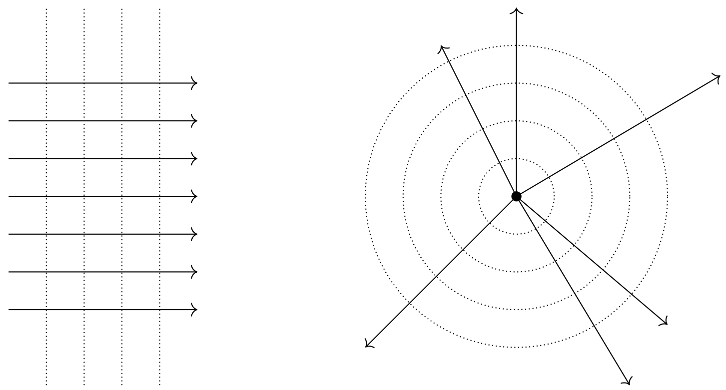
Vybrané kapitoly matematiky a aplikací

Jaroslav Hrdina, Lenka Zalabová

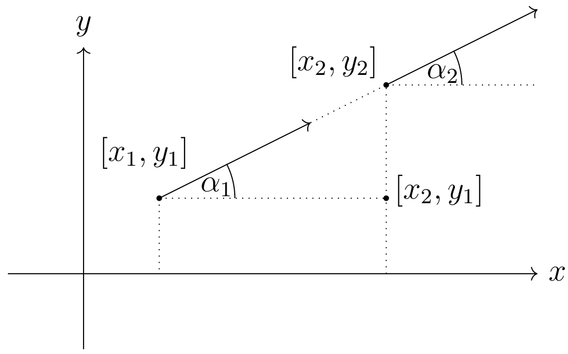
25. říjen 2020

Zobrazovací soustavy, matice a maticové operace

Základním pravidlem optiky je fakt, že směr šíření světla ve stejnorodém optickém prostředí udávají přímky kolmé na vlnoplochu, které se nazývají světelné paprsky. Zejména tedy ve stejnorodém prostředí se světlo šíří přímočaře.



Popišme nyní takové šíření paprsku mezi dvěma body stejnorodého prostředí. Máme tedy následující situaci:



Paprsek je zřejmě popsán parametry y a α, kde úhel α měříme kladně ve směru proti chodu hodinových ručiček. Předpokládáme, že známe parametry v bodě $[x_1, y_1]$ a chceme znát parametry v bodě $[x_2, y_2]$. Protože paprsek prochází stejnorodým prostředím, jeho úhel s osou x se nemění a tedy $\alpha_1 = \alpha_2$. Pro hodnotu y_2 dostáváme z pravoúhlého trojúhelníku

$$y_2 = y_1 + (x_2 - x_1)\tan\alpha_1.$$

Geometrická optika se buduje za předpokladu paraxiálního přiblížení, jehož podstata je v tom, že se omezíme na paprsky, které s osou x svírají úhel menší než asi 6°. Za tohoto předpokladu platí $\tan\alpha \approx \alpha$ a $\sin\alpha \approx \alpha$ a dohromady dostaneme

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + (x_2 - x_1)\alpha_1, \\ \alpha_2 &= \alpha_1. \end{aligned}$$

Na tento souřadnicový popis se můžeme dívat více geometricky tak, že paprsek popíšeme vektorem $\binom{y}{\alpha}$. Zejména tedy předchozí rovnice popisuje vztah mezi dvěma vektory $\binom{y_1}{\alpha_1}$ a $\binom{y_2}{\alpha_2}$. K popisu tohoto vztahu jsou vhodné tzv. matice, do kterých přehledně seskládáme data popisující příslušný vztah. Matice typu $m \times n$ je obdélníkové schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m, \\ j = 1, \ldots, n, \end{array}$$

kde m je počet řádků a n je počet sloupců. Matice stejného typu lze sčítat a to po složkách. Stejně tak lze každou matici vynásobit skalárem. Nejvýznamnější operací je maticové násobení. Pro $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ a $B = (b_{ij})$ typu $n \times p$ existuje součin $C = A \cdot B$ a platí, že

- matice C je typu $m \times p$,
- prvky matice $C = (c_{ij})$ jsou tvaru $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Neboli počítáme skalární součin i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B a výsledek píšeme do matice C na pozici (i, j). Abychom naplnili matici C, musíme spočítat součin pro každý řádek matice A a každý sloupec matice B. Využitím maticového násobení pak můžeme rovnice zapsat ve tvaru

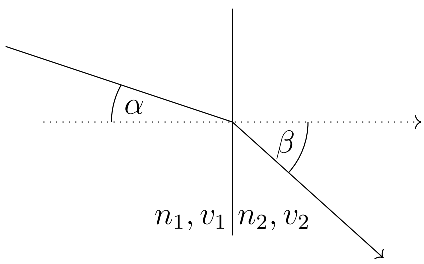
$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Přitom máme

$$T = \begin{pmatrix} 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix},$$

kde T se nazývá translační matice a Y se nazývá paprsková matice.

Pokud paprsek prochází přes rozhraní mezi dvěma různými prostředími, například mezi vodou a vzduchem, dochází k jeho lomu.



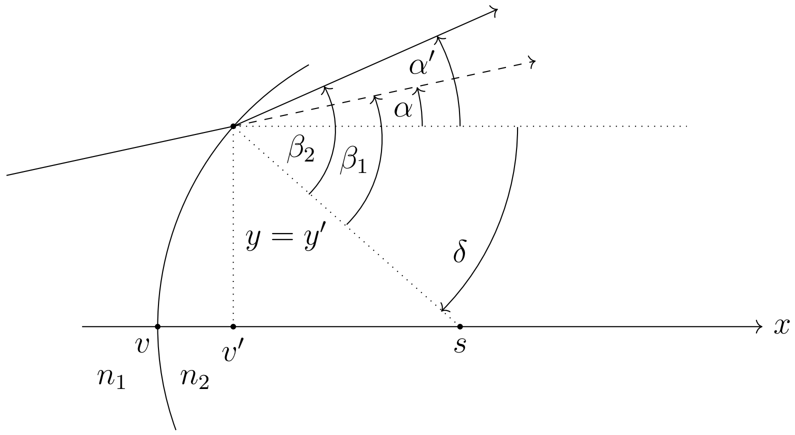
Zákon lomu vlnění říká, že poměr sinu úhlu dopadu k sinu úhlu lomu je pro dané dvě prostředí stálá veličina a rovná se poměru rychlostí vlnění v obou prostředích. Neboli pro rychlosti paprsku v_1 a v_2 máme

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Veličina $\frac{v_1}{v_2}$ se obvykle nazývá index lomu vlnění pro dané rozhraní. Lomený paprsek zůstává v rovině dopadu. Zejména je-li první prostředí vakuum, zavádí se pro druhé prostředí index lomu $n = \frac{c}{v}$ pro rychlost světla c a rychlost v druhém prostředí v. Ze zákona lomu vlnění pak odvodíme snadno zákon lomu světla (Snellův zákon) pro šíření paprsku z prostředí s indexem lomu n_1 do prostředí s indexem lomu n_2 tvaru

$$n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta.$$

Popišme nyní lom na takové kulové lámové ploše, přičemž osa x bude mít vždy směr průchodu světla a bude totožná s osou symetrie kulové plochy. Máme tedy následující situaci:



Podle zákona lomu světla platí $n_1 \sin\beta_1 = n_2 \sin\beta_2$, kde β_1, β_2 jsou úhly, které svírají paprsky s kolmicí ke kulové ploše v bodě přechodu. Zřejmě $\beta_1 = \alpha - \delta$ a $\beta_2 = \alpha' - \delta$. Po dosazení do Snellova zákona dostaneme $n_1 \sin(\alpha - \delta) = n_2 \sin(\alpha' - \delta)$. Při použití paraxiálního přiblížení máme $n_1(\alpha - \delta) = n_2(\alpha' - \delta)$ a tedy

$$\alpha' = (1 - \frac{n_1}{n_2})\delta + \frac{n_1}{n_2}\alpha.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku daného bodem přechodu a vrcholy s a v' dostaneme $\tan\delta = \frac{-y}{(s-v')}$. Nezapomínejme, že úhly měříme striktně od osy ve směru proti chodu hodinových ručiček a proto tato znaménková konvence. Využitím paraxiálního přiblížení, při kterém v a v' fakticky splývají, dostaneme $\delta = \frac{y}{v-s}$. Dosazením a jednoduchou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} y' &= y, \\ \alpha' &= \frac{n_2 - n_1}{n_2(v-s)} y + \frac{n_1}{n_2}\alpha. \end{aligned}$$

Označíme-li $s - v =: r$ poloměr konvexní lámavé plochy, dostaneme

$$\begin{aligned} y' &= y, \\ \alpha' &= \frac{n_1 - n_2}{n_2 r} y + \frac{n_1}{n_2}\alpha. \end{aligned}$$

Toto opět můžeme přepsat v maticové formě jako

$$\begin{pmatrix} y' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{n_2 r} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

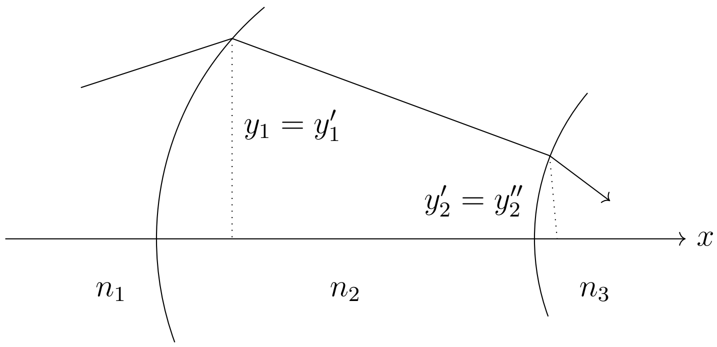
Zde

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{n_2 r} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

se nazývá refrakční matice lámavé plochy. Poznamenejme, že pokud by lámavá plocha byla vypouklá opačně, t.j. střed by byl za vstupem a ne před vstupem, r by bylo záporné. Všimněme si také, že pokud se poloměr kulové lámavé plochy r blíží nekonečnu, a tedy kulová plocha je rovina, pak příslušná matice přejde v matici

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}.$$

Uvažme nyní zobrazovací soustavu dvou kulových lámavých ploch o poloměrech r_1 a r_2. Tedy máme následující soustavu a předpokládáme, že známe parametry y a α paprsku při vstupu do první lámavé plochy a hledáme parametry při výstupu s druhé lámavé plochy.



Paprsek dopadá na první plochu ve výšce $y_1 = y_1'$ a z předchozího známe příslušný přechod, který zapíšeme maticově jako

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \alpha_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 r_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Potom průchod stejnorodým prostředím mezi příslušnýma lámavýma plochama je popsán maticově jako

$$\begin{pmatrix} y_2' \\ \alpha_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ \alpha_1' \end{pmatrix}.$$

a příslušný přechod druhou lámavou plochou zapíšeme zapíšeme maticově jako

$$\begin{pmatrix} y_2'' \\ \alpha_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_3}{n_3 r_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2' \\ \alpha_2' \end{pmatrix}.$$

Dohromady tedy můžeme přechody poskládat jako

$$\begin{pmatrix} y_2'' \\ \alpha_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_3}{n_3 r_2} & \frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2' \\ \alpha_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_3}{n_3 r_2} & \frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ \alpha_1' \end{pmatrix} =$$
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_3}{n_3 r_2} & \frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 r_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}}_{R_2 \cdot T \cdot R_1 := S} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

K popisu matice optického systému S a finální rovnice opět můžeme použít maticové násobení. Všimněte si z definice násobení, že nezáleží na uzávorkování a tedy $(R_2 \cdot T) \cdot R_1 = R_2 \cdot (T \cdot R_1)$. Pokud si sumu v definici představíme jako cyklus, tak je snadno vidět, že dvě sumy složené po sobě odpovídají nezávislým cyklům a je jedno, který projdeme dřív. Naopak, stejná definice říká, že pořadí násobení je důležité a tedy $R_2 \cdot T \neq T \cdot R_2$. Pořadí matic tedy musíme zachovat. Dostaneme

$$S = \begin{pmatrix} 1 + \frac{(x_2 - x_1)(n_1 - n_2)}{n_1 r_1} & \frac{(x_2 - x_1) n_1}{n_2} \\ \frac{n_2 - n_3}{n_2 r_2} + \left(\frac{(n_2 - n_3)(x_2 - x_1)}{n_2 r_2} + \frac{n_2}{n_3} \right) \frac{n_1 - n_2}{n_1 r_1} & \left(\frac{(n_2 - n_3)(x_2 - x_1)}{n_2 r_2} + \frac{n_2}{n_3} \right) \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

a výsledné rovnice jsou tvaru

$$
\begin{aligned}
y_2'' &= \left(1 + \frac{(x_2 - x_1)(n_1 - n_2)}{n_1 r_1}\right) y_1 + \frac{(x_2 - x_1)\, n_1}{n_2} \alpha_1, \\
\alpha_2'' &= \left(\frac{n_2 - n_3}{n_2 r_2} + \left(\frac{(n_2 - n_3)(x_2 - x_1)}{n_2 r_2} + \frac{n_2}{n_3}\right) \frac{n_1 - n_2}{n_1 r_1}\right) y_1 \\
&\quad + \left(\frac{(n_2 - n_3)(x_2 - x_1)}{n_2 r_2} + \frac{n_2}{n_3}\right) \frac{n_1}{n_2} \alpha_1
\end{aligned}
$$

Uvědomte si, jak náročné by bylo skládání rovnic bez použití matic i pro takto jednoduchou soustavu. Takto pomocí matic je možné relativně jednoduchých způsobem popsat optické soustavy s mnoha různými prvky obsahující kromě lámavých ploch i tenké čočky a zrcadla. Pro každý takový prvek stačí najít příslušnou přenosovou matici.

References

[1] E. Svoboda a kolektiv, Přehled středoškolské fyziky, Prometheus, Edice Učebnice pro střední školy, 1996

[2] J. Kuběna, Výpočet zobrazovacích soustav, MU Brno (2005)

[3] M. Miler, Maticový počet v geometrické optice, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 12 (1967), No. 4, 195–212