Cartanův přístup ke geometrii

Lenka Zalabová

Ústav matematiky a biomatematiky, Přírodovědecká fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

7. 5. 2010

Obsah

O co jde v diferenciální geometrii?

Zabýváme se geometrickými strukturami na (konečněrozměrných) hladkých varietách.

O co jde v diferenciální geometrii?

Zabýváme se geometrickými strukturami na (konečněrozměrných) hladkých varietách.

Hladká varieta . . . prostor, který lokálně vypadá jako $\mathbb{R}^n$, ale globálně nemusí!

Example

n–rozměrný prostor $\mathbb{R}^n$, n–rozměrná sféra S^n, . . .

O co jde v diferenciální geometrii?

Zabýváme se geometrickými strukturami na (konečněrozměrných) hladkých varietách.
Hladká varieta … prostor, který lokálně vypadá jako $\mathbb{R}^n$, ale globálně nemusí!

Example

n–rozměrný prostor $\mathbb{R}^n$, n–rozměrná sféra S^n, …

Geometrická struktura na varietě … co na konkrétní varietě umíme?

Example

měřit vzdálenosti, měřit úhly, počítat jako na komplexních číslech nebo kvaternionech, …

Riemannovské variety

Riemannovská struktura . . . umíme měřit vzdálenosti a úhly.

Riemannovské variety

Riemannovská struktura ... umíme měřit vzdálenosti a úhly.
Geometrická struktura se na varietu indukuje z tečných prostorů.

Definition

- M ... hladká varieta,
- T_xM ... tečný prostor k M v x,
- $T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ ... symetrická pozitivně definitní forma na T_xM, t.j. skalární součin.

Riemannova metrika g je pravidlo, které každému $x \in M$ přiřadí skalární součin na T_xM a je to hladké bod po bodu.

Riemannovské variety

Riemannovská struktura ... umíme měřit vzdálenosti a úhly.
Geometrická struktura se na varietu indukuje z tečných prostorů.

Definition

- M ... hladká varieta,
- $T_x M$ ... tečný prostor k M v x,
- $T_x M \times T_x M \to \mathbb{R}$ ... symetrická pozitivně definitní forma na $T_x M$, t.j. skalární součin.

Riemannova metrika g je pravidlo, které každému $x \in M$ přiřadí skalární součin na $T_x M$ a je to hladké bod po bodu.

Definition

Riemannovská varieta ... dvojice (M, g), kde M je hladká varieta a g je metrika na M.

Jednoduché příklady

Example

Euklidovský prostor ... bodový Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ společně se standardním skalárním součinem. Tedy máme metriku

$$g = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2.$$

Jednoduché příklady

Example

Euklidovský prostor . . . bodový Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ společně se standardním skalárním součinem. Tedy máme metriku

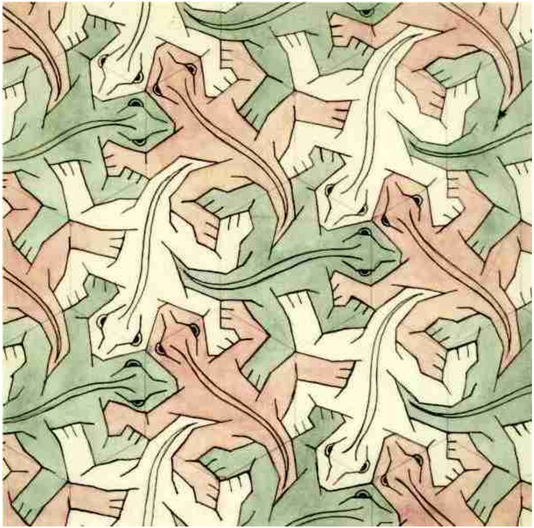
$$g = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2.$$

Example

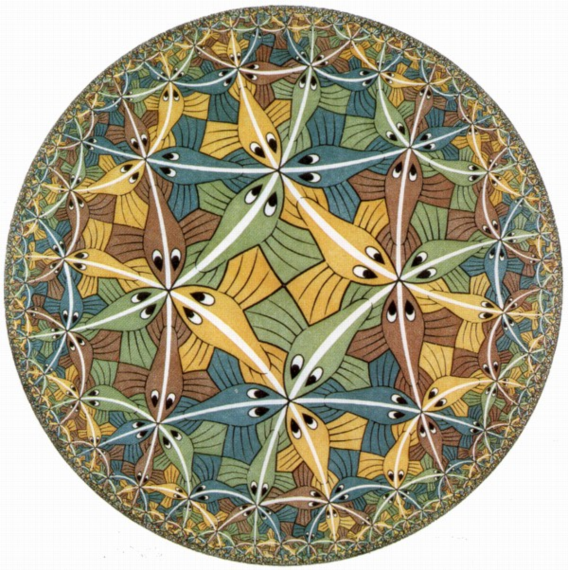
Hyperbolická rovina . . . jednotkový disk $D \subset \mathbb{R}^2$ s metrikou ve tvaru

$$g = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}(dx^2 + dy^2).$$

Maurits Cornelis Escher (1898 - 1972)



M. C. Escher: Circle limit III



Riemannovská sféra klasicky

S^n ... n–rozměrná jednotková sféra:

- Představme si S^n jako varietu vloženou do $\mathbb{R}^{n+1}$.
- Na $\mathbb{R}^{n+1}$ máme standardní skalární součin $\langle\ ,\ \rangle$ a S^n je množina tvaru $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, x\rangle = 1\}$.

Riemannovská sféra klasicky

S^n ... n–rozměrná jednotková sféra:

- Představme si S^n jako varietu vloženou do $\mathbb{R}^{n+1}$.
- Na $\mathbb{R}^{n+1}$ máme standardní skalární součin $\langle\ ,\ \rangle$ a S^n je množina tvaru $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, x\rangle = 1\}$.
- Pak $T_x S^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, y\rangle = 0\}$ a standardní skalární součin na $\mathbb{R}^{n+1}$ indukuje skalární součin na každém $T_x S^n$. Toto je hladké bod po bodu a definuje metriku g na S^n.
- Takto získáme *indukovanou metriku* g na S^n a (S^n, g) je Riemannova varieta.

(S^n, g) ... *Riemannovská sféra*.

Kleinův pohled na věc

Felix Klein (1845 - 1925) a jeho Erlangen program (1872) ...
popis geometrií na základě jejich grupy transformací.

Kleinův pohled na věc

Felix Klein (1845 - 1925) a jeho Erlangen program (1872) . . .
popis geometrií na základě jejich grupy transformací.

Idea

Popsat geometrickou strukturu na varietě je to samé jako popsat všechny automorfismy, které tuto geometrickou strukturu zachovávají.

. . . funguje obvzlášť pěkně pro tzv. *homogenní modely*.
Riemannova sféra je takovým homogenním modelem.

Riemannovská sféra moderně

Jak popsat varietu $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, x \rangle = 1\}$ jinak?

Riemannovská sféra moderně

Jak popsat varietu $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, x \rangle = 1\}$ jinak?
$O(n+1)$ ... grupa všech ortogonálních $(n+1) \times (n+1)$–matic.
Grupa $O(n+1)$ působí na $\mathbb{R}^{n+1}$ ortogonálními transformacemi, t.j. transformacemi, které zachovávají mimo jiné velikost. Můžeme je tedy zúžit na S^n a dostaneme *levou akci*

$$O(n+1) \times S^n \to S^n.$$

Klíčovou vlastností zde je to, že pro každé dva body $u, v \in S^n$ existuje $A \in O(n+1)$ tak, že $Au = v$.
... akce je *tranzitivní*.

Riemannovská sféra moderně

Protože je akce tranzitivní, lze S^n zapsat následujícím způsobem: Označme $H \subset O(n+1)$ podgrupu těch matic, které zachovávají první vektor standardní báze $\mathbb{R}^{n+1}$ (který je vlastně prvkem S^n). Pak levá akce indukuje difeomorfismus

$$S^n \simeq O(n+1)/H.$$

Každý bod $x \in S^n$ ztotožníme s množinou ortogonálních matic, které zobrazí první vektor standardní báze na x. Zejména první vektor standardní báze se ztotožní s H.

Riemannovská sféra moderně

Protože je akce tranzitivní, lze S^n zapsat následujícím způsobem: Označme $H \subset O(n+1)$ podgrupu těch matic, které zachovávají první vektor standardní báze $\mathbb{R}^{n+1}$ (který je vlastně prvkem S^n). Pak levá akce indukuje difeomorfismus

$$S^n \simeq O(n+1)/H.$$

Každý bod $x \in S^n$ ztotožníme s množinou ortogonálních matic, které zobrazí první vektor standardní báze na x. Zejména první vektor standardní báze se ztotožní s H. Lze napočítat, že

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \right\} \simeq O(n),$$

kde A je ortogonální $n \times n$–matice. Tedy $S^n \simeq O(n+1)/O(n)$.

Riemannovská sféra moderně

Jak popsat geometrickou strukturu na S^n, která přišla z volby $O(n+1)$ a difeomorfismu $S^n \simeq O(n+1)/O(n)$?

Riemannovská sféra moderně

Jak popsat geometrickou strukturu na S^n, která přišla z volby $O(n+1)$ a difeomorfismu $S^n \simeq O(n+1)/O(n)$?
Lze ukázat:

Theorem

Ortogonální grupa $O(n+1)$ je právě grupa isometrií $Isom(S^n, g)$ indukované metriky g na S^n.

Podle Kleinova principu ... znát metriku g je to samé jako znát její grupu izometrií $Isom(S^n, g)$.

Idea

Riemannovská sféra ... varieta $O(n+1)/O(n)$ s metrikou, jejíž grupa izometrií je $O(n+1)$.

Maurer–Cartanova forma na $O(n+1)$

Hlavní část důkazu ... existence tzv. *Maurer–Cartanovy formy* na $O(n+1)$ umožňující diskuzi tečných prostorů $T_x(O(n+1)/O(n))$.

1. $O(n+1)$ je hladká varieta a zároveň je to grupa ... tzv. *Lieova grupa*.

Maurer–Cartanova forma na $O(n+1)$

Hlavní část důkazu ... existence tzv. *Maurer–Cartanovy formy* na $O(n+1)$ umožňující diskuzi tečných prostorů $T_x(O(n+1)/O(n))$.

1. $O(n+1)$ je hladká varieta a zároveň je to grupa ... tzv. *Lieova grupa*.
2. V každém $x \in O(n+1)$ máme tečný prostor $T_xO(n+1)$ a jejich sjednocení tvoří tzv. *tečný bandl* $TO(n+1)$.

Maurer–Cartanova forma na $O(n+1)$

Hlavní část důkazu ... existence tzv. *Maurer–Cartanovy formy* na $O(n+1)$ umožňující diskuzi tečných prostorů $T_x(O(n+1)/O(n))$.

1. $O(n+1)$ je hladká varieta a zároveň je to grupa ... tzv. *Lieova grupa*.
2. V každém $x \in O(n+1)$ máme tečný prostor $T_x O(n+1)$ a jejich sjednocení tvoří tzv. *tečný bandl* $TO(n+1)$.
3. Tečný prostor $T_e O(n+1)$ v jednotce e grupy $O(n+1)$ má speciální strukturu ... je to tzv. *Lieova algebra* $\mathfrak{o}(n+1)$, t.j. vektorový prostor všech antisymetrických $(n+1) \times (n+1)$–matic spolu s dodatečnou operací *Lieova závorka*, která je tvaru

$$[A, B] := AB - BA$$

pro $A, B \in \mathfrak{o}(n+1)$.

Maurer–Cartanova forma na $O(n+1)$

Definition

Maurer–Cartanova forma ω je předpis, který prostřednictvím levého násobení zadává trivializaci tečného bandlu $O(n+1)$ tvaru

$$TO(n+1) = O(n+1) \times \mathfrak{o}(n+1).$$

Označíme-li $\ell_A(B) := AB$, pak $\omega = T_A \ell_{A^{-1}}$.

Tečný prostor v každém $x \in O(n+1)$ dostaneme prostě tak, že vezmeme $T_e O(n+1) = \mathfrak{o}(n+1)$ a přetáhneme ho do x. Pak se již snadno dostaneme k od $TO(n+1)$ k TS^n. Každý $T_x S^n$ je 'vhodná část respektive faktor' $T_x O(n+1)$ a ten 'zbylý kus' zadává metriku.

Lieova algebra $\mathfrak{o}(n+1)$ pořádně

Ortogonální Lieova algebra $\mathfrak{o}(n+1)$ je tvaru:

$$\begin{pmatrix} 0 & -v^T \\ v & A \end{pmatrix},$$

kde

- $v \in \mathbb{R}^n$ je část popisující tečný prostor $T_x S^n$,
- $A \in \mathfrak{o}(n)$ je ortogonální algebra antisymetrických $n \times n$–matic. Je to Lieova algebra grupy $H = O(n)$.

Tedy $T_x(O(n+1)/O(n)) = \mathfrak{o}(n+1)/\mathfrak{o}(n)$, kde $x \in S^n$ odpovídá prvnímu vektoru standardní báze.

Shrnutí

Riemannovská sféra (S^n, g) je jednoznačně zadána ortogonální grupou $O(n+1)$, její podgrupou $O(n)$ a Maurer–Cartanovou formou ω na $O(n+1)$. Celou geometrii můžeme popsat pouze ‘počítáním’ s výše uvedenými grupami a jejich Lieovými algebrami a Maurer–Cartanova forma přenáší vše na TS^n a na S^n.

Shrnutí

Riemannovská sféra (S^n, g) je jednoznačně zadána ortogonální grupou $O(n+1)$, její podgrupou $O(n)$ a Maurer–Cartanovou formou ω na $O(n+1)$. Celou geometrii můžeme popsat pouze 'počítáním' s výše uvedenými grupami a jejich Lieovými algebrami a Maurer–Cartanova forma přenáší vše na TS^n a na S^n.

Idea

Riemannovská sféra ... dvojice $(O(n+1) \to O(n+1)/O(n), \omega)$

Co je homogenní model?

Definition

G ... Lieova grupa, $P \subset G$ ... Lieova podgrupa.
Homogenní model Cartanovy geometrie typu (G, P) je dvojice $(G \to G/P, \omega)$, kde $G \to G/P$ je přirozená projekce a ω je Maurer–Cartanova forma na G.

Pak G/P je hladká varieta na které se indukuje geometrie, která přišla z volby G a P a Maurer–Caranovy formy na G.

Co je homogenní model?

Definition

G ... Lieova grupa, $P \subset G$ ... Lieova podgrupa.
Homogenní model Cartanovy geometrie typu (G, P) je dvojice $(G \to G/P, \omega)$, kde $G \to G/P$ je přirozená projekce a ω je Maurer–Cartanova forma na G.

Pak G/P je hladká varieta na které se indukuje geometrie, která přišla z volby G a P a Maurer–Caranovy formy na G.

Example

Riemannovská sféra S^n je homogenním modelem Cartanovy geometrie typu $(O(n+1), O(n))$.

Co je homogenní model?

Definition

G ... Lieova grupa, $P \subset G$ ... Lieova podgrupa.
Homogenní model Cartanovy geometrie typu (G, P) je dvojice $(G \to G/P, \omega)$, kde $G \to G/P$ je přirozená projekce a ω je Maurer–Cartanova forma na G.

Pak G/P je hladká varieta na které se indukuje geometrie, která přišla z volby G a P a Maurer–Caranovy formy na G.

Example

Riemannovská sféra S^n je homogenním modelem Cartanovy geometrie typu $(O(n+1), O(n))$.

Kleinovy myšlenky a z nich vyplývající popis homogenních modelů lze aplikovat pouze na některé obvlášť pěkné variety.
homogenní ... rovnoměrně křivé

Co je Cartanova geometrie?

Élie Cartan (1869-1951) a jeho koncept zobecněných prostorů ...
zobecnění Kleinových myšlenek na libovolně křivou varietu.

Co je Cartanova geometrie?

Élie Cartan (1869-1951) a jeho koncept zobecněných prostorů ... zobecnění Kleinových myšlenek na libovolně křivou varietu.

Definition

G ... Lieova grupa, $P \subset G$ ... Lieovu podgrupa.
Cartanova geometrie typu (G, P) je dvojice $(\mathcal{G} \to M, \omega)$, kde

- $\mathcal{G} \to M$ ... nějaká abstraktní projekce, prvky $\mathcal{G}$ jsou 'vhodné báze tečných prostorů k M a P se projevuje změnou báze' (obecně je to hlavní bandl se strukturní grupou P),
- ω ... forma na $\mathcal{G}$ s hodnotami v Lieově algebře $\mathfrak{g}$ grupy G (tzv. *Cartanova konexe*, analogie Maurer–Cartanovy formy).

Tato data indukují na M to, co si obvykle představujeme pod pojmem geometrie v klasickém smyslu.

Co tento přístup přináší?

Některé dvojice (G, P) odpovídají známým geometriím:
$G = O(n+1)$, $P = O(n)$ odpovídá Riemanovským strukturám.
Pro libovolnou dvojici (G, P) můžeme zkoumat odpovídající geometrii.

Co tento přístup přináší?

Některé dvojice (G, P) odpovídají známým geometriím:
$G = O(n+1)$, $P = O(n)$ odpovídá Riemmanovským strukturám.
Pro libovolnou dvojici (G, P) můžeme zkoumat odpovídající geometrii.

V novém jazyce umíme popsat:

známé vlastnosti známých geometrií

$\Downarrow$

nové vlastnosti známých geometrií

$\Downarrow$

nové geometrie

Příklad: konformní Riemannovská geometrie

Umíme měřit úhly (ale neumíme měrit vzdálenosti); je dána třídou ekvivalentních metrik, kde g_1 je ekvivalentní s g_2 právě tehdy, když existuje hladká kladná funkce λ tak, že $g_2 = \lambda g_1$.
... tzv. *konformní metrika*

Příklad: konformní Riemannovská geometrie

Umíme měřit úhly (ale neumíme měrit vzdálenosti); je dána třídou ekvivalentních metrik, kde g_1 je ekvivalentní s g_2 právě tehdy, když existuje hladká kladná funkce λ tak, že $g_2 = \lambda g_1$.
. . . tzv. *konformní metrika*

Example

$G = O(n+2)$; P=Poincarého konformní podgrupa, sestává z blokově horních trojúhelníkových matic s bloky velikosti 1, n a 1; Lieova algebra $\mathfrak{g}$ grupy G je tvaru:

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & Z & 0 \\ X & A & -Z^T \\ 0 & -X^T & -a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R},\ X, Z^T \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathfrak{o}(n) \right\}$$

Příklad: 2–distribuce generického ranku na 5–varietě

Na pětirozměrné varietě máme v každém tečném prostoru vybrán dvojrozměrný podpostor hladkým způsobem . . . *distribuce generického ranku* . . . v jistém smyslu nedegenerované

Příklad: 2–distribuce generického ranku na 5–varietě

Na pětirozměrné varietě máme v každém tečném prostoru vybrán dvojrozměrný podpostor hladkým způsobem ... *distribuce generického ranku* ... v jistém smyslu nedegenerované

Example

$G = G_2$, patří mezi tzv. exotické grupy, je obsažena v $SO(3,4)$, lze popsat pomocí automorfismů splitovaných oktonionů;
$P = \cdots$

Příklad: 2–distribuce generického ranku na 5–varietě

Jaký má tato geometrie význam?

Příklad: 2–distribuce generického ranku na 5–varietě

Jaký má tato geometrie význam?
Uvažme rovnici

$$z' = F(x, y, y', y'', z),$$

kde $y = y(x)$ a $z = z(x)$ jsou funkce x a $\partial^2 F/\partial(y'')^2 \neq 0$. Tato rovnice lze zapsat do systému forem tvaru

$$\begin{aligned} \omega_1 &= dz - F(x, y, p, q, z)dx \\ \omega_2 &= dy - pdx \\ \omega_3 &= dp - qdx \end{aligned}$$

na vhodné 5–varietě se souřadnicemi $(x, y, p = y', q = y'', z)$. Společné jádro těchto forem tvoří 2–distribuci. (Řesení rovnice odpovídají křivkam tečným k té distribuci.)

Kde je dobré číst?

- R. W. Sharpe, Differential geometry: Cartan's generalization of Klein's Erlangen program, Graduate Texts in Mathematics 166, Springer–Verlag, 1997
- A. Čap, J. Slovák, Parabolic Geometries I: Background and General Theory, Mathematical Surveys and Monographs 154, Amer. Math. Soc. 2009
- K. Sagerschnig, Weyl structures for generic rank two distributions in dimension five, Ph.D. thesis, 2008