PŘÍKLADY

Číselné řady

Rozhodněte o konvergenci řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n+1} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{n^n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt[k]{n}}, \qquad k \in \mathbb{N}, 0 < a < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2 \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n} \qquad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \qquad [\text{divergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n} \qquad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{1}{n}\right) \qquad [\text{divergentní}]$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln\, n)^{\ln\, n}} \qquad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \qquad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \qquad [\text{divergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \qquad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)!} \qquad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \qquad [\text{divergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) \qquad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} \qquad [\text{konvergentní}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!} \qquad [\text{divergentní}]$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(\frac{n-1}{n+1}\right) \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p$$

v závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$.

Výsledek

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n}}{1 + \sin \frac{2}{n} - \cos \frac{2}{n}} \frac{1}{n} \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}$$

Výsledek

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Výsledek: konverguje podle odmocninivého kritéria
Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3}. $[n >]$
Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-2}.
Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-1}. $[n > \mathrm{e}^{10}]$
Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-2}.
Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3}.
Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{7n}\right)^n$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3}. $[n = 9]$
Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$$

Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-2}. $[n = 9]$
Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \ln(1+2^n)$$

$[\ln(1+2^n) \le \ln 2^{n+1} = (n+1)\ln 2]$ pak podilovym a srovnavacim, konverguje
Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right) \sin 2^n \tag{1}$$

$\left[|\sin 2^n| \le 1, \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right) \le \pi\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$ pak srovnavacim, konverguje

Rozhodněte o konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^{n^2}}$$
Kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než 10^{-3}. []
Určte sdoučet řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$
aby chyba byla menší než 10^{-2}. []

Kapitola 1

NEURČITÝ INTEGRÁL

Tabulkové integrály.

Z tabulky derivací dostáváme okamžitě tabulku primitivních funkcí. V následujících vzorcích je $c \in \mathbb{R}$ libovolná konstanta:

$$\begin{aligned}
\int x^n \, dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\
\int x^\alpha \, dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad x \in (0,\infty),\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1, \\
\int \frac{1}{x} \, dx &= \ln|x| + c, \quad x \in (0,\infty) \text{ nebo } x \in (-\infty, 0), \\
\int a^x \, dx &= \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1 \text{ je konstanta}, \\
\int \sin x \, dx &= -\cos x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\int \cos x \, dx &= \sin x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx &= -\operatorname{cotg} x + c, \quad x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}, \\
\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx &= \operatorname{tg} x + c, \quad x \in ((2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2),\ k \in \mathbb{Z}, \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx &= \arcsin x + c, \quad x \in (-1,1), \\
\int \frac{1}{1+x^2} \, dx &= \operatorname{arctg} x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\int \sinh x \, dx &= \cosh x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\int \cosh x \, dx &= \sinh x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx &= \operatorname{tgh} x + c, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\int \frac{1}{\sinh^2 x} \, dx &= -\operatorname{cotgh} x + c, \quad x \in (0,\infty) \text{ nebo } x \in (-\infty, 0).
\end{aligned}$$

Poznámka 1.0.1 (k druhému vzorci v předešlé tabulce - možnost rozšíření integračních oborů)
Je-li $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, $\alpha \neq -1$, p, q nesoudělná, pak

(a)

$$\text{je-li } \alpha > 0 \text{ a } \begin{cases} q \text{ sudé, pak } x \in (0, \infty), \\ q \text{ liché, pak } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

(b)

$$\text{je-li } \alpha < 0 \text{ a } \begin{cases} q \text{ sudé, pak } x \in (0, \infty), \\ q \text{ liché, pak } x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, \infty), \end{cases}$$

PŘÍKLADY

Určité integrály

Vypočtěte integrál

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx \qquad \left[\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\ln 2\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\, dx \qquad \left[\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx \qquad \left[1 + \frac{1}{2}\pi\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^{2/3}}\, dx \qquad [6]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\, dx \qquad \left[\frac{1}{12}\pi^3\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2(x+1)}\, dx \qquad [1 - \ln 2]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\, dx \qquad [2]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\mathrm{e}} |\ln\, x|\, dx \qquad [2]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^2} dx \qquad \left[\frac{1}{2}\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\,(x+1)}\, dx \qquad [\ln 2]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx \qquad [\text{diverguje}]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_{-2}^{2} |x^3 - x|\,dx \qquad [5]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\,dx \qquad [\mathrm{e}-1]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx \qquad \left[2(\sqrt{2}-1)\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad [1]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 x\ln x\,dx \qquad \left[-\frac{1}{4}\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx \qquad [3]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_{-3}^{1} \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx \qquad [-4\pi]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_{2/\pi}^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx \qquad [1]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx \qquad [\text{diverguje}]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx \qquad [1]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \ln x dx \qquad [-1]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \qquad [\text{diverguje}]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x dx \qquad [1]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+4)^2} dx \qquad \left[\frac{1}{4}\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx \qquad [4]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \cos^2(\ln x)\, dx \qquad \left[\frac{3}{5}\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x-1}}{1+\sqrt{x-1}}\, dx \qquad \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{9}{5} - 2\ln\, 2\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\pi} x \sin^2 x\, dx \qquad \left[\frac{1}{4}\pi^2\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \arcsin\, x\, dx \qquad \left[\frac{1}{2}\pi - 1\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_{1/2}^1 x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\, dx \qquad \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2\right]$$

Vypočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx \qquad [divergje]$$

Aplikace určitého integrálů

ypočtěte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami: $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{1}{2}x^2$.
$\left[\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rovinného obrazce danného nerovnostmi: $y < 3x^3$, $y < \frac{1}{x}$, $x - y < 2$, $x > 0$.
$\left[\frac{9}{4} + 6 \cdot 3^{3/4} + \frac{1}{4}\ln 3 + \ln 2\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami: $y^2 = x + 1$, $y = x - 1$.
$\left[\frac{9}{2}\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = \mathrm{e}^{2x}$.
$\left[\frac{1}{2}((e)^2 - 1)\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami: $y = \operatorname{arctg} x$, $y = 0$, $x = 1$.
$\left[\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\ln\ 2\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami: $x^2 + y^2 = 8$, $y^2 = 2x$, $x > 0$.
$\left[\frac{4}{3} - 2\pi\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rovinného obrazce $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 < x < 1, 0 < y < \frac{\ln(x^2+x+1)}{(x+1)^2}\}$.
$\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \ln\ 2\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami: $x^2 + y^2 = 8$, $y^2 = 2x$, $x > 0$.
$\left[\frac{4}{3} - 2\pi\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rovinné oblasti, která je ohraničená osou y, křivkou $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$ a tečnou k této křivce v bodě $T = \left[1, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.
$\left[1 + \frac{1}{2\mathrm{e}}\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rovinné oblasti, která je ohraničená osou x, křivkou $x^2 + y^2 = 4$ a tečnou k této křivce v bodě $T = \left[1, \sqrt{3}\right]$.

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce daného křivkami $y = \frac{R-r}{h}x + r$, $y = 0$, $x = 0$, $x = h$, $R \geq r > 0$, $h > 0$ kolem osy x.
$\left[\frac{\pi h}{3}\left(R^2 + rR + r^2\right)\ m^3\right]$

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce daného křivkami $3x - 4y + 5 = 0$, $y = 2x$, $x = 0$ kolem osy x.
$\left[\frac{65}{48}\pi\ m^3\right]$

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce daného křivkami $y = x^2$, $y^2 = x$ kolem osy x.
$\left[\frac{3}{10}\pi\ m^3\right]$

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce daného křivkami $x = k$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = 0$, $k > a > 0$, $b > 0$ kolem osy x.
$\left[\frac{b\pi}{2a}\left[k\sqrt{k^2 - a^2} - a^2\ln(k + \sqrt{k^2 - a^2}) + a^2\ln a\right]\ m^3\right]$

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce daného křivkami $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{2}|x|$ kolem osy y.
$\left[\frac{1}{12}\pi\ m^3\right]$

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = x^2 + 2$, $y = 2x^2 + 1$ kolem osy x.
$\left[\frac{24}{5}\pi\ m^3\right]$

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, 0 < y < \mathrm{e}^{-x}\sqrt{\sin x}\}$ kolem osy x.
$\left[\frac{1}{5}\pi\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^{2\pi}}\right)\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotací rovinného obrazce $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi/4, 0 < y < \operatorname{tg} x\}$ kolem osy x.
$\left[\pi\left(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln\frac{2(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{5}}\right)\ m^2\right]$

Vypočtěte obsah povrchu koule o poloměru r.
$[4\pi r^2\ m^2]$

Vypočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = \sqrt{4+x}$, $x=-3$, $x=2$, $y=0$ kolem osy x.
$\left[\frac{5\pi}{6}\left(25-\sqrt{5}\right)\ m^2\right]$

Vypočtěte délku křivky $x=\varphi(t)=a(t-\sin t)$, $y=\psi(t)=a(1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$, $a>0$.
$[8a\ m]$

Vypočtěte délku křivky $y=1-\ln(\cos x)$, $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$.
$\left[\ln\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\ m\right]$

Vypočtěte délku křivky $y=\ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$, $x\in[\ln 2,\ln 5]$.
$\left[\ln\frac{16}{5}\ m\right]$

Vypočtěte délku křivky $y=\ln x$, $x\in[\sqrt{3},\sqrt{8}]$.
$\left[1+\operatorname{argtanh}\frac{1}{2}-\operatorname{argtanh}\frac{1}{3}\ m\right]$

Vypočtěte délku křivky $x=\varphi(t)=a(t\sin t+\cos t)$, $y=\psi(t)=a(\sin t-t\cos t)$, $t\in[0,\pi/2]$, $a>0$.
$[\pi a^2/2\ m]$

Vypočtěte délku křivky $y=e^x$, $x\in(0,1)$.
$\left[\sqrt{1+\mathrm{e}^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^2}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^2}+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{1+\mathrm{e}^2}+1+\ln\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{1+\mathrm{e}^2}}\ m\right]$

Vypočtěte délku křivky $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$, $x\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$.
$\left[\sqrt{2}-1\ m\right]$

Vypočtěte délku křivky $x=\varphi(t)=a\cos^3 t$, $y=\psi(t)=a\sin^3 t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $a>0$.
$\left[\frac{3}{2}a\ m\right]$

Vypočtěte délku křivky $y=\cosh x$, $x\in[0,\cosh b]$, $b>0$.
$[\sinh b\ m]$

Vypočtěte délku křivky $x=\varphi(t)=a\cos^4 t$, $y=\psi(t)=a\sin^4 t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $a>0$.
$\left[a\left(\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right)\ m\right]$

Parciální derivace

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy} funkce

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{x+y}$$

Řešení.

$$f'_x = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad f'_y = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$f''_{xx} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{yy} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$ funkce

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

Řešení.

$$f'_x = \frac{2y}{(x+y)^2}, \quad f'_y = -\frac{2x}{(x+y)^2}$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$ funkce

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$$

Řešení.

$$f'_x = \frac{-2y}{(x-y)^2}, \quad f'_y = \frac{2x}{(x-y)^2}$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$ funkce

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$$

Řešení.

$$f'_x = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad f'_y = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$ funkce

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Řešení.

$$f'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad f'_y = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f), f'_x, f'_y, \mathcal{D}(f'_x), \mathcal{D}(f'_y)$ funkce

$$f(x,y) = \frac{x-2xy^2}{1-x}$$

Řešení.

$$f'_x = \frac{1-2y^2}{(x-1)^2}, \quad f'_y = -\frac{4xy}{x-1}$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f), f'_x, f'_y, \mathcal{D}(f'_x), \mathcal{D}(f'_y), f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}$ funkce

$$f(x,y) = x^2 \mathrm{e}^{xy}$$

v bodě $A = [1, 0$

Řešení.

$$f'_x = x(2+xy)e^{xy}, \quad f'_x(A) = 2, \quad f'_y = x^3 e^{xy}, \quad f'_y(A) = 1$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f), f'_x, f'_y, \mathcal{D}(f'_x), \mathcal{D}(f'_y)$ funkce

$$f(x,y) = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$$

v bodě $A = [1, 1]$.

Řešení.

$$f'_x = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad f'_x(A) = 1, \quad f'_y = \frac{1}{\sqrt{y}}, \quad f'_y(A) = 1$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy} funkce

$$f(x,y) = x^y$$

v bodě $A = [1, 1]$.

Řešení.

$$f'_x = yx^{y-1}, \; f'_x(A) = 1, \; f'_y = x^y \ln x, \; f'_y(A) = 0,$$

$$f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \; f''_{xx}(A) = 0, \; f''_{yy} = x^y \ln^2 x, \; f''_{yy} = 0, \; f''_{xy} = x^{y-1}(1 + y\ln x), \; f''_{xy}(A) = 1,$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f), f'_x, f'_y, \mathcal{D}(f'_x), \mathcal{D}(f'_y), f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}$ funkce

$$f(x,y) = y^x$$

v bodě $A = [1, 1]$.

Řešení.

$$f'_x = y^x \ln y, \; f'_x(A) = 0, \; f'_y = xy^{x-1}, \; f'_y(A) = 1,$$

$$f''_{xx} = y^x \ln^2 y, \quad f''_{yy} = x(x-1)y^{x-2}, \quad f''_{xy} = (1 + x\ln y)y^{x-1}.$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$ funkce

$$f(x,y) = \ln\,(x + \ln y)$$

a vypočtěte hodnoty prvních parciálních derivací v bodě $A = [1, 1]$.

Řešení.

$$f'_x = \frac{1}{x + \ln y}, \quad f'_x(A) = 1, \quad f'_y = \frac{1}{y(x + \ln y)}, \quad f'_y(A) = 1$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$ funkce

$$f(x,y) = \ln(x \ln y)$$

a vypočtěte hodnoty prvních parciálních derivací v bodě $A = [1, \mathrm{e}]$.

Řešení.

$$f'_x = \frac{1}{x}, \quad f'_x(A) = 1, \quad f'_y = \frac{1}{y \ln y}, \quad f'_y(A) = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy} funkce

$$f(x,y) = x\sin\,(x + y)$$

a vypočtěte hodnoty prvních parciálních derivací v bodě $A = [\pi, 0]$.
Řešení.

$$f'_x = \sin(x+y) + x\cos(x+y), \quad f'_x(A) = -\pi, \quad f'_y = x\cos(x+y), \quad f'_y(A) = -\pi,$$

$$f''_{xx} = 2\cos(x+y) - x\sin(x+y), \quad f''_{xx}(A) = -2, \quad f''_{yy} = -x\sin(x+y), \quad f''_{yy}(A) = 0,$$

$$f''_{xy} = \cos(x+y) - x\sin(x+y), \quad f''_{xy}(A) = -1.$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f'_{xx})$, $\mathcal{D}(f'_{yy})$, $\mathcal{D}(f'_{xy})$ funkce

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

Řešení.

$$f''_{xy} = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f), f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, \mathcal{D}(f''_{xx}), \mathcal{D}(f''_{yy}), \mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x,y) = y^{\ln x}$$

Řešení.

$$f'_x = \frac{y^{\ln x}\ln y}{x}, \quad f'_y = y^{\ln x - 1}\ln x,$$

$$f''_{xx} = \left(\frac{y^{\ln x}}{x}\right)^2 (\ln y - 1), \quad f''_{yy} = y^{\ln x - 2}(\ln x - 1)\ln x, \quad f''_{xy} = \frac{y^{\ln x}(1 + \ln x \ln y)}{xy}.$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f''_{xx})$, $\mathcal{D}(f''_{yy})$, $\mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

Řešení.

$$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f''_{xx} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad f''_{yy} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad f''_{xy} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x,y) = \sqrt{2xy+y^2}$$

Řešení.

$$f'_x = \frac{y}{\sqrt{2xy+y^2}}, \quad f'_y = \frac{x+y}{\sqrt{2xy+y^2}}$$

$$f''_{xy} = \frac{xy\sqrt{2xy+y^2}}{(2xy+y^2)^2}$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f''_{xx})$, $\mathcal{D}(f''_{yy})$, $\mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2+1}{y^2-1}$$

Řešení.

$$f'_x = \frac{2x}{x^2+1}, \quad f'_y = -\frac{2y}{y^2-1}$$

$$f''_{xx} = 2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, \quad f''_{yy} =, \quad f''_{xy} =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f''_{xx})$, $\mathcal{D}(f''_{yy})$, $\mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$$

Řešení. $\mathcal{D}(f) = (\{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : y \geq |x|\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : y \leq -|x|\}) \setminus \{[0,0]\}$

$$f'_x = \frac{\operatorname{sgn}(y)}{\sqrt{y^2-x^2}}, \quad f'_y = -\frac{x\operatorname{sgn}(y)}{y\sqrt{y^2-x^2}}$$

$$f''_{xx} =, \quad f''_{yy} =, \quad f''_{xy} =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f''_{xx})$, $\mathcal{D}(f''_{yy})$, $\mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$

Řešení.

$$f'_x =, \quad f'_y =$$

$$f''_{xx} =, \quad f''_{yy} =, \quad f''_{xy} =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f''_{xx})$, $\mathcal{D}(f''_{yy})$, $\mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x,y) = x^2 \ln y$$

Řešení.

$$f''_{xx} =, \quad f''_{yy} =, \quad f''_{xy} =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, funkce

$$f(x,y) = \sqrt{\left|\frac{x}{y}\right|}$$

Řešení. $\mathcal{D}(f) = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 :\}$

$$f'_x = \quad f'_y =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, funkce

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

Řešení. $\mathcal{D}(f) = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 :\}$

$$f'_x = \quad f'_y =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, funkce

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$$

Řešení. $\mathcal{D}(f) = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 :\}$

$$f'_x = \quad f'_y =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f''_{xx})$, $\mathcal{D}(f''_{yy})$, $\mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x, y) = \ln(y + \ln\, x)$$

Řešení.

$$f''_{xx} =, \quad f''_{yy} =, \quad f''_{xy} =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f''_{xx})$, $\mathcal{D}(f''_{yy})$, $\mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{xy} \ln\, y$$

Řešení.

$$f''_{xx} =, \quad f''_{yy} =, \quad f''_{xy} =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, funkce

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{|y|}{x + y}}$$

Řešení. $\mathcal{D}(f) = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 :\}$

$$f'_x = \quad f'_y =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, $\mathcal{D}(f''_{xx})$, $\mathcal{D}(f''_{yy})$, $\mathcal{D}(f''_{xy})$ funkce

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{xy} \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

Řešení.

$$f''_{xx} =, \quad f''_{yy} =, \quad f''_{xy} =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, f'_z, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, $\mathcal{D}(f'_z)$, funkce

$$f(x, y, z) = \ln(xyz)$$

Řešení.

$$f'_x =, \quad f'_y =, \quad f'_z =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, f'_z, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, $\mathcal{D}(f'_z)$, funkce

$$f(x, y, z) = \ln(xyz)$$

v bodě $A = [1, 1, 1]$.
Řešení.

$$f'_x =, \quad f'_y =, \quad f'_z =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, f'_z, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, $\mathcal{D}(f'_z)$, funkce

$$f(x, y, z) = zx^{1/y}$$

v bodě $A = [1, 1, 1]$.
Řešení.

$$f'_x =, \quad f'_y =, \quad f'_z =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, f'_z, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, $\mathcal{D}(f'_z)$, funkce

$$f(x,y,z) = \left(\frac{y}{z}\right)^x$$

Řešení.

$$f'_x =, \quad f'_y =, \quad f'_z =$$

Příklad . Určete $\mathcal{D}(f)$, f'_x, f'_y, f'_z, $\mathcal{D}(f'_x)$, $\mathcal{D}(f'_y)$, $\mathcal{D}(f'_z)$, funkce

$$f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{yz}{x}\right)$$

Řešení.

$$f'_x =, \quad f'_y =, \quad f'_z =$$

Derivace ve směru

Příklad . Vypočetěte derivaci v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{E}_2$ ve směru vektoru $u = (h,k) \in \mathbb{R}^2$ (pokud existuje) funkce

$$f(x,y) = xy$$

z definice derivace ve směru.

Příklad . Vypočetěte derivaci v bodě $A = [0,0] \in \mathbb{E}_2$ ve směru vektoru $u = (h,k) \in \mathbb{R}^2$ (pokud existuje) funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

z definice derivace ve směru.

Příklad . Vypočetěte derivaci v bodě $A = [0,0] \in \mathbb{E}_2$ ve směru vektoru $u = (h,k) \in \mathbb{R}^2$ (pokud existuje) funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

z definice derivace ve směru.

Diferenciál funkce

Příklad . Vypočtěte diferenciál funkce

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

v bodě $A=[1,1]$. Ověřte existenci diferenciálu v daném bodě.
Řešení.

$$f'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f'_x(A)=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad f'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f'_y(A)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$df_A=\frac{\sqrt{2}}{2}(h+k)$$

Příklad . Vypočtěte totální diferenciál 2. řádu funkce

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

v bodě $A=[1,1]$.
Řešení.

$$f''_{xx}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},\quad f''_{xx}(A)=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad f''_{yy}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},\quad f''_{yy}(A)=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$f''_{xy}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}},\quad f''_{xy}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$d^2f(A)=\frac{\sqrt{2}}{4}h^2-\frac{\sqrt{2}}{2}hk+\frac{\sqrt{2}}{4}k^2.$$

Příklad . Vypočtěte diferenciál funkce $f(x,y,z)=\operatorname{arctg}(yz/x)$ v bodě $A=[1,1,1]$. Ověřte existenci diferenciálu v daném bodě.
Řešení.

$$f'_x=\frac{-2xyz}{x^4+y^2z^2},\quad f'_y=-\frac{x^2z}{x^4+y^2z^2},\quad f'_z=-\frac{x^2y}{x^4+y^2z^2},$$

$$df(A)=-h_1+\frac{1}{2}h_2+\frac{1}{2}h_3$$

Příklad . Vypočtěte diferenciál funkce $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$ v bodě $A=[1,0]$. Ověřte existenci diferenciálu v daném bodě.
Řešení.

$$f'_x=\frac{1}{1+x^2},\quad f'_y=\frac{1}{1+y^2}$$

$$df_A\left((h,k)\right)=\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}k$$

Příklad . Vypočtěte diferenciál funkce $f(x,y)=x^y$ v bodě $A=[1,1]$. Ověřte existenci diferenciálu v daném bodě.
Řešení.

$$df_A\left((h,k)\right)=$$

Příklad . Vypočtěte diferenciál funkce $f(x,y)=y^x$ v bodě $A=[1,1]$.
Řešení.

$$df_A\left((h,k)\right)=$$

Příklad . Vypočtěte totální diferenciál 1. řádu funkce $f(x,y,z)=\operatorname{arctg}\left(\frac{yz}{x}\right)$ v bodě $A=[1,1,1$.

Řešení.

$$f'_x = \frac{-2xyz}{x^4 + y^2 z^2}, \quad f'_y = -\frac{x^2 z}{x^4 + y^2 z^2}, \quad f'_z = -\frac{x^2 y}{x^4 + y^2 z^2},$$

$$df(A) = -h_1 + \frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{2}h_3.$$

Taylorova věta

Příklad . Určete Taylorův polynom prvního stupně funkce $f(x,y)=\ln\frac{xy}{x^2+y^2}$ v bodě $M=[1,2]$.
Příklad . Určete Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y)=y^x$ v bodě $N=[1,1]$.
Řešení.

$$f'_x=y^x\ln y,\ f'_x(N)=0,\ f'_y=xy^{x-1},\ f'_y(N)=1$$

$$f''_{xx}=y^x\ln^2 y,\ f''_{xx}(N)=0,\ f''_{yy}=x(x-1)y^{x-2},\ f''_{yy}(N)=0,\ f''_{xy}=y^{x-1}(x\ln y+1), f''_{xy}(N)=1,$$

$$T_2(x,y)=1+(y-1)+(x-1)(y-1)$$

Příklad . Určete Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$ v bodě $A=[1,1]$.
Řešení.

$$f'_x=\frac{1}{1+x^2},\ f'_x(A)=\frac{1}{2},\ f'_y=-\frac{1}{1+y^2},\ f'_y(A)=-\frac{1}{2}$$

$$f''_{xx}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\ f''_{xx}(A)=\frac{1}{2},\ f''_{yy}=\frac{2y}{(1+y^2)^2},\ f''_{yy}(A)=\frac{1}{2},\ f''_{xy}=0,\ f''_{xy}(A)=0$$

$$f'''_{xxx}=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3},\ f'''_{yyy}=\frac{2(1-3y^2)}{(1+y^2)^3},\ f'''_{xxy}=0,\ f'_{xyy}=0$$

$$f(1+h,1+k)=\frac{1}{2}h-\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}h^2+\frac{1}{4}k^2+R_2$$

$$R_2=\frac{1}{3}\left[\frac{3(1+th)^2-1}{[1+(1+th)^2]^3}h^3+\frac{1-3(1+tk)^2}{\left[1+(1+tk)^2\right]^3}\right],\ 0<t<1.$$

Příklad . Určete Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2+y^2}$ v bodě $A=[1,1]$.
Řešení.

$$f'_x=2x\mathrm{e}^{x^2+y^2},\ f'_x(A)=2e^2,\ f'_y=2ye^{x^2+y^2},\ f'_y(A)=2\mathrm{e}^2$$

$$f''_{xx}=2(2x^2+1)\mathrm{e}^{x^2+y^2},\ f''_{xx}(A)=6\mathrm{e}^2,\ f''_{yy}=2(2y^2+1)\mathrm{e}^{x^2+y^2},\ f''_{yy}(A)=6\mathrm{e}^2,$$

$$f''_{xy}=4xy\mathrm{e}^{x^2+y^2},\ f''_{xy}(A)=4e^2$$

$$f'''_{xxx}=4x(2x^2+3)\mathrm{e}^{x^2+y^2},\ f'''_{yyy}=4y(2y^2+3)\mathrm{e}^{x^2+y^2},$$

$$f'''_{xxy}=4y(2x^2+1)\mathrm{e}^{x^2+y^2},\ f'''_{xyy}=4x(2y^2+1)\mathrm{e}^{x^2+y^2},$$

$$f(1+h,1+k)=\mathrm{e}^2(1+2h+2k+3h^2+4hk+3k^2)+R_2$$

Příklad . Určete Taylorův polynom druhého stupně funkce $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$ v bodě $A=[1,1]$.
Řešení.

$$\mathcal{D}(f)=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2:1+xy\neq 0\}$$

$$f'_x=\frac{1}{1+x^2},\quad f'_y=-\frac{1}{1+y^2}$$

$$f''_{xx}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\quad f''_{yy}=\frac{2y}{(1+y^2)^2},\quad f''_{xy}=0$$

$$f'''_{xxx}=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3},\ f'''_{yyy}=\frac{2(1-3y^2)}{(1+y^2)^3},\ f'''_{xxy}=0,\ f'_{xyy}=0$$

$$f(1+h,1+k)=\frac{1}{2}h-\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}h^2+\frac{1}{4}k^2+\frac{1}{3}\left[\frac{3\left(1+th\right)^2-1}{\left[1+(1+th)^2\right]^3}h^3+\frac{1-3\left(1+tk\right)^2}{\left[1+(1+tk)^2\right]^3}\right],\ 0<t<1.$$

$$T_2(x,y)=\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)-(x-1)^2+(y-1)^2$$

Extrémy funkce více proměnných

Lokální extrémy

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [0,0]$, $S_2 = [1,1]$. V bodě $[1,1,-1]$ je ostré lokální minimum.
Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y}, \quad x > 0, y > 0$$

Řešení. Stacionární bod je $S = [\frac{5}{2}, \frac{4}{5}]$. V bodě $[\frac{5}{2}, \frac{4}{5}, 30]$ je ostré lokální minimum.
Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = (x^2 + 2y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [0,0]$, $S_2 = [0,1]$, $S_3 = [0,-1]$, $S_4 = [1,0]$, $S_5 = [-1,0]$. V bodě $[0,0,0]$ je ostré lokální minimum. V bodech $[0,1,\frac{2}{\mathrm{e}}]$ a $[0,-1,\frac{2}{\mathrm{e}}]$ jsou ostrá lokální maxima.
Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$$

Řešení.

$$f'_x = 3x^2 - 6y = 0 \tag{1.1}$$
$$f'_y = 24y^2 - 6x = 0 \tag{1.2}$$

Stacionární body jsou $S_1 = [0,0]$, $S_2 = \left[1, \frac{1}{2}\right]$.

$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{yy} = 48y, \quad f''_{xy} = -6,$$

$$Hf(S_1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$D_1 = 0$, $D_2 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ kvadratická forma je indefinitní a v bodě S_1 není extrém.

$$Hf(S_2) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{pmatrix}$$

$D_1 = 6 > 0$, $D_2 = 144 - 36 > 0 \;\Rightarrow\;$ kvadratická forma je pozitivně definitní a v bodě S_2 je ostré lokální minimum, $f(S_2) = 4$.
Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{2}x^2 + y\right)\mathrm{e}^{x+y}$$

Řešení.

$$f'_x = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + y\right)\mathrm{e}^{x+y}, \qquad f'_y = \left(\frac{1}{2}x^2 + y + 1\right)\mathrm{e}^{x+y}$$

$$\frac{1}{2}x^2 + x + y = 0$$
$$\frac{1}{2}x^2 + y + 1 = 0$$

Stacionární bod je $S = \left[1, -\frac{3}{2}\right]$.

$$f''_{xx} = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + y + 1\right) \mathrm{e}^{x+y}$$
$$f''_{xy} = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + y + 1\right) \mathrm{e}^{x+y}$$
$$f''_{yy} = \left(\frac{1}{2}x^2 + y + 2\right) \mathrm{e}^{x+y}$$

$$Hf(S) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\mathrm{e}} & \frac{1}{\mathrm{e}} \\ \frac{1}{\mathrm{e}} & \frac{1}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}$$

$D_1(S) > 0,\ D_2(S) = \frac{1}{\mathrm{e}^2} > 0 \ \Rightarrow$ v bodě S je ostré lokální minimum, $f(S) = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.
Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$$

Řešení. Stacionární bod je $S = [\frac{1}{2}, -1]$. V bodě $\left[\frac{1}{2}, -1, -2e\right]$ je ostré lokální minimum.
Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = e^{\frac{1}{2}x}(x + y^2)$$

Řešení. Stacionární bod je $S = [-2, 0]$. V bodě $[-2, 0, -\frac{2}{\mathrm{e}}]$ je ostré lokální minimum.
Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [0, 0]$, $S_2 = [a, a]$. V bodě $[a, a]$ je pro $a > 0$ je ostré lokální minimum a pro $a < 0$ je ostré lokální maximum, $f(A) = -a^3$.
Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = xy\ln(x^2 + y^2)$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [1, 0]$, $S_2 = [-1, 0]$, $S_3 = [0, -1]$, $S_4 = [0, 1]$, $S_5 = [\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}]$, $S_6 = [\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, -\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}]$, $S_7 = [-\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, -\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}]$, $S_8 = [-\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}]$. V bodech $[\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, -\frac{1}{2\mathrm{e}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, -\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, -\frac{1}{2\mathrm{e}}]$ jsou ostrá lokální minima a v bodech $[\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, -\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, \frac{1}{2\mathrm{e}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}, \frac{1}{2\mathrm{e}}]$ jsou ostrá lokální maxima.
Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2y^3(12 - x - y)$$

Řešení. Stacionární body jsou $M_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$, $M_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. V bodě $[4, 6, 6912]$ je ostré lokální maximum.
Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^3 + y^2 + z^2$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [23, -145, -2], S_2 = [-1, -1, -2]$.
Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x\mathrm{e}^{y^2 - x^2}$$

Řešení.

$$f'_x = (1-2x^2)\mathrm{e}^{y^2-x^2}, \quad f'_y = 2xy\mathrm{e}^{y^2-x^2}$$

$$f''_{xx} = 2x(2x^3-3)\mathrm{e}^{y^2-x^2}, \quad f''_{xy} = 2y(1-2x^2)\mathrm{e}^{y^2-x^2}, \quad f''_{yy} = 2x(1+2y^2)\mathrm{e}^{y^2-x^2}$$

Stacionární body jsou $S_1 = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$, $S_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$. Funkce nemá extrémy.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [0,0], S_2 = [-\frac{5}{3}, 0], S_3 = [1,4], S_4 = [1,-4]$ V bodě $[0,0,0]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [0,0], S_2 = [\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}]$ V bodě $[\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, 0]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - xy - x$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [\frac{2}{3}, \frac{1}{3}], S_2 = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]$. V bodě $[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{15}{27}]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = xy(3-x-y)$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [0,0], S_2 = [3,0], S_3 = [0,3] S_4 = [1,1]$. V bodě $[1,1,1]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{2}x^2 + y\right)\mathrm{e}^{x+y}$$

Řešení. Stacionární bod je $S = [1, -\frac{3}{2}]$. V bodě $\left[1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = -x^2 - y^2 - xy + 6y + 1$$

Řešení. Stacionární bod je $S = \left[1, -\frac{3}{2}\right]$. V bodě $\left[1, -\frac{3}{2}\right]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2$$

Řešení. Stacionární bod je $S = \left[\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right]$. V bodě $\left[\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, f(S)\right]$

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 9y$$

Řešení. Stacionární bod je $S = [1,4]$. V bodě $[1,4,-21]$ je ostré lokální minimum.

Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = 2x^2 + 5y^2 - 6xy - x - 3y + 2$$

Řešení. Stacionární bod je $S = \left[-2, -\frac{3}{2}\right]$. V bodě $\left[-2, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right]$ je ostré lokální minimum.
Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3x + 5y - 1$$

Řešení. Stacionární bod je $S = \left[\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right]$. V bodě $\left[\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{35}{8}\right]$ je ostré lokální minimum.
Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x - 2y$$

Řešení. Stacionární bod je $S = [1, -1]$. Nemá lokální extrémy.
Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = 27x^2y + 14y^3 - 54x - 69y$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [1, 1], S_2 = [-1, -1], S_3 = [\frac{\sqrt{14}}{3}, 3\frac{\sqrt{14}}{14}], S_4 = [-\frac{\sqrt{14}}{3}, -3\frac{\sqrt{14}}{14}]$. V bodě S_1 je ostré lokální minimum, v bodě S_2 je ostré lokální maximum.
Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y}\left(2x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy - 5x - \frac{5}{3}y + \frac{10}{3}\right)$$

Řešení.
Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 + yz - 2x + y - z$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = [0, 0]$, $S_2 = [3, 0]$, $S_3 = [0, 3]$ $S_4 = [1, 1]$. V bodě $[1, 1, 1]$ je ostré lokální minimum.
Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + y + 1$$

Řešení.
Příklad . Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = y \ln\left(x^2 + y\right)$$

Řešení. Stacionární body jsou $S_1 = \left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$, $S_2 = [1, 0], S_3 = [-1, 0]$. V bodě $[0, \mathrm{e}, -\mathrm{e}]$ je ostré lokální minimum.

Nájděte stacionární body následujúcích funkcí dvou proměnných a klasifikujte je pomocí Hessovy matice:

(a) $f_1(x, y) = x^3 - 3y^2 + 3xy - 3y$,

(b) $f_2(x, y) = -\frac{2}{3}x^3 + y^2 + 4xy + 3y$,

(c) $g(x, y) = xy$,

(d) $h_1(x, y) = x^2y^2(x - y + 1)$,

(e) $h_2(x, y) = x^2(y + 1) + 2y^3 + 5y^2$,

(f) $h_3(x, y) = x^2(y + 1) + y^2(x - 1)$,

(g) $h_4(x, y) = x^2(y + 1) + y^2(y - 1)$,

(h) $h_5(x, y) = (x^2 + y^2)(y + 1)$

Nájděte stacionární body následujúcích funkcí třech proměnných a klasifikujte je pomocí Hessovy matice:

(a) $f(x, y, z) = 3x^2 + x^3 + y^2 + xy^2 + z^3 - 3z$

(b) $g(x, y, z) = (x + y + z)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}$

(c) $h(x, y, z) = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}$

Globální extrémy

Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = 2x^2 - y^2 - xy + 2y + 1$$

na $M = [0,1] \times [0,1]$.
Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$$

na $M = [0,1] \times [0,2]$.
Řešení.
Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x\mathrm{e}^{y^2-x^2}$$

na $M = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.
Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

na $M = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.
Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2$$

na množině

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

na množině

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\right\}$$

Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = xy^2(4 - x - y)$$

na množině

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : y \leq -x + 6, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

na množině

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2x^2\right\}$$

Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{2}x^2 + y\right)\mathrm{e}^{x+y}$$

na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : x \geq 0, y \leq 0, y \geq x - 2\}$.
Příklad . Určete absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 y$$

na množině

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : y \leq -x^2 + x + 2, y \geq 0\right\}$$

Příklad . Najděte absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x\mathrm{e}^{y^2 - x^2}$$

na množině

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\right\}$$

Příklad . Najděte absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x\mathrm{e}^{y^2 - x^2}$$

na množině

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

Příklad . Najděte absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x + y$$

na množině

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Příklad . Najděte absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = 2x^2 - y^2 - xy + 2y + 1$$

na množině $M = [-1,1] \times [0,2]$.

Literatura

[1] Atkins, P.W.: *Physical chemistry.* Oxford University Press, 5.vyd., Oxford 1995.

[2] Bourbaki, N.: *Funkcii dejstvitelnovo peremennovo.* Moskva 1965.

[3] Brabec, J., Hrůza, B.: *Matematická analýza I.* SNTL, Praha 1985.

[4] Brabec, J., Hrůza, B.: *Matematická analýza II.* SNTL, Praha 1986.

[5] Daněček, J., Dlouhý, O.: *Integrální počet I.* Akad. nakl. CERM Brno, VUT FAST Brno, 2003.

[6] Daněček, J., Dlouhý, O., Koutková, H., Prudilová, K., Sekaninová, J., Slatinský, E.: *Sbírka příkladů z matematiky I.* VUT FAST Cerm, 9.vyd., Brno 2009.

[7] Eliáš J., Horváth J., Kajan J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky II.* Alfa, Bratislava (1986).

[8] Eliáš J., Horváth J., Kajan J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky III.* Alfa, Bratislava (1980).

[9] Fichtengolc, G. M.: *Kurz diferencialnovo i integralnovo iscislenija II.* Nauka, 4.vyd., Moskva 1959.

[10] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. Function of One Variable.* Birkhäuser, Boston (2003).

[11] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. Approximation and Discrete Processes.* Birkhäuser, Boston (2004).

[12] Giaquinta M., Modica G.: *Mathematical Analysis. An Introduction to Functions of Several Variables.* Birkhäuser, Boston (2009).

[13] Jarník V.: *Diferenciální počet I.* ČAV Praha (1963).

[14] Jarník V.: *Diferenciální počet II.* ČAV Praha (1963).

[15] Jarník V.: *Integrální počet I.* ČAV Praha (1963).

[16] Lukeš J., Malý, J.: *Míra a integrál.* Univerzita Karlova, Praha (1993).

[17] Milota, J.: *Matematická analýza I–II.* SPN Praha, 1978.

[18] Nagy J., Nováková E., Vacek M.: *Integrální počet.* SNTL Praha (1984).

[19] Prudnikov, A. P., Bryčkov, J. A., Maričev, O. I.: *Integrály i rjady.* Nauka, Moskva 1981.

[20] Rektorys, K. a kol.: *Přehled užité matematiky I.* Prometheus, Praha 1995.

[21] Schwabik, Š.: *Integrace v $\mathbb{R}$. Kurzweilova teorie.* Karolinum, UK Praha 1999.

[22] Schwabik, Š., Šarmanová: *Integrace v* $\mathbb{R}$. *Historie integrálu.*

[23] Škrášek, J., Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky II.* SNTL, Praha 1986.

[24] Ungermann Z.: *Matematika a řešení fyzikálních úloh.* SPN, Praha 1990.