Transformace roviny užitím matic

Lenka Zalabová

30.11. 2017
České Budějovice

Přírodovědecká fakulta
Faculty of Science

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Obsah

Matice

Maticí typu $m \times n$ rozumíme obdélníkovou (nebo čtvercovou pro $m = n$) tabulku reálných čísel.

- $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \frac{3}{5} \\ \pi & 0 & -7 \end{pmatrix}$ je matice typu 2×3
- $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{7} & \frac{-5}{11} \end{pmatrix}$ je čtvercová matice typu 2×2

Matice

Maticí typu $m \times n$ rozumíme obdélníkovou (nebo čtvercovou pro $m = n$) tabulku reálných čísel.

- $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \frac{3}{5} \\ \pi & 0 & -7 \end{pmatrix}$ je matice typu 2×3
- $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{7} & \frac{-5}{11} \end{pmatrix}$ je čtvercová matice typu 2×2

Zejména vektory v $\mathbb{R}^2$ (respektive v $\mathbb{R}^3$) budeme chápat jako matice typu 2×1 (respektive typu 3×1), tedy vektory pro nás budou vždy sloupcové:

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

Sčítání matic

Matice stejného typu $m \times n$ můžeme sčítat a součet je dán po složkách.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+9 \\ 4+10 & 5+11 & 6+12 \end{pmatrix}$$

Platí:

- $A + B = B + A$ (komutativita)
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (asociativita)

Násobení matic

Pro matice A a B můžeme vypočítat součin AB, pokud A je typu $m \times n$ a B je typu $n \times p$, tedy A má tolik sloupců jako B řádků. Matice AB je typu $m \times p$. Prvek matice AB na i-tém řádku a j-tém sloupci dostaneme tak, že vybereme i-tý řádek matice A a j-tý sloupec matice B a spočítáme jejich skalární součin.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 9 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 10 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 9 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 10 \end{pmatrix}$$

Platí:

- $A(BC) = (AB)C$ (asociativita)
- $(A + B)C = AC + BC$ (distributivita)
- $C(A + B) = CA + CB$ (distributivita)
- $AB \neq BA$!

Co je vektorová rovina?

Uvažujme rovinu jako množinu vektorů v $\mathbb{R}^2$ začínajících v počátku (vázané vektory). Každý vektor

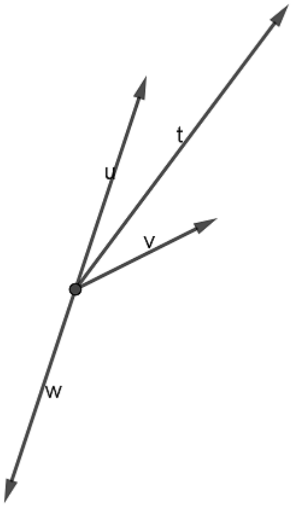
$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

intuitivně ztotožníme s jeho koncem. Vektor

$$o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je pak počátek.

- Co s takovými vektory umíme?



Co umíme ve vektorové rovině?

Vektory v rovině umíme

- sčítat,
- násobit čísly (natahovat, zkracovat, otáčet)

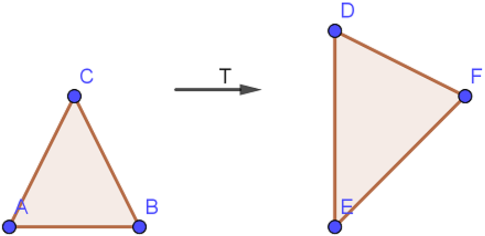
a tyto operace mají mnoho přirozených vlastností (například komutativita nebo asociativita).

Zejména umíme říct, zda jsou dva vektory *kolineární*, neboli zda je jeden vektor násobek druhého vektoru, neboli zda počátek a koncové body obou vektorů leží v jedné přímce.

- Jaké transformace vektorové roviny znáte?

Jednoduché transformace vektorové roviny

Ve vektorové rovině mají smysl transformace, které zachovávají počátek (nechceme hnout počátkem systému vázaných vektorů) a kolinearitu vektorů (kolineární vektory se zobrazí na kolineární vektory, tedy přímka jdoucí počátkem se zobrazí na přímku jdoucí počátkem). Můžeme říct, že naše transformace zobrazují součet vektorů na součet jejich obrazů a násobky vektorů na stejné násobky obrazů. Zejména zobrazují lineární útvary na lineární útvary, to jest úsečku na úsečku, nebo trojúhelník na trojúhelník atd.



Symetrie/souměrnost podle počátku

Každý vektor se zobrazí na vektor opačný

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

- Lze tuto transformaci vyjádřit pomocí vynásobení maticí? Neboli existuje matice typu 2×2, kterou když vynásobíme libovolný vektor (zleva), dostaneme vektor opačný?

Symetrie/souměrnost podle počátku

Každý vektor se zobrazí na vektor opačný

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

- Lze tuto transformaci vyjádřit pomocí vynásobení maticí? Neboli existuje matice typu 2×2, kterou když vynásobíme libovolný vektor (zleva), dostaneme vektor opačný?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Symetrie/souměrnost podle osy x

Každý vektor zobrazíme na vektor překlopený

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

- Existuje matice, kterou když vynásobíme libovolný vektor (zleva), dostaneme překlopený vektor?

Symetrie/souměrnost podle osy x

Každý vektor zobrazíme na vektor překlopený

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

- Existuje matice, kterou když vynásobíme libovolný vektor (zleva), dostaneme překlopený vektor?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Analogicky existuje matice překlopení podle osy y nebo podle libovolné přímky jdoucí počátkem. Například překlopení podle osy I. a III. kvadrantu $y = x$ je tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Stejnolehlost se středem v počátku

Každý vektor vynásobíme pevně zvoleným číslem $k \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

- Existuje matice, kterou když vynásobíme libovolný vektor (zleva), dostaneme k–násobek vektoru?

Stejnolehlost se středem v počátku

Každý vektor vynásobíme pevně zvoleným číslem $k \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

- Existuje matice, kterou když vynásobíme libovolný vektor (zleva), dostaneme k–násobek vektoru?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

Pro $k = -1$ dostaneme symetrii podle počátku.

Otočení kolem počátku o $\frac{\pi}{2}$

Každý vektor otočíme o $\frac{\pi}{2}$ proti směru hodinových ručiček

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- Existuje matice, kterou když vynásobíme libovolný vektor (zleva), dostaneme otočený vektor?

Otočení kolem počátku o $\frac{\pi}{2}$

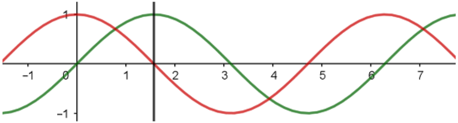
Každý vektor otočíme o $\frac{\pi}{2}$ proti směru hodinových ručiček

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- Existuje matice, kterou když vynásobíme libovolný vektor (zleva), dostaneme otočený vektor?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Otočení o libovolný úhel φ je dáno maticí $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.



Nějaká pozorování...

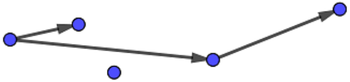
1. Transformace vektorové roviny T zobrazují úsečku na úsečku, trojúhelník na trojúhelník atd.
2. Zejména trojúhelník $u, v, u+v$ zobrazí na trojúhelník $T(u), T(v), T(u)+T(v)$.
3. Pokud známe obrazy $T(u), T(v)$ dvou vektorů u, v, které nejsou kolineární, tak známe obraz každého vektoru $T(au+bv) = aT(u) + bT(v)$ (linearita).
4. Každá transformace vektorové roviny je jednoznačně zadána obrazem dvou vektorů, protože to nám stačí k jednoznačnému určení matice a znát matici je to samé jako znát předpis.
5. Každá matice, jejíž řádky nejsou kolineární, zadává transformaci vektorové roviny.
6. Skládání transformací pak odpovídá násobení matic a na pořadí záleží.

(Maxima)

Co je afinní rovina?

- Ve vektorové rovině neumíme realizovat transformace, které nezachovávají počátek. Vlastně nám chybí natolik základní transformace, jako je třeba posunutí nebo symetrie kolem jiného bodu, než je počátek.
- Potřebujeme se dívat na rovinu jako na množinu bodů, ve které žádný význačný počátek není.
- S množinou bodů na rozdíl od vektorů neumíme nijak počítat, vektory a vektorovou rovinu tedy budeme pořád potřebovat.

Budeme uvažovat *afinní rovinu* jako množinu bodů. Do každého bodu umístíme vektorovou rovinu s počátkem v tom bodě (volné vektory). Vektorová rovina v počátku bude nadále užitečná, protože nám umožnuje dál používat matice.



Co s posunutím?

Posunutí o vektor

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

realizujeme přičtením vektoru v ke každému bodu roviny

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Bod $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ chápeme jako vektor, aby sčítání mělo smysl.

Symetrie/souměrnost podle libovolného středu

Mějme střed $S = [1, 2]$. Použijeme fakt, že známe matici realizující symetrii podle počátku a napíšeme symetrii jako složení několika transformací:

1. posuneme S do počátku,
2. překlopíme rovinu podle počátku (to umíme maticí),
3. posuneme počátek zpět do bodu S.

Symetrie/souměrnost podle libovolného středu

Mějme střed $S = [1, 2]$. Použijeme fakt, že známe matici realizující symetrii podle počátku a napíšeme symetrii jako složení několika transformací:

1. posuneme S do počátku,
2. překlopíme rovinu podle počátku (to umíme maticí),
3. posuneme počátek zpět do bodu S.

- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 2-y \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1-x \\ 2-y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1-x \\ 2-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x \\ 4-y \end{pmatrix}$

Tedy $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Nějaká další pozorování...

- Každá transformace afinní roviny je složením transformace vektorové roviny s posunutím.
- Každá transformace afinní roviny je tedy tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

  kde řádky matice nejsou kolineární. Pokud je část posunutí nulová, máme transformaci vektorové roviny.
- Abychom předepsali jednoznačně transformaci afinní roviny nám nestačí obrazy dvou bodů/vektorů.
- Kolik bodů zadává jednoznačně transformaci afinní roviny a jakých?

Nějaká další pozorování...

- Každá transformace afinní roviny je složením transformace vektorové roviny s posunutím.
- Každá transformace afinní roviny je tedy tvaru

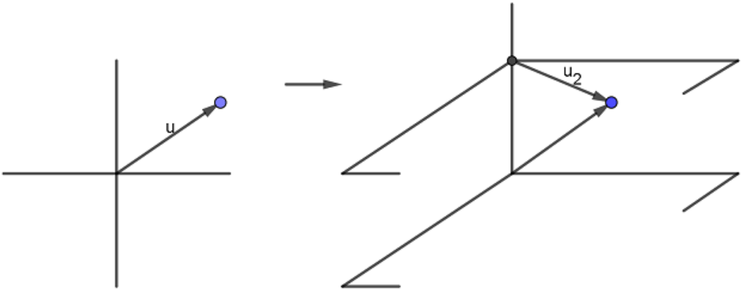
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

  kde řádky matice nejsou kolineární. Pokud je část posunutí nulová, máme transformaci vektorové roviny.
- Abychom předepsali jednoznačně transformaci afinní roviny nám nestačí obrazy dvou bodů/vektorů.
- Kolik bodů zadává jednoznačně transformaci afinní roviny a jakých? Potřebujeme tři body, které neleží v jedné přímce.

Skládání afinních transformací je nepěkné, ale pořád je to jen sčítání a násobení matic a vektorů. (Maxima)

Afinní rovina jinak

- Uvažme rovinu $z = 1$ v $\mathbb{R}^3$.
- Každému vektoru $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ přiřadíme vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.



Afinní transformace jinak

- Každou transformaci afinní roviny jakožto roviny $z = 1$ v $\mathbb{R}^3$ lze realizovat vynásobením maticí

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & v_1 \\ x_{21} & x_{22} & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Symetrie podle středu $S = [1, 2]$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Otáčení a posouvání v prostoru

- Popsané principy fungují v $\mathbb{R}^n$ pro libovolné n, z praktického hlediska nás nejvíce zajímají transformace prostoru $\mathbb{R}^3$ a to takové, které zachovávají velikosti a úhly, zejména posunutí a otočení.
- Otočení kolem os x, y, z v $\mathbb{R}^3$ o úhel φ jsou dána maticemi

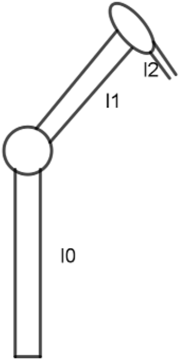
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Jejich skládáním získáme otočení podle libovolné osy.
- Posunutí se realizuje přičtením vhodného vektoru (nebo trikem s většími maticemi).

Na co to může být dobré?

Matice můžeme použít například k popisu souřadnic ramena (a tedy ovládání) jednoduché robotické ruky:

Uvažme robotickou ruku se dvěma spoji (tzv. kinematické dvojice), první sférickou a druhou cylindrickou.



Na co to může být dobré?

Pokud uvažujeme počátek soustavy v patě robota, pak ve vhodných souřadnicích je chapadlo na pozici vektoru:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) & 0 & -\sin(\varphi_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi_2) & 0 & \cos(\varphi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) & -\sin(\varphi_1) & 0 \\ \sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) & 0 & -\sin(\varphi_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi_2) & 0 & \cos(\varphi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) & -\sin(\varphi_1) & 0 \\ \sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_3) & -\sin(\varphi_3) & 0 \\ \sin(\varphi_3) & \cos(\varphi_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$