi = 0,$
g) $x + y + z - 3 = 0,$ h) $x + y - 3z + 3 = 0.$

5. a) $z_{\min} = -2$ v $(-1, -\sqrt{2})$, $\quad z_{\max} = 2$ v $(1, \sqrt{2})$,
b) $z_{\min} = -2$ v $(1, -1)$, $\quad z_{\max} = 6$ v $(1, -1)$,
c) $z_{\min} = 1$ v $(-2, 0)$, $\quad z_{\max} = -\frac{8}{7}$ v $(\frac{16}{7}, 0)$,
d) $z_{\min} = -2$ v $(1, -2)$, $\quad z_{\max} = 8$ v $(1, -2)$,
e) $z_{\min} = 1$ v $(-1, 2)$, $\quad z_{\max} = -2$ v $(-1, 2)$, ve st. b. $(1, 2)$, $z = -3$ a 2 není,
f) $z_{\min} = 2$ v $(1, -2)$, $\quad z_{\max} = -2$ v $(1, -2)$,
g) $z_{\min} = -4 - 2\sqrt{6}$ v $(-3 - \sqrt{6}, -3 - \sqrt{6})$,
$z_{\max} = -4 + 2\sqrt{6}$ v $(-3 + \sqrt{6}, -3 + \sqrt{6})$.

6. a) $(2, 2)$, $(-2, -2)$, b) $(a, 0)$, $(-a, 0)$.

7. a) $x = 0$, $z = 0$, tj. body osy y, b) $z = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (elipsa).

Kapitola 8

Vázané extrémy

Průvodce studiem

V praxi jsme poměrně často postaveni před úkol určit tzv. vázaný extrém. Jde o nalezení extrému funkce několika proměnných, které jsou vázány dalšími vedlejšími podmínkami (tzv. vazbami).

Např. funkce $z = f(x, y)$ *je ve spojení s rovnicí (vazbou)* $g(x, y) = 0$ *vlastně funkcí jedné proměnné. Její zápis ve tvaru* $z = f_1(x)$ *resp.* $z = f_2(y)$ *získáme, když z rovnice* $g(x, y) = 0$ *bude možné jednu z proměnných* x, y *vyjádřit jako funkci druhé proměnné a pak dosadit do* $z = f(x, y)$ *za* x *nebo* y. *Výpočet vázaného extrému se tak převede na výpočet lokálního extrému jedné proměnné. Jestliže to nebude možné nebo to bude příliš složité, používá se k výpočtu tzv. Lagrangeovy funkce.*

V této kapitole je výklad od počátku veden pro obecný případ funkcí n *proměnných. Studium této kapitoly bude proto výrazně náročnější.*

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- zodpovědět, za jakých podmínek má daná funkce f v bodě $\boldsymbol{x}^*$ vázaný extrém,
- určit stacionární body a ověřit, zda jsou v nich lokální popřípadě globální extrémy,
- nalézt vázané extrémy dané funkce při daných podmínkách.

V této kapitole se budeme zabývat tzv. *klasickou úlohou na vázaný extrém*. Jde o úlohu nalézt lokální (popř. globální) extrémy funkce na množině, která je zadaná soustavou rovnic. Formálně lze popsat tuto úlohu takto:

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{x}) \to \text{ext}, \\ &g_i(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad i = 1, \dots, m, \quad \boldsymbol{x} \in P, \quad P = \operatorname{int} P. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Rovnice $g_i(\boldsymbol{x}) = 0$ se nazývají *vazebné podmínky* nebo *funkcionální omezení* a množina P

přímá omezení (často je to $\mathbb{R}^n$). Předpokládáme, že P je otevřená množina a že funkce $f, g_1, \dots, g_m$ jsou na ní dostatečně hladké (mají potřebné parciální derivace). Hledá se tedy maximum resp. minimum funkce f na množině $X = \{\boldsymbol{x} \in P : g_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i = 1, \dots, m\}$.

Pokud by se nám podařilo vyjádřit některé proměnné ze soustavy rovnic $g_i(\boldsymbol{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$, pomocí zbývajících, mohli bychom je dosadit do funkce f a převést danou úlohu na úlohu najít „obyčejné" extrémy, kterou jsme studovali v kapitole 5. To jsme udělali v příkladu 6.7. Obecně bohužel nedokážeme takovou soustavu explicitně řešit a nezbývá než použít jiné metody, založené na větě o implicitní funkci. Jejich studium je právě obsahem této kapitoly. Obecnější úloha, kde vazebné podmínky mohou být i typu neostrých nerovností, je popsána např. v [1], [10] nebo [18].

Než začneme vyšetřovat další typy úloh, zavedeme pojem, jehož význam je v další části textu klíčový. Funkce definovaná vztahem

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x}, y_0, \boldsymbol{y}) = y_0 f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(\boldsymbol{x}), \tag{8.2}$$

kde $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in P$, $y_0 \in \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, se nazývá *Lagrangeova funkce* úlohy (8.1). Koeficienty $y_0, \dots, y_m$ se nazývají *Lagrangeovy multiplikátory*. Je-li $y_0 \neq 0$, nazývá se Lagrangeova funkce *regulární*. Budeme předpokládat, že $y_0 \geqq 0$ pro úlohu na minimum a $y_0 \leqq 0$ pro úlohu na maximum. Parciální derivace Lagrangeovy funkce vzhledem ke složkám vektoru $\boldsymbol{x}$ mají tvar

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}, y_0, \boldsymbol{y}) = y_0 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}), \qquad j = 1, \dots, n.$$

Vektor z nich sestavený označíme $\mathscr{L}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, y_0, \boldsymbol{y})$, tj.

$$\mathscr{L}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, y_0, \boldsymbol{y}) = y_0 f'(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} y_i g'_i(\boldsymbol{x}).$$

Pojem lokálních extrémů pro tuto úlohu byl již zaveden — viz definice 5.16. Podobně jako v kapitole 5 rozdělíme výsledky na dvě části podle toho, zda se používají jen první derivace (podmínky prvního řádu) nebo i druhé derivace (podmínky druhého řádu).

Poznamenejme, že k pochopení výsledků této kapitoly jsou nezbytné základní znalosti z teorie konečněrozměrných vektorových prostorů se skalárním součinem.

8.1 Podmínky prvního řádu

Níže uvedená nutná podmínka je známa jako *pravidlo Lagrangeových multiplikátorů* a je asi nejjednodušším a nejznámějším výsledkem, v němž se objeví Lagrangeova funkce. Její důkaz není příliš obtížný, ale rozhodně není triviální. Je k němu třeba věta o implicitní funkci nebo některé jí ekvivalentní tvrzení. S touto větou se posluchači obvykle v základním kurzu analýzy setkají, ale většinou je obtížné jim ukázat nějaký podstatný výsledek, při jehož důkazu se tato pro ně dost teoretická věta použije, a tak je přesvědčit o významu tohoto tvrzení. Z tohoto důvodu uvedeme tzv. *větu o inverzní funkci*, která je ekvivalentní větě o implicitní funkci, a provedeme pomocí ní důkaz nutné podmínky existence lokálního extrému.

Věta 8.1 (Věta o inverzní funkci). *Nechť* $s \in \mathbb{N}$. *Předpokládejme, že funkce* $\psi_1(x_1, \dots, x_s), \dots, \psi_s(x_1, \dots, x_s)$ *jsou spojitě diferencovatelné v nějakém okolí bodu* $\widehat{\boldsymbol{x}} = (\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_s)$. *Nechť jejich jakobián*[1] $J = \det\left(\frac{\partial \psi_i(\widehat{\boldsymbol{x}})}{\partial x_j}\right)$, $i, j = 1, \dots, s$, *je nenulový. Pak existují čísla* $\varepsilon_0 > 0$ *a* $\delta_0 > 0$ *taková, že pro libovolné* $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_s)$, $\|\boldsymbol{\eta}\| \leqq \varepsilon_0$, *existuje* $\boldsymbol{\xi}$, $\|\boldsymbol{\xi}\| \leqq \delta_0$, *s vlastností* $\psi(\widehat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\xi}) = \psi(\widehat{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{\eta}$, *přičemž* $\boldsymbol{\xi} \to \mathbf{0}$ *pro* $\boldsymbol{\eta} \to \mathbf{0}$.

Důkaz. Důkaz je založen na použití věty o implicitní funkci v podobě, jak je uvedena v části *Pro zájemce* na str. 162. Věta se aplikuje na soustavu s rovnic tvaru $y_i - \psi_i(x_1, \dots, x_s) = 0$, $i = 1, \dots, s$. Podrobněji viz např. [16, str. 223], kde je dokázán ještě silnější výsledek. □

Funkce z předchozí věty určují zobrazení Ψ, které bodům $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^s$ přiřazuje body $\Psi(\boldsymbol{x}) = (\psi_1(\boldsymbol{x}), \dots, \psi_s(\boldsymbol{x})) \in \mathbb{R}^s$. Věta říká, že $\Psi(\widehat{\boldsymbol{x}})$ je vnitřní bod oboru hodnot zobrazení Ψ. Podrobněji lze ukázat, že Ψ je v jistém okolí bodu $\widehat{\boldsymbol{x}}$ prosté a že k němu inverzní zobrazení je spojitě diferencovatelné, tj. zejména spojité. Z této formulace vyplývá název věty.

Věta 8.2. *Nechť funkce* f, $g_1, \dots, g_m$ *jsou spojitě diferencovatelné v nějakém okolí bodu* $\boldsymbol{x}^* \in P$, $m < n$. *Je-li* $\boldsymbol{x}^*$ *lokální řešení úlohy* (8.1), *pak existuje číslo* y_0^* *a vektor* $\boldsymbol{y}^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$, *které nejsou současně nulové, takové, že*

$$\mathscr{L}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*) = \mathbf{0}. \tag{8.3}$$

Jsou-li gradienty $g'_1(\boldsymbol{x}^*), \dots, g'_m(\boldsymbol{x}^*)$ *lineárně nezávislé (podmínka regularity), potom je* $y_0^* \neq 0$.

Důkaz. Předpokládejme, že jde např. o úlohu na minimum. Uvažujme vektory $f'(\boldsymbol{x}^*)$, $g'_1(\boldsymbol{x}^*), \dots, g'_m(\boldsymbol{x}^*)$. Jsou-li lineárně závislé, musí existovat čísla y_k^*, $k = 0, \dots, m$, která nejsou současně všechna nulová, tak, že je splněno (8.3).

Připusťme nyní, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé. Ukážeme, že tento předpoklad vede ke sporu s tím, že v $\boldsymbol{x}^*$ je lokální minimum. Uvažujme zobrazení

$$\Psi(\boldsymbol{x}) = (f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^*), g_1(\boldsymbol{x}), \dots, g_m(\boldsymbol{x})).$$

[1] **Karl Gustav Jacob Jacobi** (1804–1851) (čti jakobi) — významný německý matematik. Zabýval se teorií funkcí, teorií čísel, lineární algebrou, diferenciálními rovnicemi a mechanikou.

Nezávislost zmíněných vektorů znamená, že matice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

typu $(m+1) \times n$ má hodnost $m+1$. Nechť pro jednoduchost např. prvních $m+1$ sloupců je lineárně nezávislých, tj.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_{m+1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_{m+1}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak funkce

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1, \dots, x_{m+1}) &= f(x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*), \\ \psi_2(x_1, \dots, x_{m+1}) &= g_1(x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}^*, \dots, x_n^*), \\ &\vdots \\ \psi_{m+1}(x_1, \dots, x_{m+1}) &= g_m(x_1, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}^*, \dots, x_n^*) \end{aligned}$$

splňují předpoklady věty o inverzní funkci. Položme $\eta_1 = -\varepsilon$ a $\eta_2 = \cdots = \eta_{m+1} = 0$. Pro libovolné dostatečně malé $\varepsilon > 0$ najdeme příslušná čísla ξ_k, $k = 1, \dots, m+1$, a položíme $x_k(\varepsilon) = x_k^* + \xi_k$. Při tomto označení platí

$$\begin{aligned} & f(x_1(\varepsilon), \dots, x_{m+1}(\varepsilon), x_{m+2}^*, \dots, x_n^*) - f(\boldsymbol{x}^*) = -\varepsilon, \\ & g_1(x_1(\varepsilon), \dots, x_{m+1}(\varepsilon), x_{m+2}^*, \dots, x_n^*) = 0, \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & g_m(x_1(\varepsilon), \dots, x_{m+1}(\varepsilon), x_{m+2}^*, \dots, x_n^*) = 0. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Dále $x_k(\varepsilon) \to x_k^*$ pro $\varepsilon \to 0$. Pak bod $(x_1(\varepsilon), \dots, x_{m+1}(\varepsilon), x_{m+2}^*, \dots, x_n^*)$, jenž může být libovolně blízko bodu $\boldsymbol{x}^*$, splňuje podle (8.4) všechny vazebné podmínky. Přitom

$$f(x_1(\varepsilon), \dots, x_{m+1}(\varepsilon), x_{m+2}^*, \dots, x_n^*) = f(\boldsymbol{x}^*) - \varepsilon < f(\boldsymbol{x}^*).$$

To však znamená, že v bodě $\boldsymbol{x}^*$ nemůže být lokální minimum.

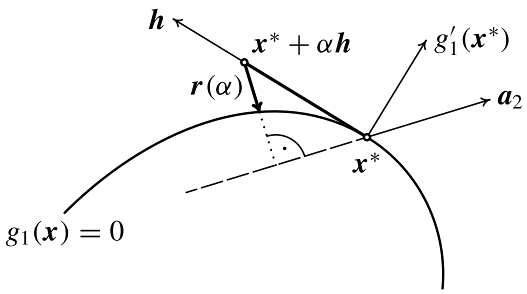
Je-li splněna podmínka regularity, je $y_0^* \neq 0$. V opačném případě by byl nenulový některý z multiplikátorů $y_1^*, \dots, y_m^*$ a podle (8.3) by $g_1'(\boldsymbol{x}^*), \dots, g_m'(\boldsymbol{x}^*)$ byly lineárně závislé, což je spor s předpokladem. □

Poznámka 8.3.

1) Podstatnou součástí tvrzení je, že alespoň jeden z multiplikátorů $y_0, \dots, y_m$ je nenulový. Tento fakt je příčinou obtížnosti důkazu. Pokud by byly všechny multiplikátory nulové, je (8.3) triviálně splněno a není co dokazovat. Taková věta by byla ovšem naprosto bezcenná.

2) Je zřejmé, že pokud nějaká soustava multiplikátorů splňuje požadavky věty, pak je splňují i jejich k-násobky $ky_0, \dots, ky_m$, $k > 0$. Multiplikátory jsou tedy určeny až na kladný násobek. Pokud je $y_0 \neq 0$, lze volit $k = 1/|y_0|$, takže nová hodnota y_0 je ± 1. Stačí se tedy omezit pouze na dva případy: $y_0 = \pm 1$ (regulární případ) a $y_0 = 0$.
3) Rovnice (8.3) obsahuje celkem $n + m + 1$ neznámých — $x_1, \dots, x_n$ a $y_0, \dots, y_m$. Protože multiplikátory jsou určeny až na násobek, je počet neznámých vlastně pouze $m + n$. Pro jejich určení máme n rovnic z (8.3) a m rovnic z vazebných podmínek, tedy počet rovnic a neznámých si odpovídá a obecně je šance dostat izolovaná řešení.
4) Bod $\boldsymbol{x}^*$, který splňuje vazebné podmínky a je řešením (8.3) při nějakých multiplikátorech $(y_0^*, \boldsymbol{y}^*) \neq \boldsymbol{0}$, se nazývá *stacionární*.
5) První zmínka o pravidle multiplikátorů pochází od Eulera[1] z r. 1744. Metodu rozpracoval Lagrange. Zajímavé je, že nejprve to bylo pro třídu problémů variačního počtu, tj. pro nekonečněrozměrné úlohy, v knize Méchanique analytique z r. 1788, a teprve později pro jednodušší konečněrozměrné úlohy v knize Théorie des fonctions analytiques z r. 1797.

Dále si všimneme geometrické interpretace věty 8.2. Připomeňme, že hladinou v_α rozumíme množinu bodů, v nichž funkce f nabývá stejné hodnoty α — viz definice 1.16. Tedy $v_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f(\boldsymbol{x}) = \alpha\}$.
Pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ bývá hladina v „rozumném“ případě křivkou. Je-li $\widehat{\boldsymbol{x}} \in v_\alpha$ a gradient $f'(\widehat{\boldsymbol{x}}) \neq \boldsymbol{0}$, je tento vektor kolmý k v_α, tj. je to normálový vektor, a ukazuje směr, v němž funkce f nejrychleji roste (derivace v tomto směru je největší). Budeme uvažovat úlohu (8.1) s jednou vazebnou podmínkou $g(\boldsymbol{x}) = 0$, což je v rovině v „rozumném“ případě také křivka. Splňuje-li $\widehat{\boldsymbol{x}}$ tuto podmínku a je-li $g'(\widehat{\boldsymbol{x}}) \neq \boldsymbol{0}$, je tento gradient normálovým vektorem k příslušné křivce. Tvrzení věty říká, že v bodě extrému jsou tyto vektory lineárně závislé, tj. jeden je násobkem druhého.



Obr. 8.1: Nutná podmínka existence lokálního extrému v klasické úloze na vázaný extrém

Situaci ilustruje obrázek 8.1. Předpokládejme, že hledáme minimum. Pak se snažíme

[1]**Leonhard Euler** (1707–1783) (čti ojler) — švýcarský matematik, fyzik, mechanik a astronom. Působil převážně v Petrohradě. Jeden z největších matematiků všech dob. Napsal kolem 850 prací (včetně mnohodílných monografií). Ovlivnil všechny základní matematické disciplíny. Od r. 1766 byl slepý (diktoval svým žákům).

najít co nejmenší α takové, že hladina v_α ještě protíná množinu $g(\boldsymbol{x}) = 0$. Z názoru je celkem zřejmé, že obě křivky (tj. hladina a množina odpovídající vazebné podmínce) se musí v takovém bodě dotýkat, jak je tomu v bodě $\boldsymbol{x}^*$. V opačném případě (pokud předpokládáme spojitou závislost na α) by bylo možné trochu zmenšit číslo α tak, že by hladina stále ještě protínala množinu odpovídající vazebné podmínce, tedy by libovolně blízko existovaly body splňující vazebnou podmínku, v nichž je funkční hodnota menší. V takovém bodě ale nemůže být lokální minimum. Tato situace nastane v bodě $\bar{\boldsymbol{x}}$. Znaménka $+$ a $-$ u hladin ukazují, kterým směrem funkce f roste a kterým klesá (musí být ve shodě s gradientem f', který ukazuje směr růstu).

8.2 Podmínky druhého řádu

Nejprve si uvedeme nutnou podmínku druhého řádu. Označme

$$\mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}, y_0, \boldsymbol{y}) = y_0 f''(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i''(\boldsymbol{x})$$

matici druhých derivací Lagrangeovy funkce vzhledem k souřadnicím vektoru $\boldsymbol{x}$. Budeme uvažovat úlohu na lokální minimum, kdy $y_0 \geqq 0$. V případě maxima stačí vyšetřit úlohu s účelovou funkcí $-f$ a týmiž omezeními, což odpovídá $y_0 \leqq 0$. Jinou možností je nechat $y_0 \geqq 0$ a ve vztazích (8.8) a (8.10) uvažovat opačné nerovnosti, což je ale totéž.

K důkazu nutné podmínky existence lokálního extrému budeme potřebovat následující tvrzení.

Lemma 8.4 (Ljusternik[1]). *Nechť funkce $g_1(\boldsymbol{x}), \dots, g_m(\boldsymbol{x})$ jsou spojitě diferencovatelné v nějakém okolí bodu $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$, přičemž $g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0$, $i = 1, \dots, m$. Nechť gradienty $g_1'(\boldsymbol{x}^*), \dots, g_m'(\boldsymbol{x}^*)$ společně s vektory $\boldsymbol{a}_{m+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n$ tvoří bázi v $\mathbb{R}^n$. Předpokládejme, že vektor $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ splňuje podmínky*

$$\langle g_i'(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{h}\rangle = 0, \qquad i = 1, \dots, m. \tag{8.5}$$

Pak existují funkce $r_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, m$, $\alpha \in \mathbb{R}$, takové, že při označení $\boldsymbol{r}(\alpha) = (r_1(\alpha), \dots, r_n(\alpha))$ platí pro dostatečně malá α

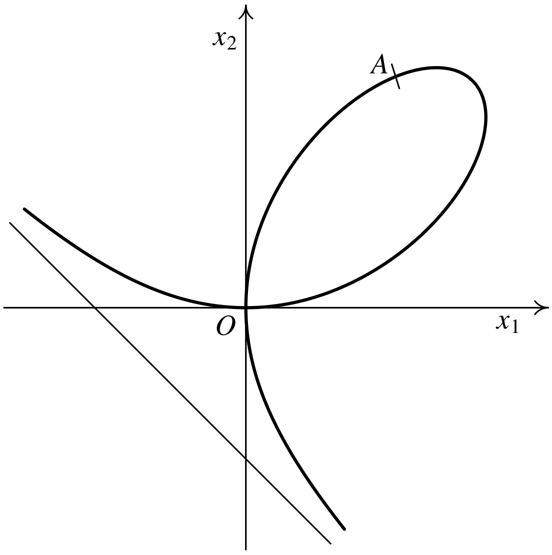
$$g_i(\boldsymbol{x}^* + \alpha\boldsymbol{h} + \boldsymbol{r}(\alpha)) = 0, \qquad i = 1, \dots, m, \tag{8.6}$$

$$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{r}(\alpha)\rangle = 0, \qquad i = m+1, \dots, n, \tag{8.7}$$

přičemž $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{r_i(\alpha)}{\alpha} = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Význam tvrzení je velmi názorný. Pro $n = 2$ a $m = 1$ je znázorněn na obr. 8.2.

[1]**Lazar Aronovič Ljusternik** (1899–1981) — ruský matematik. Zabýval se topologickými metodami v analýze, variačním počtem a funkcionální analýzou.



Obr. 8.2

Důkaz. Označme

$$f_i(\boldsymbol{r}, \alpha) = g_i(\boldsymbol{x}^* + \alpha\boldsymbol{h} + \boldsymbol{r}), \qquad i = 1, \dots, m,$$
$$f_i(\boldsymbol{r}, \alpha) = \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{r}\rangle, \qquad i = m+1, \dots, n.$$

Uvažujme soustavu n rovnic $f_i(\boldsymbol{r}, \alpha) = 0$, $i = 1, \dots, n$, o $n+1$ neznámých $r_1, \dots, r_n, \alpha$. Podle předpokladů je $f_i(\boldsymbol{0}, 0) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Dále platí

$$f'_{i|\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{0}, 0) = g'_i(\boldsymbol{x}^*), \qquad f_{i|\alpha}(\boldsymbol{0}, 0) = \langle g'_i(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{h}\rangle = 0, \qquad i = 1, \dots, m,$$
$$f'_{i|\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{0}, 0) = \boldsymbol{a}_i, \qquad f_{i|\alpha}(\boldsymbol{0}, 0) = 0, \qquad i = m+1, \dots, n.$$

Protože vektory $g_1(\boldsymbol{x}), \dots, g_m(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{a}_{m+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n$ jsou lineárně nezávislé, existují podle věty o implicitní funkci (viz část *Pro zájemce* na str. 162) funkce $r_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, n$, splňující soustavu (8.6) a (8.7) a mající derivace podle α.

Najdeme rovnice pro určení $r'_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, n$. Derivováním rovností (8.6) a (8.7) podle α dostaneme:

$$\langle g'_{i|\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}^* + \alpha\boldsymbol{h} + \boldsymbol{r}(\alpha)), \boldsymbol{h} + \boldsymbol{r}'(\alpha)\rangle = 0, \qquad i = 1, \dots, m,$$
$$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{r}'(\alpha)\rangle = 0, \qquad i = m+1, \dots, n,$$

Protože $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{0}$, dostaneme dosazením $\alpha = 0$ z předchozí soustavy vzhledem k (8.5) , že platí

$$\langle g'_{i|\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{r}'(0)\rangle = 0, \qquad i = 1, \dots, m,$$
$$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{r}'(0)\rangle = 0, \qquad i = m+1, \dots, n.$$

To je čtvercová homogenní soustava lineárních algebraických rovnic s nenulovým determinantem matice soustavy. Má tedy jediné, a to triviální řešení. Platí tudíž $r'_i(0) = 0$, tj. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{r_i(\alpha)}{\alpha} = 0$, $i = 1, \dots, n$. $\square$

Věta 8.5. *Nechť funkce f, g_1, $\dots$, g_m jsou dvakrát diferencovatelné v bodě $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ a spojitě diferencovatelné v nějakém jeho okolí, přičemž gradienty $g_1'(\boldsymbol{x}^*), \dots, g_m'(\boldsymbol{x}^*)$ jsou lineárně nezávislé. Je-li $\boldsymbol{x}^*$ lokální minimum úlohy* (8.1)*, je*

$$\langle \mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*)\,\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}\rangle \geqq 0 \tag{8.8}$$

pro libovolná y_0^*, $\boldsymbol{y}^*$ splňující (8.3) *a pro všechna $\boldsymbol{h}$ taková, že*

$$\langle g_i'(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{h}\rangle = 0, \qquad i = 1, \dots, m. \tag{8.9}$$

Důkaz. Protože gradienty $g_1'(\boldsymbol{x}^*), \dots, g_m'(\boldsymbol{x}^*)$ jsou lineárně nezávislé, je možné je doplnit (pokud je to nutné, tj. pokud $m < n$) vhodnými vektory $\boldsymbol{a}_{m+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n$ na bázi $\mathbb{R}^n$. Zvolme libovolně vektor $\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$ splňující (8.9). Podle lemmatu 8.4 existují funkce $r_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, n$, takové, že při označení $\boldsymbol{r}(\alpha) = (r_1(\alpha), \dots, r_n(\alpha))$ platí $g_i(\boldsymbol{x}^* + \alpha\boldsymbol{h} + \boldsymbol{r}(\alpha)) = 0$, $i = 1, \dots, m$, přičemž $\lim\limits_{\alpha\to 0} r_i(\alpha)/\alpha = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Položme $\boldsymbol{x}(\alpha) = \boldsymbol{x}^* + \alpha\boldsymbol{h} + \boldsymbol{r}(\alpha)$. Nechť y_0^* a $\boldsymbol{y}^*$ splňují (8.3). Pak pro malá $|\alpha|$ platí

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x}(\alpha), y_0^*, \boldsymbol{y}^*) = y_0^* f(\boldsymbol{x}(\alpha)) + \sum_{i=1}^m y_i^* g_i(\boldsymbol{x}(\alpha)) = y_0^* f(\boldsymbol{x}(\alpha)),$$
$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*) = y_0^* f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^m y_i^* g_i(\boldsymbol{x}^*) = y_0^* f(\boldsymbol{x}^*).$$

Protože $\lim\limits_{\alpha\to 0} r_i(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to 0} \bigl(r_i(\alpha)/\alpha\bigr)\,\alpha = 0$, je pro malá $|\alpha|$ bod $\boldsymbol{x}(\alpha)$ blízko bodu $\boldsymbol{x}^*$, v němž je lokální minimum. To znamená, že $f(\boldsymbol{x}(\alpha)) - f(\boldsymbol{x}^*) \geqq 0$. Protože $y_0^* \geqq 0$, dostaneme s použitím (5.3), že pro malá $|\alpha|$ platí

$$\begin{aligned} 0 \leqq y_0^* f(\boldsymbol{x}(\alpha)) - y_0^* f(\boldsymbol{x}^*) &= \mathscr{L}(\boldsymbol{x}(\alpha), y_0^*, \boldsymbol{y}^*) - \mathscr{L}(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*) = \\ &= \langle \mathscr{L}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*), \boldsymbol{h}(\alpha)\rangle + \frac{1}{2}\,\langle \mathscr{L}'_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{h}(\alpha), \boldsymbol{h}(\alpha)\rangle + o(\alpha^2), \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{h}(\alpha) = \alpha\boldsymbol{h} + \boldsymbol{r}(\alpha)$. Vzhledem k (8.3) obdržíme po úpravě, že

$$\left\langle \mathscr{L}'_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*)\left(\boldsymbol{h} + \frac{\boldsymbol{r}(\alpha)}{\alpha}\right), \left(\boldsymbol{h} + \frac{\boldsymbol{r}(\alpha)}{\alpha}\right)\right\rangle + \frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2} \geqq 0.$$

Limitním přechodem pro $\alpha \to 0$ dostaneme tvrzení. □

Podmínka (8.9) vyjadřuje skutečnost, že vektory $\boldsymbol{h}$ mají být kolmé ke všem gradientům $g_i'(\boldsymbol{x}^*)$. Ty jsou podle předpokladů věty lineárně nezávislé, a tudíž tvoří bázi nějakého m-rozměrného podprostoru. Tento podprostor se nazývá *normálový prostor* k množině $X = \{\boldsymbol{x} \in P : g_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i = 1, \dots, m\}$ v bodě $\boldsymbol{x}^*$. Vektory $\boldsymbol{h}$ mají být kolmé ke všem vektorům tohoto podprostoru. V lineární algebře se dokazuje, že tyto kolmice tvoří rovněž podprostor (tzv. *ortogonální doplněk*), jehož dimenze je $n - m$. Je to tzv. *tečný prostor* k množině $X = \{\boldsymbol{x} \in P : g_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i = 1, \dots, m\}$ v bodě $\boldsymbol{x}^*$. Podmínka (8.8) pak říká, že druhá derivace $\mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*)$ je kladně semidefinitní na tomto tečném prostoru. Bude-li tato derivace dokonce kladně definitní, stane se nutná podmínka z předchozí věty podmínkou postačující, což je obsahem následujícího tvrzení.

Věta 8.6. *Nechť funkce f, $g_1, \dots, g_m$ jsou dvakrát diferencovatelné v bodě $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ a jsou splněny vazebné podmínky $g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0$, $i = 1, \dots, m$. Předpokládejme, že pro některá y_0^* a $\boldsymbol{y}^*$ je splněna podmínka* (8.3) *a navíc platí*

$$\langle \mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*)\, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h} \rangle > 0 \tag{8.10}$$

pro všechna nenulová $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ splňující (8.9). *Pak je v $\boldsymbol{x}^*$ ostré lokální minimum úlohy* (8.1).

Všimněte si, že podmínka (8.10) automaticky vynucuje (pokud výše zmíněný ortogonální doplněk není roven nuladimenzionálnímu prostoru), že ne všechny multiplikátory jsou nulové.

Důkaz. Budeme postupovat obdobně jako v důkazu věty 5.20.

Je-li $\boldsymbol{x}^*$ izolovaný bod množiny $X = \{\boldsymbol{x} \in P : g_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i = 1, \dots, m\}$ bodů, které splňují vazebné podmínky, tvrzení platí. Předpokládejme tedy, že $\boldsymbol{x}^*$ není izolovaný bod množiny X. Připusťme, že v $\boldsymbol{x}^*$ není ostré lokální minimum. Pak libovolně blízko tohoto bodu lze nalézt jiný bod, v němž je funkční hodnota stejná nebo menší. Je tedy možné zkonstruovat posloupnost $\{\boldsymbol{x}_k\}$ takovou, že

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}^*, \qquad \boldsymbol{x}_k \in X, \qquad \boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}^*, \qquad f(\boldsymbol{x}_k) \leqq f(\boldsymbol{x}^*).$$

Položme $\alpha_k = \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}^*\|$, $\boldsymbol{h}_k = (\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}^*)/\alpha_k$. Pak je $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}^* + \alpha_k \boldsymbol{h}_k$. Protože je $\|\boldsymbol{h}_k\| = 1$, je tato posloupnost ohraničená, a lze z ní tudíž vybrat konvergentní podposloupnost $\{\boldsymbol{h}_{k_l}\}$, $\boldsymbol{h}_{k_l} \to \boldsymbol{h}$, $\|\boldsymbol{h}\| = 1$ (viz např. [16, str. 119]). Pro jednodušší označení předpokládejme, že přímo posloupnost $\{\boldsymbol{h}_k\}$ je konvergentní.

Podle (5.2) platí, že

$$0 = g_i(\boldsymbol{x}_k) - g_i(\boldsymbol{x}^*) = \langle g_i'(\boldsymbol{x}^*), \alpha_k \boldsymbol{h}_k \rangle + o(\alpha_k), \qquad i = 1, \dots, m,$$

takže po vydělení α_k a limitním přechodu pro $k \to +\infty$ vyjde $\langle g_i'(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{h} \rangle = 0$.

Dále podle předpokladů platí

$$\langle \mathscr{L}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*), \boldsymbol{h} \rangle = 0.$$

Tedy

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x}_k, y_0^*, \boldsymbol{y}^*) = y_0^* f(\boldsymbol{x}_k) + \sum_{i=1}^m y_i^* g_i(\boldsymbol{x}_k) = y_0^* f(\boldsymbol{x}_k) \leqq$$
$$\leqq y_0^* f(\boldsymbol{x}^*) = y_0^* f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^m y_i^* g_i(\boldsymbol{x}^*) = \mathscr{L}(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*).$$

Opět podle (5.3) platí, že

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x}_k, y_0^*, \boldsymbol{y}^*) = \mathscr{L}(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*) + \langle \mathscr{L}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*), \alpha_k \boldsymbol{h}_k \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle \mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*)(\alpha_k \boldsymbol{h}_k), \alpha_k \boldsymbol{h}_k \rangle + o(\alpha_k^2),$$

což podle předchozího znamená, že

$$\frac{\alpha_k^2}{2} \langle \mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{h}_k, \boldsymbol{h}_k \rangle + o(\alpha_k^2) \leqq 0.$$

Po vydělení α_k^2 a limitním přechodu dostaneme, že $\langle \mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}^*, y_0^*, \boldsymbol{y}^*)\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h} \rangle \leqq 0$ pro nenulové $\boldsymbol{h}$ splňující (8.9), což je však spor s předpokladem. □

Příklad 8.7. Najděte lokální extrémy funkce $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ za podmínky $5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 8 = 0$.

Řešení. Jak funkce $f(x_1, x_2)$, tak funkce $g_1(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 8$ z vazebné podmínky mají derivace všech řádů v celé $\mathbb{R}^2$. Lagrangeova funkce má tvar

$$\mathscr{L}(x_1, x_2, y_0, y_1) = y_0(x_1^2 + x_2^2) + y_1(5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 8).$$

Budeme předpokládat, že $y_0 \geqq 0$ pro minimum i maximum (viz text před větou 8.5). Nezávislost gradientu $g_1'(x_1, x_2) = (10x_1 + 6x_2, 6x_1 + 10x_2)$ znamená, že je nenulový. Ale soustava rovnic

$$\begin{aligned} 10x_1 + 6x_2 &= 0, \\ 6x_1 + 10x_2 &= 0 \end{aligned}$$

má jediné řešení $x_1 = x_2 = 0$, které nevyhovuje vazebné podmínce. To tedy znamená, že y_0 je nenulové, a lze volit $y_0 = 1$. Derivace Lagrangeovy funkce pak je

$$\mathscr{L}'_{\boldsymbol{x}}(x_1, x_2, y_0, y_1) = (2x_1 + y_1(10x_1 + 6x_2), 2x_2 + y_1(6x_1 + 10x_2)).$$

Ta musí být podle věty 8.2 nulová. Pro určení stacionárních bodů máme rovnice

$$\begin{aligned} 2x_1 + y_1(10x_1 + 6x_2) &= 0, \\ 2x_2 + y_1(6x_1 + 10x_2) &= 0. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Dále musí platit vazebná podmínka.

Z rovnic (8.11) plyne, že $y_1 \neq 0$. V opačném případě bychom dostali $x_1 = x_2 = 0$, ale toto řešení nesplňuje vazebnou podmínku. Z nenulovosti y_1 plyne, že $x_1 \neq 0$ a $x_2 \neq 0$. Kdyby totiž např. $x_1 = 0$, vyšlo by z první rovnice v (8.11), že $x_2 = 0$, což je opět spor s vazebnou podmínkou. Platí tedy

$$\begin{aligned} -\frac{1}{y_1} &= \frac{5x_1 + 3x_2}{x_1}, \\ -\frac{1}{y_1} &= \frac{3x_1 + 5x_2}{x_2} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad 5x_1x_2 + 3x_2^2 = 3x_1^2 + 5x_1x_2 \quad \Longrightarrow \quad x_1^2 = x_2^2.$$

Odtud máme $x_2 = \pm x_1$. Tento výsledek dosadíme do vazebné podmínky. Vyjde

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) && x_2 = x_1 && \Longrightarrow && 16x_1^2 = 8 && \Longrightarrow && x_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} && \Longrightarrow && y_1 = -\frac{1}{8}, \\ &(\mathrm{II}) && x_2 = -x_1 && \Longrightarrow && 4x_1^2 = 8 && \Longrightarrow && x_1 = \pm\sqrt{2} && \Longrightarrow && y_1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Celkově jsme tudíž dostali čtyři řešení, a to $\boldsymbol{x}^1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\boldsymbol{x}^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\boldsymbol{x}^3 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ a $\boldsymbol{x}^4 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Dosazením se můžeme přesvědčit, že všechna vyhovují rovnicím (8.11) i vazebné podmínce, tj. jsou to stacionární body.

Dále vypočteme druhou derivaci. Vyjde

$$\mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(x_1, x_2, y_0, y_1) = \begin{pmatrix} 2 + 10y_1 & 6y_1 \\ 6y_1 & 2 + 10y_1 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme vektory splňující podmínku (8.9). Máme

$$g_1'(x_1, x_2) = (10x_1 + 6x_2, 6x_1 + 10x_2).$$

Nejprve vyšetříme body $\boldsymbol{x}^1$ a $\boldsymbol{x}^2$, jimž odpovídá táž hodnota multiplikátoru $y_1 = -1/8$. Je $g_1'(\boldsymbol{x}^1) = (8\sqrt{2}, 8\sqrt{2}) = -g_1'(\boldsymbol{x}^2)$. Pro $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$ je

$$\langle g_1'(\boldsymbol{x}^1), \boldsymbol{h}\rangle = 8\sqrt{2}\,h_1 + 8\sqrt{2}\,h_2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad h_1 = -h_2,\ \text{tj. } \boldsymbol{h} = (h, -h),\ h \in \mathbb{R}.$$

Pro $\boldsymbol{x}^2$ mají vektory splňující (8.9) stejný tvar. Tedy

$$\left\langle \mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 1, -\tfrac{1}{8}\right)\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}\right\rangle = (h, -h)\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ -h \end{pmatrix} = 3h^2 > 0 \text{ pro } h \neq 0.$$

Výsledek pro $\boldsymbol{x}^2$ je stejný. V obou těchto bodech je proto podle věty 8.6 lokální minimum. Jeho hodnota je $f(\boldsymbol{x}^1) = f(\boldsymbol{x}^2) = 1$.

Podobně pro body $\boldsymbol{x}^3$ a $\boldsymbol{x}^4$, jimž odpovídá tatáž hodnota multiplikátoru $y_1 = -1/2$, je $g_1'(\boldsymbol{x}^3) = (4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}) = -g_1'(\boldsymbol{x}^4)$. Pak

$$\langle g_1'(\boldsymbol{x}^3), \boldsymbol{h}\rangle = 4\sqrt{2}\,h_1 - 4\sqrt{2}\,h_2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad h_1 = h_2,\ \text{tj. } \boldsymbol{h} = (h, h),\ h \in \mathbb{R}.$$

Pro $\boldsymbol{x}^4$ mají vektory splňující (8.9) stejný tvar. Tedy

$$\left\langle \mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1, -\tfrac{1}{2}\right), \boldsymbol{h}\right\rangle = (h, h)\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix} = -12h^2 < 0 \text{ pro } h \neq 0.$$

Výsledek pro $\boldsymbol{x}^4$ je stejný. V obou těchto bodech je proto podle věty 8.6 lokální maximum. Jeho hodnota je $f(\boldsymbol{x}^3) = f(\boldsymbol{x}^4) = 4$.

Úloha má názornou geometrickou interpretaci. Vazebná podmínka je rovnicí elipsy, na níž hledáme nejbližší a nejvzdálenější bod od počátku. ▲

Příklad 8.8. Najděte lokální extrémy funkce $f(\boldsymbol{x}) = x_1x_2x_3$ za platnosti podmínek $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1$, $x_1+x_2+x_3 = 1$.

Řešení. Jak funkce $f(\boldsymbol{x})$, tak funkce $g_1(\boldsymbol{x}) = x_1^2+x_2^2+x_3^2-1$ a $g_2(\boldsymbol{x}) = x_1+x_2+x_3-1$ mají v $\mathbb{R}^3$ derivace všech řádů. Lagrangeova funkce má tvar

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x}, y_0, \boldsymbol{y}) = y_0x_1x_2x_3 + y_1(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1) + y_2(x_1+x_2+x_3-1).$$

Gradienty $g_1'(\boldsymbol{x}) = 2(x_1, x_2, x_3)$ a $g_2'(\boldsymbol{x}) = (1, 1, 1)$ mohou být lineárně závislé, jen když $x_1 = x_2 = x_3 = t$. Po dosazení do první vazebné podmínky přitom vyjde $3t^2 = 1$, tj. $t = \pm 1/\sqrt{3}$. Podobně z druhé podmínky vyjde $3t = 1$, tj. $t = 1/3$. To je však spor. Podle věty 8.2 je proto možné volit $y_0 = 1$.

Nyní vypočteme derivaci Lagrangeovy funkce. Dostaneme

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{x}}'(\boldsymbol{x}, 1, \boldsymbol{y}) = (x_2x_3 + 2x_1y_1 + y_2, x_1x_3 + 2x_2y_1 + y_2, x_1x_2 + 2x_3y_1 + y_2).$$

Ta se musí rovnat nule. Příslušná soustava rovnic má tvar

$$\begin{aligned} x_2x_3 + 2x_1y_1 + y_2 &= 0,\\ x_1x_3 + 2x_2y_1 + y_2 &= 0,\\ x_1x_2 + 2x_3y_1 + y_2 &= 0. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Dále musí platit obě vazebné podmínky.

Sečteme tyto tři rovnice. Dostaneme

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2y_1(x_1+x_2+x_3) + 3y_2 = 0. \tag{8.13}$$

Protože pro libovolná x_1, x_2 a x_3 platí identita

$$(x_1+x_2+x_3)^2 - (x_1^2+x_2^2+x_3^2) = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3),$$

vychází vzhledem k vazebným podmínkám jednak, že $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$, jednak pak z (8.13), že

$$2y_1 + 3y_2 = 0. \tag{8.14}$$

Dále od sebe odečteme první a druhou rovnici z (8.12). Dostaneme

$$x_3(x_2-x_1) + 2y_1(x_1-x_2) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (x_1-x_2)(2y_1-x_3) = 0.$$

Obdobné rovnice dostaneme odečtením první a třetí a druhé a třetí rovnice z (8.12). Celkově dostaneme

$$(x_1-x_2)(2y_1-x_3) = 0, \tag{8.15}$$

$$(x_1-x_3)(2y_1-x_2) = 0, \tag{8.16}$$

$$(x_2-x_3)(2y_1-x_1) = 0. \tag{8.17}$$

V každé z těchto rovnic musí být alespoň jedna závorka rovna nule. Budeme kombinovat různé možnosti.

1) Nechť $x_1 - x_2 = 0$ a $x_1 - x_3 = 0$. Pak $x_1 = x_2 = x_3$, a je tedy splněno i (8.17). Dosazením do vazebných podmínek dostaneme stejně jako výše při ověřování nezávislosti gradientů g_1' a g_2' spor. Stejný spor dostaneme při volbách $x_1 - x_2 = 0$, $x_2 - x_3 = 0$ a $x_1 - x_3 = 0$, $x_2 - x_3 = 0$.
2) Nechť $x_1 - x_2 = 0$ a $2y_1 - x_2 = 0$. Pak $x_1 = 2y_1$ a je splněno i (8.17). Z vazebných podmínek vychází

$$\begin{aligned} 8y_1^2 + x_3^2 &= 1, \\ 4y_1 + x_3 &= 1 \end{aligned} \implies 8y_1^2 + (1-4y_1)^2 = 1 \implies 3y_1^2 - y_1 = 0 \implies y_1 = \begin{cases} 0, \\ 1/3. \end{cases}$$

První hodnota dává $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $y_2 = 0$, druhá pak $x_1 = x_2 = 2/3$, $x_3 = -1/3$, $y_2 = -2/9$. Tedy

$$\boldsymbol{x}^1 = (0, 0, 1), \quad \boldsymbol{y}^1 = (0, 0), \qquad \boldsymbol{x}^2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \quad \boldsymbol{y}^2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{9}\right).$$

3) Nechť $x_1 - x_3 = 0$ a $2y_1 - x_1 = 0$. Pak $x_3 = 2y_1$ a je splněno i (8.15). Obdobně jako v předchozím bodě dostaneme

$$\boldsymbol{x}^3 = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{y}^3 = (0, 0), \qquad \boldsymbol{x}^4 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \boldsymbol{y}^4 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{9}\right).$$

4) Nechť $x_2 - x_3 = 0$ a $2y_1 - x_3 = 0$. Pak $x_2 = 2y_1$ a je splněno i (8.16). Opět obdobně jako v bodě 2) dostaneme

$$\boldsymbol{x}^5 = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{y}^5 = (0, 0), \qquad \boldsymbol{x}^6 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \boldsymbol{y}^6 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{9}\right).$$

Zbývající kombinace nedávají žádná další řešení.

Nyní vypočteme druhé derivace Lagrangeovy funkce. Díky spojitosti jsou smíšené parciální derivace lišící se pouze pořadím neznámých, podle kterých se derivuje, stejné. Vyjde

$$\mathscr{L}_{x_1x_1} = 2y_1, \ \mathscr{L}_{x_2x_2} = 2y_1, \ \mathscr{L}_{x_3x_3} = 2y_1, \ \mathscr{L}_{x_1x_2} = x_3, \ \mathscr{L}_{x_2x_3} = x_1, \ \mathscr{L}_{x_1x_3} = x_2.$$

Derivace $\mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}, 1, \boldsymbol{y})$, tj. matice druhých parciálních derivací, má tvar

$$\mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}, 1, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 2y_1 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 2y_1 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 2y_1 \end{pmatrix}. \tag{8.18}$$

Připomeňme si ještě, že $g_1'(\boldsymbol{x}) = 2(x_1, x_2, x_3)$ a $g_2'(\boldsymbol{x}) = (1, 1, 1)$.

Nejprve vyšetříme stacionární bod $\boldsymbol{x}^1$. K tomu musíme určit všechny vektory $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, h_3)$, které splňují podmínky (8.9). Dostaneme

$$\begin{aligned} g_1'(\boldsymbol{x}^1) &= 2(0, 0, 1), & \langle g_1'(\boldsymbol{x}^1), \boldsymbol{h}\rangle = 0 &\implies h_3 = 0, \\ g_2'(\boldsymbol{x}^1) &= (1, 1, 1), & \langle g_2'(\boldsymbol{x}^1), \boldsymbol{h}\rangle = 0 &\implies h_1 + h_2 + h_3 = 0. \end{aligned}$$

Musí tedy platit $h_1 = -h_2$, takže $\boldsymbol{h} = (h, -h, 0)$, $h \in \mathbb{R}$. Dále vyčíslíme kvadratickou formu z (8.10). Vyjde

$$\mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}^1, 1, \boldsymbol{y}^1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\langle \mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}^1, 1, \boldsymbol{y}^1)\, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h} \rangle = (h, -h, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ -h \\ 0 \end{pmatrix} = -2h^2 < 0 \text{ pro } h \neq 0.$$

Vzhledem k textu před větou 8.5 to znamená, že v bodě $\boldsymbol{x}^1$ podle věty 8.3 je lokální maximum.

Nyní vyšetříme stacionární bod $\boldsymbol{x}^2$. Určíme vektory $\boldsymbol{h}$ splňující (8.9). Máme

$$\begin{aligned} g_1'(\boldsymbol{x}^2) &= \frac{2}{3}(2, 2, -1), & \langle g_1'(\boldsymbol{x}^2), \boldsymbol{h} \rangle = 0 &\implies 2h_1 + 2h_2 - h_3 = 0, \\ g_2'(\boldsymbol{x}^2) &= (1, 1, 1), & \langle g_2'(\boldsymbol{x}^2), \boldsymbol{h} \rangle = 0 &\implies h_1 + h_2 + h_3 = 0. \end{aligned}$$

Opět dostáváme $h_1 = -h_2$, $h_3 = 0$, takže $\boldsymbol{h} = (h, -h, 0)$, $h \in \mathbb{R}$.

Druhá derivace Lagrangeovy funkce je

$$\mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}^2, 1, \boldsymbol{y}^2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

takže

$$\langle \mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}^2, 1, \boldsymbol{y}^2)\, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h} \rangle = \frac{1}{3}(h, -h, 0) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ -h \\ 0 \end{pmatrix} = 2h^2 > 0 \text{ pro } h \neq 0.$$

V bodě $\boldsymbol{x}^2$ je tedy lokální minimum.

Obdobně se ověří, že v bodech $\boldsymbol{x}^3$ a $\boldsymbol{x}^5$ je také lokální maximum a v bodech $\boldsymbol{x}^4$ a $\boldsymbol{x}^6$ zase lokální minimum. Přitom platí

$$f(\boldsymbol{x}^1) = f(\boldsymbol{x}^3) = f(\boldsymbol{x}^5) = 0, \qquad f(\boldsymbol{x}^2) = f(\boldsymbol{x}^4) = f(\boldsymbol{x}^6) = -\frac{4}{27}.$$

Definiční obor, na němž jsme funkci f vyšetřovali, je průnikem kulové plochy $x_1^2 + {}+ x_2^2 + x_3^2 = 1$ a roviny $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Je to tedy kružnice, což je ohraničená a uzavřená množina, tedy je kompaktní. Podle Weierstrassovy věty nabývá f na této množině globální maximum i minimum. Podle poznámky 5.17, část 4, má globální maximum v bodech $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^3$ a $\boldsymbol{x}^5$ a globální minimum v bodech $\boldsymbol{x}^2$, $\boldsymbol{x}^4$ a $\boldsymbol{x}^6$. V jiných bodech globální extrémy již nastat nemohou, protože by v nich musely být i lokální extrémy, ale ty již žádné další nejsou, jelikož jsme našli všechny. ▲

V předchozím příkladu jsme mohli postupovat jinak. Nejprve jsme mohli na základě Weierstrassovy věty zdůvodnit, že existují globální extrémy. Pak jsme mohli pomocí věty 8.2 najít stacionární body. Protože v bodě globálního extrému je současně lokální extrém, a tudíž stacionární bod, musí být globální extrémy mezi stacionárními body. Stačilo tedy určit funkční hodnoty ve stacionárních bodech a vybrat z nich největší a nejmenší. Protože v našem případě byla ve třech stacionárních bodech stejná nejmenší hodnota a ve zbývajících třech stejná největší hodnota, jednalo se o body globálních, a proto i lokálních extrémů. Jelikož žádné další stacionární body nebyly, nemuseli jsme tudíž počítat druhou derivaci Lagrangeovy funkce a vyšetřovat její definitnost. Řešení by bylo v tomto konkrétním případě podstatně kratší. Naším cílem však bylo ukázat použití věty 8.6. Právě popsaný postup uplatníme v následujícím příkladu.

Příklad 8.9. Najděte globální a lokální extrémy funkce $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ při splnění podmínky $x_1^2/2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$.

Řešení. Jak funkce $f(\boldsymbol{x})$, tak funkce $g(\boldsymbol{x}) = x_1^2/2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ mají v $\mathbb{R}^3$ derivace všech řádů, zejména jsou tedy spojité. Množina bodů vyhovujících vazebné podmínce je elipsoid — viz (9.12). Je to tedy ohraničená a uzavřená množina, takže na ní funkce f podle Weierstrassovy věty (část *Pro zájemce* na str. 140) nabývá globálního maxima i minima. V příslušných bodech budou proto rovněž lokální extrémy, a tudíž podle věty 8.2 i stacionární body. Ty nyní nalezneme.

Lagrangeova funkce má tvar

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x}, y_0, y_1) = y_0(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) + y_1(x_1^2/2 + x_2^2 + x_3^2 - 1).$$

Určíme její derivaci a položíme ji rovnu nule:

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, y_0, y_1) = y_0(2x_1, 2x_2, -2x_3) + y_1(x_1, 2x_2, 2x_3) = (0, 0, 0). \tag{8.19}$$

Kdyby platilo $y_0 = 0$, muselo by být $y_1 \neq 0$. Pak ovšem z předchozí rovnice dostaneme $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, ale tento bod nevyhovuje vazebné podmínce. Úloha je proto regulární a můžeme volit $y_0 = 1$ (pro maximum i minimum — viz text před větou 8.5). Z rovnice (8.19) dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x_1(2 + y_1) &= 0,\\ x_2(1 + y_1) &= 0,\\ x_3(-1 + y_1) &= 0. \end{aligned} \tag{8.20}$$

Je-li $y_1 \neq -2, -1, 1$, dostaneme z předchozích rovnic, že $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, což je spor s vazebnou podmínkou.

Nyní probereme všechny tři zbývající hodnoty multiplikátoru y_1.

1) Je-li $y_1 = -2$, vyjde ze soustavy (8.20), že $x_2 = x_3 = 0$. Z vazebné podmínky pak máme $x_1^2/2 - 1 = 0$, tj. $x_1 = \pm\sqrt{2}$. Našli jsme dva stacionární body $\boldsymbol{x}^1 = (\sqrt{2}, 0, 0)$ a $\boldsymbol{x}^2 = (-\sqrt{2}, 0, 0)$.

2) Je-li $y_1 = -1$, vyjde ze soustavy (8.20), že $x_1 = x_3 = 0$. Z vazebné podmínky pak máme $x_2^2 - 1 = 0$, tj. $x_2 = \pm 1$. Našli jsme dva stacionární body $\boldsymbol{x}^3 = (0, 1, 0)$ a $\boldsymbol{x}^4 = (0, -1, 0)$.
3) Je-li $y_1 = 1$, vyjde ze soustavy (8.20), že $x_1 = x_2 = 0$. Z vazebné podmínky pak máme $x_3^2 - 1 = 0$, tj. $x_3 = \pm 1$. Našli jsme dva stacionární body $\boldsymbol{x}^5 = (0, 0, 1)$ a $\boldsymbol{x}^6 = (0, 0, -1)$.

Dále vypočteme funkční hodnoty ve stacionárních bodech:

$$f(\boldsymbol{x}^1) = f(\boldsymbol{x}^2) = 2, \qquad f(\boldsymbol{x}^3) = f(\boldsymbol{x}^4) = 1, \qquad f(\boldsymbol{x}^5) = f(\boldsymbol{x}^6) = -1.$$

To ovšem znamená, že v bodech $\boldsymbol{x}^1$ a $\boldsymbol{x}^2$ nabývá funkce f globálního maxima, takže zde má i lokální maxima, a v bodech $\boldsymbol{x}^5$ a $\boldsymbol{x}^6$ nabývá globálního minima, takže zde má i lokální minima.

O stacionárních bodech $\boldsymbol{x}^3$ a $\boldsymbol{x}^4$ nelze na základě předchozích úvah nic říci, pokud jde o lokální extrémy. Musíme tedy použít podmínky druhého řádu. Lagrangeova funkce má v tomto bodě tvar

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x}, 1, -1) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - (x_1^2/2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) = x_1^2/2 - 2x_3^2 + 1,$$

takže $\mathscr{L}_{x_1x_1} = 1$, $\mathscr{L}_{x_3x_3} = -4$ a všechny zbývající druhé parciální derivace jsou nulové. Druhá derivace $\mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}, 1, -1)$, tj. matice druhých parciálních derivací, má tvar

$$\mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}, 1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme všechny vektory $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, h_3)$, které splňují podmínky (8.9). Protože $g'\boldsymbol{x} = (x_1, 2x_2, 2x_3)$, dostaneme

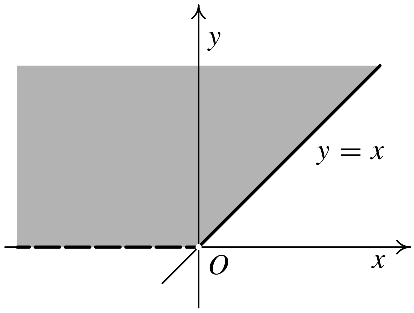
$$\begin{aligned} g'(\boldsymbol{x}^3) &= (0, 2, 0), & \langle g'(\boldsymbol{x}^3), \boldsymbol{h}\rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 2h_2 = 0, \\ g'(\boldsymbol{x}^4) &= (0, -2, 0), & \langle g'(\boldsymbol{x}^4), \boldsymbol{h}\rangle = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 2h_2 = 0. \end{aligned}$$

V obou případech je tedy $h_2 = 0$, takže $\boldsymbol{h} = (h_1, 0, h_3)$, $h_1, h_3 \in \mathbb{R}$. Vyčíslíme kvadratickou formu z (8.10). Pro $\boldsymbol{x}^3$ vyjde

$$\langle \mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}^3, 1, \boldsymbol{y}^1)\,\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}\rangle = (h_1, 0, h_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \\ h_3 \end{pmatrix} = h_1^2 - 4h_3^2.$$

Výsledek pro $\boldsymbol{x}^4$ je stejný. To je však indefinitní forma, takže podle věty 8.5 v žádném z bodů $\boldsymbol{x}^3$, $\boldsymbol{x}^4$ není lokální extrém. ▲

Příklad 8.10. Najděte největší vzdálenost d počátku O od smyčky Descartova[1] listu $x_1^3 + x_2^3 - 3ax_1x_2 = 0$, $a > 0$.



Obr. 8.3

Řešení. Je-li $A = (x_1, x_2)$ bodem smyčky Descartova listu (obr. 8.3), pak pro jeho vzdálenost d od počátku $O = (0, 0)$ platí

$$d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

takže

$$d^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Místo extrému vzdálenosti d můžeme hledat extrém mocniny d^2. Přitom je tento extrém vázán podmínkou, že bod $A = (x_1, x_2)$ je bodem smyčky Descartova listu. Jde tedy o určení extrému funkce

$$d^2 = x_1^2 + x_2^2$$

uvnitř prvního kvadrantu (tj. v (8.1) je $P = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$) při podmínce

$$x_1^3 + x_2^3 - 3ax_1x_2 = 0.$$

Jak funkce $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, tak vazebná podmínka $g_1(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3ax_1x_2$ mají parciální derivace všech řádů. Sestavíme Lagrangeovu funkci:

$$\mathscr{L}(x_1, x_2, y_0, y_1) = y_0(x_1^2 + x_2^2) + y_1(x_1^3 + x_2^3 - 3ax_1x_2).$$

Derivace funkce g_1 je

$$g_1'(x_1, x_2, y_0, y_1) = (3x_1^2 - 3ax_2, 3x_2^2 - 3ax_1).$$

[1]**René Descartes** (1596–1650) (čti dekart) — francouzský filosof a matematik. Zakladatel analytické geometrie. Použití souřadnic, které zavedl, umožňuje řešit geometrické problémy výpočtem, nikoliv jen konstrukcí, jako v syntetické geometrii. Latinský přepis jeho jména je Cartesius. Odtud pochází název kartézské souřadnice a kartézský součin. Je znám svým výrokem *Cogito ergo sum* (Myslím, tedy jsem).

Určíme, kdy se rovná nule. Z rovnic

$$3x_1^2 - 3ax_2 = 0, \qquad 3x_2^2 - 3ax_1 = 0$$

dostaneme vyloučením druhé neznámé, že $x_1^4 = a^3 x_1$. Tato rovnice má dvě reálná řešení: $x_1 = 0$ a $x_1 = a$. Hodnoty druhé neznámé jsou po řadě $x_2 = 0$ a $x_2 = a$. První bod $(0, 0)$ nepatří do množiny přímých omezení P a druhý bod (a, a) nevyhovuje vazebné podmínce. Podle věty 8.2 je tudíž $y_0 \neq 0$ a můžeme předpokládat, že $y_0 = 1$.

Derivace Lagrangeovy funkce je

$$\mathscr{L}'_{\boldsymbol{x}}(x_1, x_2, 1, y_1) = \big(2x_1 + y_1(3x_1^2 - 3ax_2), 2x_2 + y_1(3x_2^2 - 3ax_1)\big).$$

Pro určení stacionárních bodů máme tři rovnice

$$\begin{aligned} 2x_1 + y_1(3x_1^2 - 3ax_2) &= 0, \\ 2x_2 + y_1(3x_2^2 - 3ax_1) &= 0, \\ x_1^3 + x_2^3 - 3ax_1x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplikátor $y_1 \neq 0$. Jinak by z prvních dvou rovnic vyšlo $x_1 = x_2 = 0$, ale tento bod neleží v množině P. Vynásobíme-li první rovnici x_2, druhou x_1, odečteme je a vykrátíme y_1, dostaneme postupnými úpravami

$$\begin{aligned} x_1(ax_1 - x_2^2) &= x_2(ax_2 - x_1^2), \\ a(x_1^2 - x_2^2) &= x_1x_2(x_2 - x_1), \\ (x_1 - x_2)\big(a(x_1 + x_2) + x_1x_2\big) &= 0. \end{aligned}$$

Protože pro $(x_1, x_2) \in P$ je $a(x_1 + x_2) + x_1x_2 > 0$, musí platit $x_1 = x_2$. Po dosazení do vazebné podmínky vyjde vzhledem k tomu, že $x_1 \neq 0$,

$$2x_1^3 - 3ax_1^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{3}{2}\,a.$$

Máme tudíž jediný stacionární bod $\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{3}{2}\,a, \frac{3}{2}\,a\right)$. Lagrangeův multiplikátor nabývá pro tento bod hodnoty $y_1^* = -\frac{4}{3a}$.

Dále vypočteme druhou derivaci Lagrangeovy funkce. Vyjde

$$\mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(x_1, x_2, 1, y_1) = \begin{pmatrix} 2 + 6x_1y_1 & -3ay_1 \\ -3ay_1 & 2 + 6x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme vektory splňující podmínku (8.9). Máme

$$g_1'(\boldsymbol{x}^*, 1, y_1^*) = \left(\frac{9}{4}\,a^2 \ \frac{9}{4}\,a^2\right).$$

Pro $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$ je

$$\big\langle g_1'(\boldsymbol{x}^*, 1, y_1^*), \boldsymbol{h}\big\rangle = \frac{9}{4}\,a^2(h_1 + h_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad h_1 = -h_2, \text{ tj. } \boldsymbol{h} = (h, -h), \ h \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\left\langle \mathscr{L}''_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}(x_1^*, x_2^*, 1, y_1^*)\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h} \right\rangle = (h, -h) \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 4 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ -h \end{pmatrix} = -28h^2.$$

Podle věty 8.3 je proto v bodě $\boldsymbol{x}^*$ lokální maximum, jehož hodnota je $d_{\max} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Je zřejmé, že přidáním počátku k množině bodů splňujících vazebnou podmínku dostaneme ohraničenou a uzavřenou množinu. Uzavřenost plyne ze spojitosti funkce g_1. O ohraničenosti se můžeme přesvědčit vyjádřením Descartova listu v polárních souřadnicích. Položíme-li $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, dostaneme

$$\rho^3(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) - 3a\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi = 0.$$

Na intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$ jsou obě funkce $\cos \varphi$ a $\sin \varphi$ nezáporné a nikdy nejsou současně rovny nule. Tedy výraz $\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi$ je na tomto intervalu kladný. Podle Weierstrassovy věty pro funkci jedné proměnné zde nabývá absolutního minima, které je kladné, tj. existuje konstanta $c > 0$ taková, že $\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi \geqq c$, $\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$.

Hodnota $\rho = 0$ odpovídá počátku. Pro ostatní body v prvním kvadrantu vyjde

$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi} \qquad \Rightarrow \qquad |\rho| \leqq \frac{3a}{c}.$$

Tím je ohraničenost ověřena.

Podle Weierstrassovy věty tudíž existuje globální maximum, které musí být v bodě $\boldsymbol{x}^*$. Největší vzdálenost počátku O od smyčky Descartova listu je tudíž $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ a je rovna vzdálenosti od bodu $\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$. ▲

Pojmy k zapamatování

Σ

— vazebné podmínky
— přímá omezení
— vázaný extrém
— Lagrangeova funkce
— Lagrangeovy multiplikátory
— stacionární bod
— nutné a postačující podmínky existence lokálního extrému

Kontrolní otázky

?

1. Co rozumíme tzv. klasickou úlohou na vázaný extrém?
2. Jaká je nutná podmínka, aby bod $\boldsymbol{x}^*$ byl lokálním extrémem úlohy $f(\boldsymbol{x}) \to \text{ext}$, $g_i(\boldsymbol{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, $\boldsymbol{x} \in P$, $P = \operatorname{int} P$?

3. Jaké podmínky musí splňovat bod $\boldsymbol{x}^*$, aby byl stacionárním bodem úlohy na vázaný extrém?
4. Co je to nutná podmínka prvního řádu pro existenci lokálního extrému?
5. Jak lze geometricky interpretovat nutnou podmínku prvního řádu existence lokálního extrému?
6. Jaká je nutná podmínka druhého řádu pro existenci lokálního extrému?
7. Uveďte jaké podmínky zaručují, aby v bodě $\boldsymbol{x}^*$ bylo lokální minimum úlohy na vázaný extrém.
8. Jak lze převést vyšetřování lokálních maxim na vyšetřování lokálních minim?

! Příklady k procvičení

1. Nalezněte vázané lokální extrémy funkce $f(x_1, x_2)$ při zadané podmínce.

   a) $f: z = x_1^3 + x_2^3$, podmínka $x_1 + x_2 - 3 = 0$,
   b) $f: z = x_1 + 2x_2$, podmínka $x_1^2 + x_2^2 = 5$,
   c) $f: z = x_1^2 + 2x_2^2$, podmínka $x_1^2 - 2x_1 + 2x_2^2 + 4x_2 = 0$,
   d) $f: z = 6 - 4x_1 - 3x_2$, podmínka $x_1^2 + x_2^2 = 1$,
   e) $f: z = x_1x_2$, podmínka $x_1 + x_2 = 2$,
   f) $f: z = 2(x_1^2 + x_2^2)$, podmínka $x_1 + x_2 = 2$,
   g) $f: z = 1/x_1 + 1/x_2$, podmínka $x_1 + x_2 = 2$,
   h) $f: z = \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2$, podmínka $x_1 - x_2 = \pi/4$,
   i) $f: z = x_1 + x_2 + 2$, podmínka $2(x_1^2 + x_2^2) = x_1^2x_2^2$,
   j) $f: z = x_1 + x_2$, podmínka $x_1x_2 = 1$,
   k) $f: z = 1/x_1 + 1/x_2$, podmínka $1/x_1^2 + 1/x_2^2 = 1$.

2. Nalezněte extrémní hodnoty vzdálenosti počátku souřadného systému od křivky $5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 8 = 0$.

3. Určete stacionární body a ověřte, zda jsou v nich lokální popř. globální extrémy.

   a) $x_1x_2 + x_2x_3 \to \text{ext}, \quad x_1^2 + x_2^2 = 2, \quad x_2 + x_3 = 2.$
   Návod: Z $\mathscr{L}_{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$ vyjádřete x_1, x_2, x_3 pomocí y_1, y_2 a dosaďte do vazebných podmínek. Z nich pak vylučte y_1.
   b) $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \to \text{ext}, \quad x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 1.$
   Pomůcka: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.
   c) $x_1x_2x_3 \to \text{ext}, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 5, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 8,$
   d) $x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \text{ext}, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$
   e) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \to \text{ext}, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0,$
   f) $4x_1 + 3x_2 \to \text{ext}, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1,$
   g) $x_1^2 + x_2^2 \to \text{ext}, \quad 3x_1 + 4x_2 = 1,$

h) $\mathrm{e}^{x_1 x_2} \to \text{ext}, \quad x_1 + x_2 = 1,$

i) $5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 \to \text{ext}, \quad x_1 + x_2 = 1,$

j) $3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 \to \text{ext}, \quad x_1 + x_2 = 1,$

k) $x_1x_2^2x_3^3 \to \text{ext}, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1,$

l) $x_1x_2x_3 \to \text{ext}, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0.$

4. Najděte globální a lokální extrémy funkce $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ při splnění podmínky $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$.

Klíč k příkladům k procvičení

Označení: lm (lM) ... lokální minimum (maximum), gm (gM) ... globální minimum (maximum), sb ... stacionární bod, v němž není extrém. Všechny úlohy jsou regulární a multiplikátor $y_0 = 1$, pokud není uvedeno jinak.

1. a) lm v $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $y_1 = -\frac{27}{4}$,

   b) lM v $(1, 2)$, $y_1 = -\frac{1}{2}$, lm v $(-1, -2)$, $y_1 = \frac{1}{2}$,

   c) lm v $(0, 0)$, $y_1 = 0$, lM v $(2, -2)$, $y_1 = -2$,

   d) lm v $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $y_1 = \frac{5}{2}$, lM v $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, $y_1 = -\frac{5}{2}$,

   e) lM v $(1, 1)$, $y_1 = -1$,

   f) lm v $(1, 1)$, $y_1 = -4$,

   g) lm v $(1, 1)$, $y_1 = 1$,

   h) lm v $\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)$, k liché, $y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, lM v $\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)$, k sudé, $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

   i) lm v $(2, 2)$, $y_1 = \frac{1}{8}$, lM v $(-2, -2)$, $y_1 = -\frac{1}{8}$,

   j) lm v $(1, 1)$, $y_1 = -1$, lM v $(-1, -1)$, $y_1 = 1$,

   k) lM v $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, lm v $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. gm v $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $y_1 = -\frac{1}{8}$, gM v $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, $y_1 = -\frac{1}{2}$.

   Návod: Vyšetřete funkci $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, která má stejné extrémy jako funkce $g(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Ohraničenost množiny splňující vazbu (otočená elipsa) lze ověřit takto: Po úpravě vazebné podmínky je $5\left(x_1 - \frac{3}{5}x_2\right)^2 + \frac{16}{5}x_2^2 = 8$. Odtud $\left|x_1 - \frac{3}{5}x_2\right| \leqq \frac{4}{\sqrt{10}}$, $|x_2| \leqq \frac{5}{\sqrt{10}}$, a tedy $|x_1| \leqq \left|x_1 - \frac{3}{5}x_2\right| + \frac{3}{5}|x_2| \leqq \frac{7}{\sqrt{10}}$. Pak lze použít Weierstrassovu větu.

3. a) lm v $(-1, 1, 1)$, $\boldsymbol{y} = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$, gM v $(1, 1, 1)$, $\boldsymbol{y} = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$,

   gm v $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$, $\boldsymbol{y} = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$,

   lM v $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right)$, $\boldsymbol{y} = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$,

   b) gm v $\left(\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}, \frac{6\cdot 2}{n(n+1)(2n+1)}, \dots, \frac{6n}{n(n+1)(2n+1)}\right)$, $y = \frac{-12}{n(n+1)(2n+1)}$,

   c) gm v $(2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2)$, $\boldsymbol{y} = (4, -2)$, gM v $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $\boldsymbol{y} = \left(\frac{16}{9}, -\frac{4}{3}\right)$,

d) gM v $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $y_1 = -\frac{3}{2}$, gm v $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $y_1 = \frac{3}{2}$,

e) gm v $\pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13+9\sqrt{2}}{7}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10-6\sqrt{2}}{7}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-3\sqrt{2}}{7}}\right)$,
$\boldsymbol{y} = \left(\frac{-12+3\sqrt{2}}{7}, \pm\frac{\sqrt{19-3\sqrt{2}}}{7\sqrt{7}}\right)$,
gM v $\pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13-9\sqrt{2}}{7}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+6\sqrt{2}}{7}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+3\sqrt{2}}{7}}\right)$,
$\boldsymbol{y} = \left(\frac{-12-3\sqrt{2}}{7}, \pm\frac{\sqrt{19+3\sqrt{2}}}{7\sqrt{7}}\right)$,

f) gm v $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, $y_1 = \frac{5}{2}$, gM v $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $y_1 = -\frac{5}{2}$,

g) gm v $\left(\frac{3}{25}, \frac{4}{25}\right)$, $y_1 = -\frac{2}{25}$,

h) gM v $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $y_1 = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{\mathrm{e}}$,

i) gm v $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $y_1 = -1$,

j) nemá,

k) lM v $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $y_1 = -\frac{1}{72}$, lM v $(t, 0, 1-t)$, $t < 0$ nebo $t > 1$, $y_1 = 0$, lm v $(t, 0, 1-t)$, $0 < t < 1$, $y_1 = 0$, sb v $(t, 1-t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, a $(0, 0, 1)$, $y_1 = 0$,

l) gm v $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\boldsymbol{y} = \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}, \frac{1}{6}\right)$,
gM v $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$,
$\boldsymbol{y} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{6}}, \frac{1}{6}\right)$.

4. gm v $(0, 0, \pm 1)$, $y_1 = 1$, gM v $(x, y, 0)$, $x^2 + y^2 = 1$ (tj. na kružnici), $y_1 = -1$.

Kapitola 9

Kvadratické plochy

Průvodce studiem

Ze střední školy známe důležitý příklad rovinných křivek, tzv. kuželosečky*. Ty jsou definovány jako množiny bodů, které obdržíme jako řezy kuželové plochy rovinou. Mezi ně patří zejména* kružnice*,* elipsa*,* parabola *a* hyperbola*. O těchto kuželosečkách říkáme, že jsou* nedegenerované*. Mezi kuželosečky však také patří* bod*,* dvojice různoběžných přímek *nebo* jedna přímka *(tzv. dvojnásobná), které získáme, když řezná rovina bude procházet vrcholem kuželové plochy. Tyto kuželosečky se nazývají* degenerované*.*

Dále je známo, že souřadnice bodů kuželoseček vyhovují kvadratickým rovnicím o dvou neznámých. Při vhodné volbě souřadného systému jsou rovnice kuželoseček v tzv. normálním tvaru *tyto:*

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \textit{kružnice,} \tag{9.1}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{elipsa,} \tag{9.2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{hyperbola,} \tag{9.3}$$

$$y^2 = 2px \qquad \textit{parabola,} \tag{9.4}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad \textit{dvojnásobný bod,} \tag{9.5}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad \textit{dvojice různoběžných přímek,} \tag{9.6}$$

$$x^2 = a^2 \qquad \textit{dvojice rovnoběžných přímek,} \tag{9.7}$$

$$x^2 = 0 \qquad \textit{dvojnásobná přímka.} \tag{9.8}$$

Přitom $a, b, p, r > 0$*. Dvojici rovnoběžných přímek nedostaneme jako řez kuželové plochy rovinou.*

V této kapitole se pokusíme vytvořit obdobu v $\mathbb{R}^3$*. Nepůjde o křivky, ale plochy. Při jejich zavedení vyjdeme z toho, že množina bodů tvořících kuželosečku vyhovuje jisté kvadratické rovnici o dvou proměnných a tuto vlastnost budeme chtít zachovat.*

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- určit, zda daná rovnice druhého stupně je rovnicí kvadriky,
- rozhodnout, zda se jedná o středovou či nestředovou kvadriku,
- rozhodnout, zda je daná kvadrika degenerovaná (regulární) či nedegenerovaná (singulární),
- upravit rovnici kvadriky na normální tvar,
- určit střed a poloosy dané kvadriky,
- rozpoznat konkrétní typ dané kvadriky.

Kvadriky budou plochy v $\mathbb{R}^3$ tvořené body, jejichž souřadnice vyhovují kvadratické rovnici o třech neznámých. Přesná definice vypadá následovně.

Definice 9.1. Nechť $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34} \in \mathbb{R}$, přičemž platí $|a_{11}| + |a_{22}| + |a_{33}| + |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{23}| > 0$. Pak množinu všech bodů o souřadnicích $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, které vyhovují rovnici

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \tag{9.9}$$

nazýváme *kvadrikou* neboli *kvadratickou plochou*.

Jde tedy o kvadratickou rovnici o třech neznámých x, y, z. Čísla a_{ij} se nazývají *koeficienty*. Podmínka

$$|a_{11}| + |a_{22}| + |a_{33}| + |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{23}| > 0$$

říká, že aspoň jedno z těchto čísel není nula, tedy že rovnice (9.9) skutečně obsahuje alespoň jeden kvadratický člen x^2, y^2, z^2, xy, xz nebo yz.

Členy s x, y a z se nazývají *lineární* a a_{44} je *absolutní člen*.

Koeficienty u smíšených kvadratických členů xy, xz a yz a lineárních členů x, y a z jsou z formálních důvodů (níže bude jasné proč) napsané ve tvaru součinu $2 \cdot$ číslo. Např. pro $4xz - 3y = 0$ je $a_{13} = 2$ a $a_{24} = -\frac{3}{2}$, ostatní koeficienty jsou nulové.

Kvadrika může být i prázdná množina. Např. rovnici $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ nevyhovuje žádná trojice reálných čísel (x, y, z) — součet nezáporných čísel zvětšený o jedničku nemůže dát nulu.

Každé kvadrice přiřadíme *matici* jejích koeficientů A. Její prvky budou čísla a_{ij}. Chybí nám ale prvky pod hlavní diagonálou. Ty doplníme tak, aby matice byla symetrická, tj. položíme $a_{ij} = a_{ji}$ pro $i > j$, kde $i, j = 1, \dots, 4$. Vlastně koeficienty u smíšených kvadratických členů a lineárních členů rozdělíme „spravedlivě" na poloviny. To je důvod použití dvojek v rovnici (9.9). Např. člen $6xy$ jakoby napíšeme ve tvaru $3xy + 3yx$.

Poznámka 9.2. Pro snadnější zapamatování, jak se matice A vytvoří, si všimněte, že neznámým x, y a z postupně odpovídají indexy 1, 2 a 3. Např. u členu yz je koeficient s indexy 2 a 3, tj. a_{23}. U členu zy by bylo podobně a_{32}, ale protože $a_{23} = a_{32}$ a $yz = zy$, dává to dohromady $2a_{23}yz$.

Pokud jedna neznámá chybí, tj. jde o lineární členy, nebo chybí obě dvě, tj. jde o absolutní člen, doplní se za příslušný index čtyřka, např. a_{24} u y, resp. dvě čtyřky u a_{44}.

Také si to lze představit tak, že máme ne tři neznámé x, y a z, ale čtyři, přičemž poslední je rovna jedné, tj. x, y, z a 1. Tedy např. u a_{24} stojí $y \cdot 1$ a u a_{44} stojí $1 \cdot 1$.

Matice příslušející kvadrikám hrají při jejich hlubším studiu klíčovou roli. Protože nás budou zajímat jen základní vlastnosti kvadrik, nebudeme s nimi pracovat. Použijeme je pouze pro zavedení následujícího pojmu, který umožní kvadriky klasifikovat do dvou skupin (podobně jako kuželosečky).

Definice 9.3. Kvadrika se nazývá *nedegenerovaná (regulární)*, jestliže $\det A \neq 0$. V opačném případě, tj. když $\det A = 0$, se nazývá *degenerovaná (singulární)*.

Příklad 9.4. Rozhodněte, zda následující kvadriky jsou degenerované nebo ne.

a) $2x^2 - 3z^2 + 4xy - 2yz + 2y - 6z + 4 = 0$,

b) $x^2 - 2y^2 - 2z^2 - xy - xz + 5yz - x - 4y + 5z - 2 = 0$.

Řešení. Určíme nejprve koeficienty a_{ij} a z nich pak sestavíme matici kvadriky a určíme její determinant.

a) $a_{11} = 2$, $a_{33} = -3$, $a_{44} = 4$, $a_{12} = 2$, $a_{23} = -1$, $a_{24} = 1$, $a_{34} = -3$, zbývající koeficienty jsou nulové, tj. $a_{22} = a_{13} = a_{14} = 0$. Tedy

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 82 \neq 0.$$

Přitom jsme $\det A$ rozvinuli podle prvního řádku. Protože $\det A \neq 0$, jde o nedegenerovanou kvadriku.

b) $a_{11} = 1$, $a_{22} = -2$, $a_{33} = -2$, $a_{44} = -2$, $a_{12} = -\frac{1}{2}$, $a_{13} = -\frac{1}{2}$, $a_{23} = \frac{5}{2}$, $a_{14} = -\frac{1}{2}$, $a_{24} = -2$, $a_{34} = \frac{5}{2}$. Tedy

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{5}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{5}{2} & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

protože determinant má dva stejné řádky. Jde tedy o degenerovanou kvadriku. ▲

Průvodce studiem

Dalším naším cílem bude seznámit se s jednotlivými typy kvadrik a jejich rovnicemi. Přitom se budeme snažit (podobně jako u kuželoseček) zvolit souřadný systém tak, aby rovnice byly co nejjednodušší.

Lze ukázat, že otočením souřadného systému kolem počátku je možné docílit, aby koeficienty u smíšených kvadratických členů xy, xz *a* yz *byly nulové. Protože nalezení příslušné transformace je poněkud obtížnější, nebudeme se učit rovnice tohoto otočení hledat. Zájemce odkazujeme např. na [20], kde je úloha tzv.* ortogonální transformace kvadratické formy na kanonický tvar *popsána. Jiná možnost je použití tzv.* invariantů *— viz např. [15].*

V dalším budeme předpokládat, že rovnice kvadrik nebudou obsahovat smíšené kvadratické členy (přesněji, koeficienty u nich budou nulové), takže jejich podoba bude

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \tag{9.10}$$

Nyní si uvedeme přehled rovnic kvadrik v tzv. *normálním tvaru*. Rozdělíme ho do tří částí. Všude v dalším předpokládáme, že $a, b, c, p, q, r > 0$.

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{kulová plocha,} \tag{9.11}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{elipsoid,} \tag{9.12}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{jednodílný hyperboloid,} \tag{9.13}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{dvojdílný hyperboloid,} \tag{9.14}$$

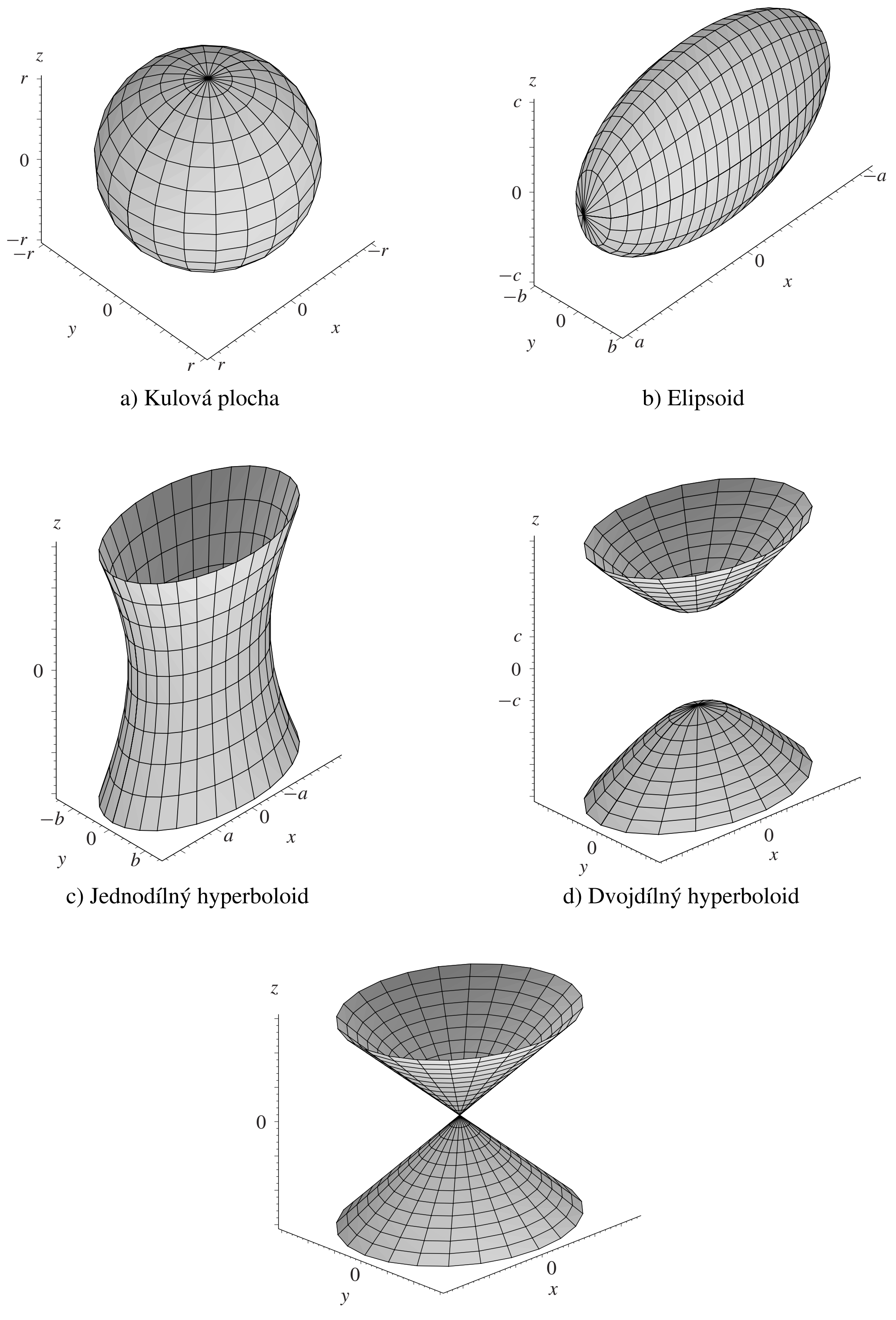
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{kužel,} \tag{9.15}$$

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \quad \text{eliptický paraboloid,} \tag{9.16}$$

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} \quad \text{hyperbolický paraboloid.} \tag{9.17}$$

Předchozí kvadriky jsou znázorněny na obr. 9.1 a 9.2.

Všechny tyto kvadriky kromě kužele jsou nedegenerované. Kulová plocha, elipsoid, oba hyperboloidy a kužel jsou tzv. *středové kvadriky*. (Někdy se tento pojem zavádí jen pro nedegenerované kvadriky — srv. [17, str. 18].) *Středem* je v tomto případě počátek $O = (0, 0, 0)$. To znamená, že s každým bodem kvadriky o souřadnicích (x, y, z) také bod souměrně sdružený vzhledem k počátku, tj. bod o souřadnicích $(-x, -y, -z)$, je rovněž bodem téže kvadriky. U kužele se bod $O = (0, 0, 0)$ také nazývá *vrchol*. Vrchol tohoto typu mají pouze degenerované kvadriky.



a) Kulová plocha

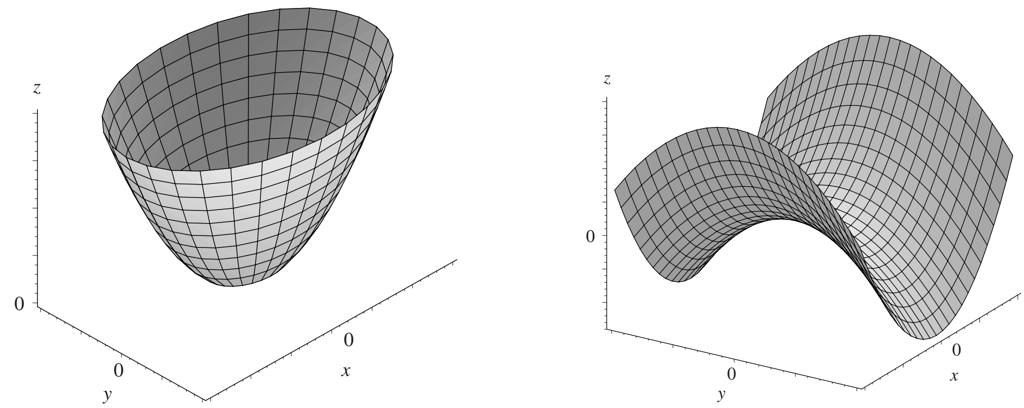
b) Elipsoid

c) Jednodílný hyperboloid

d) Dvojdílný hyperboloid

e) Kužel

Obr. 9.1: Kvadriky — první část



a) Eliptický paraboloid b) Hyperbolický paraboloid

Obr. 9.2: Kvadriky — druhá část

Z rovnice kulové plochy je zřejmě vidět, že $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$, což říká, že tato kvadrika je tvořena body, jejichž vzdálenost od počátku je konstantní, a to r. Jde tedy o kulovou plochu se středem v počátku a poloměrem r — viz obr. 9.1 a).

Čísla a, b a c v rovnici elipsoidu se nazývají (obdobně jako u elipsy) *poloosy elipsoidu*. Protože body $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ a $(0, 0, \pm c)$ zřejmě vyhovují rovnici (9.12), jsou to délky úseků, které tento elipsoid vytíná na kladných a záporných částech os x, y a z — viz obr. 9.1 b). Jestliže je některá dvojice poloos stejná (a třetí poloosa je jiná), bude elipsoid rotační s osou rotace v souřadné ose odpovídající odlišné poloose. Např. jestliže bude $a = c$, bude osou rotace y. Jestliže $a = b = c = r$, je vidět, že rovnice (9.12) přejde po úpravě v rovnici (9.11). Kulová plocha je tedy speciálním případem elipsoidu.

Rovněž u hyperboloidů se čísla a, b a c nazývají poloosy, geometrický význam už ale není tak názorný. U jednodílného hyperboloidu protíná rovina $z = 0$ tuto kvadriku v elipse o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, což zjistíme dosazením nuly za z do rovnice (9.13). Čísla a a b jsou tedy poloosami této elipsy — viz obr. 9.1 c). U dvojdílného hyperboloidu zřejmě bod $(0, 0, \pm c)$ vyhovuje rovnici (9.14), takže číslo c je délka úseku, který tato kvadrika vytíná na kladné a záporné části osy z — viz obr. 9.1 d).

Jestliže v rovnicích hyperboloidů nebo kužele je $a = b$, jde opět o rotační kvadriku s osou rotace z.

Paraboloidy jsou nestředové kvadriky. Pro bod $O = (0, 0, 0)$ se také používá název *vrchol*, ale jeho význam je zcela jiný než u degenerovaných kvadrik (např. kužele). Pokud je u eliptického paraboloidu $p = q$, je to rotační kvadrika s osou rotace z.

Pokud je některá z uvedených kvadrik rotační, lze ji vytvořit rotací kuželosečky ležící v rovině, přičemž rotace se provádí kolem některé osy symetrie této kuželosečky. V případě nedegenerovaných kuželoseček tak z kružnice získáme kulovou plochu, z elipsy rotační elipsoid, z hyperboly rotační jednodílný nebo dvojdílný hyperboloid a z paraboly rotační eliptický paraboloid.

V rovnicích hyperboloidů, kužele a paraboloidů figurovala neznámá z asymetricky. Cyklickou záměnou x, y a z dostaneme tytéž typy kvadrik, jen je musíme na obr. 9.1 resp. 9.2 v některém směru o 90° otočit.

Pomůckou pro zapamatování předchozích rovnic jsou následující skutečnosti:

1) Ve všech těchto rovnicích se vyskytují s nenulovým koeficientem všechny tři neznámé.
2) V rovnicích kulové plochy, elipsoidu, obou hyperboloidů a kužele se vyskytují s nenulovým koeficientem všechny tři kvadratické členy.
3) V rovnici kulové plochy jsou všechny tři koeficienty u kvadratických členů stejné.
4) V rovnici elipsoidu mají všechny tři koeficienty u kvadratických členů stejné znaménko (ale nejsou obecně stejné).
5) V rovnicích hyperboloidů a kužele mají dva koeficienty u kvadratických členů stejné znaménko a třetí má opačné znaménko.
6) V rovnicích paraboloidů jsou jen dva koeficienty u kvadratických členů nenulové. U eliptického paraboloidu mají koeficienty u těchto kvadratických členů stejná znaménka, u hyperbolického paraboloidu opačná.

Další skupinou budou tzv. *kvadratické válce*.

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \text{rotační válec,} \tag{9.18}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{eliptický válec,} \tag{9.19}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{hyperbolický válec,} \tag{9.20}$$

$$y^2 = 2px \qquad \text{parabolický válec.} \tag{9.21}$$

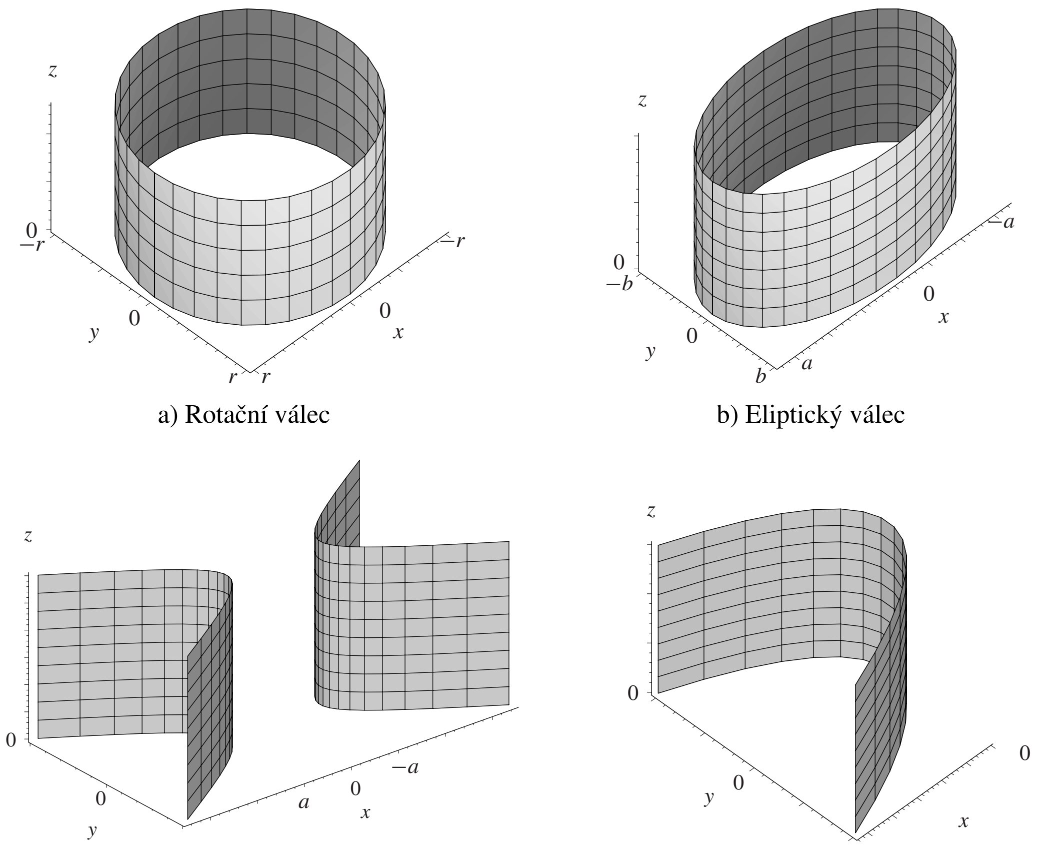
Tyto kvadriky jsou znázorněny na obr. 9.3. Jsou všechny degenerované.

Zdánlivě jde o rovnice kuželoseček. Nesmíme však zapomenout, že jde o rovnici se třemi neznámými, pouze u členů s neznámou z jsou nulové koeficienty. Jestliže nějaký bod $(x_0, y_0, 0)$ vyhovuje takové rovnici, pak této rovnici vyhovuje také bod (x_0, y_0, z) s libovolným $z \in \mathbb{R}$, protože na z neklade rovnice žádné podmínky. To znamená, že tyto kvadriky s každým bodem současně obsahují přímku rovnoběžnou s osou z a procházející tímto bodem. Kuželosečka odpovídající dané rovnici, která leží v rovině $z = 0$, se nazývá *řídící křivka*. (Takto se definují obecně válcové plochy i v případě, že řídící křivka není kuželosečka. Samozřejmě to nejsou kvadriky.)

V případě rovnic (9.18)–(9.21) je tedy nutné důsledně rozlišovat, jestli je uvažujeme v $\mathbb{R}^2$ nebo v $\mathbb{R}^3$. V prvním případě jde o kuželosečky (tedy křivky), v druhém případě o kvadriky (tedy plochy).

Jak už jsme poznamenali, typickým znakem těchto rovnic je, že jedna neznámá (zdánlivě) chybí. V našem případě je to z, ale cyklickou záměnou dostaneme další varianty. Povrchové přímky kvadriky jsou rovnoběžné se souřadnou osou odpovídající chybějícímu písmenu.

Předcházející dvě skupiny kvadrik budou pro nás z hlediska aplikací nejdůležitější. Až budeme probírat dvojný a trojný integrál, budeme počítat objemy a povrchy těles



a) Rotační válec

b) Eliptický válec

c) Hyperbolický válec

d) Parabolický válec

Obr. 9.3: Kvadratické válce

omezených kvadrikami apod. S některými jsme se setkali i v předcházejících kapitolách tohoto textu (lokální extrémy, Taylorův vzorec). Pro úplnost však uvedeme i zbývající (neprázdné) kvadriky. Obrázky neuvádíme, protože jsou zřejmé.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad \text{dvojnásobný bod,} \tag{9.22}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad \text{dvojnásobná přímka,} \tag{9.23}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad \text{dvojice různoběžných rovin,} \tag{9.24}$$

$$x^2 = a^2 \qquad \text{dvojice rovnoběžných rovin,} \tag{9.25}$$

$$x^2 = 0 \qquad \text{dvojnásobná rovina.} \tag{9.26}$$

Všechny tyto kvadriky jsou degenerované. Názvy kvadrik jsou výstižné. Rovnici (9.22) vyhovuje pouze bod $(0, 0, 0)$. Rovnici (9.23) vyhovují body tvaru $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$, což je osa z. Rovnici (9.24) lze upravit na tvar $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$. Musí tedy platit buď $y = \frac{b}{a}\,x$ nebo $y = -\frac{b}{a}\,x$, což jsou rovnice dvou různoběžných rovin, procházejících osou z. Rovnici (9.25) lze upravit na tvar $(x-a)(x+a)=0$, tedy buď musí platit $x=a$ nebo $x=-a$. To jsou rovnice různých rovnoběžných rovin, kolmých k ose x. Konečně rovnici (9.26) vyhovují body tvaru $(0, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$. Jde tedy o souřadnou rovinu $x=0$. Více se těmito kvadrikami nebudeme zabývat.

Pokud kvadrika není v normálním tvaru, ale má rovnici (9.10), stačí posunout souřadnou soustavu o vhodný vektor $\boldsymbol{u}=(x_0, y_0, z_0)$. Tedy počátek nové souřadné soustavy umístíme do bodu (x_0, y_0, z_0) staré souřadné soustavy. Směr a orientace souřadných os se nezmění. Označíme-li staré souřadnice x, y a z a nové souřadnice x', y' a z', bude platit

$$x=x'+x_0, \qquad y=y'+y_0, \qquad z=z'+z_0. \tag{9.27}$$

Po této transformaci bude mít kvadrika (v čárkovaných souřadnicích) normální tvar. V původních souřadnicích dostaneme její rovnici tak, že v odpovídajícím normálním tvaru nahradíme postupně x', y' a z' výrazy $x-x_0$, $y-y_0$ a $z-z_0$. Bod (x_0, y_0, z_0) přejde v nových souřadnicích do počátku. Např. — viz (9.11) resp. (9.16) —

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1 \qquad \text{resp.} \qquad z-z_0=\frac{(x-x_0)^2}{2p}+\frac{(y-y_0)^2}{2q}$$

jsou rovnice posunutého elipsoidu resp. eliptického paraboloidu. Střed elipsoidu (ve starých souřadnicích) bude (x_0, y_0, z_0), vrchol paraboloidu bude tentýž bod.

Praktické nalezení tohoto posunutí je dobře známá úloha — tzv. doplnění na úplný čtverec. Obdobně se postupuje u kuželoseček. Výraz $u^2+\alpha u$ se s využitím vzorce $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ upraví na tvar $u^2+\alpha u=\left(u+\frac{\alpha}{2}\right)^2-\frac{\alpha^2}{4}$. Postup bude nejlépe zřejmý z příkladů.

Příklad 9.5. Najděte normální tvary následujících kvadrik a určete, o jaké kvadriky jde.

a) $x^2+y^2+z^2+4x-6y-2z+12=0$,
b) $2x^2-y^2+4z^2-12x-2y-16z+29=0$,
c) $x^2+y^2+2x-6y-3z+4=0$,
d) $9x^2+9z^2+54x-12z+49=0$.

Řešení. Ve všech příkladech se pokusíme dopředu odhadnout, o jakou kvadriku by mohlo jít. K tomu využijeme poznámky na str. 195.

a) Rovnice obsahuje všechny tři proměnné a všechny ve druhé mocnině, přičemž koeficienty jsou u všech kvadratických členů stejné. Mohlo by jít o kulovou plochu. To zjistíme až po úpravě. Výsledek bude záviset na čísle, které bude v (9.11) na pravé straně. (Pro nulu by šlo o dvojnásobný bod, pro záporné číslo o prázdnou množinu.) Doplněním na čtverec postupně dostaneme:

$$x^2+4x=(x+2)^2-4, \quad y^2-6y=(y-3)^2-9, \quad z^2-2z=(z-1)^2-1.$$

Dosazením do zadané rovnice vyjde

$$(x+2)^2-4+(y-3)^2-9+(z-1)^2-1+12=0 \Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=2.$$

Jde tedy o kulovou plochu se středem $S=(-2, 3, 1)$ a poloměrem $r=\sqrt{2}$.

b) Rovnice obsahuje všechny tři proměnné a všechny ve druhé mocnině, přičemž koeficienty u dvou kvadratických členů jsou kladné a jeden je záporný. Dostaneme tedy jednu z rovnic (9.13), (9.14) nebo (9.15), takže musí jít o některý z hyperboloidů nebo kužel. Pokud výraz, který doplňujeme na čtverec, má u druhé mocniny koeficient různý od 1, je vhodné tento koeficient nejprve vytknout. Vyhneme se tím zbytečným numerickým chybám (i v případě, že jde o -1). Dostaneme:

$$
\begin{aligned}
2x^2 - 12x &= 2[x^2 - 6x] = 2[(x-3)^2 - 9] = 2(x-3)^2 - 18,\\
-y^2 - 2y &= -[y^2 + 2y] = -[(y+1)^2 - 1] = -(y+1)^2 + 1,\\
4z^2 - 16z &= 4[z^2 - 4z] = 4[(z-2)^2 - 4] = 4(z-2)^2 - 16.
\end{aligned}
$$

Dosazením do zadané rovnice vyjde

$$
\begin{aligned}
&2(x-3)^2 - 18 - (y+1)^2 + 1 + 4(z-2)^2 - 16 + 29 = 0 \qquad \Rightarrow\\
&2(x-3)^2 - (y+1)^2 + 4(z-2)^2 = 4 \qquad \Rightarrow\\
&\frac{(x-3)^2}{2} - \frac{(y+1)^2}{4} + (z-2)^2 = 1.
\end{aligned}
$$

Jde tedy o jednodílný hyperboloid se středem $S = (3, -1, 2)$, jehož poloosy jsou $a = \sqrt{2}$, $b = 2$ a $c = 1$ a jehož osa je rovnoběžná s osou y (oproti (9.13) je zaměněna role y a z).

c) Rovnice obsahuje všechny tři proměnné, ale pouze dvě ve druhé mocnině, přičemž koeficienty u obou kvadratických členů jsou kladné. Může jít tedy pouze o rovnici (9.16). Dostaneme:

$$
x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1, \qquad\qquad y^2 - 6y = (y-3)^2 - 9.
$$

Dosazením do zadané rovnice vyjde

$$
\begin{aligned}
&(x+1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 - 3z + 4 = 0 \quad \Rightarrow\\
&3z + 6 = (x+1)^2 + (y-3)^2 \quad \Rightarrow \quad z + 2 = \frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{3}.
\end{aligned}
$$

Jde tedy o eliptický paraboloid s vrcholem $V = (-1, 3, -2)$, jehož osa je rovnoběžná s osou z. Parametry jsou $p = q = \frac{3}{2}$. Protože jsou stejné, je rotační.
Upozorněme, že pokud by oba koeficienty u kvadratických členů byly záporné, byl by eliptický paraboloid převrácen vzhůru nohama oproti obr. 9.2 a).

d) Rovnice obsahuje pouze dvě proměnné, půjde tedy o válcovou plochu. Protože chybí proměnná y, bude řídící křivka ležet v rovině určené osami x a z. Obě neznámé jsou ve druhé mocnině. Koeficienty u kvadratických členů jsou stejné, proto může jít pouze o kružnici — viz rovnice (9.1). Zda tomu tak je, zjistíme až po úpravě (na pravé straně rovnice musí vyjít kladné číslo; pro nulu by to byl dvojnásobný bod a pro záporné číslo prázdná množina). Může jít tedy o kruhový válec (9.18). Dostaneme:

$$
\begin{aligned}
9x^2 + 54x &= 9[x^2 + 6x] = 9[(x+3)^2 - 9] = 9(x+3)^2 - 81,\\
9z^2 - 12z &= 9\left[z^2 - \tfrac{4}{3}z\right] = 9\left[\left(z - \tfrac{2}{3}\right)^2 - \tfrac{4}{9}\right] = 9\left(z - \tfrac{2}{3}\right)^2 - 4.
\end{aligned}
$$

Dosazením do zadané rovnice vyjde

$$\begin{aligned}
&9(x+3)^2 - 81 + 9\left(z - \tfrac{2}{3}\right)^2 - 4 + 49 = 0 \quad \Rightarrow \\
&9(x+3)^2 + 9\left(z - \tfrac{2}{3}\right)^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad (x+3)^2 + \left(z - \tfrac{2}{3}\right)^2 = 4.
\end{aligned}$$

Jde tedy o kruhový válec. Střed řídící kružnice je $S = \left(-3, 0, \frac{2}{3}\right)$, poloměr $r = 2$ a osa válce, procházející bodem S, je rovnoběžná s osou y (oproti (9.18) je zaměněna role y a z). ▲

Teorie kvadrik patří ke klasickým partiím geometrie. Souvisí úzce s tzv. *kvadratickými formami* a jejich různými transformacemi na kanonický tvar. My se nebudeme věnovat jejich podrobnějšímu studiu. Zájemcům doporučujeme např. [14] nebo [17], kde najdou nejen výsledky v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$, ale i v $\mathbb{R}^n$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. V těchto pracích jsou kvadriky rovněž studovány obecněji v tzv. *projektivních prostorech*, což je přirozené prostředí pro vyšetřování jejich vlastností.

V závěrečné poznámce uvedeme ještě několik důležitých vlastností kvadrik.

Poznámka 9.6.

1) Lze ukázat, že řezem libovolné kvadriky rovinou dostaneme vždy kuželosečku. Např. u elipsoidu je to elipsa, u hyperboloidu elipsa, parabola, hyperbola, dvojice různoběžných přímek (u jednodílného) nebo bod (u dvojdílného), u eliptického paraboloidu elipsa nebo parabola, u hyperbolického paraboloidu hyperbola, parabola, dvojice různoběžných přímek nebo přímka atd.
2) Některé kvadriky mají tu vlastnost, že obsahují celé přímky. Takovým přímkám se říká *tvořící*. Kvadriky obsahující přímky se nazývají *přímkové*, zatímco ostatní jsou *bodové*. Mezi přímkové kvadriky patří zřejmě kvadratické válce a kužel. Ale také nedegenerované kvadriky mohou být přímkové — viz předchozí bod této poznámky o řezech rovinami. Takovými jsou jednodílný hyperboloid a hyperbolický paraboloid. Na obou existují dvě soustavy přímek.
   Např. protneme-li jednodílný hyperboloid o rovnici $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ rovinou o rovnici $x = 1$, má průsečnice v této rovině rovnici $y^2 - z^2 = 0$, což je dvojice různoběžných přímek $y = z$ a $y = -z$. Podobně průsečnice hyperbolického paraboloidu o rovnici $z = x^2 - y^2$ s rovinou o rovnici $z = 0$ má v této rovině rovnici $x^2 - y^2 = 0$, což je dvojice různoběžných přímek $x = y$ a $x = -y$. Viz též cvičení 6 a 7 na konci této kapitoly.
3) Většina kvadrik nepředstavuje grafy funkcí dvou proměnných. Lze však na ně použít větu 7.11 o implicitně zadané funkci a pomocí totálního diferenciálu sestrojit tečné roviny v bodech, v nichž existují. Někdy bude třeba ve větě 7.11 zaměnit role proměnných x, y a z.
4) I když jsme říkali, že se nebudeme zabývat kvadrikami obsahujícími smíšené kvadratické členy s nenulovým koeficientem, jednu výjimku učiníme. Jde o velmi často se vyskytující kvadriku mající rovnici $z = xy$. Otočením kolem osy z o $45°$ lze ukázat, že je to hyperbolický paraboloid, jehož rovnice v normálním tvaru je $z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$.

5) Kulová plocha je speciálním případem elipsoidu a rotační válec je zase speciálním případem eliptického válce. Nejde tedy o samostatné typy kvadrik. Pro naše účely je ale vhodnější uvažovat je samostatně, protože se s nimi setkáváme nejčastěji.
6) Pominuli jsme prázdné kvadriky, které nemají žádné reálné body (mají ale body v komplexním rozšíření prostoru $\mathbb{R}^3$). Jejich rovnice v normálním tvaru jsou:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1, \qquad \frac{x^2}{a^2}=-1.$$

$\sum$ Pojmy k zapamatování

— kvadrika
— nedegenerovaná (regulární) kvadrika
— degenerovaná (singulární) kvadrika
— středová kvadrika
— nestředová kvadrika
— rotační kvadrika
— matice koeficientů kvadriky
— normální tvar rovnice kvadriky

? Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pojmem kvadrika?
2. Kterou kvadriku nazveme nedegenerovanou (regulární)?
3. Kterou kvadriku nazveme degenerovanou (singulární)?
4. Udejte příklad některých středových kvadrik.
5. Vyjmenujte některé nestředové kvadriky.
6. Jaké kvadriky nazýváme rotační?
7. Co to je matice koeficientů kvadriky a k čemu nám slouží?
8. Napište normální tvar rovnice kulové plochy, elipsoidu, kužele, jednodílného a dvojdílného hyperboloidu eliptického a hyperbolického paraboloidu.
9. Co jsou to kvadratické válce? Uveďte jejich rovnice.

! Příklady k procvičení

1. Rozhodněte, které z následujících kvadrik jsou degenerované a které nejsou.

a) $x^2+4y^2+9z^2-4xy+6xz-12yz=0$,

b) $9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 6xz - 4yz + 12x + 8y - 4z + 4 = 0$,
c) $2x^2 - 3y^2 - z^2 - xy - xz + 4yz + 3x - 7y + 3z - 2 = 0$,
d) $2x^2 + 2y^2 - 5xy + 3xz - 6yz + 6x - 3y + 9z = 0$,
e) $8x^2 - 27y^2 + 35z^2 - 44xy + 60xz + 6yz = 0$,
f) $14x^2 - 40y^2 + 53z^2 - 68xy + 92xz + 8yz - 6 = 0$,
g) $23x^2 + 9y^2 + 98z^2 - 46xy + 92xz - 72yz + 4 = 0$,
h) $21x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 24xy + 6xz + 8yz - 6x - 8y - 10z + 5 = 0$,
i) $9x^2 + 5y^2 - 7z^2 + 36xy + 30xz - 4yz = 0$,
j) $xy - z = 0$,
k) $25x^2 + 9y^2 + 9z^2 + 20xy - 2xz + 12yz + 12x + 2y + 4z + 17 = 0$,
l) $16x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 8xy - 8xz + 8yz - 22x - 2y + 14z + 11 = 0$,
m) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz - 2 = 0$,
n) $17x^2 + 19y^2 + 56z^2 - 18xy + 44xz - 56yz - 22x + 22y - 32z + 11 = 0$.

2. Najděte rovnice v normálním tvaru následujících kvadrik a určete jejich typ.

a) $2x^2 - 5y^2 - z^2 + 12x + 20y - 2z - 13 = 0$,
b) $3x^2 - 4y^2 - 6z^2 - 6x - 16y - 12z - 19 = 0$,
c) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4x + 4y + 12z + 12 = 0$,
d) $3x^2 + 4y^2 + z^2 + 6x - 16y - 2z + 8 = 0$,
e) $x^2 + y^2 + 3z^2 - 6x + 4y + 10 = 0$,
f) $2x^2 + y^2 + 3z^2 - 12x + 4y - 6z + 24 = 0$,
g) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 8x - 18y - 32z + 28 = 0$,
h) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 6y - 8z + 30 = 0$,
i) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 10y + 12z + 27 = 0$,
j) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 5 = 0$,
k) $3x^2 + 2y^2 - 6z^2 - 12x + 4y + 36z - 46 = 0$,
l) $3x^2 + 2y^2 - 6z^2 - 12x + 4y + 36z - 34 = 0$,
m) $3x^2 + 2y^2 - 6z^2 - 12x + 4y + 36z - 40 = 0$,
n) $3x^2 - 2y^2 + 6z^2 - 12x - 4y - 36z + 58 = 0$,
o) $3x^2 - 2y^2 + 6z^2 - 12x - 4y - 36z + 70 = 0$,
p) $x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 2y + 6z - 5 = 0$,
q) $x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 2y + 6z - 3 = 0$,
r) $x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 2y + 6z - 4 = 0$,
s) $2x^2 + 5y^2 + z^2 + 12x - 20y + 2z + 29 = 0$,
t) $2x^2 + 5y^2 - z^2 + 12x - 20y - 2z + 27 = 0$,
u) $2x^2 + 5y^2 - z^2 + 12x - 20y - 2z + 47 = 0$,
v) $2x^2 + 5y^2 - z^2 + 12x - 20y - 2z + 37 = 0$,

w) $2x^2 - 5y^2 - z^2 + 12x + 20y - 2z + 7 = 0$,
x) $2x^2 - 5y^2 + z^2 + 12x + 20y + 2z - 1 = 0$.

3. Najděte rovnice v normálním tvaru následujících kvadrik a určete jejich typ.
   a) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - z + 4 = 0$,
   b) $x^2 - y^2 + 2x + 2y - z + 2 = 0$,
   c) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + z = 0$,
   d) $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y - 6z - 7 = 0$,
   e) $2x^2 - 3y^2 - 8x - 6y - 6z - 13 = 0$,
   f) $2x^2 + y^2 + 8x - 4y - 2z + 10 = 0$,
   g) $2x^2 - y^2 + 8x + 4y + 2z + 8 = 0$,
   h) $y^2 + z^2 - x + 6y - 2z + 11 = 0$,
   i) $y^2 - z^2 - x + 6y + 2z + 9 = 0$,
   j) $x^2 + 2z^2 - 2x - 2y + 4z - 5 = 0$,
   k) $x^2 - z^2 - 2x + y - 2z + 4 = 0$,
   l) $4y^2 - 3z^2 + 12x + 16y + 18z - 5 = 0$.

4. Najděte rovnice v normálním tvaru následujících kvadrik a určete jejich typ.
   a) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0$,
   b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$,
   c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$,
   d) $x^2 + z^2 - 6x - 2z + 8 = 0$,
   e) $y^2 + z^2 + 4y + 2z + 1 = 0$,
   f) $2x^2 + y^2 + 12x + 2y + 15 = 0$,
   g) $2x^2 + 3y^2 + 16x - 12y + 38 = 0$,
   h) $2x^2 + y^2 + 4x - 2y - 1 = 0$,
   i) $2x^2 - 5y^2 - 12x - 10y + 3 = 0$,
   j) $2x^2 - y^2 + 12x - 2y + 13 = 0$,
   k) $4x^2 - y^2 - 16x - 4y + 16 = 0$,
   l) $4y^2 - 3z^2 + 16y - 12z + 16 = 0$,
   m) $2y^2 - z^2 + 4y + 4z - 8 = 0$,
   n) $x^2 - z^2 - 6x - 4z + 3 = 0$,
   o) $y^2 - 3x - 2y - 5 = 0$,
   p) $y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$,
   q) $z^2 - 2x + 2z = 0$,
   r) $x^2 - 4x + 4z - 4 = 0$.

5. Rozhodněte, které kvadriky z předchozích cvičení 2, 3 a 4 jsou degenerované a které nejsou.

6. Zjistěte, které roviny o rovnici $y = kx + r$, $k, r \in \mathbb{R}$, protnou hyperbolický paraboloid $z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$, kde $p, q > 0$, v přímce. Napište parametrické rovnice této tvořící přímky.

7. Uvažujme jednodílný hyperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a, b, c > 0$. Rovina $z = 0$ jej protne v elipse. Nechť $(x_0, y_0, 0)$ je bod této elipsy, tj. platí $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Ověřte, že přímky p procházející tímto bodem, jejichž parametrické rovnice jsou
$$p\colon\ x = x_0 + a^2 y_0 t, \qquad y = y_0 - b^2 x_0 t, \qquad z = \pm abct, \qquad t \in \mathbb{R},$$
jsou tvořící.

Klíč k příkladům k procvičení

V následujících výsledcích D značí degenerovanou a N nedegenerovanou kvadriku. Dále je použito toto označení:

KP	kulová plocha	*E*	elipsoid
JH	jednodílný hyperboloid	*DH*	dvojdílný hyperboloid
EP	eliptický paraboloid	*HP*	hyperbolický paraboloid
RV	rotační válec	*EV*	eliptický válec
HV	hyperbolický válec	*PV*	parabolický válec
K	kužel		

R před označením elipsoidu, hyperboloidů, kužele a eliptického paraboloidu značí, že jde o rotační kvadriku.

1. a) D, b) D, c) D, d) D, e) D, f) N, g) N,
   h) D, i) D, j) N, k) N, l) N, m) D, n) D.

2. a) $-\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{2}+\frac{(z+1)^2}{10}=-1,\ DH,$
   b) $-\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{3}+\frac{(z+1)^2}{2}=0,\ K,$
   c) $\frac{(x-2)^2}{6}+\frac{(y+1)^2}{3}+\frac{(z+2)^2}{2}=1,\ E,$
   d) $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{3}+\frac{(z-1)^2}{12}=1,\ E,$
   e) $\frac{(x-3)^2}{3}+\frac{(y+2)^2}{3}+z^2=1,\ RE,$
   f) $2(x-3)^2+(y+2)^2+3(z-1)^2=1,\ E,$
   g) $4(x+1)^2+9(y-1)^2+16(z-1)^2=1,\ E,$
   h) $(x+3)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=4,\ KP,$
   i) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+(z+3)^2=2,\ KP,$
   j) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9,\ KP,$
   k) $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(y+1)^2}{3}-(z-3)^2=1,\ JH,$
   l) $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(y+1)^2}{3}-(z-3)^2=-1,\ DH,$
   m) $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(y+1)^2}{3}-(z-3)^2=0,\ K,$
   n) $\frac{(x-2)^2}{2}-\frac{(y+1)^2}{3}+(z-3)^2=1,\ JH,$
   o) $\frac{(x-2)^2}{2}-\frac{(y+1)^2}{3}+(z-3)^2=-1,\ DH,$
   p) $(x-2)^2+(y+1)^2-(z-3)^2=1,\ JH,$
   q) $(x-2)^2+(y+1)^2-(z-3)^2=-1,\ DH,$
   r) $(x-2)^2+(y+1)^2-(z-3)^2=0,\ K,$
   s) $\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{2}+\frac{(z+1)^2}{10}=1,\ E,$
   t) $\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{2}-\frac{(z+1)^2}{10}=1,\ JH,$
   u) $\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{2}-\frac{(z+1)^2}{10}=-1,\ DH,$
   v) $\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{2}-\frac{(z+1)^2}{10}=0,\ K,$
   w) $-\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{2}+\frac{(z+1)^2}{10}=1,\ JH,$
   x) $\frac{(x+3)^2}{5}-\frac{(y-2)^2}{2}+\frac{(z+1)^2}{10}=0,\ K.$

3. a) $z - 2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$, *REP*, b) $z - 2 = (x+1)^2 - (y-1)^2$, *HP*,
   c) $z - 2 = -(x+1)^2 - (y-1)^2$, *REP*, d) $z + 3 = \frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{2}$, *EP*,
   e) $z + 3 = \frac{(x-2)^2}{3} - \frac{(y+1)^2}{2}$, *HP*, f) $z + 1 = (x+2)^2 + \frac{(y-2)^2}{2}$, *EP*,
   g) $z + 2 = -(x+2)^2 + \frac{(y-2)^2}{2}$, *HP*, h) $x - 1 = (y+3)^2 + (z-1)^2$, *REP*,
   i) $x - 1 = (y+3)^2 - (z-1)^2$, *HP*, j) $y + 4 = \frac{(x-1)^2}{2} + (z+1)^2$, *EP*,
   k) $y + 4 = -(x-1)^2 + (z+1)^2$, *HP*, l) $x + \frac{1}{2} = -\frac{(y+2)^2}{3} + \frac{(z-3)^2}{4}$, *HP*.

4. a) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 1$, *RV*, b) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 3$, *RV*,
   c) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$, *RV*, d) $(x-3)^2 + (z-1)^2 = 2$, *RV*,
   e) $(y+2)^2 + (z+1)^2 = 4$, *RV*, f) $\frac{(x+3)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$, *EV*,
   g) $\frac{(x+4)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$, *EV*, h) $\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$, *EV*,
   i) $\frac{(x-3)^2}{5} - \frac{(y+1)^2}{2} = 1$, *HV*, j) $\frac{(x+3)^2}{2} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$, *HV*,
   k) $-(x-2)^2 + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$, *HV*, l) $-\frac{(y+2)^2}{3} + \frac{(z+2)^2}{4} = 1$, *HV*,
   m) $\frac{(y+1)^2}{3} - \frac{(z-2)^2}{6} = 1$, *HV*, n) $\frac{(x-3)^2}{2} - \frac{(z+2)^2}{2} = 1$, *HV*,
   o) $(y-1)^2 = 3(x+2)$, *PV*, p) $(y+3)^2 = 2(x+2)$, *PV*,
   q) $(z+1)^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$, *PV*, r) $(x-2)^2 = -4(z-2)$, *PV*.

5. Kulová plocha, elipsoid, hyperboloidy a paraboloidy jsou nedegenerované kvadriky, kužel a rotační, eliptický, hyperbolický a parabolický válec jsou degenerované kvadriky.

6. Musí platit $k = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}$ (po dosazení rovnice roviny do rovnice hyperboloidu musí vypadnout kvadratický člen s x). Parametrické rovnice přímek jsou např.

$$x = t, \qquad y = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}\,t + r \qquad z = \mp\frac{r}{\sqrt{pq}}\,t - \frac{r^2}{2q}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

7. Libovolný bod přímek p vyhovuje rovnici daného jednodílného hyperboloidu.

Autotesty

Autotest 1

1. Načrtněte a popište definiční obor funkce $f: z = \sqrt{y-x} \cdot \ln(x^2 y)$.
2. Najděte a nakreslete vrstevnice v_c funkce $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ a načrtněte řezy rovinami $x = 0$, $y = 0$.
3. Vypočítejte limitu funkce $f: z = \dfrac{xy}{x^2 + y^4}$ v bodě $(0, 0)$.
4. Najděte parciální derivace prvního řádu funkce $f: z = x^3 y^2 - x^2 \sin y + 2^y$.
5. Vypočtěte parciální derivace druhého řádu funkce $f: z = \ln \dfrac{x^2+1}{y^2-1}$.
6. Nahraďte funkci $f: z = 3x^2 y + \sin^2 x + 5y - 2$ Maclaurinovým mnohočlenem (tj. Taylorovým mnohočlenem v bodě $(0, 0)$) třetího řádu.
7. Vyšetřete lokální extrémy funkce $f: z = x^3 + y^3 - 18xy + 215$.
8. Najděte rovnice tečny a normály v bodě $A = (1, 1)$ ke grafu funkce $y = f(x)$ dané implicitně rovnicí $xy + \ln y - 1 = 0$ v okolí bodu A.

Autotest 2

1. Vypočtěte první parciální derivace funkce $z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}$.
2. Vyšetřete lokální extrémy funkce $z = (x + y^2)\, \mathrm{e}^{x/2}$.
3. Aproximujte funkci $f(x, y) = x^3 + x^2 y - xy + 2y$ v bodě $A = (1, 0)$ Taylorovým mnohočlenem prvního a druhého řádu.
4. Určete rovnici tečné roviny τ a normály n plochy $z = \sin \dfrac{x}{y}$ v bodě $T = (\pi, 1, ?)$.
5. Vypočtěte vázané lokální extrémy funkce $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ za podmínky $x_1^2 + x_2^2 = 2$.
6. Terén je plocha určená rovnicí $z = 20 - \dfrac{x^2}{4} - y^2$. V bodě $A = (2, 1)$ určete gradient a jeho velikost.
7. Určete definiční obor funkce $z = \dfrac{\ln \sin(x+y)}{\sqrt{x - y^2}}$.
8. Určete druhou derivaci funkce $y = f(x)$ dané implicitně rovnicí $x^2 + xy + y^2 = 3$ v okolí bodu $(0, \sqrt{3})$.

Autotest 3

1. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$.
2. Na grafu funkce $f(x, y) = x^3 + y^3$ najděte bod, v němž je tečná rovina rovnoběžná s rovinou $\rho\colon\ 12x + 3y - z = 0$.
3. Ověřte, že rovnice $x^2 + xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$ zadává v okolí bodu $(0, 1)$ implicitně funkci $y = f(x)$, a vypočtěte $f'(0)$.
4. Má se zhotovit nádrž daného objemu V ve tvaru rotačního válce bez horní podstavy. Při jakém poměru jeho výšky h k poloměru dna r bude výroba nejlacinější, stojí-li plošná jednotka pláště a Kč, kdežto dna b Kč, $a, b > 0$?
5. Transformujte diferenciální výraz $V\colon\ z_{xx} + 5z_{xy} + 6z_{yy} - 2z_x - 4z_y = 0$, kde $z = f(x, y)$ má spojité všechny druhé parciální derivace, do nových souřadnic u, v, je-li $u = y - 3x$, $v = y - 2x$.
6. Nalezněte lokální extrémy funkce $z = 3xy - x^2y - xy^2$.
7. Je dána kvadrika $4x^2 - 9y^2 - 36z^2 - 8x - 18y + 144z - 185 = 0$. Určete její typ, souřadnice středu a velikosti poloos.
8. Napište a nakreslete definiční obor funkce $z = \arcsin[2y(1 + x^2) - 1]$.

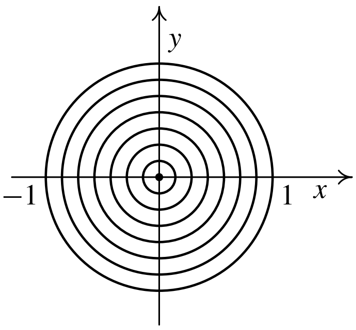
Klíč k autotestu 1

1. Načrtněte a popište definiční obor funkce $f\colon z = \sqrt{y-x} \cdot \ln(x^2 y)$.

Řešení. Pod odmocninou smí být pouze nezáporné číslo a přirozený logaritmus je definován pro kladná čísla, proto musí být splněny následující dvě podmínky:

$$\begin{aligned} y - x &\geqq 0 \qquad \wedge \qquad x^2 y > 0 \\ y &\geqq x \qquad \wedge \qquad y > 0 \qquad \wedge \qquad x \neq 0 \end{aligned}$$

$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq 0 \wedge y > 0 \wedge y \geqq x\}.$



Obr. A.1: Definiční obor funkce $f\colon z = \sqrt{y-x} \cdot \ln(x^2 y)$

▲

2. Najděte a nakreslete vrstevnice v_c funkce $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ a načrtněte řezy rovinami $x = 0$, $y = 0$.

Řešení. Protože odmocnina je vždy nezáporné číslo, pro $c < 0$ je $v_c = \emptyset$. Pro $c \geqq 0$ bude

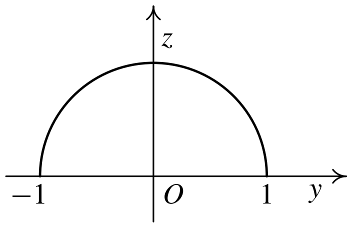
$$\begin{aligned} z = c\colon \quad c &= \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ c^2 &= 1 - x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 &= 1 - c^2 \end{aligned}$$

Z poslední rovnice je zřejmé, že hodnota parametru c musí být z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, aby v_c byla neprázdná. Pro $c = 1$ je $v_c = \{(0, 0)\}$ a pro $c \in \langle 0, 1)$ bude v_c kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{1 - c^2}$ — viz obr. A.2 a).

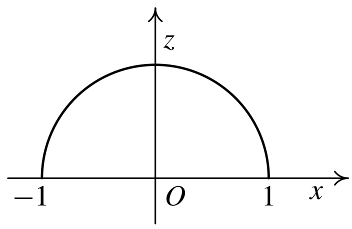
Nyní určíme řezy rovinami $x = 0$, $y = 0$.

$$\begin{aligned} & x = 0 \\ & z = \sqrt{1 - y^2} \\ z \geqq 0 \quad & z^2 = 1 - y^2 \\ & z^2 + y^2 = 1 \quad \text{Množinou řešení je půlkružnice — obr. A.2 b).} \end{aligned}$$

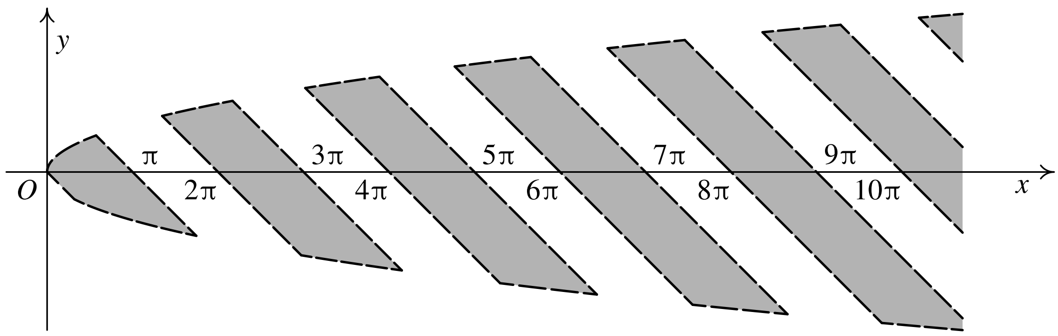
$$\begin{aligned} & y = 0 \\ & z = \sqrt{1 - x^2} \\ z \geqq 0 \quad & z^2 = 1 - x^2 \\ & x^2 + z^2 = 1 \quad \text{Množinou řešení je půlkružnice — obr. A.2 c).} \end{aligned}$$



a) Vrstevnice



b) Řez rovinou $x = 0$



c) Řez rovinou $y = 0$

Obr. A.2

▲

3. Vypočítejte limitu funkce $f : z = \dfrac{xy}{x^2 + y^4}$ v bodě $(0, 0)$.

Řešení. Zkusíme se přibližovat k počátku po přímkách $y = kx$, tj. po bodech (x, kx), $x \to 0$. Pro $k \neq 0$ vyjde:

$$\lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1 + k^4x^2} = k.$$

Limita dané funkce tudíž neexistuje, neboť závisí na směrnici k, tj. na přímce, po které se k bodu $(0, 0)$ blížíme. ▲

4. Najděte parciální derivace prvního řádu funkce $f: z = x^3y^2 - x^2 \sin y + 2^y$.

Řešení. $z_x = 3x^2y^2 - 2x \sin y, \qquad z_y = 2x^3y - x^2 \cos y + 2^y \ln 2.$ ▲

5. Vypočtěte parciální derivace druhého řádu funkce $f\colon z = \ln \dfrac{x^2+1}{y^2-1}$.

Řešení. Definiční obor je $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > 1\}$. Na této množině budou existovat i parciální derivace.

$$z_x = \frac{y^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{2x}{y^2-1} = \frac{2x}{x^2+1},$$

$$z_y = \frac{y^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{-2y(x^2+1)}{(y^2-1)^2} = \frac{-2y}{y^2-1},$$

$$z_{xx} = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2},$$

$$z_{xy} = z_{yx} = 0,$$

$$z_{yy} = \frac{-2(y^2-1) + 2y \cdot 2y}{(y^2-1)^2} = \frac{2+2y^2}{(y^2-1)^2}.$$

▲

6. Nahraďte funkci $f\colon z = 3x^2y + \sin^2 x + 5y - 2$ Maclaurinovým mnohočlenem (tj. Taylorovým mnohočlenem v bodě $(0, 0)$) třetího řádu.

Řešení. Nejprve určíme funkční hodnotu v bodě $(x_0, y_0) = (0, 0)$, tedy $z(0, 0) = -2$. Poté spočítáme veškeré potřebné derivace a opět do nich dosadíme bod $(0, 0)$.

$$\begin{aligned}
z_x &= 6xy + 2\sin x \cos x = 6xy + \sin 2x, && \Rightarrow && z_x(0,0) = 0,\\
z_y &= 3x^2 + 5, && \Rightarrow && z_y(0,0) = 5,\\
z_{xx} &= 6y + 2\cos 2x, && \Rightarrow && z_{xx}(0,0) = 2,\\
z_{yy} &= 0, && \Rightarrow && z_{yy}(0,0) = 0,\\
z_{xy} &= 6x, && \Rightarrow && z_{xy}(0,0) = 0,\\
z_{xxx} &= -4\sin 2x, && \Rightarrow && z_{xxx}(0,0) = 0,\\
z_{xxy} &= 6, && \Rightarrow && z_{xxy}(0,0) = 6,\\
z_{xyy} &= 0, && \Rightarrow && z_{xyy}(0,0) = 0.
\end{aligned}$$

Dostaneme:

$$T_3(x, y) = -2 + 5y + \frac{1}{2} \cdot 2x^2 + \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 3x^2y = -2 + 5y + x^2 + 3x^2y.$$

▲

7. Vyšetřete lokální extrémy funkce $f\colon z = x^3 + y^3 - 18xy + 215$.

Řešení. Nejprve si spočítáme první parciální derivace dané funkce.

$$\begin{aligned}
z_x &= 3x^2 - 18y,\\
z_y &= 3y^2 - 18x.
\end{aligned}$$

Protože existují v $\mathbb{R}^2$, mohou lokální extrémy nastat pouze ve stacionárních bodech. První parciální derivace položíme rovny nule a určíme stacionární body.

$$\begin{array}{l} 3x^2 - 18y = 0 \\ 3y^2 - 18x = 0 \\ \hline y = \dfrac{x^2}{6} \\ \dfrac{x^4}{36} - 6x = 0 \\ \hline x(x^3 - 6^3) = 0 \\ x_1 = 0,\, x_2 = 6, \text{ další dva kořeny budou komplexní.} \end{array}$$

$y_1 = 0^2/6 = 0$ a $y_2 = 6^2/6 = 6$. Máme tedy dva stacionární body $A = (0, 0)$, $B = (6, 6)$. Pro ověření, zda v nich nastává či nenastává extrém, potřebujeme spočítat druhé parciální derivace.

$$\begin{array}{llll} z_{xx} = 6x, & \Rightarrow & z_{xx}(0,0) = 0, & z_{xx}(6,6) = 36, \\ z_{xy} = -18, & \Rightarrow & z_{xy}(0,0) = -18, & z_{xy}(6,6) = -18, \\ z_{yy} = 6y, & \Rightarrow & z_{yy}(0,0) = 0, & z_{yy}(6,6) = 36. \end{array}$$

$$J(A) = \begin{vmatrix} 0 & -18 \\ -18 & 0 \end{vmatrix} = -18^2 < 0 \qquad \ldots \text{lokální extrém v bodě } A \text{ neexistuje,}$$

$$J(B) = \begin{vmatrix} 36 & -18 \\ -18 & 36 \end{vmatrix} = 36^2 - 18^2 > 0 \qquad \ldots \text{v bodě } B \text{ je lokální extrém.}$$

Protože $z_{xx}(B) > 0$, nastává v bodě B lokální minimum. ▲

8. Najděte rovnice tečny a normály v bodě $A = (1, 1)$ ke grafu funkce $y = f(x)$ dané implicitně rovnicí $xy + \ln y - 1 = 0$ v okolí bodu A.

Řešení. Označme $F(x, y) = xy + \ln y - 1$. Platí $F(A) = 0$, $F_y = x + 1/y$, tj. $F_y(A) = 2 \neq 0$, takže rovnice zadává v okolí bodu A implicitně jistou funkci $y = f(x)$. Pro určení tečny i normály potřebujeme znát hodnotu první derivace v daném bodě.

$$y + xy' + \frac{1}{y}\, y' = 0,$$

$$y' = \frac{-y}{x + \frac{1}{y}} \quad \Rightarrow \quad y'(1) = -1/2.$$

Nyní již jen dosadíme do vzorce a obdržíme:

$$\begin{array}{ll} t\colon y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x - 1), & n\colon y - 1 = 2(x - 1), \\ t\colon x + 2y - 3 = 0, & n\colon 2x - y - 1 = 0. \end{array}$$

▲

Klíč k autotestu 2

1. Vypočtěte první parciální derivace funkce $z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}$.

   Řešení. Definiční obor je $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

$$z_x = \frac{1}{1+x^y} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^y)^{-1/2} \cdot y \cdot x^{y-1} = \frac{yx^y}{2x(1+x^y)\sqrt{x^y}} = \frac{y\sqrt{x^y}}{2x(1+x^y)},$$
$$z_y = \frac{1}{1+x^y} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^y)^{-1/2} \cdot x^y \cdot \ln x = \frac{\sqrt{x^y}\,\ln x}{2(1+x^y)}.$$

▲

2. Vyšetřete lokální extrémy funkce $z = (x + y^2)\,\mathrm{e}^{x/2}$.

   Řešení. Funkce je spojitá v $\mathbb{R}^2$ a má zde spojité parciální derivace všech řádů. Lokální extrémy mohou být pouze ve stacionárních bodech.
   Nejprve nalezneme stacionární body, tj. vypočteme první parciální derivace funkce z a položíme je rovny nule. V našem případě tedy platí:

$$z_x = \mathrm{e}^{x/2}(1 + 1/2\,x + 1/2\,y^2), \quad z_y = 2y\,\mathrm{e}^{x/2}.$$

   Řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x/2}\Big(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2\Big) &= 0,\\ 2\,y\,\mathrm{e}^{x/2} &= 0 \end{aligned}$$

   dostaneme z druhé rovnice $y = 0$ a po dosazení do první rovnice $x = -2$, tj. jediný stacionární bod $A = (-2, 0)$.
   O tom, zda ve stacionárním bodě je extrém, rozhodneme pomocí znaménka determinantu

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}.$$

   Dále tedy vypočteme druhé parciální derivace v bodě A:

$$\begin{aligned} z_{xx} &= \mathrm{e}^{x/2}\Big(1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y^2\Big) &&\Rightarrow\quad z_{xx}(A) = \frac{1}{2\mathrm{e}},\\ z_{xy} &= \mathrm{e}^{x/2}y &&\Rightarrow\quad z_{xy}(A) = 0,\\ z_{yy} &= 2\,\mathrm{e}^{x/2} &&\Rightarrow\quad z_{yy}(A) = \frac{2}{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

   Po dosazení je $J(x, y) = 1/\mathrm{e}^2 > 0$, a proto v bodě A nastane extrém. Protože $z_{xx}(A) > 0$, jde o ostré lokální minimum. ▲

3. Aproximujte funkci $f(x, y) = x^3 + x^2 y - xy + 2y$ v bodě $A = (1, 0)$ Taylorovým mnohočlenem prvního a druhého řádu.

   Řešení. Pro náhradu funkce Taylorovým mnohočlenem v bodě A potřebujeme znát hodnotu funkce a hodnoty prvních a druhých parciálních derivací funkce $f(x, y)$ v bodě A.

$$\begin{aligned}
z &= x^3 + x^2 y - xy + 2y & &\Rightarrow & z(A) &= 1,\\
z_x &= 3x^2 + 2xy - y & &\Rightarrow & z_x(A) &= 3,\\
z_y &= x^2 - x + 2 & &\Rightarrow & z_y(A) &= 2,\\
z_{xx} &= 6x + 2y & &\Rightarrow & z_{xx}(A) &= 6,\\
z_{xy} &= 2x - 1 & &\Rightarrow & z_{xy}(A) &= 1,\\
z_{yy} &= 0 & &\Rightarrow & z_{yy}(A) &= 0.
\end{aligned}$$

   Po dosazení do vzorce (4.7) obdržíme

$$\begin{aligned}
T_1(x, y) &= 1 + 3(x - 1) + 2y,\\
T_2(x, y) &= 1 + 3(x - 1) + 2y + 3(x - 1)^2 + (x - 1)y.
\end{aligned}$$

▲

4. Určete rovnici tečné roviny τ a normály n plochy $z = \sin \frac{x}{y}$ v bodě $T = (\pi, 1, ?)$.

   Řešení. Tečná rovina má rovnici $\tau\colon z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$, normála n má parametrické rovnice

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + t\, f_x(x_0, y_0),\\
y &= y_0 + t\, f_y(x_0, y_0), \qquad t \in \mathbb{R},\\
z &= z_0 - t.
\end{aligned}$$

   V našem případě tedy platí:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sin \pi = 0\,,\\
z_x &= \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} & &\Rightarrow & z_x(\pi, 1) &= -1,\\
z_y &= -\frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} & &\Rightarrow & z_y(\pi, 1) &= \pi.
\end{aligned}$$

   Tečná rovina má po úpravách rovnici $\tau\colon z = -x + \pi y$, normála má parametrické rovnice

$$\begin{aligned}
n\colon x &= \pi - t,\\
y &= 1 + \pi t, \qquad t \in \mathbb{R},\\
z &= -t.
\end{aligned}$$

▲

5. Vypočtěte vázané lokální extrémy funkce $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ za podmínky $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

Řešení. Jak funkce $f(x_1, x_2)$, tak funkce $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2$ z vazebné podmínky mají derivace všech řádů v celé $\mathbb{R}^2$. Lagrangeova funkce má tvar

$$\mathscr{L}(x_1, x_2, y_0, y_1) = y_0x_1x_2 + y_1(x_1^2 + x_2^2 - 2).$$

Budeme předpokládat, že $y_0 \geqq 0$ pro minimum i maximum. Nezávislost gradientu $g'(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)$ znamená, že je nenulový. Soustava rovnic $2x_1 = 0$ a $2x_2 = 0$ má však jediné řešení $x_1 = x_2 = 0$, které nevyhovuje vazebné podmínce. To tedy znamená, že y_0 je nenulové, a lze volit $y_0 = 1$. Derivace Lagrangeovy funkce pak je

$$\mathscr{L}'_{\boldsymbol{x}}(x_1, x_2, 1, y_1) = (x_2 + 2y_1x_1, x_1 + 2y_1x_2).$$

Podle věty 8.2 mohou lokální extrémy nastat pouze ve stacionárních bodech, které určíme z rovnic

$$\begin{aligned} 2x_2 + 2x_1y_1 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2y_1 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Odtud dostaneme, že $y_1 \neq 0$. V opačném případě bychom dostali $x_1 = x_2 = 0$, ale toto řešení nesplňuje vazebnou podmínku. Z nenulovosti y_1 plyne, že $x_1 \neq 0$ a $x_2 \neq 0$. Kdyby totiž např. $x_1 = 0$, vyšlo by z první rovnice, že $x_2 = 0$, což je opět spor s vazebnou podmínkou. Platí tedy

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -\frac{x_2}{x_1} \\ y_1 &= -\frac{x_1}{x_2} \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad x_1^2 = x_2^2.$$

Odtud máme $x_2 = \pm x_1$. Tento výsledek dosadíme do vazebné podmínky a dostaneme

$$\begin{array}{llllllll} \text{(I)} & x_2 = x_1 & \Rightarrow & 2x_1^2 = 2 & \Rightarrow & x_1 = \pm 1 & \Rightarrow & y_1 = -1, \\ \text{(II)} & x_2 = -x_1 & \Rightarrow & 2x_1^2 = 2 & \Rightarrow & x_1 = \pm 1 & \Rightarrow & y_1 = 1. \end{array}$$

Celkově tedy máme čtyři stacionární body, a to $A = (1, 1)$, $B = (-1, -1)$, $C = (1, -1)$ a $D = (-1, 1)$.
Dále vypočteme druhou derivaci. Dostaneme

$$\mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(x_1, x_2, 1, y_1) = \begin{pmatrix} 2y_1 & 1 \\ 1 & 2y_1 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme vektory splňující podmínku $\langle g'(x_1, x_2), \boldsymbol{h} \rangle = 0$. V našem případě platí

$$g'(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2).$$

Nejprve vyšetříme body A a B, jimž odpovídá táž hodnota multiplikátoru $y_1 = -1$. Je $g'(A) = (2,2) = -g'(B)$. Pro $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$ obdržíme

$$\langle g'(A), \boldsymbol{h} \rangle = 2h_1 + 2h_2 = 0 \Rightarrow h_1 = -h_2, \text{ tj. } \boldsymbol{h} = (h, -h),\ h \in \mathbb{R}.$$

Pro B mají vektory splňující $\langle g'(B), \boldsymbol{h} \rangle = 0$ stejný tvar. Tedy

$$\left\langle \mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(1,1,1,-1), \boldsymbol{h} \right\rangle = (h, -h) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ -h \end{pmatrix} = -6h^2 > 0 \text{ pro } h \neq 0.$$

Výsledek pro B je stejný. V obou těchto bodech je proto podle věty 8.6 lokální maximum. Jeho hodnota je $f(A) = f(B) = 1$.
Podobně pro body C a D, jimž odpovídá tatáž hodnota multiplikátoru $y_1 = 1$, je $g'(C) = (2,-2) = -g'(D)$. Pak

$$\langle g'(C), \boldsymbol{h} \rangle = 2h_1 - 2h_2 = 0 \Rightarrow h_1 = h_2, \text{ tj. } \boldsymbol{h} = (h, h),\ h \in \mathbb{R}.$$

Pro D mají vektory splňující $\langle g'(D), \boldsymbol{h} \rangle = 0$ stejný tvar. Tedy

$$\left\langle \mathscr{L}''_{\boldsymbol{xx}}(1,-1,1,1), \boldsymbol{h} \right\rangle = (h, h) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix} = 6h^2 > 0 \text{ pro } h \neq 0.$$

Výsledek pro D je stejný. V obou těchto bodech je proto podle věty 8.6 lokální minimum. Jeho hodnota je $f(C) = f(D) = -1$. ▲

6. Terén je plocha určená rovnicí $z = 20 - \dfrac{x^2}{4} - y^2$. V bodě $A = (2,1)$ určete gradient a jeho velikost.

Řešení. Pro výpočet gradientu stačí vypočítat parciální derivace funkce z a ověřit, že jsou spojité v bodě A.

$$\begin{aligned} z_x &= -\frac{x}{2} & \Rightarrow \quad & z_x(A) = -1, \\ z_y &= -2y & \Rightarrow \quad & z_y(A) = -2, \end{aligned}$$

tedy

$$\operatorname{grad} z = (-1, -2).$$

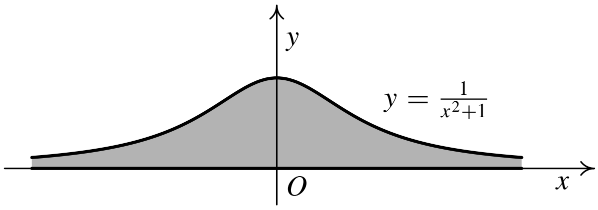
Pro jeho velikost platí $\|\operatorname{grad} z\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$. ▲

7. Určete definiční obor funkce $z = \dfrac{\ln \sin(x+y)}{\sqrt{x - y^2}}$.

Řešení. Přirozený logaritmus je definován pouze pro kladná čísla, druhá odmocnina je definována pro nezáporná čísla, jmenovatel zlomku musí být nenulový. Odtud dostáváme pro určení definičního oboru dvě podmínky:

$$\begin{aligned} x - y^2 > 0 \quad & \wedge \quad \sin(x+y) > 0, \\ x > y^2 \quad & \wedge \quad 2k\pi < x + y < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x > y^2 \quad & \wedge \quad 2k\pi - x < y < -x + \pi(1+2k),\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y^2 \wedge 2k\pi - x < y < -x + \pi(1 + 2k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Definičním oborem jsou plochy společné vnitřkům pásů mezi dvojicemi přímek $y = -x + 2k\pi$, $y = -x + \pi(1 + 2k)$ a vnitřku paraboly $y^2 = x$.



Obr. A.3: Definiční obor funkce $z = \frac{\ln \sin(x+y)}{\sqrt{x-y^2}}$

▲

8. Určete druhou derivaci funkce $y = f(x)$ dané implicitně rovnicí $x^2 + xy + y^2 = 3$ v okolí bodu $A = (0, \sqrt{3})$.

Řešení. Označme $F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3$. Platí $F(A) = 0$, $F_y = x + 2y$, $F_y(A) = 2\sqrt{3} \neq 0$, takže rovnice určuje v okolí bodu A jistou implicitně zadanou funkci $y = f(x)$.
Určíme první derivaci:

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 3, \\ 2x + y + xy' + 2yy' &= 0, \\ y'(x + 2y) &= -2x - y, \\ y' &= -\frac{2x + y}{x + 2y}\,. \end{aligned}$$

Při výpočtu druhé derivace vyjdeme z rovnice $2x + y + xy' + 2yy' = 0$, kterou ještě jednou zderivujeme.

$$\begin{aligned} 2 + y' + y' + xy'' + 2(y')^2 + 2yy'' &= 0, \\ y''(x + 2y) &= -2 - 2y' - 2(y')^2, \\ y'' &= \frac{-2 - 2y' - 2(y')^2}{x + 2y}\,. \end{aligned}$$

Po dosazení za y' obdržíme:

$$y'' = \frac{-6(x^2 + xy + y^2)}{(x + 2y)^3}\,.$$

▲

Klíč k autotestu 3

1. Vypočítejte limitu $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

   Řešení. Pro výpočet použijeme polárních souřadnic, tj. $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dostaneme:

   $$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \frac{\rho^4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)}{\rho^2} = \rho^2(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi).$$

   Protože $\lim\limits_{\rho\to 0^+} \rho^2 = 0$ a $0 < \cos^4\varphi + \sin^4\varphi \leqq 2$, tj. je to ohraničená funkce, platí podle lemmatu 1.27, že

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0.$$

   ▲

2. Na grafu funkce $f(x, y) = x^3 + y^3$ najděte bod, v němž je tečná rovina rovnoběžná s rovinou $\rho\colon 12x + 3y - z = 0$.

   Řešení. Označme τ hledanou tečnou rovinu, její normálový vektor má souřadnice $\boldsymbol{n}_\tau = (3x^2, 3y^2, -1)$. Normálový vektor roviny ρ má souřadnice $\boldsymbol{n}_\rho = (12, 3, -1)$. Protože je rovina τ rovnoběžná s rovinou ρ, jsou také rovnoběžné jejich normálové vektory, tj. $\boldsymbol{n}_\tau = k\boldsymbol{n}_\rho$, kde $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Tedy $(3x^2, 3y^2, -1) = (12k, 3k, -k)$, z čehož dostaneme $k = 1$. Porovnáním prvních dvou složek dostaneme $3x^2 = 12$ a $3y^2 = 3$, tj. $x = \pm 2$ a $y = \pm 1$. Řešením budou čtyři body $A = (2, 1)$, $B = (2, -1)$, $C = (-2, 1)$ a $D = (-2, -1)$. ▲

3. Ověřte, že rovnice $x^2 + xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$ zadává v okolí bodu $(0, 1)$ implicitně funkci $y = f(x)$, a vypočtěte $f'(0)$.

   Řešení. Označme $F(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 + x - y - 1$. Platí $F(0, 1) = 0$ a $F_y = x + {}$ $+ 4y - 1$, tj. $F_y(0, 1) = 3 \neq 0$, takže rovnice zadává v okolí bodu $(0, 1)$ implicitně jistou funkci $y = f(x)$.
   Postup výpočtu derivace si ukážeme oběma dvěma možnými způsoby. Nejprve „přímou derivací“ dané rovnice, poté za pomoci vzorce (7.2).

   $$\begin{aligned} 2x + y + xy' + 4yy' + 1 - y' &= 0,\\ y'(x + 4y - 1) &= -1 - 2x - y,\\ y' &= \frac{-1 - 2x - y}{x + 4y - 1},\\ y' &= \frac{1 + 2x + y}{1 - x - 4y},\\ y'(0) &= \frac{1 + 2\cdot 0 + 1}{1 - 0 - 4\cdot 1} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Postupujeme-li při výpočtu podle vzorce, musíme si nejprve spočítat první parciální derivace dané funkce $F(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 + x - y - 1$ a vypočítat jejich hodnotu v bodě $(0, 1)$.

$$\begin{aligned}
F_x &= 2x + y + 0 + 1 - 0 - 0 = 2x + y + 1 \quad \Rightarrow \quad F_x(0, 1) = 2,\\
F_y &= 0 + x + 4y + 0 - 1 - 0 = x + 4y - 1 \quad \Rightarrow \quad F_y(0, 1) = 3,\\
y' &= -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x + y + 1}{x + 4y - 1},\\
y'(0) &= -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

▲

4. Má se zhotovit nádrž daného objemu V ve tvaru rotačního válce bez horní podstavy. Při jakém poměru jeho výšky h k poloměru dna r bude výroba nejlacinější, stojí-li plošná jednotka pláště a Kč, kdežto dna b Kč, $a, b > 0$?

   Řešení. Obsah pláště rotačního válce je dán vztahem $S_1 = 2\pi rh$, obsah podstavy je $S_2 = \pi r^2$. Náklady na nádrž jsou tedy $C = 2\pi rha + \pi r^2 b$ při podmínce $V = \pi r^2 h$. Z této podmínky lze vyjádřit proměnnou $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$ a hledat minimum funkce jedné proměnné $C(r) = 2\pi r \dfrac{V}{\pi r^2} a + \pi r^2 b = \dfrac{2V}{r} a + \pi r^2 b$, $r > 0$. Určíme stacionární body této funkce:

$$C'(r) = -\frac{2V}{r^2} a + 2\pi rb = \frac{-2Va + 2\pi r^3 b}{r^2} = 0.$$

   Tato rovnice má na intervalu $(0, +\infty)$ jediný kořen $r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{aV}{\pi b}}$.
   Dále je $C'(r) < 0$ na intervalu $(0, r_0)$ a $C'(r) > 0$ na intervalu $(r_0, +\infty)$, tedy $C(r)$ klesá na intervalu $(0, r_0)$ a roste na intervalu $(r_0, +\infty)$, tudíž r_0 je bodem absolutního minima.
   Určíme vztah mezi proměnnými h a r. Po dosazení za r_0 do vztahu

$$\frac{h}{r} = \frac{V}{\pi r^3}$$

   dostaneme

$$\frac{h_0}{r_0} = \frac{V}{\pi} \cdot \frac{\pi b}{aV} = \frac{b}{a}.$$

   Nejmenší náklady na vodní nádrž tedy budou v případě, že poměr výšky h k poloměru dna r bude $b : a$. ▲

5. Transformujte diferenciální výraz $V\colon z_{xx} + 5z_{xy} + 6z_{yy} - 2z_x - 4z_y = 0$, kde $z = f(x, y)$ má spojité všechny druhé parciální derivace, do nových souřadnic u, v, je-li $u = y - 3x$, $v = y - 2x$.

Řešení. Zřejmě platí $f(x, y) = f(v - u, 3v - 2u) = F(u, v) = F(y - 3x, y - 2x)$. Derivace vnitřních složek jsou:

$$\begin{aligned} u &= y - 3x \quad \Rightarrow \quad u_x = -3, \quad u_y = 1, \quad u_{xx} = u_{xy} = u_{yy} = 0,\\ v &= y - 2x \quad \Rightarrow \quad v_x = -2, \quad v_y = 1, \quad v_{xx} = v_{xy} = v_{yy} = 0. \end{aligned}$$

Odtud po dosazení do vztahů (3.13) a (3.17) pro první a druhé parciální derivace složené funkce dostaneme:

$$\begin{aligned} z_x &= -3F_u - 2F_v,\\ z_y &= F_u + F_v,\\ z_{xx} &= 9F_{uu} + 12F_{uv} + 4F_{vv},\\ z_{xy} &= -3F_{uu} - 5F_{uv} - 24F_{vv},\\ z_{yy} &= F_{uu} + 2F_{uv} + F_{vv}. \end{aligned}$$

Po dosazení do zadaného výrazu V obdržíme $-F_{uv} + 2F_u = 0$. ▲

6. Nalezněte lokální extrémy funkce $z = 3xy - x^2y - xy^2$.

Řešení. Funkce má parciální derivace všech řádů v $\mathbb{R}^2$, takže lokální extrémy mohou nastat pouze ve stacionárních bodech. Vypočteme první parciální derivace z_x a z_y.

$$\begin{aligned} z_x &= 3y - 2xy - y^2,\\ z_y &= 3x - x^2 - 2xy. \end{aligned}$$

První parciální derivace položíme rovny nule a spočítáme stacionární body.

$$\begin{aligned} y(3 - 2x - y) &= 0,\\ x(3 - x - 2y) &= 0. \end{aligned}$$

Řešením soustavy obdržíme čtyři stacionární body $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (3, 0)$ a $D = (0, 3)$. Pro ověření, zda v nich nastává či nenastává extrém, potřebujeme spočítat druhé parciální derivace.

$$z_{xx} = -2y, \quad z_{xy} = 3 - 2x - 2y, \quad z_{yy} = -2x.$$

Hodnoty druhých parciálních derivací v bodech A, B, C, D jsou

$$\begin{aligned} &z_{xx}(0,0) = 0, && z_{xx}(1,1) = -2, && z_{xx}(3,0) = 0, && z_{xx}(0,3) = -6,\\ &z_{xy}(0,0) = 3, && z_{xy}(1,1) = -1, && z_{xy}(3,0) = -3, && z_{xy}(0,3) = -3,\\ &z_{yy}(0,0) = 0, && z_{yy}(1,1) = -2, && z_{yy}(3,0) = -6, && z_{yy}(0,3) = 0. \end{aligned}$$

Hodnoty determinantu $J(x, y) = z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^2$ jsou ve stacionárních bodech

$$\begin{aligned} J(A) &= -9 < 0 \ \dots \text{ lokální extrém v bodě } A \text{ neexistuje},\\ J(B) &= 3 > 0 \ \dots \text{ v bodě } B \text{ je lokální extrém},\\ J(C) &= -9 < 0 \ \dots \text{ lokální extrém v bodě } C \text{ neexistuje},\\ J(D) &= -9 < 0 \ \dots \text{ lokální extrém v bodě } D \text{ neexistuje}. \end{aligned}$$

Protože $z_{xx}(B) < 0$, nastává v bodě B ostré lokální maximum. ▲

7. Je dána kvadrika $4x^2 - 9y^2 - 36z^2 - 8x - 18y + 144z - 185 = 0$. Určete její typ, souřadnice středu a velikosti poloos.

   Řešení. Pokusíme se odhadnout typ kvadriky. Vzhledem k tomu, že rovnice obsahuje všechny tři neznámé v druhé mocnině s různými koeficienty a znaménky u druhých mocnin, půjde buď o kužel nebo o některý hyperboloid. Rovnici tedy upravíme na středový tvar a o výsledku rozhodneme podle hodnoty absolutního členu.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 9y^2 - 36z^2 - 8x - 18y + 144z - 185 &= 0,\\ 4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 2y) - 36(z^2 - 4z) &= 185,\\ 4(x-1)^2 - 9(y+1)^2 - 36(z-2)^2 &= 36,\\ \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(z-2)^2}{1} &= 1,\\ -\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{2^2} + \frac{(z-2)^2}{1} &= -1. \end{aligned}$$

   Jde tedy o dvojdílný hyperboloid se středem v bodě $S = (1, -1, 2)$ a poloosami $a = 3$, $b = 2$ a $c = 1$, jehož osa je rovnoběžná se souřadnicovou osou x. ▲

8. Napište a nakreslete definiční obor funkce $z = \arcsin[2y(1 + x^2) - 1]$.

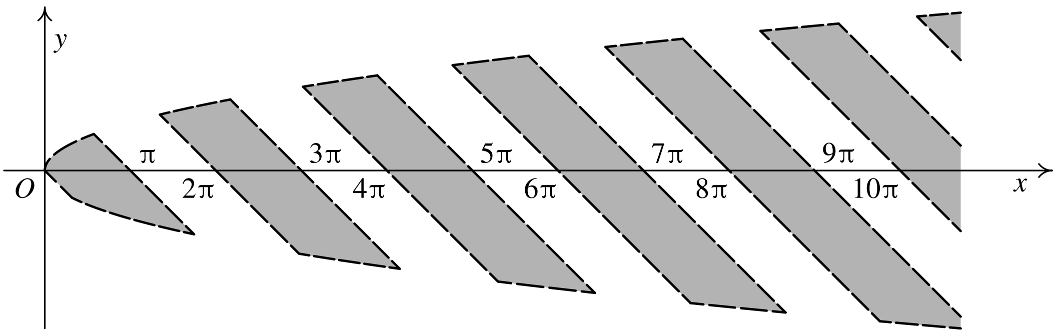
   Řešení. Funkce arkussinus je definována na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Odtud dostáváme následující nerovnosti:

$$\begin{aligned} -1 \leqq 2y(1+x^2) - 1 &\leqq 1,\\ 0 \leqq 2y(1+x^2) &\leqq 2,\\ 0 \leqq y(1+x^2) &\leqq 1,\\ 0 \leqq y &\leqq \frac{1}{1+x^2}, \qquad \text{protože } 1 + x^2 > 0 \text{ pro } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   Tedy $D(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq y \leqq \dfrac{1}{1+x^2}\right\}$.

   Definičním oborem je plocha ohraničená osou x a grafem funkce $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   ▲



Obr. A.4: Definiční obor funkce $z = \arcsin[2y(1 + x^2) - 1]$

Literatura

[1] Došlý, O.: *Základy konvexní analýzy a optimalizace v* $\mathbb{R}^n$. První vydání. Přírodovědecká fakulta MU v Brně, Brno 2005. ISBN 80-210-3905-1.

[2] Došlá, Z. – Došlý, O.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Třetí vydání. Přírodovědecká fakulta MU v Brně, Brno 2006. ISBN 80-210-4159-5.

[3] Došlá, Z. – Došlý, O.: *Metrické prostory*. Třetí vydání. Přírodovědecká fakulta MU v Brně, Brno 2006. ISBN 80-210-4160-9.

[4] Došlá, Z. – Plch, R. – Sojka, P.: *Matematická analýza s programem MAPLE — Diferenciální počet funkcí více proměnných*. CD ROM. Přírodovědecká fakulta MU v Brně, Brno 1999.

[5] Fichtengoľc, G. M.: *Kurs differencialňogo i integralňogo isčislenija, díl I*. Sedmé vydání. Nauka, Moskva 1969.

[6] Fletcher, R.: *Practical Methods of Optimization*. Druhé vydání. John Wiley & Sons, Chichester 1987. ISBN 0-471-91547-5.

[7] Jarník, V.: *Diferenciální počet (I)*. Šesté vydání. Academia, Praha 1974.

[8] Jarník, V.: *Diferenciální počet (II)*. Třetí vydání. Academia, Praha 1976.

[9] Kuben, J.: *Lineární programování*. Skriptum, druhé vydání. Vojenská akademie v Brně, Brno 2002.

[10] Kuben, J.: *Extremální úlohy a optimální řízení*. Skriptum, druhé vydání. Univerzita obrany v Brně, Brno 2004. ISBN 80-85960-81-8.

[11] Kuben, J. – Šarmanová, P.: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. Studijní opora. Součást projektu *Operační program Rozvoje lidských zdrojů* číslo CZ.04.1.03/3.2.15.1/0016 *Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia*. VŠB–TU Ostrava, 2006. Verze pro tisk ISBN 80-248-1192-8, elektronická verze ISBN 978-80-248-1304-2.

[12] Kuroš, A. G.: *Kurs vysšej algebry*. Desáté vydání. Nauka, Moskva 1971.

[13] Novák, V.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Přírodovědecká fakulta MU v Brně, Brno 1983.

[14] Peschl, E.: *Analytická geometrie a lineární algebra*. SNTL, Praha 1971.

[15] Rektorys, K. a kol: *Přehled užité matematiky I, II*. Páté vydání. SNTL, Praha 1988.

[16] Sikorski, R.: *Diferenciální a integrální počet. Funkce více proměnných.* Academia, Praha 1973.

[17] Svoboda, K.: *Geometrie kvadrik*. Skriptum PřF UJEP Brno. SPN, Praha 1983.

[18] Sucharev, A. G. – Timochov, A. V. – Fedorov, V. V.: *Kurs metodov optimizacii*. Nauka, Moskva 1986.

[19] Veselý, J.: *Matematická analýza pro učitele 1, 2*. Druhé vydání. Matfyzpress, Praha 2001. ISBN 80-85863-62-6.

[20] Vetchý, V.: *Sbírka úloh z lineární algebry*. Skriptum VA Brno. Vojenská akademie v Brně, Brno 1990.

Rejstřík