... a geometrie III

sepsala Lenka Zalabová
chyby neopravil zatím nikdo

Ústav matematiky a biomatematiky, Přírodovědecká fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Obsah

1. Konvexní množiny

2. Objem rovnoběžnostěnu

3. Vnější a vektorový součin

Motivace

- Ze základní nebo aspoň střední školy znáte vzorce na:
  - výpočet plochy trojúhelníka, obdélníka, atd.
  - objem čtyřstěnu, krychle, atd.

  My se naučíme počítat objemy obecných lineárních útvarů v obecných n–rozměrných prostorech.

Motivace

- Ze základní nebo aspoň střední školy znáte vzorce na:
  - výpočet plochy trojúhelníka, obdélníka, atd.
  - objem čtyřstěnu, krychle, atd.

  My se naučíme počítat objemy obecných lineárních útvarů v obecných n–rozměrných prostorech.
- Zobecníme pojem vektorového součinu na obecné n–rozměrné prostory.

Simplexy

Připomeňme, že $k+1$ bodů $A_0, A_1, \dots, A_k$ afinního prostoru $\mathcal{A}$ se nazývá *v obecné poloze*, jestliže tyto body zadávají k–rozměrný afinní podprostor. Ten pak můžeme zapsat pomocí těchto bodů ve tvaru:

$$\mathcal{B} = \{t_0 A_0 + t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k : t_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\}.$$

Definition

Mějme $k+1$ bodů $A_0, A_1, \dots, A_k$ afinního prostoru $\mathcal{A}$ v obecné poloze. Pak množina $\Delta := \Delta(A_0, \dots, A_k)$ bodů tvaru

$$\Delta = \{t_0 A_0 + t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k : t_i \in [0,1], \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\}$$

se nazývá *k–rozměrný simplex.*

Příklady

Rozdíl v definicích simplexu a afinního podprostoru jakožto afinního obalu bodů je:

- v definici simplexu bereme pouze kombinace s nezápornými koeficienty,
- simplex je pouze 'vnitřek mezi zadávajícími body'.

Example

- Jednorozměrný simplex zadaný body A_0, A_1 je úsečka mezi těmito body.
- Dvojrozměrný simplex zadaný body A_0, A_1, A_2 je trojúhelník určěný těmito body.
- Trojrozměrný simplex zadaný body A_0, A_1, A_2, A_3 je čtyřstěn neboli tetraedr.

Konvexní množiny

Nejprve uvedeme obecnou definici:

Definition

Podmnožina M afinního prostoru se nazývá *konvexní*, jestliže s každými dvěma body A_0, A_1 obsahuje i úsečku $\Delta(A_0, A_1)$.

Je zřejmé, že množina je konvexní, jestliže s každými $k+1$ body v obecné poloze obsahuje i jimi určený simplex.

Example

Příklady konvexních množin jsou:

- afinní podprostory,
- úsečky, polopřímky, poloprostory,
- úhly v dvojrozměrných podprostorech,
- ...

Konvexní mnohostěny

Uvažme nyní speciální případ konvexních množin:

Definition

Mějme konečnou podmnožinu $M = \{A_0, \dots, A_k\}$ bodů afinního prostoru $\mathcal{A}$. Pak množina $\mathcal{K}(M)$ bodů tvaru

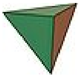
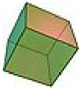
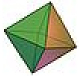
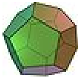
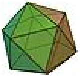
$$\mathcal{K}(M) = \{t_0 A_0 + t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k : t_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\}$$

se nazývá *konvexní mnohostěn*.

Pokud body $A_0, \dots, A_k$ množiny M jsou v obecné poloze, pak příslušným konvexním mnohostěnem je právě k–rozměrný simplex $\Delta(A_0, \dots, A_k)$.

Příklady: pravidelné konvexní mnohostěny (v $\mathcal{A}_3$)

Existuje právě pět pravidelných konvexních mnohostěnů. Jsou známy už z antiky a souhrnně se nazývají Platónská tělesa:

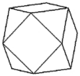
- čtyřstěn (tetraedr) ... je simplex 
- šestistěn neboli krychle (hexahedron) 
- osmistěn (octahedron) 
- dvanáctistěn (dodecahedron) 
- dvacetistěn (icosahedron) 

(zdroj: wikipedia.org)

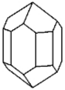
Příklady: krystaly

Některé krystalické soustavy jsou krásné ukázky konvexních mnohostěnů:

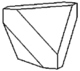
- halit (kamenná sůl)



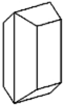
- rutil



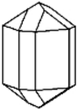
sfalerit



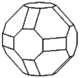
- aragonit



kasiterit



- galenit



(zdroj: web.natur.cuni.cz/ugmnz/mineral)

Rovnoběžnostěny

Uvažme nyní konvexní množiny určené jedním bodem a konečně mnoha vektory:

Definition

Mějme bod A v afinním prostoru $\mathcal{A}$ a vektory $u_1, \dots, u_k$ v jeho zaměření. Pak množina $\mathcal{P}_k(A, u_1, \dots, u_k)$ tvaru

$$\mathcal{P}_k(A, u_1, \dots, u_k) = \{A + c_1 u_1 + \dots + c_k u_k : 0 \le c_i \le 1, i = 1, \dots, k\}$$

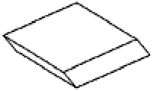
se nazývá *rovnoběžnostěn*. Jsou-li vektory $u_1, \dots, u_k$ lineárně nezávislé, mluvíme o *k–rozměrném rovnoběžnostěnu*.

Rovnoběžnostěny jsou konvexní mnohostěny zadané svými vrcholy (zejména to jsou konvexní množiny).

Příklady

Příklady rovnoběžnostěnů jsou:

- čtverec, kosočtverec, kosodélník,
- kvádr, krychle,
- klenec neboli romboedr ... stěny jsou tvořeny shodnými kosočtverci



kalcit

(Zdroj: web.natur.cuni.cz)

Orientovaný euklidovský prostor

Orientace vektorového prostoru je výběr jedné z jeho bází $\mathcal{V}$. Při takové volbě se prostor všech bází rozdělí na tzv. *kladné (shodně orientované)* a *záporné (opačně orientované)* báze, kde:

- báze $\mathcal{W}$ je kladná pokud matice přechodu mezi $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ má kladný determinant,
- báze $\mathcal{W}$ je záporná, pokud matice přechodu mezi $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ má záporný determinant.

Orientovaný bodový euklidovský prostor je euklidovský bodový prostor, jehož zaměření je orientované. V dalším budeme uvažovat standardní euklidovský prostor $\mathcal{E}_n$ spolu s orientací zadanou standardní bází zaměření $\mathbb{R}^n$.

Objem rovnoběžnostěnu

Definition

V euklidovském prostoru mějme rovnoběžnostěn $\mathcal{P}(A, u_1, \dots, u_k)$. Pak definujeme objem Vol tohoto rovnoběžnostěnu následovně:

- Jsou-li vektory $u_1, \dots, u_k$ lineárně závislé, pak $\mathrm{Vol}\ \mathcal{P}(A, u_1, \dots, u_k) = 0$.
- Jsou-li vektory $u_1, \dots, u_k$ lineárně nezávislé, pak definujeme objem induktivně jako absolutní hodnotu z čísla:

$$\mathrm{Vol}\mathcal{P}(A, u_1) = ||u_1||,$$

$$\mathrm{Vol}\mathcal{P}(A, u_1, \dots, u_k) = ||w_k||\mathrm{Vol}\mathcal{P}(A, u_1, \dots, u_{k-1}),$$

kde w_k je ortogonální projekce vektoru u_k do prostoru $\mathrm{Lin}\{u_1, \dots u_{k-1}\}^{\perp} \cap \mathrm{Lin}\{u_1, \dots u_k\}$.

- Toto odpovídá intuitivní představě, že objem je ‘základna krát výška’.
- Toto je obvzlášť názorné v rovině, kde spíše než o objemu mluvíme o obsahu.
- Objem musíme definovat jako absolutní hodnotu! Kdybychom jej definovali bez absolutní hodnoty pak:
  - objem by vyšel kladný, kdyby posloupnost vektorů zadávající rovnoběžnostěn měla kladnou orientaci,
  - objem by vyšel záporný, kdyby posloupnost vektorů zadávající rovnoběžnostěn měla zápornou orientaci.

Jak vypočítat objem rovnoběžnostěnu?

Theorem

Pro rovnoběžnostěn $\mathcal{P}(A, u_1, \dots, u_k)$ v euklidovském prostoru platí:

$$\mathrm{Vol}\mathcal{P}(A, u_1, \dots, u_k)^2 = \det \begin{pmatrix} (u_1, u_1) & (u_2, u_1) & \dots & (u_k, u_1) \\ (u_1, u_2) & (u_2, u_2) & \dots & (u_k, u_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (u_1, u_k) & (u_2, u_k) & \dots & (u_k, u_k) \end{pmatrix}.$$

Používá se následující terminologie:

Definition

Výše uvedený determinant se nazývá *Grammův determinant* k–tice vektorů $u_1, \dots, u_k$.

Vnější součin

Uvažujme nyní n vektorů $u_1, \dots, u_n$ ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$, kde $u_j = (u_{1j}, \dots, u_{nj})$.

Definition

Označme $M = (u_{ij})$ matici, jejíž sloupce jsou právě vektory $u_1, \dots, u_n$. Pak determinant $\det(M)$ nazýváme *vnějším součinem vektorů* $u_1, \dots, u_n$ a značíme $[u_1, \dots, u_n]$.

Přímo z definice lze vidět, že:

- zobrazení $(u_1, \dots, u_n) \mapsto [u_1, \dots, u_n]$ je *n–lineární* a *antisymetrické*, t.j. je lineární v každém argumentu a výměna dvou argumentů způsobí změnu znaménka,
- vnější součin je nulový právě tehdy když vektory $u_1, \dots, u_n$ jsou lineárně závislé.

Vektorový součin

Definition

Mějme $n-1$ vektorů $u_1, \dots, u_{n-1}$ ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$. Pak vektor $v \in \mathbb{R}^n$ se nazývá *vektorový součin* vektorů $u_1, \dots, u_{n-1}$, jestliže pro každý vektor $w \in \mathbb{R}^n$ platí

$$(v, w) = [u_1, \dots, u_{n-1}, v].$$

Obvyklé značení je $v = u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

Vektorový součin je tímto zadán jednoznačně a z rovnice jej vypočteme formálním rozvojem determinantu podle posledního sloupce.

Vlastnosti

Lze ukázat následující:

Theorem

Pro vektorový součin $v = u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$ platí:

- $v \in \mathrm{Lin}\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}^{\perp}$,
- *v je nenulový právě tehdy když vektory $u_1, \ldots, u_{n-1}$ jsou lineárně nezávislé,*
- *velikost $||v||$ vektorového součinu je rovna objemu rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}(0, u_1, \ldots, u_{n-1})$.*

Kde číst?

- Přednášky doc. Čadka a zápisky prof. Zlatoše, k dispozici na `www.math.muni.cz/~cadek`
- J. Slovák, Drsná matematika, skripta pro kurz matematiky na FI MU, kapitola Analytická geometrie, k dispozici na `www.math.muni.cz/~slovak`
- P. Horák, J, Janyška, Analytická geometrie, MU Brno, 1997, ISBN 80–210–1623–X