MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

Invariantní objekty na homogenních prostorech

Diplomová práce

Brno 2002

Lenka Zalabová

Prohlašuji tímto, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury.

Brno, 27. dubna 2002

Děkuji Prof. RNDr. J. Slovákovi, DrSc. za cenné rady a připomínky, které mi pomohly při vypracování diplomové práce.

Obsah

Úvod

Homogenní prostory se objevují v mnoha oblastech matematiky. Nás budou zajímat z geometrického hlediska, jako zvláštní příklad hladkých variet. Z definice homogenních prostorů vyplyne, že na těchto varietách se z násobení přirozeně indukuje akce vhodné Lieovy grupy. Budeme se zabývat podmínkami, které jsou ekvivalentní faktu, že na daném homogenním prostoru existuje objekt invariantní vůči této akci.

Cílem této práce není zformulovat ucelenou teorii, která řeší tento problém obecně. Chceme pouze pro nejznámější případy ukázat možný způsob jak ověřit, zda na konkrétním homogenním prostoru existuje invariantní objekt. Konkrétně se budeme zabývat Riemannovou metrikou, hlavní konexí a afinní konexí.

Text je rozdělen do tří částí. První část je úvodní, jsou zde zavedeny základní pojmy a označení. Druhá část se věnuje výše uvedeným problémům. Třetí část se věnuje speciálním případům homogenních prostorů - symetrickým prostorům - a aplikaci předchozích výsledků o afinní konexi na tyto prostory.

Na závěr poznamenejme, že se budeme zabývat pouze hladkými varietami a hladkými zobrazeními. V textu nebudeme tuto vlastnost uvádět, slovem zobrazení budeme myslet hladké zobrazení apod.

1 Základní pojmy

1.1 Homogenní prostory a Kleinovy geometrie

Definice 1.1. Nechť G je Lieova grupa a M hladká varieta. *Levou akcí grupy G na M* rozumíme zobrazení $\lambda : G \times M \longrightarrow M$ takové, že $\lambda(g_1, \lambda(g_2, x)) = \lambda(g_1 g_2, x)$ pro všechna $g_1, g_2 \in G, x \in M$. Analogicky *pravá akce G na M* je zobrazení $\rho : M \times G \longrightarrow M$ takové, že $\rho(\rho(x, g_1), g_2) = \rho(x, g_1 g_2)$ pro všechna $g_1, g_2 \in G, x \in M$.

Dále budeme násobení zleva prvkem $g \in G$ zapisovat jako λ_g a násobení zprava prvkem $g \in G$ jako ρ^g. Často také budeme zapisovat akci jako klasické násobení.

Definice 1.2. Nechť G je Lieova grupa a H její uzavřená podgrupa. Prostor pravých tříd rozkladu G/H se nazývá *homogenní prostor.*

Nechť $p : G \longrightarrow G/H$ je projekce. Dá se ukázat, že na G/H existuje jednoznačně struktura hladké variety taková, že $p : G \longrightarrow G/H$ je submerze a $\dim G/H = \dim G - \dim H$. Navíc se dá ukázat, že $p : G \longrightarrow G/H$ je hlavní fibrovaný bandl se strukturní grupou H. Důkazy jsou víceméně konstrukční a lze je najít v [**KMS**].

Dále budeme předpokládat, že varieta G/H je souvislá.

Definice 1.3. Hlavní bandl $G \longrightarrow G/H$ se strukturní grupou H se nazývá *kanonický bandl.*

Definice 1.4. *Kleinova geometrie* je dvojice (G, H) taková, že G je Lieova grupa, $H \subset G$ uzavřená podgrupa a G/H je souvislá. Homogenní prostor G/H se nazývá *prostor Kleinovy geometrie.*

Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra G a $\mathfrak{h}$ je Lieova algebra $H \subset G$. Nechť K je normální podgrupa G maximální v H. Kleinova geometrie se nazývá *efektivní*, jestliže $K = \{e\}$, kde e je jednotkový prvek G, a *lokálně efektivní*, pokud K je diskrétní. Kleinova geometrie se nazývá *rozložená*, pokud na $\mathfrak{g}$ je dán pevně rozklad podalgeber $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$. Kleinova geometrie se nazývá *reduktivní*, pokud je dán rozklad $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ na $\mathrm{Ad}(H)$-moduly.

Zajímavý je následující pohled na Kleinovy geometrie:
Nechť M je souvislá hladká varieta a Lieova grupa G působí na této varietě levou akcí. Pro každý prvek $x \in M$ můžeme nyní uvažovat grupu $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ všech prvků, které nechávají x na místě. Tato podgrupa G se nazývá *izotropní podgrupa.* Předpokládejme dále, že tato akce je *tranzitivní*, což znamená, že pro každé $x, y \in M$ existuje $g \in G$ tak, že $g \cdot x = y$. Potom izotropní podgrupy G_x jsou navzájem izomorfní pro všechna $x \in M$.

Tento izomorfismus je zprostředkován konjugací vhodným prvkem, který z tranzitivity vždy existuje. Potom homogenní prostory G/G_x jsou navzájem izomorfní pro libovolnou volbu $x \in M$ a navíc varieta M je izomorfní s G/G_x pro libovolné $x \in M$. Na varietu M se můžeme dívat jako na prostor Kleinovy geometrie (G, G_x). Někdy se takto Kleinovy geometrie definují.

Obvykle se nedělá rozdíl mezi Kleinovou geometrií a prostorem Kleinovy geometrie a obojí se nazývá Kleinova geometrie. Bod $o := H$ na G/H respektive $x \in M$ se nazývá *počátek*.

1.2 Maurer-Cartanova forma

Definice 1.5. *Maurer-Cartanova forma* ω na Lieově grupě G je $\mathfrak{g}$-hodnotová 1-forma definovaná vztahem $\omega(g)(\xi) := T_g\lambda_{g^{-1}}.\xi$, kde $g \in G$, $\xi \in \mathfrak{X}(G)$.

Souvislost mezi Maurer-Cartanovou formou a Kleinovými geometriemi vyplyne z následujících tvrzení.

Lemma 1.1 (Vlastnosti Maurer-Cartanovy formy). *Nechť G je Lieova grupa a $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra. Pro Maurer-Cartanovu formu platí:*

1. *$\omega(L_X) = X$ pro všechna $X \in \mathfrak{g}$, kde L_X označuje levoinvariantní vektorové pole generované prvkem $X \in \mathfrak{g}$*

2. *$(\lambda_g)^*\omega = \omega$ pro všechna $g \in G$*

3. *$(\rho^g)^*\omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega$ pro všechna $g \in G$*

4. *ω je absolutní paralelismus, tj. $\omega(g) : T_gG \longrightarrow \mathfrak{g}$ je lineární izomorfismus pro každé $g \in G$.*

Důkaz. 1. Plyne přímo z definice Maurer-Cartanovy formy.
2. Ověří se přímým výpočtem:

$$\begin{aligned}(\lambda_g)^*\omega(h)(\xi) &= \omega(gh)(T\lambda_g.\xi) = T\lambda_{(gh)^{-1}}T\lambda_g.\xi \\ &= T\lambda_{h^{-1}}T\lambda_{g^{-1}}T\lambda_g.\xi = T\lambda_{h^{-1}}.\xi = \omega(h)(\xi).\end{aligned}$$

3. Opět přímým výpočtem:

$$\begin{aligned}(\rho^g)^*\omega(h)(\xi) &= \omega(hg)(T\rho^g.\xi) = T\lambda_{(hg)^{-1}}T\rho^g.\xi = T\lambda_{g^{-1}}T\lambda_{h^{-1}}T\rho^g.\xi \\ &= T\lambda_{g^{-1}}T\rho^gT\lambda_{h^{-1}}.\xi = T\lambda_{g^{-1}}T\rho^g\omega(h)(\xi) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega(h)(\xi).\end{aligned}$$

4. Z definice akce plyne, že λ_g je difeomorfismus pro všechny $g \in G$.

□

Věta 1.2. *Nechť G je Lieova grupa a $H \subset G$ uzavřená podgrupa taková, že $G \longrightarrow G/H$ je reduktivní Kleinova geometrie. Potom Maurer-Cartanova forma ω je tvaru $\omega = \omega_{\mathfrak{h}} + \omega_{\mathfrak{p}}$, kde $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, $\omega_{\mathfrak{h}} = \pi_1 \circ \omega$ a $\omega_{\mathfrak{p}} = \pi_2 \circ \omega$, kde $\pi_1 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$, $\pi_2 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{p}$ jsou projekce. Navíc $\omega_{\mathfrak{h}}$ je formou hlavní konexe na kanonickém bandlu $G \longrightarrow G/H$ a příslušná konexe je invariantní vůči levému násobení, tj. $(\lambda_g)^* \omega_{\mathfrak{h}} = \omega_{\mathfrak{h}}$.*

Důkaz. Rozklad Maurer-Cartanovy formy plyne z rozkladu geometrie.

Protože $\mathrm{Ad}(g^{-1})\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ pro $g \in H$, platí

$$\begin{aligned}(\rho^g)^* \omega_{\mathfrak{h}} &= (\rho^g)^*(\pi_1 \circ \omega) = \pi_1 \circ (\rho^g)^* \omega = \pi_1 \circ \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega \\ &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\pi_1 \circ \omega) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega_{\mathfrak{h}}\end{aligned}$$

pro všechna $X \in \mathfrak{h}$. Platí $\zeta_X(u) = \frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0} \rho^{\exp t \cdot X}(u) = T_e \lambda_u . X = L_X(u)$, tedy fundamentální vektorová pole jsou právě levoinvariantní pole, z 1. v minulém lemmatu máme $\omega(L_X) = \omega(\zeta_X) = X$ pro všechna $X \in \mathfrak{h}$. Je to tedy forma konexe.

Levoinvariance této konexe plyne z levoinvariance Maurer-Cartanovy formy a jejího rozkladu. □

2 Invariantní objekty

2.1 Homogenní bandly a invariantní Riemannova metrika

Nechť G je Lieova grupa, $H \subset G$ uzavřená podgrupa a G/H je homogenní prostor, na kterém působí grupa G levým násobením λ. Na takovéto varietě budeme hledat podmínky existence invariantní Riemannovy metriky. Budeme se zabývat řezy homogenních bandlů.

Definice 2.1. *Homogenní bandl* je asociovaný bandl $G \times_H S \longrightarrow G/H$ k hlavnímu bandlu $G \longrightarrow G/H$, kde je definována levá akce $H \times S \longrightarrow S$.

Je-li S vektorový prostor a $H \times S \longrightarrow S$ reprezentace, nazýváme homogenní bandl *homogenním vektorovým bandlem.*

Jde tedy o speciální případy asociovaných bandlů. Na těchto bandlech akci $\lambda : G \times G/H \longrightarrow G/H$, $\lambda(g', gH) = g' \cdot gH$ rozšíříme na celé $G \times_H S =: E$.

Nejprve uvažujme kanonický bandl $p : G \longrightarrow G/H$. Toto je homogenní bandl při akci $\tilde{\lambda} : G \times G \longrightarrow G$, která je násobením. Uvažujme zobrazení $G \times G \times S \longrightarrow G \times_H S$ dané předpisem $(g, g', s) \longmapsto \{gg', s\}$. To je hladké, protože násobení je hladké. Dále máme přirozenou surjektivní submerzi $G \times G \times S \longrightarrow G \times (G \times_H S)$. Přirozeně zde vzniká hladké zobrazení $G \times (G \times_H S) \longrightarrow G \times_H S$ a to definuje akci $\tilde{\lambda} : G \times (G \times_H S) \longrightarrow G \times_H S$. Protože projekce $p : E \longrightarrow G/H$ je dána $\{g, s\} \longmapsto gH$, $\tilde{\lambda}$ rozšiřuje akci λ, tj. $p(\tilde{\lambda}(g, \{g', s\})) = \lambda(g, p(\{g', s\}))$.

Nechť $p : E \longrightarrow G/H$ je homogenní bandl s levou akcí λ grupy G na G/H a jejím rozšířením $\tilde{\lambda}$ na E. Množinu hladkých řezů tohoto bandlu označíme $\Gamma(E)$. Pomocí levé akce G na bandlu lze definovat akci na $\Gamma(E)$. Nechť $\sigma : G/H \longrightarrow E$ je řez E. Definujeme levé násobení G na σ takto: $g \cdot \sigma := \tilde{\lambda}_g \circ \sigma \circ \lambda_{g^{-1}}$, což je levá akce, neboť:

$$
\begin{aligned}
g \cdot (h \cdot \sigma) &= g \cdot (\tilde{\lambda}_h \circ \sigma \circ \lambda_{h^{-1}}) = \tilde{\lambda}_g \circ \tilde{\lambda}_h \circ \sigma \circ \lambda_{h^{-1}} \circ \lambda_{g^{-1}} \\
&= \tilde{\lambda}_{gh} \circ \sigma \circ \lambda_{(gh)^{-1}} = (g \cdot h) \cdot \sigma.
\end{aligned}
$$

Definici akce lze také přepsat ve tvaru:

$$
g \cdot \sigma(x) = \tilde{\lambda}_g \circ \sigma \circ \lambda_{g^{-1}}(x) = g \cdot (\sigma(g^{-1} \cdot x)).
$$

Protože homogenní bandly jsou asociované bandly, lze se na řezy a akce na řezech dívat jinak.

Lemma 2.1. *Nechť $p : G \times_H S \longrightarrow G/H$. Existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi hladkými řezy tohoto bandlu a H-ekvivariantními zobrazeními z $C^\infty(G,S)^H$.*

Důkaz. Nechť $\sigma : G/H \longrightarrow E$ je řez bandlu. Tomuto řezu přiřadíme zobrazení $s : G \longrightarrow S$ definované předpisem $s(g) = g^{-1} \cdot \sigma(gH)$, kde S ztotožňujeme s $E_o := p^{-1}(o)$. Pak $s(gh) = (gh)^{-1} \cdot \sigma(ghH) = h^{-1} \cdot g^{-1} \cdot \sigma(gH) = h^{-1} \cdot s(g)$, toto zobrazení je tedy H-ekvivariantní.

Naopak nechť máme $s : G \longrightarrow S$ takové, že $s(gh) = h^{-1} \cdot s(g)$. Položme $\sigma(x) = g \cdot s(g)$, kde $x \in G/H$, $x = gH$. Nechť $g_1, g_2 \in G$ takové, že $g_1H = g_2H$. Pak $g_1 = g_2h$ pro nějaké $h \in H$ a $g_1 \cdot s(g_1) = g_2h \cdot s(g_2h) = g_2hh^{-1} \cdot s(g_2) = g_2 \cdot s(g_2)$. Předpis pro σ je tedy korektní a definuje řez.

Protože $\sigma(gH) \longmapsto s(g) = g^{-1} \cdot \sigma(gH) \longmapsto g \cdot (g^{-1} \cdot \sigma(gH)) = \sigma(gH)$ a $s(g) \longmapsto \sigma(gH) = g \cdot s(g) \longmapsto g^{-1} \cdot (g \cdot s(g)) = s(g)$, jsou tato zobrazení navzájem inverzní a tedy jde o bijekce. □

Poznámka. Lemma platí obecně pro jakýkoliv asociovaný bandl.

Na prvky $\Gamma(E) = \Gamma(G \times_H S)$ se tedy můžeme dívat jako na H-ekvivariantní zobrazení z $C^\infty(G,S)^H$. Nyní popišme akci z předchozího odstavce na těchto zobrazeních. Nechť s je zobrazení a σ je příslušný řez. Potom

$$\begin{aligned}(g \cdot s)(g') &= (g')^{-1} \cdot (g \cdot \sigma)(g'H) = (g')^{-1} \cdot (g \cdot (\sigma(g^{-1}g'H))) \\ &= (g^{-1}g')^{-1} \cdot \sigma(g^{-1}g'H) = s(g^{-1}g')\end{aligned}$$

a řezu $g \cdot \sigma$ odpovídá funkce $g \cdot s = s \circ \lambda_{g^{-1}}$.

Věta 2.2 (Geometrická verze Frobeniovy reciprocity). *Nechť $E \longrightarrow G/H$ je homogenní bandl se standardním fibrem S a nechť X je hladká varieta, na které působí levou akcí grupa G.*

Potom existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi G-ekvivariantními zobrazeními $X \longrightarrow \Gamma(E)$ a H-ekvivariantními zobrazeními $X \longrightarrow S$.

Důkaz. Předpokládejme, že máme G-ekvivariantní zobrazení $f' : X \longrightarrow \Gamma(E)$ takové, že $x \longmapsto \sigma_x$. Ekvivariance tohoto zobrazení znamená, že $f'(g \cdot x) = \sigma_{g \cdot x} = g \cdot \sigma_x = g \cdot f'(x)$, neboli $\sigma_{g \cdot x}(g'H) = (g \cdot \sigma_x)(g'H) = g \cdot \sigma_x(g^{-1}g'H)$ pro všechna $g \in G$. Zobrazení σ_x nyní vyčíslíme v počátku a definujeme zobrazení $f : X \longrightarrow S$, $x \longmapsto \sigma_x(o)$. Potom $\sigma_{h \cdot x}(o) = h \cdot \sigma_x(h^{-1}o) = h \cdot \sigma_x(o)$ pro všechna $h \in H$. Tedy toto f je H-ekvivariantní.

Naopak, mějme H-ekvivariantní zobrazení $f : X \longrightarrow S$. Potom pro $x \in X$ definujeme $\sigma_x : G/H \longrightarrow E$ předpisem $\sigma_x(gH) = g \cdot f(g^{-1} \cdot x)$. Tento předpis je korektní a definuje řez, neboť pro $g_1, g_2 \in G$ takové, že $g_1 H = g_2 H$ existuje $h \in H$ takové, že $g_1 = g_2 h$, a potom

$$\begin{aligned}\sigma_x(g_1H) &= g_1 \cdot f(g_1^{-1}\cdot x) = g_2h\cdot f((g_2h)^{-1}\cdot x) = (g_2h)\cdot f(h^{-1}g_2^{-1}\cdot x)\\ &= g_2hh^{-1}\cdot f(g_2^{-1}\cdot x) = g_2\cdot f(g_2^{-1}\cdot x) = \sigma_x(g_2H).\end{aligned}$$

Toto zobrazení je G-ekvivariantní:

$$\begin{aligned}\sigma_{g\cdot x}(g'H) &= g'\cdot f((g')^{-1}\cdot g\cdot x) = g\cdot g^{-1}\cdot g'\cdot f((g')^{-1}\cdot g\cdot x)\\ &= g\cdot\sigma_x(g^{-1}g'H) = (g\cdot\sigma_x)(g'H).\end{aligned}$$

Navíc $\sigma_x(o) = \sigma_x(eH) = e\cdot f(e^{-1}\cdot x) = f(x)$, kde e označuje jednotkový prvek G. Tyto konstrukce jsou tedy inverzní bijekce. □

Důsledek 2.3. *Existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi množinou G-invariantních řezů z $\Gamma(E)$ a množinou H-invariantních prvků ve standardním fibru.*

Důkaz. Jedná se o případ, kdy varieta X je jednobodová varieta $\{x\}$ s triviální akcí G, tj. $g\cdot x = x$ pro všechna $g \in G$. G-ekvivariantní řezy jsou v tomto případě tvaru $g\cdot\sigma_x = \sigma_{g\cdot x} = \sigma_x$. To znamená, že to jsou právě G-invariantní řezy E. H-ekvivariantní zobrazení $f : X = \{x\} \longrightarrow S$ jsou zobrazení tvaru $f(x) = f(h\cdot x) = h\cdot f(x)$, tedy právě H-invariantní prvky v S. Z předchozí věty plyne vzájemně jednoznačná korespondence. □

V případě homogenního vektorového bandlu důsledek Frobeniovy reciprocity říká, že existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi G-invariantními řezy E a H-invariantními prvky v reprezentaci $H \times S \longrightarrow S$.

Lemma 2.4. *Tečný bandl homogenního prostoru G/H je přirozeně izomorfní s vektorovým bandlem $G\times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ vzhledem k akci H na $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ indukované z akce* Ad.

Důkaz. Hledaný izomorfismus $T(G/H) \simeq G\times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ je tvaru $\{g, X+\mathfrak{h}\} \longmapsto Tp.L_X(g)$, kde $p : G \longrightarrow G/H$ a L_X je levoinvariantní pole generované $X \in \mathfrak{g}$. Tento předpis je korektní, neboť

$$\{g\cdot h, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}X + \mathfrak{h}\} \longmapsto Tp.L_{\mathrm{Ad}_{h^{-1}}X}(g\cdot h)$$

a platí:

$$\begin{aligned}Tp.L_{\mathrm{Ad}_{h^{-1}}X}(g\cdot h) &= Tp(T\lambda_{gh}(\mathrm{Ad}_{h^{-1}}X)) = Tp(T\lambda_{gh}(T\lambda_{h^{-1}}T\rho^h.X)\\ &= Tp(T\lambda_g T\rho^h.X) = Tp(T\rho^h.L_X(g)) = Tp.L_X(g).\end{aligned}$$

Dále, nechť $\{g, X + \mathfrak{h}\}$, $\{g', Y + \mathfrak{h}\}$ takové, že $Tp.L_X(g) = Tp.L_Y(g')$. Potom existuje $h \in H$ tak, že $g' = g \cdot h$. Z předchozího výpočtu $Tp.L_Y(g \cdot h) = Tp.L_Y(g') = Tp.L_X(g) = Tp.L_{\mathrm{Ad}_{h^{-1}}X}(g \cdot h)$ a tedy $\{g', Y + \mathfrak{h}\} = \{g \cdot h, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}X + \mathfrak{h}\}$. Tedy jde o injektivní zobrazení. Protože prostory jsou stejné dimenze, jedná se opravdu o izomorfismus. $\square$

Tečný bandl je tedy asociovaný bandl k $G \longrightarrow G/H$ se standardním fibrem $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Je tedy homogenním bandlem. Akce grupy G na G/H se zde rozšiřuje dle předchozího na celý bandl. Tato akce se v tomto případě shoduje s akcí indukovanou levým násobením a tečným funktorem.

Z předchozího lemmatu plyne, že kotečný prostor $T^*(G/H)$ je homogenní bandl tvaru $G \times_H (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ vzhledem k akci H na $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ indukované z duální adjungované reprezentace. Úvahy lze rozšířit na libovolný tenzorový bandl. Pak $\bigotimes^k T(G/H) \otimes \bigotimes^l T^*(G/H) \simeq G \times_H \bigotimes^k(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \otimes \bigotimes^l(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ vzhledem k akci H na $\bigotimes^k(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \otimes \bigotimes^l(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ indukované ze stejného tenzorového součinu adjungované a koadjungované reprezentace. Akce na tomto homogenním bandlu odpovídá akci indukované z funktoru $\bigotimes^k T \otimes \bigotimes^l T^*$.

Riemannova metrika je řez r bandlu $\bigotimes^2 T^*(G/H) \longrightarrow G/H$, kde $r(x)$ je pozitivně definitní kvadratická forma pro každé $x \in G/H$. Nás navíc zajímají metriky invariantní vůči levé akci G. Bandl $\bigotimes^2 T^*(G/H) \longrightarrow G/H$ je homogenní bandl tvaru $G \times_H \bigotimes^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \longrightarrow G/H$ a akce na tomto bandlu odpovídá akci, vůči které hledáme invariantní prvky. G-invariantní řezy tohoto bandlu jsou ve vzájemně jednoznačné korespondenci s H-invariantními prvky v příslušné koadjungované reprezentaci na $\bigotimes^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$. Navíc z důkazu Frobeniovy reciprocity plyne, že přechodem k těmto prvkům se pozitivní definitnost zachovává.

Věta 2.5. *Homogenní prostor G/H připouští G-invariantní Riemannovu metriku právě tehdy, když obraz $H_1 \subset GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ grupy H při zobrazení, které je zúžení adjungované akce G na podgrupu H, je obsažen v kompaktní podgrupě $GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$.*

Důkaz. Hledáme invariantní prvky na $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \otimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ při reprezentaci $(\underline{\mathrm{Ad}}^* \otimes \underline{\mathrm{Ad}}^*)$ grupy H, tedy prvky takové, že $(\underline{\mathrm{Ad}}^* \otimes \underline{\mathrm{Ad}}^*)_h(X^* \otimes Y^*) = (X^* \otimes Y^*)$ pro všechna $h \in H$. Z definice tenzorového součinu $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \otimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* = L(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}; \mathbb{R})$ prvku $(X^* \otimes Y^*)$ odpovídá nějaké $f : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineární. Invariantní prvky jsou ty, pro které $(\underline{\mathrm{Ad}}^* \otimes \underline{\mathrm{Ad}}^*)_h f(V_1, V_2) = f(\underline{\mathrm{Ad}}_{h^{-1}}V_1, \underline{\mathrm{Ad}}_{h^{-1}}V_2) = f(V_1, V_2)$ pro všechna $V_1, V_2 \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Navíc f je pozitivně definitní. Tedy existence Riemannovy metriky je ekvivalentní existenci H_1-invariantního skalárního součinu na $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Jestliže takový existuje, grupa

H_1 je obsažena v ortogonální grupě $O(n)$ tohoto součinu. V následujícím lemmatu ukážeme, že $O(n)$ je kompaktní.

Naopak, nechť K je kompaktní podgrupa $GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$, která obsahuje H_1. Najdeme K-invariantní, a tedy i H_1-invariantní skalární součin na $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Nechť $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je libovolný skalární součin. Definujeme nový součin

$$[u, v] = \int_K \langle h \cdot u, h \cdot v \rangle \mathrm{d}h,$$

kde $\mathrm{d}h$ označuje míru invariantní vůči levému násobení. Fakt, že se jedná o skalární součin plyne z předpisu a z toho, že $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalární součin. Pro tento součin platí, že $[h \cdot u, h \cdot v] = [u, v]$ neboť

$$[h \cdot u, h \cdot v] = \int_K \langle h' \cdot h \cdot u, h' \cdot h \cdot v \rangle \mathrm{d}h' = \int_K \langle h' \cdot u, h' \cdot v \rangle \mathrm{d}h' = [u, v].$$

Součin je K-invariantní a tedy H_1-invariantní. □

Lemma 2.6. *Grupa $O(n)$ je kompaktní.*

Důkaz. Ukážeme, že $O(n)$ je uzavřená a omezená v $\mathbb{R}^{n^2}$. Definujeme zobrazení $s : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $A \longmapsto A \cdot A^T$. Pro $A \in O(n)$ je $s(A) = E$ a tedy $O(n)$ je jádro tohoto zobrazení, tedy vzor uzavřené množiny. Tedy je $O(n)$ uzavřená.

Pro každou $A \in O(n)$ sloupce A tvoří ortonormální systém a mají velikost 1. Z toho plyne omezenost. □

2.2 Invariantní konexe na kanonickém bandlu

Nechť G je Lieova grupa, $H \subset G$ je uzavřená podgrupa a G/H je homogenní prostor. Budeme se zabývat hlavními konexemi na kanonickém bandlu, které jsou invariantní vůči levé akci λ grupy G na G/H. G-invariance znamená, že pro formu hlavní konexe γ platí $(\lambda_g)^*\gamma = \gamma$ pro každé $g \in G$.

Věta 2.7. *Nechť G/H je homogenní prostor, $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra G. Nechť $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ Lieova podalgebra, která je Lieovou algebrou $H \subset G$.*

Potom G-invariantní hlavní konexe na kanonickém bandlu $p : G \longrightarrow G/H$ existuje právě tehdy, když existuje H-ekvivariantní projekce $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$, kde akce H na obou stranách je indukovaná adjungovanou akcí G.

Důkaz. Předpokládejme, že máme dánu G-invariantní konexi na kanonickém bandlu $p : G \longrightarrow G/H$, přesněji, že máme dánu formu hlavní konexe $\gamma \in \Omega(G, \mathfrak{h})$. Pro γ platí, že $(\rho^h)^*\gamma = \mathrm{Ad}_{h^{-1}} \circ \gamma$ a $\gamma(\zeta_X) = X$ pro všechna $X \in \mathfrak{h}$ (ζ_X označuje fundamentální vektorové pole generované X). Platí $\zeta_X(u) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\, \rho^{\exp t \cdot X}(u) = T_e\lambda_u.X = L_X(u)$, tedy fundamentální vektorová pole jsou právě levoinvariantní pole. Tedy druhou podmínku lze ekvivalentně zapsat $\gamma(L_X) = X$. Pro formu konexe γ v jednotce e grupy G je $\gamma(e) : T_eG = \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ projekce. O této projekci ukážeme, že je H-ekvivariantní. Upravujme výraz $\gamma(h)(T_e\rho^h.X)$.

$$\gamma(h)(T_e\rho^h.X) = (\rho^h)^*\gamma(e)(X) = \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(\gamma(e)(X)).$$

Dále můžeme rozepsat $gh = hh^{-1}gh$ v bodě $g = e$. Z toho $T_e\rho^h = T_e\lambda_h \circ \mathrm{Ad}_{h^{-1}}$. Výraz $\gamma(h)(T_e\rho^h.X)$ lze přepsat do tvaru

$$\begin{aligned}\gamma(h)(T_e\rho^h.X) &= \gamma(h)(T_e\lambda_h \cdot \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)) = \lambda_h^*\gamma(e)(\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)) \\ &= \gamma(e)(\mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X))\end{aligned}$$

z levoinvariance γ. Projekce $\gamma(e)$ je tedy H-ekvivariantní vůči akci Ad.

Naopak předpokládejme, že máme H-ekvivariantní projekci. Taková projekce je určena svým jádrem $\mathfrak{p}$, které je H-invariantní vůči akci Ad a $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ je tedy rozklad na $\mathrm{Ad}(H)$-moduly. Naopak, reduktivnost $\mathfrak{g}$ zadává svým rozkladem H-invariantní projekci. Ekvivalentně můžeme předpokládat, že máme tento rozklad. Ve větě 1.2 jsme dokázali, že Maurer-Cartanova forma je tvaru $\omega = \omega_\mathfrak{h} + \omega_\mathfrak{p}$, kde $\omega_\mathfrak{h}$ zadává G-invariantní hlavní konexi na kanonickém bandlu. □

Důsledek 2.8. *Na kanonickém bandlu existuje invariantní konexe právě tehdy, když je bandl izomorfní reduktivní Kleinově geometrii.*

Poznámka. Existuje-li konexe na kanonickém bandlu, potom na každém homogenním bandlu přirozeně vzniká indukovaná konexe. Je-li kanonická konexe navíc levoinvariantní, potom i všechny indukované konexe jsou levoinvariantní. Více o indukovaných konexích lze najít v [**KMS**].

2.3 Invariantní afinní konexe

Popíšeme podmínky existence lineární konexe na $T(G/H) \longrightarrow G/H$, která je invariantní vůči levé akci λ grupy G na G/H. Nejprve připomeňme, že lineární konexe ∇ na varietě M je zobrazení $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, $(\xi, \eta) \longmapsto \nabla_\xi(\eta)$ splňující následující podmínky

1. $\nabla_\xi(\eta_1 + \eta_2) = \nabla_\xi(\eta_1) + \nabla_\xi(\eta_2)$
2. $\nabla_\xi(f\eta) = (\xi f)\eta + f\nabla_\xi(\eta)$
3. $\nabla_{\xi_1+\xi_2}(\eta) = \nabla_{\xi_1}(\eta) + \nabla_{\xi_2}(\eta)$

4. $\nabla_{f\xi}(\eta) = f\nabla_{\xi}(\eta)$

pro libovolná vektorová pole $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ a funkci f. Pevnou volbou vektorového pole $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ získáme lineární zobrazení $\nabla_\xi : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$. Afinní konexe je invariantní vůči levému násobení, jestliže $\lambda_g^* \nabla_\xi(\eta) = \nabla_{\lambda_g^*\xi}(\lambda_g^*\eta)$ pro každé $g \in G$.

Definice 2.2. Zobrazení

$$\begin{aligned} L_\xi : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ \eta &\longmapsto \nabla_\xi(\eta) - [\xi, \eta] \end{aligned}$$

se nazývá *Nomizu operátor.*

Lemma 2.9. *Pro Nomizu operátor platí:*

1. $L_\xi(\eta_1 + \eta_2) = L_\xi(\eta_1) + L_\xi(\eta_2)$
2. $L_\xi(f\eta) = fL_\xi(\eta)$
3. $L_{\xi_1+\xi_2}(\eta) = L_{\xi_1}(\eta) + L_{\xi_2}(\eta)$
4. $L_{f\xi}(\eta) = fL_\xi(\eta) + (\eta f)\xi$

pro libovolná vektorová pole $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ a funkci f.

Důkaz. Ověří se přímým výpočtem s využitím vlastností lineární konexe a Lieovy závorky.

$$\begin{aligned} L_\xi(\eta_1 + \eta_2) &= \nabla_\xi(\eta_1 + \eta_2) - [\xi, \eta_1 + \eta_2] \\ &= \nabla_\xi(\eta_1) + \nabla_\xi(\eta_2) - [\xi, \eta_1] - [\xi, \eta_2] = L_\xi(\eta_1) + L_\xi(\eta_2) \\ L_\xi(f\eta) &= \nabla_\xi(f\eta) - [\xi, f\eta] = (\xi f)\eta + f\nabla_\xi(\eta) - f[\xi, \eta] - (\xi f)\eta \\ &= f(\nabla_\xi(\eta) - [\xi, \eta]) = fL_\xi(\eta) \\ L_{\xi_1+\xi_2}(\eta) &= \nabla_{\xi_1+\xi_2}(\eta) - [\xi_1 + \xi_2, \eta] \\ &= \nabla_{\xi_1}(\eta) + \nabla_{\xi_2}(\eta) - [\xi_1, \eta] - [\xi_2, \eta] = L_{\xi_1}(\eta) + L_{\xi_2}(\eta) \\ L_{f\xi}(\eta) &= \nabla_{f\xi}(\eta) - [f\xi, \eta] \\ &= f\nabla_\xi(\eta) - f[\xi, \eta] + (\eta f)\xi = fL_\xi(\eta) + (\eta f)\xi. \end{aligned}$$

□

Naopak, máme-li operátory L_ξ s vlastnostmi uvedenými v předchozím lemmatu, můžeme z nich sestrojit lineární konexi.

Lemma 2.10. *Nechť pro každé $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ máme operátor $L_\xi : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ splňující vlastnosti uvedené v lemmatu 2.9 pro všechna $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$. Pak předpis*

$$\nabla_\xi(\eta) = L_\xi(\eta) + [\xi, \eta]$$

definuje lineární konexi na M.

Důkaz. Přímým výpočtem ověříme vlastnosti lineární konexe.

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi(\eta_1 + \eta_2) &= L_\xi(\eta_1 + \eta_2) + [\xi, \eta_1 + \eta_2] \\
&= L_\xi(\eta_1) + L_\xi(\eta_2) + [\xi, \eta_1] + [\xi, \eta_2] = \nabla_\xi(\eta_1) + \nabla_\xi(\eta_2) \\
\nabla_\xi(f\eta) &= L_\xi(f\eta) + [\xi, f\eta] = fL_\xi(\eta) + f[\xi, \eta] + (\xi f)\eta \\
&= f\nabla_\xi(\eta) + (\xi f)\eta \\
\nabla_{\xi_1+\xi_2}(\eta) &= L_{\xi_1+\xi_2}(\eta) + [\xi_1 + \xi_2, \eta] \\
&= L_{\xi_1}(\eta) + L_{\xi_2}(\eta) + [\xi_1, \eta] + [\xi_1, \eta] = \nabla_{\xi_1}(\eta) + \nabla_{\xi_2}(\eta) \\
\nabla_{f\xi}(\eta) &= L_{f\xi}(\eta) + [f\xi, \eta] = fL_\xi(\eta) + (\eta f)\xi + f[\xi, \eta] - (\eta f)\xi \\
&= f(L_\xi(\eta) + f[\xi, \eta]) = f\nabla_\xi(\eta)
\end{aligned}$$

□

Tedy zadat na varietě M lineární konexi je ekvivalentní tomu, zadat na varietě tyto operátory.

Uvažujme případ, kdy varietou M je homogenní prostor G/H. Předpokládejme, že na G/H máme lineární konexi ∇. Uvidíme, že v tomto případě stačí znát tyto operátory pro fundamentální pole.

Fundamentální pole na G/H jsou tvaru $\zeta_X(gH) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\, \lambda_{\exp tX}(gH) \in \mathfrak{X}(G/H)$ pro $X \in \mathfrak{g}$. Protože akce λ je tranzitivní, platí v každém bodě gH variety G/H, že $\zeta_X(gH)$ pro všechna $X \in \mathfrak{g}$ tvoří celý tečný prostor $T_{gH}(G/H)$. Potom při přechodu k lineární konexi umíme $\nabla_{\zeta_X}\eta$ pro libovolné $X \in \mathfrak{g}$, $\eta \in \mathfrak{X}(G/H)$. Nechť $\xi \in \mathfrak{X}(G/H)$ není fundamentální vektorové pole. Pak ale pro každé $gH \in G/H$ existuje $X \in \mathfrak{g}$ takové, že $\xi(gH) = \zeta_X(gH)$ a tedy $\nabla_\xi\eta(gH) = \nabla_{\zeta_X}\eta(gH)$. Lineární konexi tedy vyjádříme pouze pomocí operátorů pro fundamentální vektorová pole.

Věta 2.11. *Na homogenním prostoru G/H existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi G-invariantními afinními konexemi a H-homomorfismy $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow L(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ takovými, že $\Phi(X) = \underline{\mathrm{ad}}_X$ pro všechna $X \in \mathfrak{h}$. Zde $\underline{\mathrm{ad}}$ označuje akci na $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ indukovanou z akce* ad *na $\mathfrak{g}$.*

Důkaz. Předpokládejme, že na G/H máme konexi ∇ invariantní vůči levé akci λ grupy G. Od této konexe přejdeme k Nomizu operátoru. Levoinvariance této konexe a invariance Lieovy závorky vůči všem difeomorfismům zadává ekvivalentní podmínku invariance Nomizu operátoru:

$$\lambda_g^*(L_\xi(\eta)) = \lambda_g^*\nabla_\xi(\eta) - \lambda_g^*[\xi,\eta] = \nabla_{\lambda_g^*\xi}(\lambda_g^*\eta) - [\lambda_g^*\xi, \lambda_g^*\eta] = L_{\lambda_g^*\xi}(\lambda_g^*\eta)$$

pro všechna $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(G/H)$ a $g \in G$. Dále pro $g \in G$ a $X \in \mathfrak{g}$ platí $\lambda_g^*\zeta_X(u) = T\lambda_{g^{-1}}\zeta_X(g \cdot u) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\, g^{-1} \cdot \exp tX \cdot g \cdot u = \zeta_{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}X}(u)$. Z toho plyne

$$T\lambda_{g^{-1}} \circ L_{\zeta_X}(\eta)(gH) = L_{\zeta_{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}X}}(o) \circ T\lambda_{g^{-1}}(\eta)(gH).$$

To jde přepsat jako

$$L_{\zeta_X}(\eta)(gH) = T\lambda_g \circ L_{\zeta_{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}X}}(o) \circ T\lambda_{g^{-1}}(\eta)(gH). \qquad (*)$$

To mimo jiné znamená, že Nomizu operátor v libovolném bodě lze vyjádřit pomocí operátoru fundamentálního pole v o. Ztotožněním $T_o(G/H)$ s $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ získáme zobrazení $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow L(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$, $X \longmapsto \Phi_X$ dané vztahem

$$\Phi_X(Y + \mathfrak{h}) = L_{\zeta_X}(T_e p.Y)(o),$$

kde $p : G \longrightarrow G/H$. Dále připomeňme, že levá akce $\underline{\mathrm{Ad}}_h$ pro $h \in H$ na $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ indukovaná akcí Ad odpovídá $T_e\lambda_h$. Podmínka $(*)$ v $gH = o$, $\eta \in T_o(G/H)$ potom znamená $\Phi_{\mathrm{Ad}_h X} = \underline{\mathrm{Ad}}_h \circ \Phi_X \circ \underline{\mathrm{Ad}}_{h^{-1}}$, neboli $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow L(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ je H-homomorfismus. Nyní uvažujme $X \in \mathfrak{h}$. Pro takové X je $\zeta_X(o) = 0$ a potom $L_{\zeta_X}(\eta)(o) = \nabla_{\zeta_X}(\eta)(o) - [\zeta_X, \eta](o) = -[\zeta_X, \eta](o)$. V definici Φ jako Nomizu operátoru je i η fundamentální. Navíc $-[\zeta_X, \zeta_Y] = \zeta_{[X,Y]}$. Z toho plyne přímo $\Phi_X = \underline{\mathrm{ad}}_X$ pro $X \in \mathfrak{h}$, kde $\underline{\mathrm{ad}}_X(Y + \mathfrak{h}) = [X, Y] + \mathfrak{h}$.

Naopak, mějme dáno zobrazení Φ s vlastnostmi uvedenými ve větě. Definujme operátory L_{ζ_X} pro každé $X \in \mathfrak{g}$ formulí

$$L_{\zeta_X}(\eta)(gH) = T\lambda_g \circ \Phi_{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}X} \circ T\lambda_{g^{-1}}(\eta)(gH).$$

Tento předpis je korektní, neboť pro $h \in H$ je $T_e\lambda_h = \underline{\mathrm{Ad}}_h$ a pro $g, g' \in G$ takové, že $gH = g'H$ existuje $h \in H$ takové, že $g' = gh$, a potom

$$\begin{aligned}
L_{\zeta_X}(\eta)(g'H) &= T\lambda_{g'} \circ \Phi_{\mathrm{Ad}_{(g')^{-1}}X} \circ T\lambda_{(g')^{-1}}(\eta)(g'H)\\
&= T\lambda_{gh} \circ \Phi_{\mathrm{Ad}_{(gh)^{-1}}X} \circ T\lambda_{(gh)^{-1}}(\eta)(gH)\\
&= T\lambda_g \circ T\lambda_h \circ \Phi_{\mathrm{Ad}_{(h^{-1}.g^{-1})}X} \circ T\lambda_{h^{-1}} \circ T\lambda_{g^{-1}}(\eta)(gH)\\
&= T\lambda_g \circ \underline{\mathrm{Ad}}_h \circ \Phi_{\mathrm{Ad}_{h^{-1}}\mathrm{Ad}_{g^{-1}}X} \circ \underline{\mathrm{Ad}}_{h^{-1}} \circ T\lambda_{g^{-1}}(\eta)(gH)\\
&= T\lambda_g \circ \Phi_{\mathrm{Ad}_h\mathrm{Ad}_{h^{-1}}\mathrm{Ad}_{g^{-1}}X} \circ T\lambda_{g^{-1}}(\eta)(gH)\\
&= T\lambda_g \circ \Phi_{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}X} \circ T\lambda_{g^{-1}}(\eta)(gH) = L_{\zeta_X}(\eta)(gH).
\end{aligned}$$

Dále pro tyto operátory a pro levou akci λ platí

$$\begin{aligned}\lambda_g^*(L_{\zeta_X}(\eta)(g'H)) &= T\lambda_{g^{-1}}L_{\zeta_X}(\eta)(gg'H)\\ &= T\lambda_{g^{-1}}T\lambda_g T\lambda_{g'} \circ \Phi_{\mathrm{Ad}_{(gg')^{-1}}X} \circ T\lambda_{(g')^{-1}}T\lambda_{g^{-1}}(\eta)(gg'H)\\ &= T\lambda_{g'} \circ \Phi_{\mathrm{Ad}_{(gg')^{-1}}X} \circ \lambda_{gg'}^*\eta(o).\end{aligned}$$

Platí také

$$\begin{aligned}L_{\lambda_g^*\zeta_X}(\lambda_g^*\eta)(g'H) &= T\lambda_{g'} \circ \Phi_{\mathrm{Ad}_{(g')^{-1}}\mathrm{Ad}_{g^{-1}}X} \circ T\lambda_{(g')^{-1}}T\lambda_{g^{-1}}(\eta)(gg'H)\\ &= T\lambda_{g'} \circ \Phi_{\mathrm{Ad}_{(gg')^{-1}}X} \circ \lambda_{gg'}^*\eta(o)\end{aligned}$$

a tedy jsou tyto operátory levoinvariantní. Dále definujme

$$\begin{aligned}L_{f\zeta_X}(\eta)(gH) &= fL_{\zeta_X}(\eta)(gH) + (\eta f)\zeta_X(gH)\\ &= fT\lambda_g \circ \Phi_{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}X} \circ T\lambda_{g^{-1}}(\eta)(gH) + (\eta f)\zeta_X(gH).\end{aligned}$$

Tyto operátory jsou korektně definovány a jsou invariantní vůči levé akci, protože $L_{\zeta_X}(\eta)$ jsou korektní a levoinvariantní. Uvažujme případ, kdy $f = k$ je konstantní funkce. Potom

$$L_{f\zeta_X}(\eta) = fL_{\zeta_X}(\eta) + (\eta f)\zeta_X = kL_{\zeta_X}(\eta),$$

protože $(\eta f)\zeta_X = 0$ pro konstantní funkce. Pro funkci $f = 1$ je potom $L_{f\zeta_X}(\eta) = L_{\zeta_X}(\eta)$, a $L_{\zeta_X}(\eta)$ jsou speciálním případem $L_{f\zeta_X}(\eta)$.

Uvažujme nyní vlastnosti uvedené v lemmatu 2.9. Tyto vlastnosti operátory jistě splňují. Jedná se tedy o operátory, z kterých lze sestrojit pomocí postupu uvedeného výše afinní konexi. Uvažujme nyní tuto konexi $\nabla_{\zeta_X}(\eta) = L_{\zeta_X}(\eta) + [\zeta_X, \eta]$ v počátku. Pak $T_o(G/H) \ni \eta(o) = Y + \mathfrak{h}$ pro nějaké $Y \in \mathfrak{g}$ a pro $X \in \mathfrak{h}$ platí $L_{\zeta_X}(\eta)(o) = \Phi_X(Y + \mathfrak{h}) = \underline{\mathrm{ad}}_X(Y + \mathfrak{h}) = [X, Y] + \mathfrak{h}$. Z vlastnosti $-[\zeta_X, \zeta_Y] = \zeta_{[X,Y]}$ a levoinvariance plyne $\nabla_{\zeta_X}(\eta) = 0$ pro $X \in \mathfrak{h}$. Sestrojili jsme tedy afinní konexi na G/H. Vzájemná jednoznačnost těchto konstrukcí plyne z toho, že zúžení operátoru $L_{\zeta_X}(\eta)$ odpovídá Φ_X a rozšíření Φ_X je definováno podmínkou levoinvariance. □

Důsledek 2.12. *Na reduktivním homogenním prostoru G/H, kde $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi G-invariantními afinními konexemi a H-homomorfismy $\Phi_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \longrightarrow L(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$.*

Důkaz. Zobrazení $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow L(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ z předchozího důkazu je dáno vztahem

$$\Phi(X) = \begin{cases}\Phi_{\mathfrak{p}}(X) & \text{pro } X \in \mathfrak{p},\\ \underline{\mathrm{ad}}_X & \text{pro } X \in \mathfrak{h}\,.\end{cases}$$

Z reduktivnosti je jasné, že $\Phi(X)$ je H-homomorfismus mající potřebné vlastnosti. □

To mimo jiné znamená, že každý reduktivní prostor připouští invariantní afinní konexi. Uvažujme $\Phi_{\mathfrak{p}}$ dané předpisem:

$$\Phi_{\mathfrak{p}} : X \longrightarrow (\mathbb{O}_X : Y \longrightarrow 0)$$

pro všechna $X \in \mathfrak{p}$, $Y \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Uvažujme $X \in \mathfrak{p}$ libovolné. Pak $\mathrm{Ad}_h X \in \mathfrak{p}$ a tedy $\mathbb{O}_{\mathrm{Ad}_h X}(Y) = 0$ pro všechna $Y \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Nyní uvažujme $\underline{\mathrm{Ad}}_h \circ \mathbb{O}_X \circ \underline{\mathrm{Ad}}_{h^{-1}}(Y)$. Prvek $Y = W + \mathfrak{h}$, kde $W \in \mathfrak{g}$, a protože $\mathrm{Ad}_h(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$, je $\underline{\mathrm{Ad}}_h \circ \mathbb{O}_X \circ \underline{\mathrm{Ad}}_{h^{-1}}(W + \mathfrak{h}) = \underline{\mathrm{Ad}}_h \circ \mathbb{O}_X(\mathrm{Ad}_{h^{-1}} W + \mathfrak{h}) = \underline{\mathrm{Ad}}_h(0) = 0$. Toto platí pro všechna $h \in H$ a $\Phi_{\mathfrak{p}} : X \longrightarrow \mathbb{O}_X$ definuje invariantní afinní konexi.

Definice 2.3. Afinní konexe na reduktivním prostoru odpovídající $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{O}_X$ se nazývá *kanonická konexe*.

3 Symetrické prostory

3.1 Symetrický prostor a symetrická Lieova algebra

Symetrické prostory jsou speciálním případem homogenních prostorů. Důležitým pojmem je zde *involuce*, tj. morfismus σ takový, že $\sigma \circ \sigma = Id$.

Definice 3.1. Nechť G je souvislá Lieova grupa, H její uzavřená podgrupa. *Symetrický prostor* je trojice (G, H, σ), kde σ je involutivní automorfismus grupy G takový, že H leží mezi G_σ a souvislou komponentou G_σ obsahující identitu. G_σ označuje uzavřenou podgrupu G bodů, které σ nechává na místě.

Symetrický prostor se nazývá *efektivní*, respektive *lokálně efektivní*, jestliže příslušný homogenní prostor G/H má tuto vlastnost.

Nechť (G, H, σ) je symetrický prostor. Pro každý bod x v homogenním prostoru G/H lze zkonstruovat involutivní difeomorfismus s_x, pro který je x izolovaným pevným bodem. Tento difeomorfismus se nazývá *symetrie v x.*

Pro počátek $o = eH$ homogenního prostoru G/H je s_o definován jako involutivní difeomorfismus G/H indukovaný automorfismem σ na G.

Lemma 3.1. *Nechť s_o je involutivní difeomorfismus prostoru G/H indukovaný automorfismem σ. Pak o je izolovaným pevným bodem s_o.*

Důkaz. o je jistě pevným bodem s_o, neboť $s_o(o) = s_o(eH)$ a $eH = H \subset G_\sigma$. Tedy $\sigma(h) = h$ pro všechna $h \in H$ a tedy $s_o(o) = s_o(eH) = eH = o$.

Nechť gH je pevným bodem s_o, kde $g \in G$. To z definice znamená, že $\sigma(g) \in gH$. Položme $h = g^{-1} \cdot \sigma(g)$. Protože $\sigma(g) \in gH$, je $h \in H$. Víme, že $\sigma(h) = h$ a tedy

$$\begin{aligned} h^2 &= h \cdot \sigma(h) = g^{-1} \cdot \sigma(g) \cdot \sigma(g^{-1} \cdot \sigma(g)) \\ &= g^{-1} \cdot \sigma(g) \cdot \sigma(g^{-1}) \cdot \sigma(\sigma(g)) = g^{-1} \cdot \sigma(g) \cdot \sigma(g^{-1}) \cdot g \\ &= g^{-1} \cdot g = e. \end{aligned}$$

Tedy h^2 je jednotkový prvek G. Jestliže je g dostatečně blízko jednotkovému prvku, pak h je také dostatečně blízko jednotkovému prvku. Tedy h musí být jednotkový prvek a $\sigma(g) = g$. Z invariance a blízkosti, g leží v komponentě identity G_σ a tedy v H. To dokazuje izolovanost. □

Pro $x = gH$ položíme $s_x = \lambda_g \circ s_o \circ \lambda_{g^{-1}}$, kde λ_g je akce G na G/H indukovaná násobením. Ukážeme, že tato definice je korektní. Nechť $g, g' \in G$ takové, že $gH = g'H$. Pak existuje $h \in H$ takové, že $g' = g \cdot h$ a

$$\begin{aligned} s_x &= s_{(g'H)} = \lambda_{g'} \circ s_o \circ \lambda_{(g')^{-1}} = \lambda_{g \cdot h} \circ s_o \circ \lambda_{(g \cdot h)^{-1}} \\ &= \lambda_g \circ \lambda_h \circ s_o \circ \lambda_{h^{-1}} \circ \lambda_{g^{-1}} = \lambda_g \circ s_o \circ \lambda_{g^{-1}} = s_{(gH)} = s_x. \end{aligned}$$

Z definice plyne, že x je pevným bodem s_x :

$$\begin{aligned} s_x(x) &= s_{(gH)}(gH) = \lambda_g \circ s_o \circ \lambda_{g^{-1}}(gH) = \lambda_g \circ s_o(o) \\ &= \lambda_g(o) = \lambda_g(eH) = gH = x. \end{aligned}$$

Izolovanost tohoto pevného bodu plyne z izolovanosti o vůči s_o.

Definice 3.2. *Symetrická Lieova algebra (involutivní Lieova algebra)* je trojice $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$, kde $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra, $\mathfrak{h}$ je podalgebra $\mathfrak{g}$ a σ je involutivní automorfismus algebry $\mathfrak{g}$ takový, že $\mathfrak{h}$ sestává ze všech prvků $\mathfrak{g}$, které σ nechává na místě.

Každému symetrickému prostoru (G, H, σ) přirozeně odpovídá symetrická Lieova algebra, a to tak, že $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra G a $\mathfrak{h}$ je Lieova algebra H. Automorfismus na algebře se indukuje tečným zobrazením v jednotce k automorfismu σ na grupě. Protože $e \in H \subset G_\sigma$, indukované zobrazení na algebře je automorfismus $\mathfrak{g}$. Je-li $\sigma \circ \sigma = Id$ na grupě G, pak

$$T_e\sigma \circ T_e\sigma = T_e(\sigma \circ \sigma) = T_e Id_G = Id_{T_eG}$$

a tedy automorfismus na algebře je involutivní. Protože pro $X \in \mathfrak{h}$ je $\exp tX \subset H$ a tedy $\sigma(\exp tX) = \exp tX$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, je $T_e\sigma(X) = X$ pro všechna $X \in \mathfrak{h}$. Pro $X \notin \mathfrak{h}$ je $\exp tX \subset G$. Je-li v G_σ, pak musí být v H a $X \in \mathfrak{h}$, což je spor s $X \notin \mathfrak{h}$. Není-li v G_σ, pak $\sigma(\exp tX) \neq \exp tX$ a tedy $T_e\sigma(X) \neq X$. Tedy $\mathfrak{h}$ jsou přesně pevné body $T_e\sigma$ a $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, T_e\sigma)$ je symetrická Lieova algebra příslušná symetrickému prostoru (G, H, σ).

Poznámka. Bývá zvykem nerozlišovat automorfismus na symetrickém prostoru a na příslušné Lieově algebře a v obou případech jej označovat σ. Z kontextu většinou bývá jasné, o který se jedná. Tam, kde mohou nastat nejasnosti, budeme tyto automorfismy rozlišovat.

Definice 3.3. Nechť $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ je symetrická Lieova algebra. Protože σ je involutivní, vlastní hodnoty tohoto automorfismu jako lineárního zobrazení vektorových prostorů mohou být 1 a -1. Vlastní prostor příslušný vlastní hodnotě 1 je jistě $\mathfrak{h}$, neboť $\sigma(X) = X = 1 \cdot X$ právě pro $X \in \mathfrak{h}$. Označme $\mathfrak{p}$ vlastní prostor příslušný hodnotě -1. Pak rozklad vektorového prostoru

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$$

se nazývá *kanonický rozklad* prostoru $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$.

Věta 3.2. *Nechť $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ je kanonický rozklad symetrické Lieovy algebry $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$. Potom platí*

1. $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$

2. $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$

3. $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$.

Důkaz. 1. Tento vztah pouze vyjadřuje fakt, že $\mathfrak{h}$ je podalgebra $\mathfrak{g}$.
2. Nechť $X \in \mathfrak{h}$ a $Y \in \mathfrak{p}$. Potom

$$\sigma([X,Y]) = [\sigma(X), \sigma(Y)] = [X, -Y] = -[X,Y].$$

3. Nechť $X, Y \in \mathfrak{p}$. Potom

$$\sigma([X,Y]) = [\sigma(X), \sigma(Y)] = [-X, -Y] = [X,Y].$$

□

Jako zajímavost uveďme, že tento fakt platí i opačně:

Lemma 3.3. *Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra, kterou lze rozložit (jako vektorový prostor) ve tvaru $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ a tento rozklad splňuje:*

1. $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$

2. $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$

3. $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$.

Dále nechť $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ je lineární zobrazení (vektorových prostorů) definované vztahem:

1. $\sigma(X) = X$ *pro* $X \in \mathfrak{h}$

2. $\sigma(X) = -X$ *pro* $X \in \mathfrak{p}$

Potom σ je involutivní automorfismus $\mathfrak{g}$ (Lieovy algebry) a $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ je symetrická Lieova algebra.

Důkaz. Toto zobrazení je jistě surjektivní, protože pro $X \in \mathfrak{h}$ je vzorem X a pro $X \in \mathfrak{p}$ je vzorem $-X$. Dále je toto zobrazení injektivní, protože vzorem 0 je pouze 0. Tedy je to automorfismus vektorového prostoru. Přímým výpočtem ukážeme, že je to automorfismus Lieovy algebry. Pro $X, Y \in \mathfrak{h}$ a $Z, W \in \mathfrak{p}$ je

$$\begin{aligned}
\sigma([X,Y]) &= [X,Y] = [\sigma(X), \sigma(Y)] \\
\sigma([X,Z]) &= -[X,Z] = [X,-Z] = [\sigma(X), \sigma(Z)] \\
\sigma([W,Z]) &= [W,Z] = (-1)\cdot(-1)\cdot[W,Z] = [-W,-Z] \\
&= [\sigma(W), \sigma(Z)] \\
\sigma([W,Y]) &= \sigma(-[Y,W]) = -\sigma([Y,W]) = (-1)\cdot(-[Y,W]) \\
&= [Y,W] = -[W,Y] = [-W,Y] = [\sigma(W), \sigma(Y)]
\end{aligned}$$

a pro $X + Z, Y + W \in \mathfrak{g}$ je

$$\begin{aligned}
\sigma([X+Z, Y+W]) &= \sigma([X,Y]) + \sigma([X,W]) + \sigma([Z,Y]) + \sigma([Z,W]) \\
&= [\sigma(X), \sigma(Y)] + [\sigma(X), \sigma(W)] + [\sigma(Z), \sigma(Y)] \\
&+ [\sigma(Z), \sigma(W)] = [\sigma(X) + \sigma(Z), \sigma(Y) + \sigma(W)] \\
&= [\sigma(X+Z), \sigma(Y+W)].
\end{aligned}$$

Protože každý prvek z $\mathfrak{g}$ je ve tvaru $X + Y$ pro nějaké $X \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{p}$, σ zachovává Lieovu závorku.

Nyní, $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra, předpoklad $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ říká, že $\mathfrak{h}$ je její podalgebra. Dokázali jsme, že σ je involutivní automorfismus $\mathfrak{g}$. Navíc $\mathfrak{h}$ sestává právě z prvků, které σ nechává na místě. Tedy $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ je symetrická Lieova algebra. □

Lemma 3.4. *Nechť (G, H, σ) je symetrický prostor a $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, T_e\sigma)$ jeho symetrická Lieova algebra. Jestliže $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ je kanonický rozklad $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, T_e\sigma)$, potom*

$$\mathrm{Ad}_h(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$$

pro všechna $h \in H$.

Důkaz. Nechť $X \in \mathfrak{p}$ a $h \in H$. Potom

$$\begin{aligned}
T_e\sigma(\mathrm{Ad}_h X) &= T_e\sigma\ T\lambda_h\ T\rho^{h^{-1}} \cdot X = \frac{\partial}{\partial t}\,|_{t=0}\ \sigma \circ \lambda_h \circ \rho^{h^{-1}}(\exp tX) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\,|_{t=0}\ \sigma(h \cdot \exp tX \cdot h^{-1}) = \frac{\partial}{\partial t}\,|_{t=0}\ \sigma(h) \cdot \sigma(\exp tX) \cdot \sigma(h^{-1}) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\,|_{t=0}\ h \cdot \sigma(\exp tX) \cdot h^{-1} = \frac{\partial}{\partial t}\,|_{t=0}\ \lambda_h \circ \rho^{h^{-1}} \cdot \sigma(\exp tX) \\
&= T\lambda_h \circ T\rho^{h^{-1}} \circ T_e\sigma(X) = \mathrm{Ad}_h(-X) = -\mathrm{Ad}_h(X).
\end{aligned}$$

□

Je-li (G, H, σ) symetrický prostor s příslušnou Lieovou algebrou $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$, vzniká přirozeně homogenní prostor G/H. Homogenní prostory vzniklé tímto způsobem jsou speciální případy reduktivních prostorů. Jejich význačnost je dána vlastností $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$, kterou obecně reduktivní prostory nesplňují.

Poznámka. Někdy se také definují symetrické prostory jako reduktivní homogenní prostory, jejichž Lieova algebra splňuje předpoklady lemmatu 3.3. Je to postup opačný našemu postupu. Zde se ze symetrické Lieovy algebry konstruuje trojice (G, H, σ). Tento směr není tak jasný, vznikají zde komplikace se souvislostí a jednoduchou souvislostí Lieových grup.

3.2 Invariantní konexe na symetrických prostorech

Budeme se zabývat konexemi, které jsou invariantní vůči symetriím.

Lemma 3.5. *Nechť (G, H, σ) je symetrický prostor a G/H příslušný homogenní prostor. Potom G/H připouští G-invariantní afinní konexi.*

Důkaz. Plyne přímo z toho, že homogenní prostor příslušný symetrickému prostoru je reduktivní. □

Definice 3.4. Nechť M je hladká varieta s afinní konexí. Symetrie s_x v x pro $x \in M$ je difeomorfismus okolí x na sebe, který zobrazuje geodetiku s počáteční podmínkou v $x \in M$, $X \in T_xM$ v čase 1 na geodetiku s počáteční podmínkou v $x \in M$, $-X \in T_xM$ v čase 1. Jsou-li U, V dvě okolí bodu x, pak se na $U \cap V$ shodují, a tedy symetrie je jednoznačná. $T_x s_x$ je tvaru $-Id_x$, kde Id_x je identita na T_xM. Jestliže s_x je afinní transformace pro každé $x \in M$, pak M se nazývá *afinní lokálně symetrický prostor.*

Poznámka. Silnější pojem je *afinní symetrický prostor*, kde každou symetrii lze rozšířit na celé M. O tomto prostoru lze ukázat, že je symetrickým prostorem ve smyslu naší definice. Dalším příkladem mohou být *Riemannovy (lokálně) symetrické prostory.* Definice je obdobná jako u afinních, uvažuje se varieta s Riemannovou metrikou a místo afinní transformace se požaduje izometrie. Více v [**KN2**].

Lemma 3.6. *Na afinním lokálně symetrickém prostoru se tenzorové pole lichého stupně, které je invariantní vůči s_x, vynuluje v x.*

Důkaz. Tečné zobrazení je tvaru $-Id_x$, symetrie zobrazuje tenzorové pole K stupně p na $(-1)^p K$. Pro p liché je zřejmě $(-1)^p K(x) = K(x)$ jedině pro $K = 0$. □

Věta 3.7. *Nechť* (G, H, σ) *je symetrický prostor. Kanonická konexe je jediná afinní konexe na homogenním prostoru* G/H*, která je invariantní vůči symetriím* G/H*.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že kanonická konexe je invariantní vůči symetriím s_x pro všechna $x \in G/H$. Symetrie s_x pro $x = gH$ je dána $s_x = \lambda_g \circ s_o \circ \lambda_{g^{-1}}$. Kanonická konexe je invariantní vůči levé akci G a proto stačí ukázat, že kanonická konexe je invariantní vůči s_o. Jistě s_o zobrazuje afinní konexi na afinní konexi. Platí

$$\begin{aligned}\lambda_g \circ s_o(g'H) &= \lambda_g(\sigma(g')H) = g \cdot \sigma(g')H = \sigma(\sigma(g) \cdot g')H \\ &= s_o(\sigma(g) \cdot g'H)) = s_o \circ \lambda_{\sigma(g)}(g'H)\end{aligned}$$

pro $g, g' \in G$. To implikuje, že s_o zobrazuje G-invariantní konexi na G-invariantní konexi. Přejdeme k ekvivalentní podmínce pro morfismy $\mathfrak{p} \longrightarrow L(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. Morfismu Φ se přiřazuje nějaký morfismus Φ'. Z předchozího je jasné, že $\Phi' = -\Phi$. Kanonická konexe odpovídá $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{O}_X$ pro $X \in \mathfrak{p}$ a v tomto případě $\Phi_X = \Phi_{-X}$. Je tedy kanonická konexe invariantní vůči s_o.

Nyní ukážeme, že symetrie konstruované z σ mají smysl jako symetrie afinního lokálně symetrického prostoru (uvažujeme varietu G/H s kanonickou konexí), a z toho jednoznačnost konexe invariantní vůči involucím. Protože σ zobrazuje $X \in \mathfrak{p}$ na $-X \in \mathfrak{p}$, $T_x s_x$ splývá s $-Id_x$. Protože s_x je afinní transformace (respektující kanonickou konexi), platí

$$s_x(\gamma_X(1)) = \gamma_{-Id_x(X)}(1),$$

kde γ_X je geodetika s počáteční podmínkou $x \in G/H$, $X \in T_x(G/H)$. Požadovaná vlastnost plyne z $-Id_x(X) = -X$.

Z lemmatu 3.6 víme, že tenzorové pole lichého stupně invariantní vůči symetriím na afinním lokálně symetrickém prostoru vymizí. Uvažujme dvě invariantní konexe na G/H. Je známo, že rozdíl dvou konexí je tenzorové pole typu (1,2). V případě dvou konexí invariantních vůči symetriím je tento rozdíl také invariantní vůči symetriím. Protože se ale jedná o tenzorové pole lichého stupně, musí být tento rozdíl nulový. $\square$

Použitá literatura

[KMS] Kolář I., Michor P.W., Slovák J.; *Natural Operations in Differential Geometry*, elektronická verze vydání Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993, www.emis.de

[KN2] Kobayashi S., Nomizu K.; *Foundations of Differential Geometry*, volume II, INTERSCIENCE PUBLISHERS a division of John Wiley & Sons, New York London Sydney, 1969

[ČS] Čap A., Slovák J.; *Parabolic Geometries*, připravovaná publikace