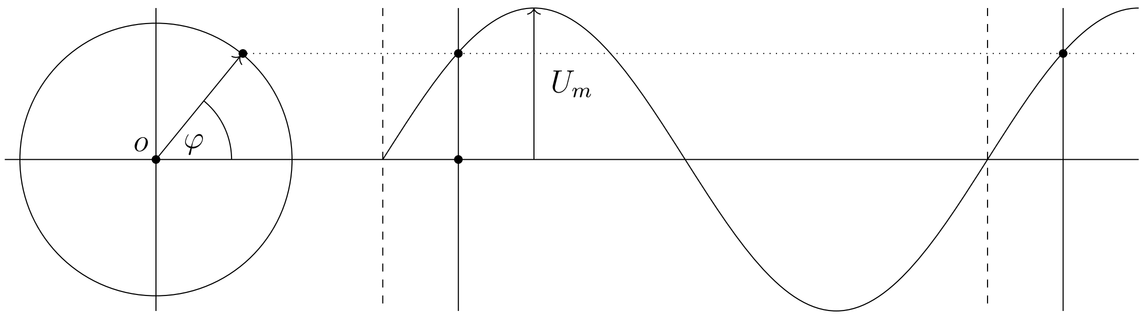
# Vybrané kapitoly matematiky a aplikací

Jaroslav Hrdina, Lenka Zalabová
25. říjen 2020

## Elektrické obvody a komplexní čísla

Harmonické procesy jsou jedny z nejčastějších přirozených procesů ve fyzice. Jejich typickými zástupci jsou harmonické oscilátory nebo střídavé elektrické obvody. Pripomeňme nejdříve základní pravidlo stejnosměrného elektrického proudu a to Ohmův zákon pro část elektrického obvodu: Elektrický proud $I$ procházející kovovým vodičem je přímo úměrný elektrickému napětí $U$ mezi konci tohoto vodiče. Toto umožňuje zavést pojem elektrické resistance neboli odporu $R$ a platí $R = \frac{U}{I}$.

Situace je složitější pro obvody, kterými prochází střídavý proud, t.j. proud s harmonickým průběhem v čase $t$. Pro okamžitou hodnotu napětí platí $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$, kde $U_m$ je amplituda střídavého napětí, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ je úhlová frekvence s periodou $T$ a $\varphi$ je fázový úhel. Průběh napětí pak můžeme znázornit fázorovým diagramem a grafem (časovým diagramem):




Napětí ve fázorovém diagramu pak můžeme vidět jako vektor v rovině, jehož druhou souřadnicí je hodnota napětí $U_m \sin(\omega t + \varphi)$. Z pravoúhlého trojúhelníku je zřejmé, že jeho první souřadnicí hodnota $U_m \cos(\omega t + \varphi)$. Výhodou fázorových diagramů je ten, že vektory v rovině umíme snadno sčítat a násobit skalárem, což umožňuje porovnávat různé hodnoty napětí a proudu. Stejně tak si uvědomme, že díky tomu, že časový diagram je periodický (tedy po určité hodnotě se opakuje) obsahuje fázorový diagram 'plnou informaci' o hodnotě napětí.

Uvažujme jednoduchý obvod střídavého proudu s rezistorem (pro jednoduchost bez fázového posunutí, tedy bez cívky nebo kondenzátoru). Okamžitá hodnota proudu je

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t) = I_m \sin(\omega t)$$

pro amplitudu střídavého proudu $I_m = \frac{U_m}{R}$. Neboli amplituda nezávisí na frekvenci a opět platí Ohmův zákon.

Situace je složitější v případě obvodu střídavého proudu s indukčností, t.j. uvažujeme obvod s cívkou. Lenzův zákon říká, že proud nabývá největší hodnoty později než napětí a vzniká (záporný) fázový rozdíl $\frac{\pi}{2}$. Tedy pro obvod z napětím $u = U_m \sin(\omega t)$ platí

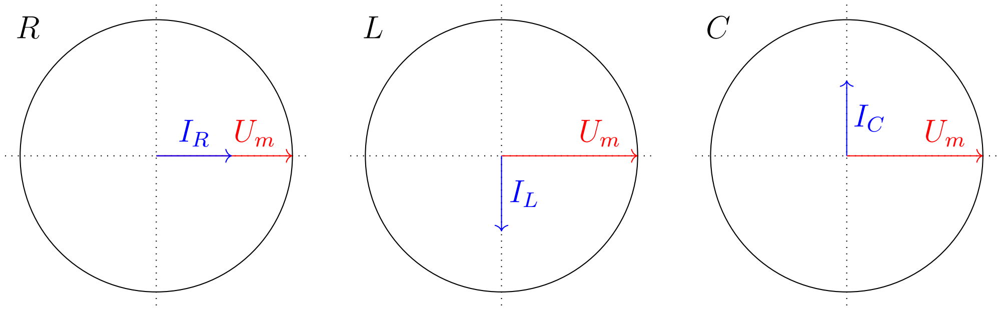
$$i = I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = -I_m \cos(\omega t).$$

Pokud v tomto případě znázorníme hodnotu napětí vektorem ve fázorovém diagramu, jeho velikost bude $U_m$ a jeho směr bude určen jednotkovým vektorem $(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$. Vidíme, že druhá souřadnice jednotkového vektoru se vyskytuje ve vyjádření hodnoty napětí a první souřadnice ve vyjádření hodnoty proudu.

Uvažujeme-li obvod střídavého proudu s kapacitou, t.j. obvod s kondenzátorem, je proud největší v okamžiku, když je kondenzátor nabitý a napětí je nulové. Proud tedy předbíhá napětí a vzniká (kladný) fázový rozdíl $\frac{\pi}{2}$. Tedy

$$i = I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_m \cos(\omega t)$$

a stejně jako v předešlém případě vidíme, že souřadnice jednotkového vektoru směru hodnoty ve fázorovém diagramu se objevují ve vyjádření hodnoty napětí i hodnoty proudu.




Tyto prvky lze samozřejmě různě kombinovat v jednom obvodu a zapojovat je sériově i paralelně, výsledný fázorový diagram pak může být komplikovaný a nemusí být jednoduché najít vztah mezi výsledným napětím a proudem. Zejména pokud máme aspoň jednu cívku nebo kondenzátor, tak nevidíme snadno analogii Ohmova zákona.

Na místě je tedy začít používat nějaký efektivní popis fázorového diagramu. Takový popis umožňují tzv. komplexní čísla, která si zavedeme. Jak uvidíme hlavní výhodou komplexních čísel je, že je umíme navíc i násobit mezi sebou. To nám umožní současně pracovat a srovnávat vektory (například napětí a proudu) 'jdoucí' různými směry.

Uvažujme dvojice reálných čísel $(a, b)$ s dobře definovanými operacemi

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d),\\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc).\end{aligned}$$

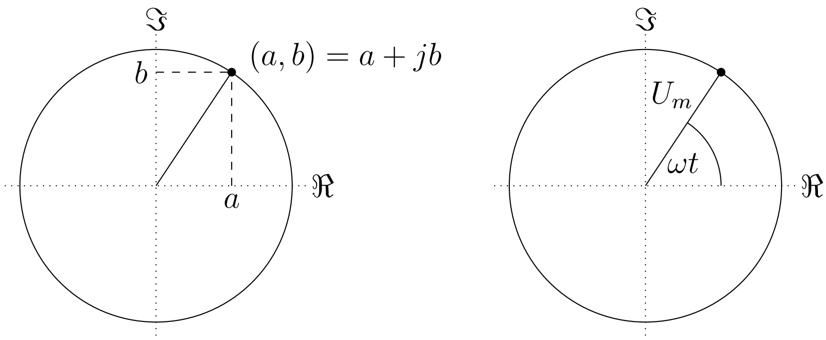
Všimněme si, že sčítání je definováno po složkách, stejně jako pro vektory v rovině. Navíc platí $(a, 0) \cdot (c, d) = (ac, ad)$. Tedy dvojice $(a, 0)$ hrají roli reálných čísel a vynásobení takovou dvojicí odpovídá vynásobení vektoru skalárem. Naše operace tedy zobecňují obvyklé operace s vektory v rovině, kde zásadní bonus navíc dává vynásobení $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$.

V matematice bývá zvykem nazývat dvojici $(0, 1)$ komplexní nebo imaginární jednotkou a označovat písmenem $i$. V dalších částech to tak budeme dělat, nicméně v elektrotechnice se komplexní jednotka obvykle značí $j$, protože $i$ označuje střídavý proud. Pak můžeme psát $(a, b) = a + jb$, což je tzv. algebraický tvar komplexního čísla. Jeho hlavní výhodou je, že 'zobecněné' operace s vektory odpovídají operacím s dvojčleny s využitím dodatečné identity $j^2 = -1$ a není nutné si pamatovat 'nepřirozenou' definici násobení. Spočítáme

$$\begin{aligned}(a + bj) + (c + dj) &= (a + c) + (b + d)j\\ (a + bj) \cdot (c + dj) &= a(c + dj) + bi(c + dj) = ac + adj + bci + bdj^2\\ &= ac + adj + bcj - bd = (ac - bd) + (ad + bc)j.\end{aligned}$$

Například pro střídavé napětí pak můžeme psát vektor napětí ve fázorovém diagramu jako $u = a + jb$, kde $a = U_m \cos(\omega t)$ a $b = U_m \sin(\omega t)$ a tedy

$$u = U_m \cos(\omega t) + jU_m \sin(\omega t) = U_m\big(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\big).$$




Další důležitou operací je komplexní konjugování $\overline{a+bj} = a - bj$. Zejména $(a+bj)\cdot(\overline{a+bj}) = a^2 + b^2$ je druhá mocnina velikosti průvodiče obou čísel.

Z algebraického popisu je zřejmý geometrický smysl sčítání, ale horší je to s násobením komplexních čísel mezi sebou. Navíc pro práci s fázorovými diagramy jsou důležitější velikosti a úhly veličin než souřadnice příslušných vektorů.

Komplexní číslo $z = a + bi$ můžeme ekvivalentně popsat v goniometrickém tvaru

$$z = |z|(\cos(\alpha) + j\sin(\alpha)),$$

kde $\alpha$ je velikost úhlu mezi průvodičem vektoru $(a,b)$ s reálnou osou a $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$ je velikost průvodiče. Zřejmě $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ a $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Dohromady tedy vidíme, že po zúžení $\alpha$ na vhodný interval získáme jednoznačnou korespondenci mezi oběma popisy.

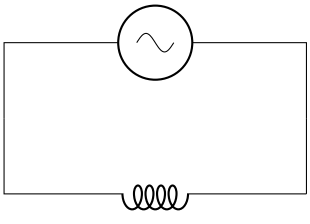
Velkou výhodou goniometrického tvaru je, že snadno vidíme geometrický smysl násobení. Pro čísla $z = |z|(\cos(\alpha) + j\sin(\alpha))$ a $w = |w|(\cos(\beta) + j\sin(\beta))$ platí

$$zw = |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + j\sin(\alpha+\beta)),$$
$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\alpha-\beta) + j\sin(\alpha-\beta)).$$

Tedy vynásobení nebo vydělení komplexním číslem realizuje rotaci o příslušný úhel společně s vynásobením velikosti průvodiče.

Protože zápis pomocí goniometrických funkcí je zdlouhavý, používá se často v elektronice zkrácený Moivrův zápis $z = |z|(\cos(\alpha) + j\sin(\alpha)) = |z|e^{j\alpha}$. Například pro napětí pak zkráceně píšeme $u = U_m e^{j\omega t}$.

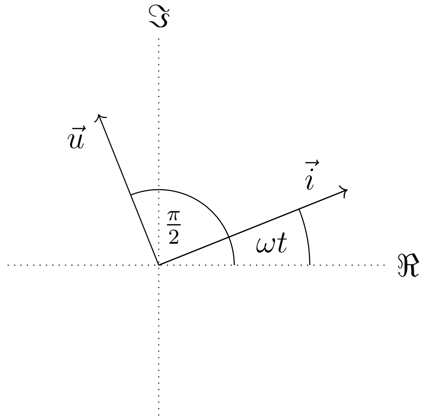
Uvažme opět obvod střídavého proudu s induktancí $L$.



V klasickém zápisu (bez komplexních čísel) v tomto případě píšeme

$$i = I_m \sin(\omega t)$$
$$u = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \omega L I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}),$$

kde $U_m = \omega L I_m$ je vztah mezi amplitudou proudu a amplitudou napětí pro střídavý obvod s induktancí. Okamžitá hodnota intenzity elektrického proudu je imaginární čast $I_m e^{j\omega t}$ a okamžitá hodnota napětí je imaginární čast $U_m e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$ z definice fázorového diagramu.




Máme tedy následující výpočet nad komplexními čísly

$$u = U_m e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} = \omega L I_m e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} = I_m e^{j\omega t} \cdot \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} = I_m e^{j\omega t} \cdot j\omega L = i \cdot j\omega L.$$

Tedy hodnota napětí ve fázorovém diagramu chápaná jako komplexní číslo je rovna součinu hodnoty proudu ve fázorovém diagramu chápaného jako komplexní číslo a ryze imaginárního komplexního čísla $j\omega L$. Za tímto lze jednoduše vidět princip Ohmova zákona kde hodnota rezistance je v tomto případě $r = j\omega L$, nicméně musíme pracovat nad komplexními čísly. Komplexní číslo $j\omega L$ se nazývá induktanční operátor.

Podobný výpočet funguje i v případě obvodu střídavého proudu s kapacitancí $C$, kde píšeme

$$\begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega t) \\ u &= U_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}), \end{aligned}$$

a máme tedy opět následující výpočet nad komplexními čísly

$$u = U_m e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} = \frac{I_m}{\omega C} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} = I_m e^{j\omega t} \cdot \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} = I_m e^{j\omega t} \cdot (-j\frac{I_m}{\omega C}) = i \cdot \frac{-j}{\omega C}.$$

a dostáváme v roli rezistance takzvaný kapacitanční operátor $\frac{-j}{\omega C}$.

Celkově v případě sériového zapojení pro vektor hodnoty napětí ve fázorovém prostoru $u$ můžeme spočítat hodnotu okamžitého napětí ve fázovém prostoru $i$ pomocí modifikovaného Ohmova zákonu nad komplexními čísly

$$i = z \cdot u,$$

kde číslo $z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ nazýváme impedanční operátor. V případě paralelního zapojení dostaneme vztah

$$i = z^{-1} \cdot u = \frac{\bar{z}}{|z|} \cdot u,$$

kde $z$ je opět impedanční operátor.

# References

[1] A. Angot, Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry, Teoretická knižnice inženýra, 1972

[2] E. Svoboda a kolektiv, Přehled středoškolské fyziky, Prometheus, Edice Učebnice pro střední školy, 1996