

LOKÁLNÍ VÁZANÉ EXTRÉMY, GLOBÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

Zkouškové úlohy. Vyšetřete lokální vázané extrémy funkce $f : z = f(x, y)$ na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; g(x, y) = 0\}$.

- 1) $z = x - ey + e^2, g(x, y) = y - e \ln x - 1$ 2) $z = 2(x + e^{y-1}) - y - 3, g(x, y) = y + 2x - 1$
 3) $z = y - 2x - 1, g(x, y) = y - 4 \ln \sqrt{x} - 1$ 4) $z = \frac{x+2}{\sqrt{y+5}}, g(x, y) = y - x^2 - 1$

Určete globální extrémy funkce $f : z = f(x, y)$ na množině $D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Rozlište, o jaký extrém se jedná (maximum, minimum, ostrý, neostrý).

- 5) $z = x^3 - y^3$ 6) $z = x^2 - y^2 + 2x$
 7) $z = x + 2y$ 8) $z = x^2 - y^2$

Obtížnější úlohy. Určete globální extrémy funkce $f : z = f(x, y)$ na množině M . Rozlište, o jaký extrém se jedná (maximum, minimum, ostrý, neostrý).

- 9) $z = 8x^3 + 8y^3 - 6xy + 1, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$
 10) $z = (x + y)e^{-x^2-y^2}, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$
 11) $z = x^2 + y^2, M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100\}$

Návody. V úlohách 1)–4) je vhodné použít dosazovací metodu, kdy do funkce $f(x, y)$ dosadíme y vyjádřeno pomocí x z rovnice $g(x, y) = 0$. Tím dostáváme funkci jedné proměnné $F(x) = f(x, y(x))$, jejíž lokální extrémy nalezneme metodami pro hledání extrémů funkce jedné proměnné.

V úlohách 5)–8) hledáme globální extrémy hladkých funkcí (tj. funkcí, které jsou spojitě a spojitě diferencovatelné) na kompaktních množinách. Tyto extrémy mohou být pouze v bodech lokálních extrémů uvnitř dané množiny (tj. pouze v bodech $[x, y]$, kde $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$) nebo v bodech na hranici kompaktní množiny (tj. v bodech lokálních vázaných extrémů). Podezřelé body na hranici nalezneme buď pomocí dosazovací metody nebo pomocí Věty o Lagrangeově multiplikátoru. Je-li hranicí kompaktní množiny jednotková kružnice $x^2 + y^2 = 1$, je možné místo dosazovací metody použité v úlohách 1)–4) zvolit jinou parametrizaci podmínky $x^2 + y^2 = 1$. Konkrétně můžeme volit $x = \cos t, y = \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Po dosazení do funkce f pak dostaneme funkci jedné proměnné $F(t) = f(x(t), y(t))$ na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, jejíž extrémy nalezneme metodami pro hledání extrémů funkce jedné proměnné. Obecně nelze určit, která z obou metod je pro nalezení podezřelých bodů na hranici vhodnější. V našem případě je vhodné v úlohách 7) a 11) použít Lagrangeovu metodu, v úlohách 9) a 10) dosazovací metodu. V úlohách 5), 6) a 7) je použití obou metod srovnatelně obtížné.

- Výsledky.** 1) ostré vázané lokální minimum v $[e^2, 2e + 1]$
 2) ostré vázané lokální minimum v $[0, 1]$
 3) ostré vázané lokální maximum v $[1, 1]$
 4) ostré vázané lokální maximum v $[3, 10]$
 5) neostrá globální minima $f(0, 1) = f(-1, 0) = -1$, neostrá globální maxima $f(0, -1) = f(1, 0) = 1$
 6) neostrá globální minima $f(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = f(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3}{2}$, ostré globální maximum $f(1, 0) = 3$
 7) ostré globální minimum $f(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}) = -\sqrt{5}$, ostré globální maximum $f(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}) = \sqrt{5}$

- 8) neostrá globální minima $f(0, 1) = f(0, -1) = -1$, neostrá globální maxima $f(-1, 0) = f(1, 0) = 1$
- 9) ostré globální minimum $f(0, -1) = -7$, ostré globální maximum $f(2, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = 65 + 4\sqrt{2}$
- 10) ostré globální minimum $f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$, ostré globální maximum $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}}$
- 11) neostrá globální minima $f(-2, -1) = f(2, 1) = 5$, neostrá globální maxima $f(-2, 4) = f(2, -4) = 20$