TEORIE MÍRY A INTEGRÁLU
UčEBNÍ TEXT PRO NMMA203

JAN MALÝ

Obsah

1. Pojem míry

1.1. **Definice** (Množinové funkce)**.** Nechť X je abstraktní množina a $\mathcal{G} \subset 2^X$. Značíme
$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty].$$
Jakákoli funkce
$$\tau : \mathcal{G} \to \overline{\mathbb{R}}$$
se nazývá *množinová funkce*. Množinové funkce se většinou používají k "měření" množin. Někdy budeme používat pro množinovou funkci značení $(\mathcal{G}, \tau)$, abychom současně uvedli i znak pro její definiční obor.

1.2. **Příklad.** $\mathcal{G}$ může být systém všech obdélníků a τ může přiřadit každému z nich

- obsah
- obvod
- počet vrcholů
- číslo 14.

Děkuji Prof. Dr. Luďkovi Zajíčkovi, DrSc. za cenné připomínky. Děkuji všem studentům, kteří se podíleli na ladění předchozích verzí.

Užitečnost těchto příkladů pro další rozvoj teorie je rozdílná.

1.3. **Definice** (Délka intervalu)**.** Nechť $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \le b$. Množinu

$$I \in \big\{ [a,b],\ [a,b),\ (a,b],\ (a,b) \big\}$$

nazveme *(jednorozměrným) intervalem*. Množinový systém všech omezených jednorozměrných intervalů v $\mathbb{R}$ značíme $\mathcal{I}_1$. Na $\mathcal{I}_1$ definujeme množinovou funkci *délka intervalu* předpisem

$$\ell_1(I) = b - a, \quad I \in \big\{ [a,b],\ [a,b),\ (a,b],\ (a,b) \big\} \tag{1}$$

1.4. **Definice** (Elementární objem vícerozměrného intervalu)**.** Množinu $Q \subset \mathbb{R}^n$ nazveme *n-rozměrným intervalem*, jestliže existují jednorozměrné intervaly $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ tak, že

$$Q = I_1 \times \dots \times I_n.$$

Množinu všech omezených n-rozměrných intervalů budeme značit $\mathcal{I}_n$. Každému n-rozměrnému intervalu Q přiřadíme jeho *objem* předpisem

$$\ell_n(Q) = \ell_1(I_1) \dots \ell_1(I_n),$$

kde $\ell_1(I)$ je jako v definici 1.3. Jedním z prvních cílů teorie míry je najít vhodné rozšíření těchto množinových funkcí.

1.5. **Plán.** Zatím "neumíme" ani říci, co je obsah kruhu. Chtěli bychom zavést širokou třídu množin, tzv. měřitelné množiny, a na nich množinovou funkci, tzv. Lebesgueovu míru (pro popis pojmů obsah, objem), tak, aby všechny intervaly byly měřitelné a jejich míra byla jejich elementární objem, ale také aby byly i jiné představitelné množiny měřitelné (geometrické obrazce a tělesa), a aby se s třídou měřitelných množin a mírou dobře zacházelo. Přirozené požadavky:

- Např. sjednocení (spočetně mnoha) měřitelných množin je měřitelné
- Pokud jsou množiny disjunktní, míra jejich sjednocení je součet jejich měr

Požadované vlastnosti shrneme do axiomů. Výběr axiomů je výsledek práce matematiků, kteří zjistili, co vše mohou požadovat a vzdali se naopak nesplnitelných požadavků (např. na měřitelnost každé množiny).

Konstrukce Lebesgueovy míry není jediná aplikace teorie, naopak, na pojmech, které nyní budeme budovat, je postavena např. celá teorie pravděpodobnosti.

1.6. **Definice** (Jordan-Peanův objem)**.** Z historického a didaktického hlediska je důležité rozšíření elementárního objemu na tzv. *Jordan-Peanův objem* (též zván Jordanův či Peano-Jordanův). Varianty této množinové funkce jsou používány ke středoškolským definicím objemu. Definice je založena na následující myšlence, kterou zde pouze naznačíme. Konečné disjunktní sjednocení omezených n-rozměrných intervalů nazveme *figurou.* Objem figury definujeme jako součet objemů intervalů, z nichž se skládá. Horní Jordan-Peanův objem množiny je infimum objemů figur, které ji obsahují. Dolní Jordan-Peanův objem množiny je supremum objemů figur, které jsou v ní obsaženy. Pokud horní a dolní Jordan-Peanův objem množiny se rovnají a jsou konečné, řekneme, že měřená množina je *Jordan-Peanovovsky měřitelná* a společnou hodnotu nazveme jejím *Jordan-Peanovým (J.P.) objemem.* Tímto způsobem lze měřit objem těles a obsah obrazců známých z geometrie. Není těžké zkonstruovat množiny, které nejsou J.P. měřitelné. Každá J.P. měřitelná množina musí být omezená. Pokud z krychle o objemu 1 vezmeme množinu E všech jejích bodů o racionálních souřadnicích, vnější J.P. objem množiny E je 1 a vnitřní 0. Navíc, konečné sjednocení J.P.-měřitelných množin je J.P.-měřitelné, ale spočetné sjednocení už nemusí. J.P.-objem tedy není naše cílová meta, budeme směřovat k lepšímu rozšíření elementárního objemu.

1.7. **Definice** (Rozšíření a zúžení množinové funkce)**.** Nechť X je abstraktní množina, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \subset 2^X$, μ je množinová funkce na $\mathcal{U}$ a ν je množinová funkce na $\mathcal{V}$. Říkáme, že ν je *rozšíření* μ, jestliže $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ a $\mu(A) = \nu(A)$ pro každou $A \in \mathcal{U}$.

Naopak, množinovou funkci μ v tomto případě nazýváme *zúžením* množinové funkce ν z $\mathcal{V}$ na $\mathcal{U}$ a značíme ji $\nu\lfloor\mathcal{U}$.

Relace "býti rozšíření" je uspořádání na třídě všech množinových funkcí na X.

1.8. **Definice** (Okruh, σ-algebra,...)**.** Nechť X je abstraktní množina. Systém $\mathcal{O}$ podmnožin X se nazývá *okruh*, jestliže

(O-1) $\emptyset \in \mathcal{O}$,
(O-2) $A, B \in \mathcal{O} \implies A \setminus B \in \mathcal{O}$.
(O-3) $A, B \in \mathcal{O} \implies A \cup B \in \mathcal{O}$.

Z axiomů snadno dostaneme též

$$A,\, B \in \mathcal{O} \implies A \cap B \in \mathcal{O}.$$

Indukcí dostaneme, že každý okruh je tedy uzavřen na konečná sjednocení a konečné průniky

$$A_1, \dots, A_m \in \mathcal{O} \implies A_1 \cup \dots \cup A_m \in \mathcal{O},\ A_1 \cap \dots \cap A_m \in \mathcal{O}.$$

Požadujeme-li uzavřenost na spočetná sjednocení (a v důsledku na spočetné průniky), dostaneme axiomy *σ-okruhu.*. Tedy σ-okruh je množinový systém, který splňuje

(σ-O-1) $\emptyset \in \mathcal{O}$,
(σ-O-2) $A,\, B \in \mathcal{O} \implies A \setminus B \in \mathcal{O}$.
(σ-O-3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{O} \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{O}$.

Algebra je definována jako okruh obsahující celý prostor X. *σ-algebra* je definována jako σ-okruh obsahující celý prostor X. Je to nejdůležitější množinový systém pro teorii míry. K ověření, že množinový systém $\mathcal{S}$ je σ-algebra stačí tyto axiomy:

(S1-1) $\emptyset \in \mathcal{S}$,
(S2-2) $A \in \mathcal{S} \implies X \setminus A \in \mathcal{S}$,
(S3-3) $A_j \in \mathcal{S},\ j = 1, 2, \dots \implies \bigcup_j A_j \in \mathcal{S}$.

Je-li $\mathcal{S}$ σ-algebra na X, dvojice $(X, \mathcal{S})$ se nazývá *měřitelný prostor*. Množiny $A \in \mathcal{S}$ se nazývají $\mathcal{S}$-měřitelné množiny. Nehrozí-li nedorozumění, budeme mluvit krátce o *měřitelných množinách*.

1.9. **Příklady.** (Některá z uvedených tvrzení jsou netriviální a důležitá, jejich důkaz uvedeme později v sekci 11)

(a) $\{\emptyset,\ X\}$ je σ-algebra.
(b) Systém 2^X všech podmnožin množiny X je σ-algebra.
(c) Borelovské množiny na topologickém prostoru tvoří σ-algebru.
(d) Lebesgueovsky měřitelné množiny tvoří σ-algebru.
(e) J.-P.-měřitelné množiny tvoří okruh, ne σ-okruh, ne algebru
(f) Systém všech konečných (disjunktních) sjednocení intervalů tvoří algebru, ne σ-algebru
(g) Systém všech konečných (disjunktních) sjednocení omezených intervalů tvoří okruh, ne σ-okruh, ne algebru
(h) Systém všech konečných (disjunktních) sjednocení omezených intervalů tvaru $(a, b]$ tvoří okruh, ne σ-okruh, ne algebru.
(i) Systém všech spočetných (disjunktních) sjednocení omezených intervalů netvoří ani okruh.
(j) Systém všech uzavřených (resp. otevřených) podmnožin topologického prostoru netvoří ani okruh (protože není uzavřen na množinový rozdíl).

1.10. **Definice** (Generování množinových systémů)**.** Je-li $\mathcal{F}$ libovolný systém podmnožin X, potom existuje nejmenší σ-algebra obsahující $\mathcal{F}$. Tuto σ-algebru dostaneme jako průnik všech σ-algeber obsahujících $\mathcal{F}$ a značíme ji $\sigma(\mathcal{F})$. Podobně můžeme generovat jiné množinové systémy, např. okruhy. Okruh z příkladu (g) je generovaný systémem $\mathcal{I}_1$.

1.11. **Definice** (Borelovské množiny)**.** Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{G}$ je systém všech jeho otevřených podmnožin. Potom definujeme $\mathcal{B}(X)$ jako nejmenší σ-algebru obsahující $\mathcal{G}$ (viz definice 1.10). σ-algebra $\mathcal{B}(X)$ obsahuje kromě otevřených množin též všechny uzavřené množiny. $\mathcal{B}(X)$ se nazývá *borelovská σ-algebra* a jejím prvkům se říká *borelovské množiny*.

V $\mathbb{R}$ jsou borelovské všechny intervaly, množina všech racionálních čísel, atd. Příklady neborelovských množin se konstruují velmi těžko.

Někdy je výhodné generovat $\mathcal{B}(X)$ jinak než systémem všech otevřených množin. Na $\overline{\mathbb{R}}$ je přirozená topologie generovaná intervaly (a, b), $(a, \infty]$ a $[-\infty, b)$. Tudíž $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ je σ-algebra na $\overline{\mathbb{R}}$ generovaná intervaly. Podobně $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je generovaná intervaly. Důkazy těchto tvrzení (totiž, že generování otevřenými množinami a intervaly vyjde v těchto případech nastejno) přenecháváme čtenáři.

1.12. **Definice** (Míra)**.** Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Množinová funkce $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, jestliže splňuje

(M1-1) $\mu(\emptyset) = 0$,
(M2-2) (*σ-additivita*) jestliže $A_j \in \mathcal{S},\ j = 1, 2, \dots$, jsou po dvou disjunktní, potom

$$\mu\Big(\bigcup_j A_j\Big) = \sum_j \mu(A_j).$$

Trojice $(X, \mathcal{S}, \mu)$ se nazývá *prostor s mírou.*

Zdůrazněme, že definice míry zahrnuje, že hodnoty jsou nezáporné a definiční obor je σ-algebra.

1.13. **Příklady.**

(a) Diracova míra δ_a: X je libovolná množina, $a \in X$, $\mathcal{S} = 2^X$,

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$$

(b) *Počítací míra* X je libovolná množina, $\mathcal{S} = 2^X$. Počítací míra přiřadí každé množině $A \subset X$ počet jejích prvků. Nekonečným množinám přiřadí prostě ∞, nerozlišuje nekonečné mohutnosti.

(c) *Lebesgueova míra* zobecňuje pojem délky intervalu, obsahu "obrazce" či objemu "tělesa".

(d) *Hausdorffova míra* je druh n-rozměrné míry v $\mathbb{R}^d$. Zobecňuje pojem délky křivky ($n = 1$), a povrchu zakřivené plochy ($n = 2$, $d = 3$).

1.14. **Definice** (Terminologie teorie míry)**.** Míra μ na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{S})$ se nazývá

(a) *konečná,* jestliže $\mu(X) < \infty$,

(b) *σ-konečná,* jestliže existují $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu(X_j) < \infty$ a $X = \bigcup_j X_j$,

(c) *pravděpodobnostní,* jestliže $\mu(X) = 1$,

(d) *úplná,* jestliže každá podmnožina množiny míry nula je měřitelná (a tudíž také míry nula).

Fráze *skoro všude* nebo *μ-skoro všude* se používá ve spojení s vlastností bodů množiny X. Řekneme-li, že taková vlastnost platí skoro všude (nebo ve skoro všech bodech), znamená to, že je splněna až na množinu míry nula, neboli, že existuje množina $N \in \mathcal{S}$ míry nula tak, že vlastnost je splněna ve všech bodech množiny $X \setminus N$. Používá se zejména pro rovnost a nerovnosti mezi funkcemi a pro bodovou konvergenci posloupnosti funkcí.

1.15. **Větička** (Trik zdisjunktnění)**.** *Nechť A_1, $A_2, \dots \in \mathcal{S}$. Potom existují po dvou disjunktní množiny E_1, $E_2, \dots \in \mathcal{S}$ tak, že*

$$A_1 \cup \dots \cup A_k = E_1 \cup \dots \cup E_k, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Tuto vlastnost mají

$$E_1 = A_1, \quad E_2 = A_2 \setminus A_1, \quad E_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \dots .$$

1.16. **Větička** (Vlastnosti míry)**.** *Nechť $A_j \in \mathcal{S}$.*

(a) $A_1 \subset A_2 \implies \mu(A_1) \le \mu(A_2)$.

(b) *Jestliže $A_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \dots$, $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, potom*

$$\mu(\bigcup_j A_j) = \lim_j \mu(A_j).$$

(c) *Jestliže $A_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \dots$, $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, a jestliže $\mu(A_1) < \infty$, potom*

$$\mu(\bigcap_j A_j) = \lim_j \mu(A_j).$$

Důkaz. (a) je snadné. K důkazu (b) použijeme trik zdisjunktnění (větičku 1.15). (c): Použijeme (b) na $A_1 \setminus A_j$. □

1.17. **Příklad.** Nechť μ je počítací míra na $\mathbb{N}$ a $A_j = \{j, j+1, \dots\}$. Potom $A_j \searrow \emptyset$, a přesto $\mu(A_j) \to \infty$. Je to tím, že ve větičce 1.16 (c) není splněn předpoklad o konečnosti $\mu(A_1)$.

2. Lebesgueova míra: nástin

2.1. **Definice** (Lebesgueova vnější míra)**.** Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je libovolná množina. Definujme

$$\ell^*(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell(Q_j) : \ Q_j \in \mathcal{I}_n, \ \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset A\Big\}. \tag{2}$$

Množinová funkce ℓ^*: $A \mapsto \ell^*(A)$, definovaná na potenční množině $2^{\mathbb{R}^n}$, se nazývá *Lebesgueova vnější míra.* Součty, vyskytující se na pravé straně (2) se nazývají *horní součty* k $\ell^*(A)$.

Množinová funkce ℓ^* umí měřit všechny množiny, ale není aditivní. Proto v dalším se budeme snažit z ní vytvořit aditivní funkci (dokonce míru, viz definice 1.12), za což zaplatíme zúžením definičního oboru. Výsledný obor všech měřitelných množin však již bude dostatečně bohatý pro všechny aplikace.

2.2. **Měřitelné množiny a Lebesgueova míra.** Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je (Lebesgueovsky) *měřitelná*, jestliže pro každý interval $Q \in \mathcal{I}_n$ platí

$$\ell(Q) = \ell^*(Q \cap A) + \ell^*(Q \setminus A). \tag{3}$$

Množinu všech Lebesgueovsky měřitelných množin budeme značit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ a množinová funkce

$$\lambda : A \mapsto \ell^*(A), \qquad A \in \mathfrak{M}$$

bude *Lebesgueova míra.*

2.3. **Oznámení věty.** *Nechť $Q \in \mathcal{I}_n$. Potom $Q \in \mathfrak{M}$ a $\lambda(Q) = \ell^*(Q) = \ell(Q)$.*

Důkaz. Vyplyne z věty 10.8. $\square$

2.4. **Oznámení věty.** *$\mathfrak{M}$ je σ-algebra obsahující všechny borelovské podmnožiny $\mathbb{R}^n$ a λ je míra na $\mathfrak{M}$.*

Důkaz. Vyplyne z vět 9.5 a 10.2. $\square$

2.5. **Poznámka** (Lebesgueovsky neměřitelné množiny)**.** V dalším se budeme několikrát vracet k tématu měřitelných množin. Přirozenou otázkou je, které množiny měřitelné nejsou a zda vůbec nějaké takové existují. Pravda je, že sice existují, ale důkaz jejich existence není konstruktivní. Filosoficky vzato, z hlediska výpočtů v aplikacích nemůže mít vliv na výsledek, zda neměřitelné množiny existují nebo ne. Vynechat důkaz měřitelnosti množiny, je-li její měřitelnost požadována, je však hrubou matematickou chybou.

3. Měřitelné funkce

3.1. **Značení.** Je-li X abstraktní množina a $A \subset X$, značíme χ_A charakteristickou funkci množiny A, neboli

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Symbol ∞ může být užit pro $+\infty$.

Je-li $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ funkce, definujeme $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$. (Maximum či minimum dvou funkcí se definuje bod po bodu.) Tedy

$$f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

Je-li f funkce na D a $M \subset \overline{\mathbb{R}}$, značíme

$$\{f \in M\} = \{x \in D : f(x) \in M\},$$

podobně zavádíme značení jako $\{f > a\}$, $\{f = a\}$.

Symbolem $\varphi \circ f$ značíme složenou funkci $x \mapsto \varphi(f(x))$. Značení f^{-1} používáme pro inverzní funkci k f.

3.2. **Úmluva.** Na $\overline{\mathbb{R}}$ zavádíme algebraické operace a nerovnosti přirozeným způsobem. Součet $a + b$ má smysl pokud $a \in \mathbb{R}$ nebo $b \in \mathbb{R}$ nebo a a b jsou nekonečna stejného znaménka. Součet $\infty + (-\infty)$ smysl nemá. Součin ab má smysl vždy (důležité !!), ve "sporném případě" zavádíme

$$0 \cdot \pm\infty = 0. \tag{4}$$

Podíl a/b má smysl s výjimkou případů $a/0$ a a $\pm\infty/\pm\infty$.

V celé kapitole budeme uvažovat měřitelný prostor $(X, \mathcal{S})$.

3.3. **Definice** (Měřitelné funkce)**.** Nechť $D \in \mathcal{S}$. Řekneme, že funkce $f \colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ je *$\mathcal{S}$-měřitelná, jestliže* pro každý interval $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ je $f^{-1}(I) \in \mathcal{S}$. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme mluvit krátce o *měřitelných funkcích.*

3.4. **Pozorování.** *Nechť $D, D_j \in \mathcal{S}$.*

(a) *Je-li f měřitelná na D a $D_1 \subset D$, pak f je měřitelná na D_1.*
(b) *Je-li funkce $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{S}$-měřitelná na D_j, $j = 1, 2, \dots$ a $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$, pak f je měřitelná na D.*

3.5. **Větička** (Ověřování měřitelnosti)**.** *Uvažujme $D \in \mathcal{S}$ a funkci $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$. Nechť $S \subset \overline{\mathbb{R}}$ je hustá množina. Předpokládejme, že*

($*$) *Pro všechna $q \in \mathbb{Q}$ je $\{f > q\} \in \mathcal{S}$.*

Potom funkce f je měřitelná na D.

Důkaz. 1. Nechť $a < \infty$, najděme racionální čísla $q_j \searrow a$. Pak

$$\{f > a\} = \bigcup_j \{f > q_j\}.$$

2. Nechť $a > -\infty$, najděme racionální čísla $r_j \nearrow a$. Pak

$$\{f \geq a\} = \bigcap_j \{f > r_j\}.$$

3. Nechť $b \in \overline{\mathbb{R}}$, pak

$$\{f \leq b\} = D \setminus \{f > b\}, \quad \{f < b\} = D \setminus \{f \geq b\}.$$

4. Nechť $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \leq b$. Potom

$$\{f \in [a, b]\} = \{f \geq a\} \cap \{f \leq b\}$$

a podobně pro ostatní typy intervalů. □

3.6. **Poznámka.** Místo nerovnosti $f > q$ v $(*)$ lze užít $f \geq q$, $f < q$ nebo $f \leq q$.

3.7. **Větička** (Měřitelnost vzoru)**.** *Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a $A \subset \mathbb{R}$ je borelovská množina. Potom $\{f \in A\} \in \mathcal{S}$.*

Důkaz. Systém množin $\{E \subset \mathbb{R} \colon \{f \in E\}$ je měřitelná$\}$ tvoří σ-algebru a obsahuje všechny intervaly. Tudíž obsahuje všechny borelovské množiny. □

3.8. **Větička** (Měřitelnost složené funkce)**.** *Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a φ je spojitá funkce na otevřené nebo uzavřené množině $M \subset \overline{\mathbb{R}}$. Potom množina $D' := \{f \in M\}$ je měřitelná a složená funkce $\varphi \circ f$ je měřitelná na D'.*

Důkaz. Zvolme $c \in \mathbb{R}$, potom $P := \{y \in M \colon \varphi(y) > c\}$ je borelovská, tudíž

$$\{\varphi \circ f > c\} = \{f \in P\}$$

je měřitelná podle větičky 3.7. □

3.9. **Varování.** Budeme-li skládat spojitou a měřitelnou funkci v opačném pořadí, výsledek nemusí být měřitelný. Také není obecně pravda, že inverzní funkce k měřitelné funkci by byla měřitelná funkce. Viz priklad 19.5

3.10. **Věta** (Operace s měřitelnými funkcemi)**.** *Nechť funkce f, f_j jsou měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Pak platí následující:*

(a) *Funkce $|f|$, f^+, f^-, f^2 jsou měřitelné na D, $1/f$ je měřitelná na $\{f \neq 0\}$.*
(b) *Funkce $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$, $f_1 f_2$, f_1/f_2 jsou měřitelné vždy na množině, kde učiněná operace dává smysl podle úmluvy 3.2.*
(c) *Funkce $\sup_j f_j$, $\inf_j f_j$, $\limsup_j f_j$, $\liminf_j f_j$ jsou měřitelné na D.*
(d) *Množina D' všech bodů, kde existuje $\lim_j f_j$ je měřitelná a $\lim_j f_j$ je měřitelná na D'.*

Důkaz. (a) je důsledek větičky 3.8.

(b): Je výhodné "odpreparovat" diskusí množiny, kde jedna z funkcí nebo obě nabývají nevlastních hodnot a zaměřit se na množinu $\{f_1 \in \mathbb{R}\} \cap \{f_2 \in \mathbb{R}\}$. Máme

$$\{f_1 + f_2 > a\} = \bigcup_{\substack{p,q \in \mathbb{Q} \\ p+q > a}} \{f_1 > p\} \cap \{f_2 > q\}.$$

Dále

$$f_1 f_2 = \frac{1}{4}\Big((f_1 + f_2)^2 - (f_1 - f_2)^2\Big).$$

Ostatní je snadné.

(c): Je

$$\{\sup_j f_j > a\} = \bigcup_j \{f_j > a\}$$

a odtud odvodíme i zbytek.

(d) Máme

$$\begin{aligned}\{\lim f_j \text{ existuje}\} &= \{\limsup_j f_j = \liminf_j f_j\}\\ &= D \setminus \Big(\bigcup_{p\in\mathbb{Q}} \{\liminf_j f_j < p < \limsup_j f_j\}\Big).\end{aligned}$$

□

3.11. **Jednoduché funkce.** Funkci f na $D \in \mathcal{S}$ nazveme *$\mathcal{S}$-jednoduchou*, jestliže f je lineární kombinace charakteristických funkcí množin z $\mathcal{S}$, tj. existují-li množiny $A_j \in \mathcal{S}$ a $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, tak, že

$$f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Pokud bude jasné, jakou σ-algebru máme na mysli, budeme mluvit prostě o jednoduchých funkcích.

3.12. **Aproximace jednoduchými funkcemi.** *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Nechť f je nezáporná měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$. Potom existují nezáporné jednoduché funkce $f_k \nearrow f$. Navíc, f lze vyjádřit ve tvaru*

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j} \chi_{E_j}, \tag{5}$$

kde $E_j \in \mathcal{S}$.

Důkaz. Položme

$$P_j = \bigcup_i \Big\{ \big[i2^{-j},\ (i+1)2^{-j}\big) \ :\ i \text{ je liché celé} \Big\}.$$

Potom

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j} \chi_{E_j},$$

kde

$$E_j := \{f \in P_j\}.$$

Jelikož P_j jsou borelovské, $\{f \in P_j\}$ jsou měřitelné podle větičky 3.7. Jedná se vlastně o dyadickou expanzi hodnoty $f(x)$; totiž $x \in E_j$, právě když $f(x)$ má na j-tém místě v dyadickém rozvoji jedničku. Jednoduché funkce f_k můžeme definovat vzorcem

$$f_k = \sum_{j=-k}^{k} 2^{-j} \chi_{E_j}.$$

□

4. Abstraktní Lebesgueův integrál

Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. V této kapitole zavedeme *abstraktní Lebesgueův integrál* z μ-měřitelné funkce.

Lebesgueovo pojetí nabízí alternativní cestu k definici integrálu přes interval, takto vybudovaný integrál dává použitelnější teorii než integrál Newtonův nebo Riemannův. Značně široká třída integrovatelných funkcí je jen jednou z mnoha výhod. V moderní matematické literatuře se integrálem bez přívlastku rozumí vždy integrál Lebesgueův. Význam Newtonova a Riemannova integrálu zůstává ve sféře didaktiky.

Při lebesguovském integrování se však nemusíme omezovat na funkce reálné proměnné. Obecné pojetí abstraktního Lebesgueova integrálu na libovolném prostoru s mírou má mnoho aplikací v analýze, teorii pravděpodobnosti a v matematice vůbec, v této obecnosti Riemannova i Newtonova metoda nenabízejí ani částečné řešení problému.

4.1. **Definice** (Rozklad). Konečný soubor množin $\{A_1, \dots, A_m\} \subset \mathcal{S}$ nazveme *rozkladem* nebo *Lebesgueovským dělením* množiny $D \in \mathcal{S}$, jestliže množiny A_j jsou po dvou disjunktní a

$$\bigcup_{j=1}^{m} A_j = D.$$

4.2. **Terminologická poznámka.** Rozdíl mezi obyčejným "riemannovským" dělením a lebesgueovským spočívá hlavně v tom, že riemannovské dělení je pouze na intervaly, u lebesgueovského se dělí na libovolné měřitelné množiny. Tento rozdíl podstatně přispívá k bohatství třídy lebesgueovsky integrovatelných funkcí.

4.3. **Větička** (Charakteristika jednoduchých funkcí). *Nechť f je nezáporná měřitelná funkce na D. Pak je ekvivalentní*

(i) *f je jednoduchá,*
(ii) *f nabývá jen konečně mnoha hodnot,*
(iii) *existuje rozklad $\{A_j\}_{j=1}^m$ množiny D a nezáporná čísla α_j, $j = 1, \dots, m$ tak, že*

$$f = \sum_j \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Důkaz. Implikace (i) $\Longrightarrow$ (ii) a (iii) $\Longrightarrow$ (i) jsou zřejmé. Pro (ii) $\Longrightarrow$ (iii), nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou hodnoty, kterých nabývá funkce f a položme $A_j = \{f = \alpha_j\}$. $\square$

4.4. **Definice** (Konstrukce integrálu). Nechť $D, D' \in \mathcal{S}$ a $f \colon D' \to \overline{\mathbb{R}}$ je měřitelná funkce. Integrál $\int_D f\,d\mu$ vybudujeme ve třech krocích. V prvních dvou krocích předpokládáme $D' = D$.

1. Je-li f nezáporná měřitelná funkce, definujeme

$$\int_D f\,d\mu = \sup\Big\{\sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) : \{A_j\} \text{ je rozklad } D,\quad 0 \le \alpha_j \le f \text{ na } A_j,\ j = 1, \dots, m\Big\}. \tag{6}$$

Součty vyskytující se v (6) nazýváme *dolními součty* k funkci f. Integrál z nezáporné měřitelné funkce je definován *vždy*, může ovšem nabývat nekonečné hodnoty.

2. V obecném případě, kdy f je měřitelná funkce na D, definujeme

$$\int_D f\,d\mu = \int_D f^+\,d\mu - \int_D f^-\,d\mu, \tag{7}$$

pokud rozdíl v (7) má smysl. Pokud

$$\int_D f^+\,d\mu = \int_D f^-\,d\mu = \infty,$$

zůstává integrál funkce f nedefinován.

3. Je-li f měřitelná (přesně: $\mathcal{S}$-měřitelná) funkce na $D' \neq D$ a $\mu(D \setminus D') = 0$, je účelné definovat

$$\int_D f\,d\mu = \int_{D \cap D'} f\,d\mu.$$

Smysl takového integrálu a výsledek samozřejmě v tom případě nezávisí na volbě D'.

V některých případech je účelné používat podrobnější zápis

$$\int_D f(x)\,d\mu(x) \quad \text{pro} \quad \int_D f\,d\mu.$$

Pro integrál podle Lebesgueovy míry v $\mathbb{R}^n$ používáme zpravidla značení

$$\int_D f(x)\,dx.$$

Je-li $n = 1$ a $D = (a, b)$, používáme

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Je-li integrál $\int_D f\,d\mu$ definován, říkáme též, že *má smysl*, nebo že funkce f *má integrál*. Je-li navíc tento integrál konečné číslo, říkáme, že $\int_D f\,d\mu$ *konverguje* nebo že f je *integrovatelná*.

4.5. **Poznámka.** Na rozdíl od definice Riemannova integrálu, u Lebesguova integrálu nekonfrontujeme supremum dolní součtů s infimem nějakých "horních součtů". To je umožněno tím, že se v samotném začátku definice omezujeme pouze na měřitelné funkce a u těch můžeme supremu dolních součtů důvěřovat.

Podobná situace by nastala u Riemannova integrálu, kdybychom se omezili na spojité funkce a v prvém kroku bychom definovali integrál pro spojitou a nezápornou funkci na uzavřeném intervalu, také bychom mohli věřit dolnímu Riemannovu integrálu.

4.6. **Definice** (μ-měřitelné funkce)**.** Nechť $D \subset X$. Řekneme, že funkce $f : D' \to \overline{\mathbb{R}}$ je *μ-měřitelná* na $D \in \mathcal{S}$, existuje-li $D'' \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu(D \setminus D'') = 0$ a f je $\mathcal{S}$-měřitelná na D''. To odpovídá situaci, která se naskytla v třetím kroku definice integrálu. V dalším budeme slovo "měřitelná" používat ve významu "μ-měřitelná" v kontextu prostoru s mírou a ve významu λ-měřitelná v kontextu integrace podle Lebesgueovy míry.

4.7. **Oznámení věty** (Lebesgueův integrál a Newtonův integrál)**.** Nechť funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ má na intervalu (a, b) primitivní funkci F.

(a) Je-li f λ-integrovatelná na (a, b), potom existují vlastní jednostranné limity $F(b-)$ a $F(a+)$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a+).$$

(b) Jestliže $f \geq 0$ a existují vlastní jednostranné limity $F(b-)$ a $F(a+)$, pak f je λ-integrovatelná na (a, b).

Důkaz. Větu v této obecnosti dokazovat nebudeme. Částečným případem se budeme zabývat ve větě 5.4. □

4.8. **Věta** (Různé vlastnosti Lebesgueova integrálu)**.** *Nechť $D \in \mathcal{S}$ a f, g jsou měřitelné funkce na D.*

(a) *Je-li $f \geq 0$, D_1, $D_2 \in \mathcal{S}$ a $D_1 \subset D_2 \subset D$, pak*

$$\int_{D_1} f\,d\mu \leq \int_{D_2} f\,d\mu.$$

(b) *Jestliže D_1, $D_2 \in \mathcal{S}$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ a $D_1 \cup D_2 = D$, pak*

$$\int_D f\,d\mu = \int_{D_1} f\,d\mu + \int_{D_2} f\,d\mu.$$

(c) *Je-li $\int_D |f|\,d\mu < \infty$, pak $|f| < \infty$ skoro všude.*
(d) *Je-li $\int_D |f|\,d\mu = 0$, pak $f = 0$ skoro všude.*
(e) (monotonie) *Jestliže f, g mají integrál a $f \leq g$ skoro všude, pak*

$$\int_D f\,d\mu \leq \int_D g\,d\mu.$$

(f) *Je-li $\int_D g\,d\mu < \infty$ a $|f| \leq g$ skoro všude, pak f je integrovatelná.*

Důkaz. (a), (b), (c) jsou snadné. (d): Jestliže množiny $E_j := \{|f| > 2^{-j}\}$ mají míru nula, pak $f = 0$ skoro všude. Pokud jedna z nich má kladnou míru, pak $2^{-j}\mu(E_j)$ je dolní součet k $|f|$ a tudíž integrál $|f|$ je kladný. (e): Tvrzení je snadné, pokud $0 \leq f \leq g$ na D. V obecném případě se důkaz provede rozdělením na množiny $\{f \leq 0 \leq g\}$, $\{f \leq g < 0\}$, $\{0 < f \leq g\}$, $\{g < f\}$ a diskusí. (f) plyne z (e) a definice integrálu. □

4.9. **Poznámka.** Konvergence Newtonova integrálu nestačí k ověření konvergence Lebesgueova integrálu (jako příklad slouží funkce $\sin x/x$ na intervalu $(0, \infty)$). Pokud $f \geq 0$ na (a, b), můžeme použít větu 4.7. Jestliže f střídá znaménka, základním kritériem je (f) z předchozí věty 4.8. Buď např.

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + x^2}, \qquad x \in (0, \infty).$$

Položme

$$g(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad x \in (0, \infty).$$

Potom g je integrovatelná na $(0, \infty)$ podle věty 4.7 a f je integrovatelná na $(0, \infty)$, protože $|f| \leq g$.

4.10. **Lemma** (O monotonii)**.** *Nechť $D \in \mathcal{S}$. Nechť $\{A_j\}_{j=1}^n$, $\{B_i\}_{i=1}^m$ jsou rozklady D a*

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n, \quad \beta_1, \dots, \beta_m$$

jsou nezáporná reálná čísla. Jestliže

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \chi_{B_i} \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j},$$

potom

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(B_i) \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j). \tag{8}$$

Důkaz. Je-li $A_j \cap B_i \neq \emptyset$, potom z předpokladů plyne $\beta_i \leq \alpha_j$ a tudíž

$$\beta_i \mu(A_j \cap B_i) \leq \alpha_j \mu(A_j \cap B_i). \tag{9}$$

Pokud $A_j \cap B_i = \emptyset$, pak $\mu(A_j \cap B_i) = 0$ a zase dostáváme (9). Sečtením přes i, j a záměnou pořadí sumace dostáváme

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \mu(A_j \cap B_i) \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j \cap B_i). \tag{10}$$

Jelikož

$$\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \cap B_i) = \mu(B_i), \qquad \sum_{i=1}^{m} \mu(A_j \cap B_i) = \mu(A_j),$$

z (10) dostáváme (9). □

4.11. **Lemma** (Integrál jednoduché funkce)**.** *Nechť $D \in \mathcal{S}$. Nechť $\{A_j\}_{j=1}^n$ je rozklad D a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Potom*

$$\int_D \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} \Big) \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j).$$

Důkaz. Označme

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Je-li

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(B_i)$$

dolní součet k f, podle lemmatu 4.10 dostáváme

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(B_i) \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$

a přechod k supremu přes všechny dolní součty dává

$$\int_D f \, d\mu \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j).$$

Jelikož

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$

je též dolní součet k f, máme i obrácenou nerovnost. □

4.12. **Důsledek.** Je-li f nezáporná měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$, potom

$$\int_D f \, d\mu = \sup \Big\{ \int_D s \, d\mu : \ 0 \leq s \leq f, \ \ s \ \text{ je jednoduchá} \Big\}.$$

4.13. **Věta** (Levi, Lebesgue, monotone convergence theorem)**.** *Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na $D \in \mathcal{S}$, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, a $f = \lim f_j$. Potom*

$$\int_D f \, d\mu = \lim_j \int_D f_j \, d\mu. \tag{11}$$

Důkaz. Nechť
$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$
je "ostrý" dolní součet k f, tj. pro každé j je $\alpha_j = 0$ nebo $\alpha_j < f$ na A_j. Označme
$$s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$$
a položme
$$E_k = \{f_k \geq s\}.$$
Snadno ověříme, že $\bigcup_k E_k = D$. Podle větičky 1.16 (b),
$$\mu(A_j) = \lim_k \mu(A_j \cap E_k),$$
tedy (záměna limity a konečné sumy není žádný problém)

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) = \lim_k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j \cap E_k). \tag{12}$$

Každý součet
$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j \cap E_k)$$
je dolní součet k f_k, tedy limitu na pravé straně (12) můžeme shora odhadnout limitou
$$\lim_k \int_D f_k \, d\mu.$$
Tedy (vytknutí konstanty před integrál není problém, srov. větu 4.15(b))
$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) \leq \lim_k \int_D f_k \, d\mu.$$
Přechodem k supremu přes všechny ostré dolní součty k f (zřejmě supremum ostrých dolních součtů je stejné jako supremum všech dolních součtů) dostáváme
$$\int_D f \, d\mu \leq \lim_k \int_D f_k \, d\mu.$$
Opačná nerovnost je zřejmá. □

4.14. **Důsledek** (Spojitá závislost na integračním oboru)**.** *Nechť D, $E_k \in \mathcal{S}$, $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, $\bigcup_k E_k = D$. Nechť f je nezáporná měřitelná funkce na D. Potom*
$$\int_D f \, d\mu = \lim_k \int_{E_k} f \, d\mu.$$
Důkaz. Stačí aplikovat Leviho větu na $f_k = f\chi_{E_k}$. □

4.15. **Věta** (Linearita integrálu)**.** (a) *Nechť f, g jsou měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Potom*
$$\int_D (f+g) \, d\mu = \int_D f \, d\mu + \int_D g \, d\mu,$$
má-li pravá strana smysl. (b) *Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a $\gamma \in \mathbb{R}$. Pokud f má integrál, pak*
$$\int_D \gamma f \, d\mu = \gamma \int_D f \, d\mu.$$

Důkaz. Tvrzení (b) je zřejmé.

(a): Nejprve předpokládejme, že funkce f a g jsou nezáporné a jednoduché. Podle větičky 4.3 najdeme vyjádření

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}, \qquad g = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{B_i},$$

kde $\{A_j\}_{j=1}^n$, $\{B_i\}_{i=1}^m$ jsou rozklady D a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\beta_1, \dots, \beta_m$ jsou nezáporná reálná čísla. Potom také $\{A_j \cap B_i : \ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n\}$ je rozklad D a

$$f + g = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_i) \chi_{A_j \cap B_i}.$$

Podle lemmatu 4.11

$$\int_D f \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j),$$

$$\int_D g \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(B_i)$$

a

$$\int_D (f + g) \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_i) \mu(A_j \cap B_i).$$

Máme

$$\begin{aligned}
\int_D (f + g) \, d\mu &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_i) \mu(A_j \cap B_i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j \cap B_i) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \mu(A_j \cap B_i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(B_i).
\end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden pro jednoduché funkce.

Nechť f a g jsou nezáporné měřitelné funkce. Podle věty 3.12 existují nezáporné jednoduché funkce $f_j \nearrow f$, $g_j \nearrow g$. Pak také $(f_j + g_j) \nearrow (f + g)$. Podle předchozí části důkazu

$$\int_D (f_j + g_j) \, d\mu = \int_D f_j \, d\mu + \int_D g_j \, d\mu$$

a na obou stranách rovnosti použijeme Leviho větu k limitnímu přechodu. To nám dá důkaz pro nezáporné měřitelné funkce.

Nechť f a g jsou integrovatelné funkce na D. Buď

$$D' = \{|f| + |g| < \infty\}.$$

Potom $D' \in \mathcal{S}$, $D' \subset D$ a $\mu(D \setminus D') = 0$. Můžeme se tedy omezit na množinu D'. Jelikož $|f + g| \le |f| + |g|$, podle předchozího kroku a věty 4.8 je $f + g$ také integrovatelná. Na D' platí

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+.$$

Podle předchozího kroku máme

$$\begin{aligned}
\int_D (f + g)^+ \, d\mu + \int_D f^- \, d\mu + \int_D g^- \, d\mu &= \int_D [(f + g)^+ + f^- + g^-] \, d\mu \\
&= \int_D [(f + g)^- + f^+ + g^+] \, d\mu \\
&= \int_D (f + g)^- \, d\mu + \int_D f^+ \, d\mu + \int_D g^+ \, d\mu.
\end{aligned}$$

Vhodným přeskupením sčítanců dostaneme

$$\int_D (f + g)^+ \, d\mu - \int_D (f + g)^- \, d\mu = \int_D f^+ \, d\mu - \int_D f^- \, d\mu + \int_D g^+ \, d\mu - \int_D g^- \, d\mu,$$

což je dokazovaný vzorec.

Obecný případ, kdy pravá strana má smysl, ale funkce f, g nemusí být integrovatelné, je otázkou snadné, ale zdlouhavé diskuse, kterou ponecháváme čtenáři. $\square$

4.16. **Důsledek** (Leviho věta pro řady). *Nechť $D \in S$ a g_j, $j = 1, 2, \ldots$, jsou nezáporné měřitelné funkce na D. Potom*

$$\int_D \sum_j g_j = \sum_j \int_D g_j \tag{13}$$

Důkaz. Stačí použít Leviho větu 4.13 na částečné součty. $\square$

5. Lebesgueův integrál na přímce

Integrál podle Lebesgueovy míry λ budeme nazývat (klasickým) *Lebesgueovým integrálem*. V této kapitole dokážeme, že pro každou spojitou funkci f na intervalu $[a, b]$ splývá

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda$$

s Newtonovým integrálem funkce f přes $[a, b]$. Pro klasický Lebesgueův integrál funkce f přes interval (a, b) budeme též používat tradiční značení

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

Používání klasického Lebesgueova integrálu je mnohem výhodnější než používání Riemannova či Newtonova integrálu, neboť vede k "úplnější" třídě integrovatelných funkcí.

Lze dokázat, že každá Riemannovsky integrovatelná funkce je Lebesgueovsky integrovatelná a Lebesgueův integrál v tomto případě splývá s Riemannovým. Opačná inkluze neplatí, lebesgueovsky integrovatelných funkcí je víc.

Lebesgueův integrál nepokrývá tzv. neabsolutně konvergentní integrály, např.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx,$$

které v jednoduchých případech zachycuje Newtonův integrál. Pro hlubší studium neabsolutně konvergentních integrálů se hodí pojem Perronova nebo Kurzweilova integrálu. Neabsolutně konvergentní integrály využívají eukleidovskou strukturu a nemají rozumný protějšek na obecných prostorech s mírou.

5.1. **Definice** (Neurčitý Lebesgueův integrál). Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a_0, b_0). Funkci $F : (a_0, b_0) \to \mathbb{R}$ nazveme *neurčitým Lebesgueovým integrálem* funkce f, jestliže

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

pro každý interval $[a, b] \subset (a_0, b_0)$.

Poznamenejme, že každá spojitá funkce na otevřeném intervalu je měřitelná (protože otevřené množiny jsou borelovské a tudíž měřitelné) a má neurčitý Lebesgueův integrál. Ten se zkonstruuje např. jako

$$F(x) = \begin{cases} \int_c^x f(t) \, dt, & x \ge c, \\ -\int_x^c f(t) \, dt, & x < c \end{cases}$$

pro pevně zvolený bod $c \in (a_0, b_0)$. Konvergence integrálů plyne z omezenosti integrovatelných funkcí a integračních oborů.

5.2. **Věta** (o neurčitém Lebesgueově integrálu). *Nechť f, F jsou spojité funkce na intervalu (a_0, b_0). Potom F je primitivní funkce k f, právě když F je neurčitý Lebesgueův integrál funkce f.*

Důkaz. Nechť nejprve F je neurčitý Lebesgueův integrál. Snadno ověříme, že

$$\lim_{h \to 0+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt = f(x), \qquad x \in (a_0, b_0),$$

podobně pro limitu zleva. F je tedy primitivní funkce. Nechť naopak F je primitivní funkce, najdeme neurčitý Lebesgueův integrál G. Podle předchozí části je G primitivní funkce, tedy G a F se liší jen o aditivní konstantu. Jelikož se F liší o aditivní konstantu od neurčitého Lebesgueova integrálu, je to také neurčitý Lebesgueův integrál. $\square$

5.3. **Definice** (Newtonův integrál). Nechť f je funkce na intervalu (a,b). Připomeňme, že říkáme, že funkce f má Newtonův integrál I přes (a,b), jestliže f má na (a,b) primitivní funkci F, ta má limity

$$F(a+) = \lim_{x\to a+} F(x), \qquad F(b-) = \lim_{x\to b-} F(x),$$

tyto limity jsou vlastní (ve smyslu "konečné") a

$$I = F(b-) - F(a+).$$

Integrál I značíme $(N)\int_a^b f(x)\,dx$. Když f má Newtonův integrál, říkáme, že Newtonův integrál f konverguje, v opačném případě říkáme, že diverguje, Jestliže Newtonův integrál f konverguje, rozlišujeme *absolutní konvergenci* (tj. též $(N)\int |f(x)|\,dx$ konverguje) a *neabsolutní konvergenci* (tj. $(N)\int |f(x)|\,dx$ diverguje).

Konvergence integrálu $|f|$ sama o sobě ještě nezaručuje absolutní konvergenci integrálu f. Např. funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

nemá primitivní funkci, ale $(N)\int_{-1}^1 |f(x)|\,dx$ konverguje.

5.4. **Věta** (vztah mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem). *Nechť f je nezáporná spojitá funkce na intervalu (a,b). Potom $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje, právě když konverguje Lebesgueův integrál funkce f. V tom případě mají oba integrály společnou hodnotu.*

Důkaz. (a) Zvolme $c \in (a,b)$ a najděme intervaly $[a_j,b_j]$ tak, že $a < a_j < c < b_j < b$, $a_j \searrow a$, $b_j \nearrow b$. Nechť F je neurčitý Lebesgueův integrál funkce f, což je podle věty 5.2 primitivní funkce k f. Potom F je neklesající a tudíž má limity $F(b-)$, $F(a+)$. Jelikož (z monotonie) $F(b-)$ nemůže být $-\infty$ a $F(a+)$ nemůže být $+\infty$, rozdíl $F(b-) - F(a+)$ má smysl a platí

$$F(b-) - F(a+) = \lim_k (F(b_k) - F(a_k)). \tag{14}$$

Označme

$$f_k = f\chi_{a_k,b_k}.$$

Funkce f má Lebesgueův integrál přes (a,b) (je totiž nezáporná a měřitelná). Podle Leviho věty 4.13 a (14) je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_k \int_a^b f_k(x)\,dx = \lim_k \int_{a_k}^{b_k} f(x)\,dx = \lim_k (F(b_k) - F(a_k)) = F(b-) - F(a+),$$

takže $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje, právě když $F(b-) - F(a+) < \infty$, ale to je přesně podmínka pro konvergenci Newtonova integrálu. ☐

5.5. **Důsledek** (Diskuse vztahu mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem). Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a,b).

(a) *Jestliže konverguje Lebesgueův integrál z f od a do b, konverguje i Newtonův a to absolutně.*

(b) *Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje absolutně, pak konverguje i Lebesgueův.*

(c) *Pokud konverguje jak Lebesgueův, tak Newtonův integrál z funkce f, pak oba mají stejnou hodnotu.*

(d) *Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje neabsolutně, pak Lebesgueův integrál nemá smysl.*

Tvrzení (b) a (c) platí i bez předpokladu spojitosti, ale důkaz je složitější. Tvrzení (a) naopak spojitost vyžaduje. Jinak neplatí žádná inkluze mezi třídou všech lebesgueovsky integrovatelných funkcí a třídou všech newtonovsky integrovatelných funkcí.

Důkaz je snadné cvičení, založené na rozkladu $f = f^+ - f^-$. Pokud Newtonův integrál f konverguje absolutně, konvergují i Newtonovy integrály funkcí f^+ a f^-, protože $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ a $f^- = \frac{1}{2}(|f| + f)$.

5.6. **Věta** (Vztah mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem). *Nechť f je Riemannovsky integrovatelná funkce na $[a,b]$. Potom Lebesgueův integrál funkce f od a do b konverguje a je roven integrálu Riemannovu.*

Důkaz. Nechť R je Riemannův integrál funkce f od a do b. Z definice Riemannova integrálu plyne, že existují po částech konstatní funkce g_j, h_j tak, že

$$g_j \le f \le h_j, \quad \int_a^b g_j(x)\,dx \nearrow R, \quad \int_a^b h_j(x)\,dx \searrow R.$$

Funkce $g = \sup_j g_j$ a $h = \inf_j h_j$ jsou měřitelné podle věty 3.10. Máme

$$R \leq \sup_j \int_a^b g_j \leq \int_a^b g \leq \int_a^b h \leq \inf_j \int_a^b h_j \leq R.$$

Tedy funkce $h - g$ je nezáporná měřitelná a $\int(h-g) = \int h - \int g = 0$. Podle věty 4.8 je $h = g$ s.v., tedy i $h = f$ s.v. Tím je dokázána měřitelnost funkce f. Protože f je omezená na $[a,b]$, je Lebesgueovsky integrovatelná a

$$\int_a^b f = \int_a^b h = R.$$

□

6. Záměna limity a integrálu

V této kapitole pracujeme v prostoru s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$. Symbol pro integraci budeme někdy zjednodušovat (vynecháním "$d\mu$"). Vzorec

$$\int_D \lim_j f_j = \lim_j \int_D f_j$$

platí pro Lebesgueův integrál za značně obecných předpokladů. Na druhé straně je snadné sestrojit protipříklady (např. pro klasický Lebesgueův integrál $f_j(x) = j^2 e^{-jx}$, $D = (0, \infty)$), a tudíž je zapotřebí tyto předpoklady hlídat.

V dalším budeme uvažovat prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

6.1. **Lemma** (Fatouovo). *Nechť $D \in S$ a $\{f_j\}$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na D. Potom*

$$\int_D \liminf_j f_j \leq \liminf_j \int_D f_j. \tag{15}$$

Důkaz. Pro $k = 1, 2, \dots$ máme

$$\int_D \inf_{j \geq k} f_j \leq \inf_{i \geq k} \int_D f_i.$$

Limitní přechod pro $k \to \infty$ s použitím Leviho věty na posloupnost $\{\inf_{j \geq k} f_j\}_k$ dává (15). □

6.2. **Věta** (Lebesgueova, dominated convergence theorem). *Nechť $D \in S$ a f, f_j, $j = 1, 2, \dots$, jsou měřitelné funkce na D. Nechť posloupnost $\{f_j\}$ konverguje skoro všude k f. Nechť existuje integrovatelná funkce g (takzvaná* majoranta*) tak, že*

$$|f_j(x)| \leq g(x), \qquad j = 1, 2, \dots, \quad x \in D. \tag{16}$$

Potom

$$\int_D f = \lim_j \int_D f_j. \tag{17}$$

Důkaz. Můžeme předpokládat, že uvažované funkce jsou konečné a konvergence nastává všude, jinak bychom z D odstranili množinu míry nula. Použijeme additivitu integrálu a Fatouovo lemma na funkce $g + f_j$, $g - f_j$. Dostaneme

$$\int_D f \leq \liminf_j \int_D f_j \leq \limsup_j \int_D f_j \leq \int_D f,$$

což je (17). □

6.3. **Důsledek** (Lebesgueova věta pro řady). *Nechť $D \in S$ a g_j, $j = 1, 2, \dots$, jsou měřitelné funkce na D. Nechť řada $\sum_j g_j$ konverguje skoro všude. Nechť existuje integrovatelná funkce g (takzvaná* majoranta*) tak, že*

$$\Big|\sum_{j=1}^k g_j(x)\Big| \leq g(x), \qquad k = 1, 2, \dots, \quad x \in D. \tag{18}$$

Potom

$$\int_D \sum_j g_j \, d\mu = \sum_j \int_D g_j \, d\mu. \tag{19}$$

Důkaz. Stačí použít additivitu integrálu a Lebesgueovu větu na částečné součty. □

7. Záměna řady a integrálu

Některé věty o záměně řady a integrálu jsme již dostali jako důsledky vět o záměně limity a integrálu. Podle důsledku 4.16, u řad s nezápornými členy záměna nečiní potíže. Obecný případ je těžší, neboť předpoklad (18) důsledku 6.3 se těžko ověřuje. Málokdy totiž umíme spočítat částečné součty řady. Výjimku tvoří geometrické řady, ale i tam jsou jednodušší cesty k cíli. Následující věta obsahuje praktická kritéria pro záměnu řady a integrálu.

7.1. **Věta** (Záměna řady a integrálu)**.** *Nechť $D \in \mathcal{S}$ a g_j, $j = 1, 2, \dots$ jsou měřitelné funkce na D. Předpokládejme, že je splněna aspoň jedna z následujících podmínek:*

(a) *$g_j = aq^j$, kde a, q jsou měřitelné funkce, $|q| < 1$, a $\int_D \frac{a}{1-q}\,d\mu$ konverguje (geometrická řada),*
(b) *$\sum_j \int_D |g_j|\,d\mu < \infty$,*
(c) *$\int_D \sum_j |g_j|\,d\mu < \infty$,*
(d) *$g_j = (-1)^j h_j$, $h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq \dots \geq 0$, $h_j \to 0$, h_1 je integrovatelná (alternující řada).*

Potom řada $\sum_j g_j$ konverguje skoro všude a platí vzorec

$$\int_D \sum_j g_j\,d\mu = \sum_j \int_D g_j\,d\mu,$$

Důkaz. (a) odvodíme z formule pro částečné součty geometrické řady. Záměnu lze potom provést podle důsledku 6.3, majoranta $\frac{2a}{1-q}$. Použijeme-li Leviho větu (důsledek 4.16) na $|g_j|$, zjistíme, že podmínky (b) a (c) jsou ekvivalentní. Předpokládejme tedy (b) nebo (c). Funkce $g := \sum_j |g_j|$ je integrovatelná, a tudíž podle věty 4.8 konečná skoro všude. V bodech x, kde je $g(x)$ konečná, konverguje řada $\sum_j g_j(x)$, neboť konverguje absolutně. Můžeme tedy použít důsledek 6.3 s majorantou g. V případě (d) řada $\sum_j g_j$ konverguje podle Leibnizova kritéria a částečné součty mají majorantu h_1, tudíž můžeme provést záměnu podle důsledku 6.3. $\square$

7.2. **Příklad.** Máme

$$\int_0^1 \frac{\ln\frac{1}{x}}{1-x^2}\,dx = \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \ln\tfrac{1}{x}\Big)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^{2n} \ln\tfrac{1}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Záměnu výše můžeme ověřit z důsledku 4.16, ale na podobnou úlohu

$$\int_0^1 \frac{\ln\frac{1}{x}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \ln\tfrac{1}{x}\Big)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{2n} \ln\tfrac{1}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

musíme použít některé z kritérií věty 7.1.

7.3. **Varování.** Všimněte si dobře pořadí operátorů $\sum, \int, |\dots|$ v podmínkách (b), (c) věty 7.1! Jen velmi slabý student se může radovat, když ověří třeba

$$\int_D \Big|\sum_j g_j\,d\mu\Big| < \infty.$$

8. Integrál závislý na parametru

V této kapitole uvažujeme prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $D \in \mathcal{S}$. Cílem je studovat chování funkce

$$F(t) := \int_D f(t, x)\,d\mu(x),$$

kde t je další proměnná ("parametr"). Je-li f funkce dvou proměnných t a x, zavedeme funkce $f(\cdot, x)$ proměnné t a $f(t, \cdot)$ proměnné x předpisem

$$f(t,\cdot):\ x \mapsto f(t,x),$$
$$f(\cdot,x):\ t \mapsto f(t,x).$$

8.1. **Věta** (Limita integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť P je metrický prostor a $A \subset P$. Buď $a \in \overline{A} \setminus A$. Nechť funkce $f : A \times D \to \overline{\mathbb{R}}$ má následující vlastnosti:*

(Li-1) *Pro skoro všechna $x \in D$ existuje $\lim\limits_{t \to a,\, t \in A} f(t, x)$.*
(Li-2) *pro všechna $t \in A$ je funkce $f(t, \cdot)$ měřitelná,*
(Li-3) *existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $t \in A$ a $x \in D$ je $|f(t, x)| \leq g(x)$.*

Potom

$$\int_D \lim_{t\to a,\, t\in A} f(t,x)\, d\mu(x) = \lim_{t\to a,\, t\in A} \int_D f(t,x)\, d\mu(x). \tag{20}$$

speciálně výrazy vyskytující se v (20) mají smysl.

Důkaz. Připomeňme, že v metrických prostorech lze použít ekvivalentní tzv. Heineovu definici limity: K důkazu tvrzení

$$\lim_{t\to a} \int_D f(t,\cdot)\, d\mu = \int_D \lim_{t\to a} f(t,\cdot)\, d\mu$$

stačí ověřit, že pro každou posloupnost $t_j \to a$ bodů množiny A platí

$$\lim_j \int_D f(t_j,\cdot)\, d\mu = \int_D \lim_j f(t_j,\cdot)\, d\mu\,.$$

To je však zřejmé z Lebesgueovy věty 6.2. Poznamenejme, že aspoň jedna taková posloupnost $\{t_j\}$ existuje, a tudíž funkce

$$\lim_{t\to a} f(t,\cdot) = \lim_j f(t_j,\cdot)$$

je měřitelná. □

8.2. **Poznámka.** Tvrzení věty 8.1 o záměně limity a integrálu platí též v situaci, kdy např. $A = (0,+\infty)$ a $a = +\infty$. Substituce $t \mapsto 1/t$ převádí problém na limitu v nule zprava, která už zřejmě spadá do kontextu metrických prostorů.

8.3. **Věta** (Spojitost integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť P je metrický prostor. Buď $a \in P$ a U okolí bodu a v P. Nechť funkce $f : U \times D \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(Sp-1) *Pro skoro všechna $x \in D$ je funkce $f(\cdot,x)$ spojitá v a,*
(Sp-2) *pro všechna $t \in U$ je funkce $f(t,\cdot)$ měřitelná,*
(Sp-3) *existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $t \in U$ a $x \in D$ je $|f(t,x)| \le g(x)$.*

Potom pro všechna $t \in U$ je $f(t,\cdot)$ integrovatelná a funkce

$$F : t \mapsto \int_D f(t,x)\, d\mu(x)$$

je spojitá v bodě a.

Důkaz. Věta je zřejmým důsledkem věty 8.1, kterou aplikujeme na $A = U \setminus \{a\}$ □

8.4. **Věta** (Derivace integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť $(X,\mathcal{S},\mu)$ je prostor s mírou a $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Nechť funkce $f : I \times D \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(De-1) *Pro skoro všechna $x \in D$ je funkce $f(\cdot,x)$ diferencovatelná na I,*
(De-2) *pro všechna $t \in I$ je funkce $f(t,\cdot)$ měřitelná,*
(De-3) *existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $t \in I$ a $x \in D$ je*

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\Big| \le g(x),$$

(De-4) *existuje $t_0 \in I$ tak, že $f(t_0,\cdot)$ je integrovatelná na D.*

Potom pro všechna $t \in I$ je $f(t,\cdot)$ integrovatelná na D, funkce

$$F : t \mapsto \int_D f(t,x)\, d\mu(x)$$

je diferencovatelná na I a platí vzorec

$$F'(t) = \int_D \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu(x)\,.$$

Důkaz. Nechť $a, b \in I$, $b \ne a$. Podle věty o střední hodnotě pro skoro každé $x \in D$ existuje ξ mezi a a b tak, že

$$\Big|\frac{f(b,x) - f(a,x)}{b-a}\Big| = \Big|\frac{\partial f}{\partial t}(\xi,x)\Big| \le g(x).$$

Odtud plyne, že funkce

$$x \mapsto \frac{f(b,x) - f(a,x)}{b-a}$$

je integrovatelná, tudíž, volíme-li $a = t_0$, i funkce $f(b, \cdot)$ je integrovatelná. Zvolme znovu $a \in I$. Uvažujme funkci

$$h(t,x) = \begin{cases} \dfrac{f(t,x) - f(a,x)}{t-a}, & t \neq a, \\ \frac{\partial f}{\partial t}(a,x), & t = a. \end{cases}$$

Z předpokladů a výše dokázaného je jasné, že funkce $h(t,x)$ splňuje předpoklady věty 8.3 pro spojitost v bodě a (s majorantou g), tedy

$$\begin{aligned} F'(a) &= \lim_{t\to a} \frac{\int_D f(t,x)\,d\mu(x) - \int_D f(a,x)\,d\mu(x)}{t-a} \\ &= \lim_{t\to a} \int_D \frac{f(t,x) - f(a,x)}{t-a}\,d\mu(x) = \int_D \frac{\partial f}{\partial t}(a,x)\,d\mu(x)\,. \end{aligned}$$

Tím je věta dokázána. □

8.5. **Příklad.** Uvažujme funkci

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\, e^{-tx}\,dx.$$

Potom F je spojitá na $[0,\infty)$ (majoranta $x^{-2}(1-\cos x)$) a pro $t \in (0,\infty)$ je

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x}\, e^{-tx}\,dx, \\ F''(t) &= \int_0^\infty (1-\cos x)\, e^{-tx}\,dx. \end{aligned}$$

Zde již nemůžeme najít majorantu najednou pro $t \in (0,\infty)$, poslouží

$$\begin{aligned} &x \mapsto \frac{1-\cos x}{x}\, e^{-ax}, \\ &x \mapsto (1-\cos x)\, e^{-ax} \end{aligned}$$

pro $t \in (a,\infty)$. Jelikož pro $p > 0$, $q \in \mathbb{R}$ je

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-px}\, \cos qx\,dx &= \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-px-\mathrm{i}qx}\,dx = -\operatorname{Re}\Big[\frac{e^{-px-\mathrm{i}qx}}{p+\mathrm{i}q}\Big]_{x=0}^\infty = \operatorname{Re}\ \frac{1}{p+\mathrm{i}q} \\ &= \frac{p}{p^2+q^2}\,, \end{aligned}$$

máme

$$F''(t) = \frac{t}{t^2} - \frac{t}{t^2+1} = \frac{1}{t(t^2+1)}.$$

Jelikož

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty} F'(t) = 0,$$

snadno ověříme

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big), \quad t \in (0,\infty), \\ F(t) &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\, t\, \ln\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big), \quad t \in [0,\infty). \end{aligned}$$

Speciálně dostáváme

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = F(0) = \frac{\pi}{2}. \tag{21}$$

Buď

$$G(a) = \int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Potom integrováním per partes dostaneme

$$G(a) = \frac{1-\cos a}{a} + \int_0^a \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

Limitní přechod s využitím (21) dává

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} G(a) = \frac{\pi}{2}.$$

8.6. **Příklad.** Nechť

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t}{\ln x}\, dx, \qquad t > -1.$$

Mechanickým derivováním za integračním znamením (není splněn předpoklad (D4)) bychom dostali

$$F'(t) = \int_0^1 x^t\, dx = \frac{1}{1+t},$$

ačkoli $F \equiv -\infty$. Porovnejte s výpočtem derivace pro

$$G(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x}\, dx.$$

8.7. **Příklad.** Nechť

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2}.$$

Mechanickým derivováním za integračním znamením (není splněn předpoklad (D3)) bychom dostali

$$F'(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin tx}{1+x^2},$$

kterýžto integrál konverguje pouze v nule. Nula je ovšem jediný bod, kde F derivaci nemá. Zkuste dokázat existenci F' na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$! (Per partes vede na integrál, který je vstřícnější k derivování za integračním znamením.)

8.8. **Definice** (Zavedení Gamma a Beta funkce)**.** Funkci *Gamma* definujeme na intervalu $(0, \infty)$ předpisem

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}\, e^{-x}\, dx. \tag{22}$$

Funkci *Beta* dvou proměnných $p > 0$, $q > 0$ definujeme předpisem

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx.$$

Ověřte samostatně konvergenci integrálů!

8.9. **Pozorování** (Rekurentní formule)**.** Integrováním per partes zjistíme pro $s > 0$

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{\infty} x^s\, e^{-x}\, dx = \int_0^{\infty} s\, x^{s-1}\, e^{-x}\, dx = s\,\Gamma(s). \tag{23}$$

Obdobně pro $p, q > 0$

$$pB(p, q+1) = \int_0^1 px^{p-1}(1-x)^q\, dx = \int_0^1 x^p\, q(1-x)^{q-1}\, dx = qB(p+1, q). \tag{24}$$

8.10. **Pozorování** (Derivování funkce Γ)**.** Formálním derivováním za integračním znamením dostaneme rekurentně

$$\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}(\ln x)^k\, e^{-x}\, dx.$$

Vzorec lze odůvodnit použitím věty o derivování podle parametru pro $s \in (p, q)$, kde $0 < p < q < \infty$, s majorantou

$$g(x) = (x^{p-1} + x^{q-1})|\ln x|^k\, e^{-x}.$$

Funkce Gamma je tedy nekonečně diferencovatelná, tím spíš spojitá na $(0, \infty)$.

8.11. **Pozorování** (Průběh funkce Gamma)**.** Zřejmě $\Gamma(s) > 0$ pro $s > 0$. Druhá derivace je zřejmě kladná, tedy Gamma je striktně konvexní na $(0, \infty)$. Z konvexity je zjevné, že $\lim_{s\to\infty} \Gamma(s)$ existuje. Jelikož $n! \to \infty$, je

$$\lim_{s\to\infty} \Gamma(s) = \infty.$$

Ze vzorce $\Gamma(s) = \Gamma(s+1)/s$ dostaneme

$$\lim_{s\to 0_+} \Gamma(s) = \infty.$$

9. Vnější míra

V této kapitole uvedeme obecné schéma používané ke konstrukci měr. Motivem jsou aplikace na konstrukce měr v analýze, zvláště Lebesgueovy míry, a aplikace v teorii pravděpodobnosti.

Konstrukce popsaná v definici 9.2 je stejná, jakou jsme již použili v speciálním případě na konstrukci vnější Lebesgueovy míry v definici 2.1.

9.1. **Definice** (Vnější míra). *Vnější mírou* na množině X rozumíme množinovou funkci $\gamma : 2^X \to [0, \infty]$ (tedy definovanou na všech podmnožinách X) splňující následující požadavky:

(VM-1) $\gamma(\emptyset) = 0$,
(VM-2) $A \subset B \implies \gamma(A) \le \gamma(B)$,
(VM-3) $\gamma(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(A_j)$ (*σ-subadditivita*).

S vnějšími měrami se budeme setkávat především jako s mezistupněm při konstrukci míry.

9.2. **Definice** (Z výchozí množinové funkce k vnější míře). Nechť $\mathcal{G} \subset 2^X$ a $\tau : \mathcal{G} \to [0, \infty]$ je množinová funkce na X splňující

$$\emptyset \in \mathcal{G}, \quad \tau(\emptyset) = 0. \tag{25}$$

Podmínce (25) budeme říkat *počáteční podmínka*. Pro $A \subset X$ položme

$$\tau^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \tau(G_j) : G_j \in \mathcal{G},\ \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \supset A\} \tag{26}$$

(uvědomte si, že $\inf \emptyset = +\infty$). Každý součet

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tau(G_j),$$

kde

$$G_j \in \mathcal{G},\ \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \supset A,$$

nazveme *horním součtem* k $\tau^*(A)$. Užitečnost konstrukce dokládá následující věta.

9.3. **Věta.** *Nechť $\mathcal{G}$, τ a τ^* jsou jako v definici 9.2. Potom τ^* je vnější míra.*

Důkaz. (VM-1) a (VM-2) jsou zřejmé. (VM-3): Chceme-li dokázat

$$\tau^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \tau^*(A_j),$$

zřejmě se stačí omezit na případ, kdy na pravé straně máme konečné číslo. Volme $\varepsilon > 0$ a nalezněme $G_j^i \in \mathcal{G}$, $i, j = 1, 2, \dots$, tak, aby

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} G_j^i \supset A_j \text{ a } \sum_{i=1}^{\infty} \tau(G_j^i) < \tau^*(A_j) + 2^{-j}\varepsilon\,.$$

Potom

$$\bigcup_{j,i=1}^{\infty} G_j^i \supset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \text{ a } \sum_{j,i=1}^{\infty} \tau(G_j^i) \le \sum_{j=1}^{\infty} \tau^*(A_j) + \varepsilon.$$

Tedy

$$\tau^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \tau^*(A_j) + \varepsilon.$$

□

9.4. **Definice** (γ-měřitelné množiny). Nechť γ je abstraktní vnější míra na X. Množinu $M \subset X$ nazveme *γ-měřitelnou (podle Carathéodoryho)*, jestliže pro každou "testovací" množinu $T \subset X$ platí

$$\gamma(T) = \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M)$$

Systém všech (carathéodoryovsky) měřitelných množin značíme $\mathfrak{M}(\gamma)$ a množinovou funkci $\gamma\lfloor\mathfrak{M}(\gamma)$ značíme γ°.

K důkazu γ-měřitelnosti množiny M stačí ověřit pouze nerovnost

$$\gamma(T) \geq \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M) ,$$

a to ještě samozřejmě jen v případech, kdy $\gamma(T) < \infty$.

9.5. **Věta** (Carathéodoryova)**.** *Nechť γ je abstraktní vnější míra na X. Pak systém $\mathfrak{M}(\gamma)$ tvoří σ-algebru a γ° je úplná míra.*

Důkaz. Ihned je vidět, že $\emptyset$, $X \in \mathfrak{M}(\gamma)$, a jestliže $M \in \mathfrak{M}(\gamma)$, potom i $X \setminus M \in \mathfrak{M}(\gamma)$. Buďte A, $B \in \mathfrak{M}(\gamma)$, chceme ukázat, že i $A \cup B \in \mathfrak{M}(\gamma)$. Volme tedy testovací množinu $T \subset X$. Použijeme postupně T pro testování měřitelnosti A a $T \cap A$, $T \setminus A$ pro testování měřitelnosti B. Dostaneme (symbolem M^c budeme značit $X \setminus M$)

$$\begin{aligned}
\gamma(T) &= \gamma(T \cap A) + \gamma(T \cap A^c), \\
\gamma(T \cap A) &= \gamma(T \cap A \cap B) + \gamma(T \cap A \cap B^c), \\
\gamma(T \cap A^c) &= \gamma(T \cap A^c \cap B) + \gamma(T \cap A^c \cap B^c),
\end{aligned}$$

takže (použijeme také subadditivitu γ)

$$\begin{aligned}
\gamma(T) &= \gamma(T \cap A \cap B) + \gamma(T \cap A \cap B^c) + \gamma(T \cap A^c \cap B) + \gamma(T \cap A^c \cap B^c) \\
&\geq \gamma(T \cap (A \cup B)) + \gamma(T \cap (A \cup B)^c).
\end{aligned}$$

Dokázali jsme zatím, že systém všech γ-měřitelných množin je algebra. Mějme nyní posloupnost $\{E_j\}$ po dvou disjunktních γ-měřitelných množin. Indukcí dostaneme z předchozího, že pro každé $m = 1, 2, \ldots$ a pro každou testovací množinu $T \subset X$ je

$$\gamma(T) = \sum_{j=1}^{m} \gamma(T \cap E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{m} E_j) \tag{27}$$

Podrobněji: pro $m = 1$ je to měřitelnost E_1. Platí-li (27) pro m, použijeme testovací množinu $T \setminus \bigcup_{j=1}^{m} E_j$ na měřitelnost E_{m+1} a dostaneme

$$\gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{m} E_j) = \gamma(T \cap E_{m+1}) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{m+1} E_j). \tag{28}$$

Sečtením (27) a (28) dostaneme (27) pro $m + 1$. Z (27) máme hned

$$\gamma(T) \geq \sum_{j=1}^{m} \gamma(T \cap E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)$$

a odtud limitním přechodem pro $m \to \infty$

$$\gamma(T) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(T \cap E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j). \tag{29}$$

Nyní dokážeme, že pro $A_j \in \mathfrak{M}(\gamma)$ je $\bigcup_j A_j \in \mathfrak{M}(\gamma)$. Vyrobíme po dvou disjunktní E_j z A_j podle větičky 1.15. Potom $E_j \in \mathfrak{M}(\gamma)$ podle první části důkazu. Použijeme σ-subadditivitu γ na (29) a dostaneme

$$\begin{aligned}
\gamma(T) &= \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(T \cap E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \\
&\geq \gamma(T \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j),
\end{aligned}$$

což dává γ-měřitelnost množiny

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Zbývá dokázat, že γ° je míra. Víme, že $\gamma(\emptyset) = 0$. Buď $\{E_j\}$ posloupnost po dvou disjunktních γ-měřitelných množin. Potom použijeme (29) na

$$T = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

(pro $\geq$) a σ-subadditivitu γ (pro $\leq$) a dostaneme

$$\gamma(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(E_j).$$

Úplnost míry γ° je snadná. $\square$

9.6. **Definice** (Základní konstrukce). Základní schéma konstrukce míry probíhá ve dvou krocích. Vyjdeme z nezáporné množinové funkce $(\mathcal{G}, \tau)$, od které nechceme téměř nic – předpokládáme jen počáteční podmínku (25). V prvním kroku vytvoříme podle definice 9.2 a věty 9.3 vnější míru τ^*, v druhém kroku pak podle definice 9.4 a věty 9.5 (úplnou) míru $(\mathfrak{M}(\tau^*), \tau^{*\circ})$. Pro výslednou míru zavedeme zkrácené značení

$$(\mathcal{G}', \tau') := (\mathfrak{M}(\tau^*), \tau^{*\circ}). \tag{30}$$

Konstrukci obvykle považujeme za úspěšnou, jestliže (G', τ') je rozšířením $(\mathcal{G}, \tau)$. Tento případ nastává při konstrukci Lebesgue-Stieltjesovy míry, což záhy uvidíme.

10. Konstrukce Lebesgueovy míry

10.1. **Definice** (Lebesgueova míra). Na elementární objem $\ell = \ell_n$ budeme aplikovat základní konstrukci z definice 9.6. V prvním kroku definujeme vnější míru ℓ^* jako v (26). Vnější míra $\ell^* \colon A \mapsto \ell^*(A)$, definovaná na potenční množině $2^{\mathbb{R}^n}$, se nazývá (Lebesgueova) *vnější míra*. Aplikujeme-li základní konstrukci na $(\mathcal{I}_n, \ell)$, výsledkem bude míra $((\mathcal{I}_n)', \ell')$, která se nazývá *Lebesgueova míra* a značí $(\mathfrak{M}, \lambda)$. Ve větě 10.8 dokážeme, že $((\mathcal{I}_n)', \ell')$ je rozšířením množinové funkce ℓ.

10.2. **Věta.** *Nechť $Q \in \mathcal{I}_n$. Potom $\ell^*(Q) = \ell(Q)$.*

Důkaz. Zřejmě $\ell(Q)$ je horní součet k $\ell^*(Q)$ a tudíž $\ell^*(Q) \leq \ell(Q)$. Obrácenou nerovnost dokážeme sporem. Mějme $Q, Q_j \in \mathcal{I}_n$, $j = 1, 2, \dots$, a předpokládejme, že

$$Q \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,$$

ale

$$\ell(Q) > \sum_{j=1}^{\infty} \ell(Q_j). \tag{31}$$

Intervaly Q, Q_j si ještě trochu upravíme pomocí spojitosti zprava (Q trochu zmenšíme a Q_j trochu zvětšíme) tak, že (31) platí stále a co se týče inkluze, dokonce

$$\overline{Q} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^\circ.$$

Položme $I_1 = Q$. Zřejmě

$$\ell(I_1) > \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_1 \cap Q_j).$$

Pomocí vhodné nadroviny $H \in \mathcal{H}_n$ rozdělíme I_1 na $I_1 \cap H$ a $I_1 \setminus H$. Potom z aditivity

$$\ell(I_1) = \ell(I_1 \cap H) + \ell(I_1 \setminus H),$$
$$\ell(I_1 \cap Q_j) = \ell(I_1 \cap Q_j \cap H) + \ell(I_1 \cap Q_j \setminus H), \qquad j = 1, 2, \dots$$

takže najdeme $I_2 \in \{I_1 \cap H,\, I_1 \setminus H\}$ tak, že

$$\ell(I_2) > \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_2 \cap Q_j).$$

Pokračujeme indukcí a postupným dělením nacházíme "stále menší" intervaly I_k tak, že $I_1 \supset I_2 \supset \dots$, $\operatorname{diam} I_k \to 0$ a

$$\ell(I_k) > \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_k \cap Q_j), \qquad k = 1, 2, \dots.$$

Podle Cantorovy věty existuje bod $x \in \bigcap_k \overline{I}_k$. Potom $x \in \overline{Q}$ a tudíž existuje j tak, že $x \in Q_j^\circ$. Pak ovšem pro dost velká k je $I_k \subset Q_j$, a proto

$$\ell(I_k) = \ell(I_k \cap Q_j),$$

což je spor. Dostáváme tedy

$$\ell(Q) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(Q_j)$$

pro každý horní součet k $\ell^*(Q)$, a tedy

$$\ell(Q) \leq \ell^*(Q).$$

□

10.3. **Lemma.** Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$. Potom E je ℓ^*-měřitelná, právě když

(32) $$\ell(Q) = \ell^*(Q \cap E) + \ell^*(Q \setminus E), \qquad Q \in \mathcal{I}_n.$$

Důkaz. Podle věty 10.2 je $\ell(Q) = \ell^*(Q)$, tedy ℓ^*-měřitelnost implikuje (32). Co se týče opačné implikace, zvolme tedy $T \subset \mathbb{R}^n$ a uvažujme horní součet $\sum_j \ell(Q_j)$ pro $\ell^*(T)$. Jelikož ℓ^* splňuje axiomy abstraktní vnější míry a množina E splňuje (32), máme

$$\begin{aligned}
\ell^*(T \cap E) + \ell^*(T \setminus E) &\leq \sum_j \ell^*(T \cap E \cap Q_j) + \sum_j \ell^*(T \cap E^c \cap Q_j) \\
&\leq \sum_j \ell^*(E \cap Q_j) + \sum_j \ell^*(E^c \cap Q_j) \\
&= \sum_j \ell(Q_j)
\end{aligned}$$

Přechodem k infimu přes horní součty dostaneme

$$\ell^*(T \cap E) + \ell^*(T \setminus E) \leq \ell^*(T)$$

Opačná nerovnost plyne triviálně ze subaditivity ℓ^*. □

10.4. **Poznámka.** Lemma 10.3 ospravedlňuje původní definici 2.2 lebesgueovsky měřitelných množin.

10.5. **Definice.** Označme $\mathcal{H}_n$ systém všech poloprostorů tvaru $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i \leq c\}$ kde $i \in \{1, \dots, n\}$ a $c \in \mathbb{R}$.

10.6. **Lemma.** *Každý poloprostor $H \in \mathcal{H}_n$ je ℓ^*-měřitelná množina.*

Důkaz. Nechť $H \in \mathcal{H}_n$ a $Q \in \mathcal{I}_n$. Potom $Q \cap H,\ Q \setminus H \in \mathcal{I}_n$. S pomocí aditivity a věty 10.2 dostáváme

$$\ell(Q) = \ell(Q \cap H) + \ell(Q \setminus H) = \ell^*(Q \cap H) + \ell^*(Q \setminus H).$$

Podle lemmatu 10.3 je H ℓ^*-měřitelná. □

10.7. **Lemma.** *Systém $\mathcal{H}_n$ generuje borelovskou σ-algebru v $\mathbb{R}^n$.*

Důkaz. Zřejmě je každý poloprostor borelovský. Jelikož každý interval $Q \in \mathcal{I}_n$ je průnik $2n$ "souřadnicových" poloprostorů, je $\mathcal{I}_n \subset \sigma(\mathcal{H}_n)$. Buď $\mathcal{Q}$ systém všech n-rozměrných kartézských součinů jednorozměrných intervalů s racionálními konci. Potom $\mathcal{Q} \subset \mathcal{I}_n$. Je-li $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, snadno ověříme

$$G = \bigcup \{Q \in \mathcal{Q} : Q \subset G\},$$

tedy G je spočetným sjednocením množin z $\sigma(\mathcal{H}_n)$. Dostáváme

$$\sigma(\mathcal{H}_n) = \sigma(\{G \subset \mathbb{R}^n : G \text{ otevřená}\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

□

10.8. **Věta.** *Systém množin $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\ell^*)$ je σ-algebra obsahující všechny borelovské množiny (tím spíš všechny intervaly), $\lambda = \ell'$ splňuje axiomy míry a $\ell' = \ell$ na $\mathcal{I}_n$.*

Důkaz. Věta je pouze shrnutím již dosažených výsledků. Ze základní konstrukce (věta 9.5) dostáváme, že systém množin $\mathfrak{M}(\ell^*)$ je σ-algebra a ℓ' splňuje axiomy míry. Dokážeme měřitelnost intervalů. Podle lemmatu 10.6, každý poloprostor $H \in \mathcal{H}_n$ je v $\mathfrak{M}(\ell^*)$ a o tomto systému už teď víme, že je to σ-algebra. Tedy podle lemmatu 10.7 je každá borelovská množina ℓ^*-měřitelná. Připomeňme, že podle věty 10.2 je $\ell^*(Q) = \ell(Q)$ pro každý interval $Q \in \mathcal{I}_n$. Vzhledem k měřitelnosti intervalů můžeme tuto rovnost přepsat jako $\ell'(Q) = \ell(Q)$. □

11. Hopfova věta: Existence rozšíření

Hopfova věta je abstraktním nástrojem ke konstrukcím měr rozšiřováním. Hopfovu větu by bylo možné použít i ke konstrukcím Lebesgue-Stieltjesových měr, ale ověření předpokladů by bylo pracné.

11.1. **Definice** (Pramíra, konečně aditivní míra)**.** Nechť X je abstraktní množina a $\mathcal{O} \subset 2^X$ je okruh. Množinová funkce $\pi : \mathcal{O} \to [0, \infty]$ se nazývá *pramíra*, jestliže splňuje

(Pr-1) $\pi(\emptyset) = 0$,
(Pr-2) jestliže $A \in \mathcal{O}$, $A_j \in \mathcal{O}$, $j = 1, 2, \dots$, A_j jsou po dvou disjunktní a $A = \bigcup_j A_j$, potom

$$\pi(A) = \sum_j \pi(A_j).$$

Požadavek, že hodnoty jsou nezáporné a definiční obor je okruh, je součástí definice pramíry. Pokud množinová funkce π na okruhu splňuje pouze (Pr-1) a obdobu (Pr-2) pro *konečná* disjunktní sjednocení, nazývá se *konečně aditivní míra*. Zdůrazněme, že konečně aditivní míra nemusí být míra, přívlastek je zobecňující.

Řekneme, že pramíra π na $\mathcal{O}$ je *σ-konečná*, jestliže existují $X_k \in \mathcal{O}$ tak, že

$$\pi(X_k) < \infty, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{a} \quad X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k.$$

11.2. **Věta** (Hopfova věta)**.** *Nechť $\mathcal{O}$ je okruh podmnožin X a π je pramíra na $\mathcal{O}$. Nechť $\mathcal{S}_0$ je nejmenší σ-algebra obsahující $\mathcal{O}$. Potom existuje míra μ_0 na $\mathcal{S}_0$, která rozšiřuje π. Jestliže π je σ-konečná, pak je taková míra μ_0 na $\mathcal{S}_0$ určena jednoznačně.*

11.3. **Poznámka.** Důkaz Hopfovy věty vyplyne z obecnějších tvrzení (věta 11.4, věta 12.5), která dokážeme v této a následující sekci.

11.4. **Věta** (Hopfova o existenci)**.** *Nechť X je abstraktní množina, $\mathcal{O}$ je množinový okruh na X a π je pramíra na $\mathcal{O}$. Potom míra $(\mathcal{O}', \pi')$ (výsledek základní konstrukce) rozšiřuje $(\mathcal{O}, \pi)$.*

Důkaz. 1. krok. Nechť $Q \in \mathcal{O}$, chceme dokázat, že $Q \in \mathfrak{M}(\pi^*)$. Zvolme testovací množinu $T \subset X$ a spočetný systém $\{G_k\}$ množin z $\mathcal{O}$ tak, že $T \subset \bigcup_k G_k$. Množiny $G_k \cap Q$, $G_k \setminus Q$ leží v $\mathcal{O}$, tedy

$$\pi(G_k) = \pi(G_k \cap Q) + \pi(G_k \setminus Q).$$

Jelikož $\sum_k \pi(G_k \cap Q)$ je horní součet k $\pi^*(T \cap Q)$ a $\sum_k \pi(G_k \setminus Q)$ je horní součet k $\pi^*(T \setminus Q)$, máme

$$\pi^*(T \cap Q) + \pi^*(T \setminus Q) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \pi(G_k \cap Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \pi(G_k \setminus Q) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi(G_k)$$

a přechodem k infimu přes všechny horní součty k $\pi^*(Q)$ dostaneme

$$\pi^*(T \cap Q) + \pi^*(T \setminus Q) \leq \pi^*(T).$$

Opačná nerovnost platí ze subaditivity, tedy $Q \in \mathfrak{M}(\pi^*)$.
2. krok. Ukážeme, že pro každou $Q \in \mathcal{O}$ je $\pi^*(Q) = \pi(Q)$. Je-li systém $\{G_k\}$ pokrytí Q množinami z $\mathcal{O}$, pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $G_k \cap Q \in \mathcal{O}$. Použijeme trik zdisjunktnění (větičku 1.15) a najdeme disjunktní systém $\{E_j\}$ množin z $\mathcal{O}$ tak, že $E_j \subset G_j \cap Q$ a $\bigcup_j E_j = \bigcup_j (G_j \cap Q) = Q$. Tedy podle předpokladu (Pr-2) je

$$\pi(Q) = \sum_j \pi(E_j) \leq \sum_j \pi(G_j).$$

přechodem k infimu přes všechny horní součty dostaneme

$$\pi(Q) \leq \pi^*(Q).$$

Jelikož jednoprvkový systém $\{Q\}$ je pokrytí Q, opačná nerovnost $\pi^*(Q) \leq \pi(Q)$ platí triviálně. $\square$

11.5. **Poznámka** (o úplnosti)**.** Míra π', která vznikne rozšířením π za pomoci základní konstrukce, je automaticky úplná. Klasická formulace Hopfovy věty však o úplnosti nemluví. Pokud chceme použít toto znění pro konstrukci např. Lebesgueovy míry, použijeme Hopfovu větu (o rozšíření z intervalů na generovanou σ-algebru) v kombinaci s konstrukcí zúplnění, kterou popíšeme v section 13. Paradoxně pak docházíme k postupu, kdy vytvoříme tu správnou míru již při důkazu Hopfovy věty, pak se ještě během tohoto důkazu neborelovských měřitelných množin zbavíme, “abychom” je v dalším kroku konstrukce (již mimo Hopfovu větu) jiným způsobem získali zpět.

12. Jednoznačnost rozšíření

12.1. **Definice** (Dynkinův systém). Nechť X je abstraktní množina. Systém množin $\mathcal{D} \subset 2^X$ se nazývá *Dynkinův systém*, je-li splněno

(D-1) $\emptyset, X \in \mathcal{D}$,
(D-2) $A, B \in \mathcal{D}, B \subset A \implies A \setminus B \in \mathcal{D}$.
(D-3) Jestliže $A_j \in \mathcal{D}$ jsou po dvou disjunktní, pak $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{D}$.

Každá σ-algebra je Dynkinův systém.

Důležitost Dynkinových systémů spočívá v tom, že jsou li μ, ν dvě míry na $(X, \mathcal{S})$, $\mu(X) = \nu(X) < \infty$, potom systém množin $\{A \in \mathcal{S} : \mu(A) = \nu(A)\}$ je Dynkinův systém (obecně ne σ-algebra: uvažujte např. míry $A \mapsto \lambda(\{x \in A : x > 0\})$ a $A \mapsto \lambda(\{x \in A : x < 0\})$ na intervalu $[-1, 1]$).

12.2. **Definice** (Generování Dynkinových systémů). Je-li $\mathcal{F}$ libovolný systém podmnožin X, potom existuje nejmenší Dynkinův systém obsahující $\mathcal{F}$. Tento Dynkinův systém dostaneme jako průnik všech Dynkinových systémů obsahujících $\mathcal{F}$; budeme jej značit $\delta(\mathcal{F})$. Připomeňme, že $\sigma(\mathcal{F})$ značíme nejmenší σ-algebru obsahující $\mathcal{F}$.

12.3. **Věta** (o Dynkinových systémech). *Nechť $\mathcal{F}$ je systém podmnožin X uzavřený na konečné průniky. Potom $\delta(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$.*

Důkaz. Nechť $A \in \sigma(\mathcal{F})$. Označme $\mathcal{F}_A = \{B \in \sigma(\mathcal{F}) : A \cap B \in \delta(\mathcal{F})\}$. Jestliže $A \in \mathcal{F}$, pak $\mathcal{F}_A$ je Dynkinův systém obsahující $\mathcal{F}$, tedy $\mathcal{F}_A \supset \delta(\mathcal{F})$. Nechť nyní $A \in \delta(\mathcal{F})$, potom podle předchozího kroku je $\mathcal{F}_A$ Dynkinův systém a obsahuje $\mathcal{F}$. Pak ale podobně jako v předchozím kroku je $\mathcal{F}_A \supset \delta(\mathcal{F})$. Dokázali jsme, že systém $\delta(\mathcal{F})$ je uzavřený na průniky. Každý Dynkinův systém uzavřený na průniky je však zřejmě σ-algebra, tedy $\delta(\mathcal{F})$ je σ-algebra obsahující $\mathcal{F}$. Z minimality obou systémů plyne, že $\delta(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$. □

12.4. **Věta** (o jednoznačnosti). *Nechť $\mathcal{F}$ je systém podmnožin X uzavřený na konečné průniky. Nechť μ a ν jsou míry na $\sigma(\mathcal{F})$, které se shodují na $\mathcal{F}$. Jestliže existují $X_k \in \mathcal{F}$ tak, že $\mu(X_k) < \infty$ a $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k = X$, pak $\mu = \nu$ na $\sigma(\mathcal{F})$.*

Důkaz. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ je systém množin $\{A \in \sigma(\mathcal{F}) : \mu(A \cap X_k) = \nu(A \cap X_k)\}$ Dynkinův systém obsahující $\mathcal{F}$ a $\delta(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$ (rovnost nastává podle věty 12.3). Každou množinu $A \in \sigma(\mathcal{F})$ můžeme napsat jako (po dvou) disjunktní sjednocení

$$A = \bigcup_j A_j,$$

kde

$$A_j = E_j \cap X_j,$$
$$E_1 = A, \quad E_2 = (A \setminus X_1), \quad E_3 = (A \setminus (X_1 \cup X_2)), \dots .$$

Všimněme si, že E_j vyrobíme z množin z $\mathcal{F}$ okruhovými operacemi, tedy $E_j \in \sigma(\mathcal{F})$, ale tím pádem $E_j \in \delta(\mathcal{F})$ a $\mu(E_j \cap X_j) = \nu(E_j \cap X_j)$, neboli $\mu(A_j) = \nu(A_j)$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$. Jelikož A je disjunktní sjednocení množin A_j, dostáváme $\mu(A) = \nu(A)$. □

12.5. **Věta** (Hopfova o jednoznačnosti). *Nechť X je abstraktní množina, $\mathcal{O}$ je množinový okruh na X a π je σ-konečná pramíra na $\mathcal{O}$. Nechť míra $(\mathcal{S}, \mu)$ na X rozšiřuje $(\mathcal{O}, \pi)$. Potom $\sigma(\mathcal{O}) \subset \mathcal{S}$ a $\mu = \pi'$ na $\sigma(\mathcal{O})$.*

Důkaz. Věta je důsledkem věty 12.4. □

13. Zúplnění míry

13.1. **Definice** (Zúplnění míry). Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Položme

$$\overline{\mathcal{S}} := \{E \subset X : \exists\, E_*, E^* \in \mathcal{S} :\ E_* \subset E \subset E^*,\ \mu(E^* \setminus E_*) = 0\},$$
$$\overline{\mu}(E) := \mu(E_*) = \mu(E^*), \quad E \in \overline{\mathcal{S}}.$$

Rovnost $\mu(E_*) = \mu(E^*)$ na předchozím řádku je triviálním důsledkem požadavku $\mu(E^* \setminus E_*) = 0$. Ověřme, že definice $\overline{\mu}(E)$ nezávisí na volbě E^*. Totiž, pokud $E_\sharp$, $E^\sharp \in \mathcal{S}$, $E_\sharp \le E \le E^\sharp$, potom $\mu(E^*) = \mu(E_*) \le \mu(E^\sharp)$ a podobně $\mu(E^\sharp) \le \mu(E^*)$. Množinová funkce $(\overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ se nazývá *zúplnění* míry $(\mathcal{S}, \mu)$.

13.2. **Věta.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Potom $\overline{\mathcal{S}}$ je σ-algebra a $\overline{\mu}$ je úplná míra na $\overline{\mathcal{S}}$, která rozšiřuje μ. Navíc, $\overline{\mu}$ je nejužší rozšíření μ na úplnou míru. Tedy, pokud úplná míra ν na sigma-algebře $\mathcal{T}$ rozšiřuje $(\mathcal{S}, \mu)$, pak $\mathcal{T} \supset \overline{\mathcal{S}}$ a $\nu = \overline{\mu}$ na $\overline{\mathcal{S}}$.*

Důkaz. $\overline{\mathcal{S}}$ je σ-algebra: Zřejmě $\overline{\mathcal{S}}$ obsahuje $\emptyset$ a je uzavřeno na doplňky. Uvažujme $E_j \in \overline{\mathcal{S}}$ a $E = \bigcup_j E_j$. Z definice najdeme $L_j, U_j \in \mathcal{S}$ tak, že $L_j \subset E_j \subset U_j$ a $\mu(U_j \setminus L_j) = 0$. Položme $L = \bigcup_j L_j$, $U = \bigcup_j U_j$. Zřejmě $L \subset E \subset U$. Vlastnost $\mu(U \setminus L) = 0$ plyne z elementární inkluze

$$\Big(\bigcup_j U_j\Big) \setminus \Big(\bigcup_j L_j\Big) \subset \bigcup_j (U_j \setminus L_j).$$

Tedy $E \in \overline{\mathcal{S}}$.

$\overline{\mu}$ je míra: Zřejmě $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$. Nechť E, E_j, U, U_j, L, L_j jsou jako předtím a navíc E_j jsou po dvou disjunktní. Potom též L_j jsou po dvou disjunktní a $\overline{\mu}(E_j) = \mu(L_j) = \mu(U_j)$ a $\overline{\mu}(E) = \mu(L) = \mu(U)$. Tedy $\overline{\mu}(E) = \mu(L) = \sum_j \mu(L_j) = \sum_j \overline{\mu}(E_j)$.

$\overline{\mu}$ je úplná (míra): Nechť $M \in \overline{\mathcal{S}}$, $N \in \mathcal{S}$ a $\overline{\mu}(M) = 0$. Potom existuje $M^* \in \mathcal{S}$ tak, že $N \subset M \subset M^*$ a $\mu(M^*) = 0$. Pro N můžeme volit $N_* = \emptyset$, $N^* = M^*$ a vidíme, že $N \in \overline{\mathcal{S}}$. Tedy $\overline{\mu}$ je úplná.

$\overline{\mu}$ je nejužší: Nechť úplná míra ν na σ-algebře $\mathcal{T}$ rozšiřuje $(\mathcal{S}, \mu)$. Nechť $E \in \overline{\mathcal{S}}$. Najděme E_*, E^* jako v definici. Potom $E \setminus E_* \subset E^* \setminus E_* \in \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ a $\nu(E^* \setminus E_*) = \mu(E^* \setminus E_*) = 0$, tedy z úplnosti ν je $E \setminus E_* \in \mathcal{T}$ a $\nu(E \setminus E_*) = 0$. Tedy $E = E_* \cup (E \setminus E_*) \in \mathcal{T}$ a $\nu(E) = \nu(E_*) = \overline{\mu}(E)$. □

13.3. **Poznámka.** Úloha rozšířit danou míru na úplnou obecně není jednoznačná. Proto je důležité mluvit o nejužším úplném rozšíření. Pokus definovat Lebesgueovu míru jako "úplné rozšíření ℓ" je lákavý, ale chybný. Lze to spravit, budeme-li mluvit o nejužším rozšíření, viz důsledek 13.6.

13.4. **Lemma.** Nechť $(\mathcal{F}, \tau)$ je množinová funkce na množině X splňující počáteční podmínku (25) a $E \subset X$. Potom existuje $E^* \in \sigma(\mathcal{F})$ tak, že $E^* \supset E$ a $\tau^*(E) = \tau^*(E^*)$.

Důkaz. Jestliže $\tau^*(E) = \infty$, poslouží $E^* = X$. Jinak najdeme horní součty $\sum_{j=1}^{\infty} \tau(A_j^m)$ k $\tau^*(E)$, kde $m = 1, 2, \dots$, tak, že

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tau(A_j^m) \le \tau^*(E) + 2^{-m}.$$

Položme

$$E_m = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^m,$$

$$E^* = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m.$$

Potom zřejmě $E \subset E_m$ a

$$\tau^*(E) \le \tau^*(E_m) \le \sum_{j=1}^{\infty} \tau(A_j^m) + 2^{-m} \le \tau^*(E) + 2^{-m}.$$

Tudíž $E \subset E^*$ a $\tau^*(E^*) = \tau^*(E)$. □

Následující věta pojednává mj. o situaci z poznámky 11.5.

13.5. **Věta** (o jednoznačnosti a úplnosti). *Nechť $\mathcal{F}$ je systém podmnožin X uzavřený na konečné průniky a $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{F})$. Nechť τ je množinová funkce na $\mathcal{F}$ splňující počáteční podmínku (25) a $(\mathcal{F}', \tau')$ je výsledek základní konstrukce. Nechť $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ a $\tau = \tau'$ na $\mathcal{F}$ (tj. základní konstrukce je "úspěšná"). Buď μ zúžení τ' na $\mathcal{S}$ a $(\overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ zúplnění μ. Jestliže existují $X_k \in \mathcal{F}$ tak, že $\tau(X_k) < \infty$ a $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} X_k = X$, pak $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{F}'$ a $\overline{\mu} = \tau'$. Tedy τ' je nejužší rozšíření τ na úplnou míru.*

Důkaz. Víme, že τ' je rozšíření τ na úplnou míru. Z věty 12.4 dostáváme, že μ je nejužší rozšíření τ na míru a $\overline{\mu}$ je tedy nejužší rozšíření τ na úplnou míru. Odtud $\overline{\mathcal{S}} \subset \mathcal{F}'$ a $\overline{\mu} = \tau'$ na $\overline{\mathcal{S}}$. Zbývá ukázat, že $\mathcal{F}' \subset \overline{\mathcal{S}}$. Zvolme $E \in \mathcal{F}'$ a předpokládejme nejprve, že $\tau'(E) < \infty$. Podle lemmatu 13.4 existuje $E^* \in \mathcal{S}$ tak, že $E^* \supset E$ a $\tau^*(E^*) = \tau^*(E)$, neboli též $\mu(E) = \tau'(E^*) = \tau'(E)$. Použijeme lemma 13.4 ještě jednou, a to na množinu $N = E^* \setminus E$. Víme, že $N \in \mathcal{F}'$ a $\tau'(N) = \tau'(E^*) - \tau'(E) = 0$. Existuje tedy $N^* \in \mathcal{S}$ tak, že $N \subset N^*$ a $\mu(N^*) = \tau'(N^*) = \tau'(N) = 0$. Položme $E_* = E^* \setminus N^*$. Potom $E_*, E^* \in \mathcal{S}$, $E_* \subset E \subset E^*$ a $\mu(E^* \setminus E_*) = \mu(E^* \cap N^*) = 0$. Podle definice zúplnění, $E \in \overline{\mathcal{S}}$.

Nyní odstraníme předpoklad, že $\tau'(E) < \infty$. Mějme X_k jako v předpokladech, pak $E \cap X_k \in \mathcal{F}'$ a $\tau'(E \cap X_k) < \infty$. Podle předchozího kroku odtud plyne, že $E \cap X_k \in \overline{S}$, a jelikož $\overline{S}$ je σ-algebra, $E = \bigcup_k (E \cap X_k) \in \overline{S}$. □

13.6. **Důsledek.** *Lebesgueova míra λ je nejužší rozšíření ℓ na úplnou míru.*

14. Součin měr a Fubiniova věta

14.1. **Definice** (Součin měr)**.** Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$, a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Nechť míry μ, ν jsou σ-konečné. Uvažujme systém $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ všech podmnožin $X \times Y$ tvaru $A \times B$, kde $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{T}$. Takovým množinám budeme říkat *měřitelné obdélníky.* Na $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ definujeme množinovou funkci $\mu \times \nu$ předpisem

$$(\mu{\times}\nu)\ (A \times B) = \mu(A)\, \nu(B).$$

Systém množin $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ generuje tzv. *součinovou σ-algebru* $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T} := \sigma(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$. V dalším (věta 14.5) uvidíme, že existuje právě jedna míra ρ na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ tak, že

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\, \nu(B), \qquad A \in \mathcal{S},\ B \in \mathcal{T}.$$

Tuto míru budeme nazývat *součin měr* μ a ν a značit $\mu{\otimes}\nu$. Její zúplnění budeme nazývat *úplný součin měr* a značit $(\mathcal{S}\overline{\otimes}\mathcal{T},\ \mu\overline{\otimes}\nu)$.

Tedy $\mu{\otimes}\nu$ je nejužší rozšíření $\mu{\times}\nu$ na míru a $\mu\overline{\otimes}\nu$ je nejužší rozšíření $\mu{\times}\nu$ na úplnou míru.

Našim cílem je tedy rozšířit množinovou funkci $(\mathcal{S} \times \mathcal{T},\ \mu{\times}\nu)$ na míru a za tímto účelem aplikujeme základní konstrukci.

14.2. **Lemma** (Vnější míra měřitelného obdélníku)**.** *Je-li $A \in \mathcal{S}$ a $B \in \mathcal{T}$, pak*

$$(\mu{\times}\nu)^*(A{\times}B) = (\mu{\times}\nu)\ (A{\times}B).$$

Důkaz. Nechť

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\mu{\times}\nu)\ (A_j \times B_j)$$

je horní součet k $(\mu \times \nu)^*(A \times B)$. Potom pro každý bod $x \in X$ je

$$\nu(B)\chi_A(x) \le \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j)\chi_{A_j}(x).$$

Podle důsledku 4.16 je

$$(\mu{\times}\nu)(A{\times}B) = \int_X \nu(B)\chi_A \, d\mu \le \int_X \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j)\chi_{A_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \nu(B_j)\chi_{A_j} \, d\mu$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(A_j \times B_j).$$

□

14.3. **Lemma** (Kritérium měřitelnosti)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$, a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou a $E \subset X \times Y$. Jestliže pro každý měřitelný obdélník Q platí*

$$(\mu{\times}\nu)^*(Q \cap E) + (\mu{\times}\nu)^*(Q \setminus E) = (\mu{\times}\nu)(Q),$$

potom je E $(\mu{\times}\nu)^*$-měřitelná.

Důkaz. Důkaz je analogický jako u lemmatu 10.3. (Proveďte jako cvičení!) □

14.4. **Lemma** (Měřitelnost měřitelných obdélníků)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$, a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Potom každý měřitelný obdélník je $(\mu{\times}\nu)^*$-měřitelný.*

Důkaz. Uvažujme množinu $E \in \mathcal{S}$. Chceme dokázat $(\mu \times \nu)^*$-měřitelnost množiny $E \times Y$. Buď $A \times B \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ měřitelný obdélník. Potom

$$(A \times B) \cap (E \times Y) = (A \cap E) \times B \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}, \quad (A \times B) \setminus (E \times Y) = (A \setminus E) \times B \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$$

a

$$(\mu \times \nu)((A \times B) \cap (E \times Y)) + (\mu \times \nu)((A \times B) \setminus (E \times Y)) = (\mu \times \nu)(A \times B).$$

Tedy podle lemmat 14.2 a 14.3 je $E \times Y$ $(\mu \times \nu)^*$-měřitelná. Podobně bychom dostali měřitelnost $X \times F$ pro každou $F \in \mathcal{T}$. Tedy

$$E \times F = (E \times Y) \cap (X \times F) \in \mathfrak{M}((\mu \times \nu)^*).$$

□

14.5. **Věta** (Existence součinu měr)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$, a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Nechť míry μ, ν jsou σ-konečné. Potom existuje právě jedna míra ρ na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ tak, že*

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B), \qquad A \in \mathcal{S},\ B \in \mathcal{T}.$$

Důkaz. Systém množin $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ je uzavřený na konečné průniky. Jelikož míry μ a ν jsou σ-konečné, můžeme napsat $X \times Y$ jako spočetné sjednocení

$$X \times Y = \bigcup_{i,j} (X_i \times Y_j),$$

kde

$$X_i \in \mathcal{S},\ Y_j \in \mathcal{T},\ \mu(X_j) < \infty,\ \nu(Y_j) < \infty,$$

takže

$$(\mu \times \nu)(X_i \times Y_j) < \infty.$$

Podle věty 12.4 existuje nejvýše jedno rozšíření množinové funkce $\mu \times \nu$ na míru na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$. Existenci aspoň jednoho rozšíření nám dávají lemmata 14.4 a 14.2, hledaným rozšířením je míra

$$M \mapsto (\mu \times \nu)'(M), \qquad M \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}.$$

□

14.6. **Věta.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$, a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Nechť míry μ, ν jsou σ-konečné. Pak $(\overline{\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}}, \overline{\mu \otimes \nu}) = ((\mathcal{S} \times \mathcal{T})', (\mu \times \nu)')$.*

Důkaz. Věta je důsledkem věty 13.5 o zúplnění a jednoznačnosti. □

14.7. **Poznámka.** Z důkazů lemmat 14.4, 14.2 vidíme, že rozšíření $\mu \times \nu$ na (úplnou) míru můžeme provést bez omezujících předpokladů, avšak pokud míry μ a ν nejsou σ-konečné, mohli bychom ztratit jednoznačnost rozšíření.

14.8. **Definice** (Součiny konečně mnoha měr)**.** Součin konečně mnoha měr se definuje zcela analogicky jako součin dvou měr. Podrobnosti vypustíme, neboť zápis výkladu pro součin konečně mnoho prostorů s měrami $(X_i, \mathcal{S}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ by byl nepřehledný pro velké množství indexů. Problém zavedení součinu několika měr lze též převést na předchozí případ dvou měr rekurentním násobením, např.

$$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n = \big(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_{n-1}\big) \otimes \mu_n.$$

14.9. **Definice** (Řezy)**.** Nechť $M \subset X \times Y$. Značíme

$$\begin{aligned} M^{x,*} &= \{y \in Y : (x, y) \in M\}, \qquad x \in X, \\ M^{*,y} &= \{x \in X : (x, y) \in M\}, \qquad y \in Y. \end{aligned}$$

Tyto množiny se nazývají *řezy*.

14.10. **Lemma** (Výpočet součinové míry množiny)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Nechť míry μ a ν jsou σ-konečné. Buď $(\mathcal{R}, \rho)$ součin měr μ a ν. Nechť M je ρ-měřitelná množina. Potom pro každé $x \in X$ je množina $M^{x,*}$ ν-měřitelná, funkce $x \mapsto \nu(M^{x,*})$ je měřitelná a*

$$\rho(M) = \int_X \nu(M^{x,*})\, d\mu.$$

Důkaz. Důkaz provedeme pro jednoduchost pro případ, že míry μ a ν jsou konečné. Obecný případ se liší v technických detailech. Systém všech množin M, pro které tvrzení platí, je Dynkinův systém obsahující všechny měřitelné obdélníky, a systém všech měřitelných obdélníků je uzavřený na konečné průniky. Tudíž podle věty 12.3 tvrzení platí pro každou ρ-měřitelnou množinu. □

14.11. **Věta** (Fubiniova)**.** *Nechť $(X,\mathcal{S},\mu)$ a $(Y,\mathcal{T},\nu)$ jsou prostory s mírou. Nechť míry μ a ν jsou úplné a σ-konečné. Buď $(\mathcal{R},\rho)$ součin měr μ a ν a $(\overline{\mathcal{R}},\overline{\rho})$ jejich úplný součin. Nechť f je $\overline{\rho}$-měřitelná funkce na $\overline{\rho}$-měřitelné množině $M\subset X\times Y$. Předpokládejme, že integrál*

$$\int_M f(x,y)\,d\overline{\rho}(x,y)$$

má smysl. Potom pro μ-skoro všechna x má smysl integrál

$$g(x) := \int_{M^{x,*}} f(x,y)\,d\nu(y),$$

funkce g má integrál

$$\int_X g\,d\mu$$

a

$$\int_M f(x,y)\,d\overline{\rho}(x,y) = \int_X g\,d\mu = \int_X \Big(\int_{M^{x,*}} f(x,y)\,d\nu(y)\Big)\,d\mu(x). \tag{33}$$

Důkaz. 1. krok. Podle lemmatu 14.10 tvrzení platí pro $f=\chi_A$, kde A leží v σ-algebře $\mathcal{R}$.

2. krok. Je-li N $(\mu\times\nu)^*$-nulová, pak existuje $E\in\mathcal{R}$ tak, že $E\supset N$ a $\rho(E)=0$. Z platnosti tvrzení pro χ_E snadno odvodíme platnost tvrzení pro χ_N.

3. krok. Obecnou množinu $M\in\overline{\mathcal{R}}$ můžeme napsat ve tvaru disjunktního sjednocení $M=A\cup N$, kde $A\in\mathcal{R}$ a N je $(\mu\times\nu)^*$-nulová. Důkaz tvrzení pro $f=\chi_M$ dostaneme z prvního a druhého kroku.

4. krok. Víme-li, že tvrzení platí pro charakteristické funkce množin z $\overline{\mathcal{R}}$, rutinním postupem přes jednoduché funkce a nezáporné měřitelné funkce odvodíme obecný případ.

□

14.12. **Poznámka.** Role prostorů X a Y ve Fubiniově větě je symetrická. Proto také platí Fubiniova věta ve tvaru

$$\int_M f(x,y)\,d\overline{\rho}(x,y) = \int_Y \Big(\int_{M^{y,*}} f(x,y)\,d\mu(x)\Big)\,d\nu(y) \tag{34}$$

a je-li splněn předpoklad existence integrálu

$$\int_M f(x,y)\,d\overline{\rho}(x,y),$$

můžeme ospravedlnit záměnu pořadí integrace

$$\int_X \Big(\int_{M^{x,*}} f(x,y)\,d\nu(y)\Big)\,d\mu(x) = \int_Y \Big(\int_{M^{y,*}} f(x,y)\,d\mu(x)\Big)\,d\nu(y) \tag{35}$$

14.13. **Věta** (Lebesgueova míra a součin měr)**.** *$(n+m)$-rozměrná Lebesgueova míra je úplným součinem n-rozměrné a m-rozměrné Lebesgueovy míry.*

Důkaz. Nechť $A\subset\mathbb{R}^n$ a $Q\subset\mathbb{R}^m$ je omezený interval. Potom zřejmě $\lambda^*_{n+m}(A\times Q)=\lambda^*_n(A)\lambda_m(Q)$. Tedy $A\times Q$ je λ_{n+m}-měřitelná, právě když A je λ_n-měřitelná. Jelikož $\mathbb{R}^m$ lze napsat jako monotonní sjednocení spočetně mnoha omezených intervalů, je vidět, že měřitelné obdélníky tvaru $A\times\mathbb{R}^m$, $A\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$, jsou λ_{n+m} měřitelné. Podobně měřitelné obdélníky tvaru $\mathbb{R}^n\times B$, $B\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^m)$, jsou λ_{n+m}-měřitelné. Pomocí operace průnik dojdeme k poznání, že měřitelné obdélníky z $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)\times\mathfrak{M}(\mathbb{R}^m)$ jsou λ_{n+m}-měřitelné.

Podle důsledku 13.6 je λ_{n+m} nejužší rozšíření ℓ_{n+m} na úplnou míru. Toto nejužší rozšíření podle první části důkazu musí měřit i všechny měřitelné obdélníky z $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)\times\mathfrak{M}(\mathbb{R}^m)$, tedy splývá s $\lambda_n\overline{\otimes}\lambda_m$. □

14.14. **Příklad.** Nechť $N\subset\mathbb{R}$ je neměřitelná množina. Potom $N\times\{0\}$ je λ_2-nulová v $\mathbb{R}^2$, tudíž λ_2-měřitelná, ale není $\lambda_1\otimes\lambda_1$-měřitelná. Předchozí věta tedy ztratí platnost, nahradíme-li úplný součin obyčejným součinem.

14.15. **Příklad** (Ratajovy dlaždičky)**.** Fubiniova věta se často používá pro záměnu pořadí integrace podle vzorce (35). Následující příklad demonstruje, jak je nebezpečné neověřit předpoklad o existenci dvojného integrálu. Rozdělme $\mathbb{R}^2$ na čtverce $Q_{ij}=[i,i+1)\times[j,j+1)$. Nechť funkce $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ je definována předpisem

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x\in Q_{ij}, \quad 0<j=i+1,\\ -1, & x\in Q_{ij}, \quad 0<i=j+1,\\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$$

Pak

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\Big)\,dx = 1 \neq -1 = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\Big)\,dy.$$

14.16. **Příklad.** S pomocí příkladu 7.2 počítejme

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{4} &= [\operatorname{arctg}^2 x]_{x=0}^{\infty} = \int_0^{\infty} \frac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx \\
&= \int_0^{\infty} \frac{2}{1+x^2}\,[\operatorname{arctg}(yx)]_{y=0}^{1}\,dx \\
&= \int_0^{\infty}\Big(\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)(1+y^2x^2)}\,dy\Big)\,dx \\
&= \int_0^{1}\Big(\int_0^{\infty} \frac{2x}{(1+x^2)(1+y^2x^2)}\,dx\Big)\,dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-y^2}\Big[\ln\frac{1+x^2}{1+x^2y^2}\Big]_{x=0}^{\infty}\,dy \\
&= -2\int_0^1 \frac{\ln y}{1-y^2}\,dy = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}
\end{aligned}$$

(odůvodněte samostatně použití Fubiniovy věty). Označme

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\dots, \\
L &= \frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\dots, \\
V &= \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots.
\end{aligned}$$

Potom máme

$$V = L+S, \quad V = 2^2 S, \quad L = \frac{\pi^2}{8},$$

a odtud

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = V = \frac{4}{3}L = \frac{\pi^2}{6}.$$

15. Věta o substituci

15.1. **Definice** (Jacobiho matice)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_m) : G \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení diferencovatelné v bodě $t \in G$. Matice lineárního zobrazení $\varphi'(t)$ se nazývá *Jacobiho matice* zobrazení φ v bodě t. Je to tedy matice

$$\Big(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_j}(t)\Big)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}.$$

Zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ nazveme *regulární*, jestliže má spojitou derivaci (tj. spojité všechny parciální derivace) a jeho Jacobiho matice má všude v G hodnost n.

15.2. **Definice** (Jakobián)**.** V této kapitole se budeme zabývat možností záměny proměnných v integrálu prostřednictvím zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$. Budeme tedy vyšetřovat jen případ $m = n$. Pak je Jacobiho matice čtvercová a její determinant nazveme *jakobiánem* zobrazení φ v bodě t.

15.3. **Věta** (o substituci)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť u je funkce na $M \subset \varphi(G)$. Potom*

$$\int_M u(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(M)} u(\varphi(t))|J\varphi(t)|\,dt,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl. (Připomeňme, že aby integrál mohl mít smysl, je mj. nutné, aby integrační obor byl měřitelná množina a integrovaná funkce byla měřitelná)

Důkaz. Důkaz uvedeme ke konci kapitoly. □

15.4. **Příklad** (Polární souřadnice)**.** Nechť

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ r > 0, \ -\pi < \alpha < \pi \right\}.$$

Zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem

$$\begin{aligned} \varphi(r,\alpha) &:= \begin{pmatrix} x(r,\alpha) \\ y(r,\alpha) \end{pmatrix}, \\ x(r,\alpha) &:= r \cos\alpha, \\ y(r,\alpha) &:= r \sin\alpha \end{aligned}$$

se nazývá *zobrazení polárních souřadnic.*

15.5. **Věta** (o polárních souřadnicích)**.** *Nechť $\varphi : G \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení polárních souřadnic. Potom φ je prosté regulární zobrazení a $J\varphi(r,\alpha) = r$. Je-li $M \subset \mathbb{R}^2$ a u funkce na M, potom*

(36) $$\int_M u(x,y)\,dx\,dy = \int_{G\cap\varphi^{-1}(M)} u(r \cos\alpha,\, r \sin\alpha)\, r\, dr\, d\alpha,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Důkaz. Soustava rovnic

$$\begin{aligned} r \cos\alpha &= x, \\ r \sin\alpha &= y \end{aligned}$$

s podmínkou $\binom{r}{\alpha} \in G$ má právě jedno řešení

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ \alpha &= 2 \operatorname{arctg}\Big(\frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}} \Big) \end{aligned}$$

pokud $\binom{x}{y} \notin N := (-\infty, 0] \times \{0\}$. Ověření hladkosti a výpočet jakobiánu je rutinní záležitost. Vzorec (36) dostaneme z věty 15.3 o substituci, uvážíme-li, že $\lambda(N) = 0$. $\square$

15.6. **Příklad** (Sférické souřadnice)**.** Nechť tentokrát

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ r > 0, \ -\pi < \beta < \pi, \ -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}, \ \right\}.$$

Zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$\begin{aligned} \varphi(r,\beta,\gamma) &:= \begin{pmatrix} x(r,\beta,\gamma) \\ y(r,\beta,\gamma) \\ z(r,\beta,\gamma) \end{pmatrix}, \\ x(r,\beta,\gamma) &:= r \cos\gamma \ \cos\beta, \\ y(r,\beta,\gamma) &:= r \cos\gamma \ \sin\beta, \\ z(r,\beta,\gamma) &:= r \sin\gamma \end{aligned}$$

se nazývá *zobrazení sférických souřadnic.*

15.7. **Věta** (o sférických souřadnicích)**.** *Nechť $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení sférických souřadnic. Potom φ je prosté regulární zobrazení a $J\varphi(r,\beta,\gamma) = r^2 \cos\gamma$. Je-li $M \subset \mathbb{R}^3$ a u funkce na M, potom*

(37) $$\begin{aligned} &\int_M u(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_{G\cap\varphi^{-1}(M)} u(r \cos\gamma \cos\beta,\, r \cos\gamma \sin\beta,\, r \sin\gamma)\, r^2 \cos\gamma \ dr\, d\beta\, d\gamma, \end{aligned}$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Důkaz. Soustava rovnic

$$\begin{aligned} r\cos\gamma\cos\beta &= x,\\ r\cos\gamma\sin\beta &= y,\\ r\sin\gamma &= z \end{aligned}$$

s podmínkou $\begin{pmatrix} r\\ \beta\\ \gamma \end{pmatrix} \in G$ má právě jedno řešení

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2},\\ \beta &= 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}},\\ \gamma &= \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}$$

pokud $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \notin N := (-\infty,0]\times\{0\}\times\mathbb{R}$. Ověření hladkosti a výpočet jakobiánu je rutinní záležitost. Vzorec (37) dostaneme z věty 15.3 o substituci, uvážíme-li, že $\lambda(N)=0$. □

V dalším se budeme zabývat důkazem věty o substituci.

15.8. **Lemma** (o míře lineárního obrazu). *Nechť $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení. Potom pro každou měřitelnou množinu $E\subset\mathbb{R}^n$ je $L(E)$ měřitelná a platí*

$$\lambda(L(E)) = |JL|\lambda(E).$$

Důkaz. Jestliže L je singulární, pak $L(\mathbb{R}^n)$ je lineární podprostor $\mathbb{R}^n$ dimenze $< n$ a tudíž $\lambda(L(E)) = 0 = |JL|\lambda(E)$ pro každou množinu $E\subset\mathbb{R}^n$. Můžeme tedy předpokládat, že zobrazení L je regulární. Potom inverzní zobrazení je spojité a obraz $L(E)$ každé borelovské množiny je borelovská množina. Nejprve dokážeme, že existuje konstanta $\alpha>0$ tak, že pro každou borelovskou množinu $E\subset\mathbb{R}^n$ je

$$\lambda(L(E)) = \alpha\lambda(E). \tag{38}$$

Položme

$$\alpha = \lambda(L([0,1)^n)) > 0.$$

Definujme množinovou funkci μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ předpisem

$$\mu(E) = \lambda(L(E))/\alpha.$$

Především, jelikož L a L^{-1} jsou měřitelné, množinová funkce μ je míra. Předpokládejme, že q je přirozené číslo a Q je krychle $[0,1/q)^n$. Potom každá posunutá kopie Q má stejnou míru μ a $[0,1)^n$ lze disjunktně rozložit na q^n takových kopií. Proto

$$\mu(Q) = q^{-n} = \lambda(Q).$$

Pomocí aditivity měr nahlédneme, že

$$\mu(I) = \lambda(I)$$

pro každý interval o racionálních mezích. Protože systém takových intervalů je uzavřený na konečné průniky a generuje Dynkinův systém $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, podle věty 12.4 o jednoznačnosti je $\mu=\lambda$ na borelovských množinách. Zúplněním dostaneme (38) pro každou λ-měřitelnou množinu. Zbývá dokázat, že $\alpha = JL$.

Nejprve dokážeme tvrzení pro zobrazení

$$Lx = (d_1x^1,\dots,d_nx^n), \qquad x\in\mathbb{R}^n,$$

kde $d_1,\dots,d_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Potom matice L je diagonální matice, která má diagonální prvky $d_1,\dots,d_n$. Pro každý n-rozměrný interval Q je $L(Q)$ také n-rozměrný interval a

$$\ell(L(Q)) = d_1\dots d_n\,\ell(Q) = JL\,\ell(Q).$$

Ve stejném poměru dopadají také horní součty k libovolné množině, tedy pro měřitelné množiny máme

$$\lambda(L(E)) = |JL|\,\lambda(E).$$

Je-li L izometrické lineární zobrazení, potom zobrazuje jednotkovou kouli $\{x:\ |x|\le 1\}$ na sebe a tudíž $\alpha=1$. Konečně, je-li L libovolné lineární zobrazení, pak lineární algebra tvrdí, že existují izometrická lineární zobrazení P, Q (reprezentovaná ortogonálními maticemi) a "diagonální" lineární zobrazení D tak, že $L = QDP$. (Označme $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)$ kanonickou bázi prostoru $\mathbb{R}^n$. Matice zobrazení L^*L je symetrická pozitivně definitní a tudíž existuje ortonormální báze $(\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$ složená z vlastních vektorů matice L^*L. Existují tedy $\lambda_i > 0$ tak, že

$$L^*L\boldsymbol{f}_i = \lambda_i^2 \boldsymbol{f}_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Potom Q, D and P se konstruují jako lineární zobrazení transformující báze na báze: $P(\boldsymbol{f}_i) = \boldsymbol{e}_i$, $D(\boldsymbol{e}_i) = \lambda_i \boldsymbol{e}_i$, $Q(\lambda_i \boldsymbol{e}_i) = L(\boldsymbol{f}_i)$. Máme

$$\begin{aligned}(Q\boldsymbol{e}_i)\cdot(Q\boldsymbol{e}_j) &= \frac{L\boldsymbol{f}_i}{\lambda_i}\cdot\frac{L\boldsymbol{f}_j}{\lambda_j} = \frac{L^*L\boldsymbol{f}_i}{\lambda_i\lambda_j}\cdot\boldsymbol{f}_j \\ &= \begin{cases}\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{f}_j = 1, & i = j,\\ \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i\lambda_j}\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{f}_j = 0, & i \neq j.\end{cases}\end{aligned}$$

tedy Q je ortogonální.) S využitím věty o součinu determinantů dostáváme pro každou měřitelnou množinu $E \subset \mathbb{R}^n$, že $L(E)$ je měřitelná a

$$\begin{aligned}\lambda(L(E)) &= \lambda(D(P(E))) = \det D\,\lambda(P(E)) = \det D\,\lambda(E)\\ &= |\det Q\ \det D\ \det P|\,\lambda(E) = |\det(QDP)|\,\lambda(E)\\ &= |\det L|\,\lambda(E).\end{aligned}$$

□

15.9. **Značení.** V dalším budeme značit

$$B(z,r) = \{x \in \mathbb{R}^n:\ |x - z| < r\}$$

(tedy $B(z,r)$ je koule o středu z a poloměru r), a pro dané množiny X, $Y \subset \mathbb{R}^n$ bude

$$X + Y = \{x + y:\ x \in X,\ y \in Y\}.$$

Norma lineárního zobrazení L je

$$\|L\| := \sup\{Lx:\ x \in \mathbb{R}^n,\ |x| \le 1\}.$$

15.10. **Lemma** (Odhad stěny)**.** *Nechť $M \ge 1$ a $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení s normou $\|L\| \le M$. Nechť $0 < r < \rho$ a $Q = [0,\rho]^n$. Potom pro každou stěnu S krychle Q je*

$$\lambda((L(S) + B(0,r))) \le C_n M^{n-1}\rho^{n-1} r,$$

kde

$$C_n = 2^n \alpha_{n-1}(n-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

a α_{n-1} je symbol pro míru $(n-1)$-rozměrné jednotkové koule.

Důkaz. Můžeme předpoklýádat, že pro nějaký index $i \in \{1, \dots, n\}$ je $S = \{x \in Q\colon x_i = 0\}$. Kdyby byla $S = \{x \in Q\colon x_i = \rho\}$, měřená množina by byla jen posunutá o vektor $\rho L\boldsymbol{e}_i$. Najděme lineární podprostor $\mathbb{V}$ prostoru $\mathbb{R}^n$ tak, aby $\mathbb{V}$ obsahoval $L(S)$ a jeho dimenze byla $n{-}1$. Dále najděme lineární isometrii P prostoru $\mathbb{R}^n$ na sebe tak, aby bylo $P(\mathbb{V}) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Pro každý bod $x \in S$ je $|x| \le \sqrt{n{-}1}\,\rho$, tedy

$$|Lx| \le \|L\|\sqrt{n{-}1}\,\rho \le M\sqrt{n{-}1}\,\rho$$

Potom

$$P(L(S)) \subset B_{n-1}(0,\ M\sqrt{n{-}1}\,\rho) \times \{0\},$$

kde $B_{n-1}(0,\delta)$ značí $n{-}1$-rozměrnou kouli v $\mathbb{R}^{n-1}$ o poloměru δ. Odtud

$$\begin{aligned}P(L(S) + B(0,r)) = P(L(S)) + B(0,r) &\subset B_{n-1}(0,\ M\sqrt{n{-}1}\,\rho + r) \times (-r,r)\\ &\subset B_{n-1}(0,\ 2M\sqrt{n{-}1}\,\rho) \times (-r,r)\end{aligned}$$

tedy

$$\lambda(L(S) + B(0,r)) = \lambda(P(L(S) + B(0,r))) \le 2r\alpha_{n-1}(2M\sqrt{n{-}1}\,\rho)^{n-1}.$$

□

15.11. **Lemma** (Klíčový odhad)**.** *Nechť $M \ge 1$ a $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení s normou $\|L\| \le M$. Nechť $0 < r < \rho$ a $Q = [0,\rho]^n$. Potom*

$$\lambda((L(Q) + B(0,r)) \setminus L(Q)) \le 2nC_n M^{n-1}\rho^{n-1} r,$$

kde C_n je konstanta z lemmatu 15.10.

Důkaz. Nechť $x \in (L(Q)+B(0,r)) \setminus L(Q)$. Potom existuje $z \in Q$ tak, že $|x-Lz| < r$. Na úsečce spojující $L^{-1}x$ a z najdeme bod z', který leží na hranici Q. Můžeme předpokládat $z = z'$. Tedy

$$(L(Q) + B(0,r)) \setminus L(Q) \subset \bigcup_S (L(S) + B(z,r)),$$

kde S probíhá všechny stěny krychle Q, kterých je $2n$. Tedy

$$\lambda((L(Q) + B(0,r)) \setminus L(Q)) \leq 2nC_n M^{n-1}\rho^{n-1}r.$$

□

15.12. **Věta** (o substituci-nerovnost). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitě diferencovatelné zobrazení. Nechť $E \subset G$ je měřitelná množina. Potom*

$$\ell^*(\varphi(E)) \leq \int_E |J\varphi(t)|\, dt.$$

Důkaz. Můžeme předpokládat, že E je omezená a $\overline{E} \subset G$, jinak bychom E rozložili na spočetný systém disjunktních množin, pro které by dodatečný předpoklad platil. Zvolme $\varepsilon > 0$. Najdeme omezenou otevřenou množinu $U \subset G$ tak, že $E \subset U \subset \overline{U} \subset G$ a

$$\int_U |J\varphi(t)|\, dt \leq \int_E |J\varphi(t)|\, dt + \varepsilon. \tag{39}$$

Funkce $J\varphi$ a φ' jsou stejnoměrně spojité na U. Najdeme tedy konstantu M a poloměr $\delta > 0$ tak, aby pro všechna $s, t \in U$ platilo

$$\begin{gathered} |s-t| < \delta \implies |J\varphi(s) - J\varphi(t)| < \varepsilon, \\ |s-t| < \delta \implies \|\varphi'(s) - \varphi'(t)\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \\ \|\varphi'(t)\| \leq M. \end{gathered} \tag{40}$$

Rozdělíme U na po dvou disjunktní sjednocení krychlí

$$U = \bigcup_j Q_j,$$

kde každá krychle Q_j má průměr menší než δ. Označme z_j vrchol krychle Q_j, ρ_j délku její hrany a $L_j = \varphi'(z_j)$. Nechť $t \in Q_j$. Potom

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(z_j) - L(t-z_j)| &\leq \Big| \int_0^1 \frac{d}{d\xi}\Big(\varphi(z_j + \xi(t-z_j)) - \varphi(z_j) - L_j(\xi(t-z_j))\Big)\, d\xi \Big| \\ &= \Big| \int_0^1 \varphi'(z_j + \xi(t-z_j))(t-z_j) - L_j(t-z_j))\Big)\, d\xi \Big| \\ &\leq \int_0^1 \|\varphi'(z_j + \xi(t-z_j)) - L_j\|\, |t-z_j|\, d\xi \\ &\leq \varepsilon\rho_j. \end{aligned}$$

Tedy

$$\varphi(Q_j) \subset \varphi(z_j) - L(z_j) + L_j(Q_j) + B\big(0,\ \varepsilon\rho_j\big).$$

Z posunuté verze lemmatu 15.10, z lemmatu 15.8 a odhadu (40) dostaneme

$$\begin{aligned} \ell^*(\varphi(Q_j)) &\leq \lambda(L_j(Q_j)) + 2nC_n(M\rho_j)^{n-1}\varepsilon\rho_j \\ &= \int_{Q_j} \big(JL_j + 2nC_n M^{n-1}\varepsilon\big)\, dt \\ &\leq \int_{Q_j} \big(J\varphi(t) + (1 + 2nC_n M^{n-1})\varepsilon\big)\, dt. \end{aligned}$$

Sečtením přes j a použitím (39) dostaneme

$$\ell^*(\varphi(E)) \leq \sum_j \ell^*(\varphi(Q_j)) \leq \int_U \big(J\varphi(t) + (1+2nC_nM^{n-1})\varepsilon\big)\, dt \leq \int_E J\varphi(t)\, dt + \varepsilon + (1+2nC_nM^{n-1})\,\varepsilon\,\lambda(U).$$

Limitní přechod $\varepsilon \to 0$ dává požadovanou nerovnost. □

15.13. **Věta** (Sardova). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitě diferencovatelné zobrazení. Nechť*

$$Z = \{t \in G : \ J\varphi(t) = 0\}.$$

Potom $\lambda\varphi(Z)) = 0$.

Důkaz. Tvrzení je zřejmým důsledkem předchozí věty 15.12. □

Důkaz věty o substituci. Můžeme předpokládat, že $M = \varphi(G)$, tedy uvažujeme měřitelnou funkci u na $\varphi(G)$. Také můžeme předpokládat, že funkce u je nezáporná. Jestliže zobrazení φ je regulární a prosté, podle věty o inverzním zobrazení je inverzní zobrazení též regulární a prosté. Nechť $E \subset G$ je borelovská množina. Potom $\varphi(E)$ je také borelovská množina, neboť zobrazení φ^{-1} je spojité. Podle věty 15.12 máme

$$\lambda(\varphi(E)) \leq \int_E |J\varphi(t)|\, dt.$$

Odtud také dostaneme, že obraz λ-nulové množiny je λ-nulová množina. Máme-li tedy nezápornou měřitelnou funkci $f : G \to \mathbb{R}$, pak postupně dostaneme měřitelnost funkce $f \circ \varphi^{-1}$ a vzorec

$$\int_{\varphi(G)} f(\varphi^{-1}(x))\, dx \leq \int_G f(t)\ |J\varphi(t)|\, dt. \tag{41}$$

Tvrzení už jsme dokázali pro charakteristickou funkci měřitelné množiny a odtud obvyklým postupem přes jednoduché funkce plyne pro každou nezápornou měřitelnou funkci. Vyměníme-li role φ a φ^{-1} a uvažujeme-li nezápornou měřitelnou funkci v na $\varphi(G)$, dostaneme měřitelnost funkce $v \circ \varphi$ a vzorec

$$\int_G v(\varphi(t))\, dt \leq \int_{\varphi(G)} v(x)\ |J(\varphi^{-1})(x)|\, dx \tag{42}$$

Uvážíme-li, že

$$\frac{1}{J(\varphi^{-1})(\varphi(t))} = J\varphi(t),$$

položíme-li $f(t) = u(\varphi(t))$ v (41) a $v(x) = u(x)/\,|J(\varphi^{-1})(x)|$ v (42), dostaneme

$$\int_{\varphi(G)} u(x))\, dx = \int_G u(\varphi(t))\ |J\varphi(t)|\, dt,$$

což jsme měli dokázat. □

16. Lebesgueovy prostory

16.1. **Definice** (Norma). Připomeňme, že *norma* je nezáporná konečná funkce $\|\cdot\| : \ u \mapsto \|u\|$ na lineárním prostoru $\mathcal{X}$, která splňuje axiomy

- (N-1) $\|u\| = 0 \iff u = 0, \qquad u \in \mathcal{X},$
- (N-2) $\|\lambda u\| = |\lambda|\, \|u\|, \qquad u \in \mathcal{X},\ \lambda \in \mathbb{R},$
- (N-3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \qquad u, v \in \mathcal{X}$ (trojúhelníková nerovnost).

(zde se budeme zabývat je reálnými lineárními prostory, v komplexním lineárním prostoru by λ muselo probíhat $\mathbb{C}$). Každů *normovaný prostor* (tj. lineární prostor vybavený normou) se považuje za metrický prostor se vzdáleností $x, y \mapsto \|x - y\|$.

16.2. **Definice** (L^p-normy). Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Je-li u μ-měřitelná funkce na X a $1 \leq p < \infty$ je reálný exponent, definujeme

$$\|u\|_p := \Big(\int_X |u|^p\, d\mu\Big)^{1/p}.$$

Dále definujeme

$$\|u\|_\infty := \inf\Big\{C \geq 0 : |u| \leq C \text{ skoro všude}\Big\}.$$

Uvidíme, že funkce $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_\infty$ splňují vlastnosti normy až na jednu: $\|u\| = 0$ znamená, že $u = 0$ skoro všude, což nemusí implikovat $u = 0$ (tj. úplně všude). Nechť $p \in [1, +\infty]$. Zaveďme dočasně prostor $\mathcal{L}^p(X)$ všech μ-měřitelných funkcí u na X, pro něž $\|u\|_p < \infty$. Na $\mathcal{L}^p(X)$ uvažujme ekvivalenci

$$u \sim v \quad \text{jestliže } u = v \text{ skoro všude}.$$

Abychom vyhověli všem axiomům normovaného lineárního prostoru, měli bychom definovat prostor $L^p(X) = L^p(X, \mathcal{S}, \mu)$ jako "faktorprostor"

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/\sim$$

Faktorizace je jedna ze základních operací obecné teorie množin. Znamená to, že prvky prostoru $L^p(X)$ jsou třídy navzájem ekvivalentních prvků. Je-li $u \in \mathcal{L}^p(X)$, označme

$$[u] = \{v \in \mathcal{L}^p(X) : \ v \sim u\},$$

potom

$$L^p(X) = \{[u] : \ u \in \mathcal{L}^p(X)\}.$$

Na prostorech L^p je zapotřebí zavést algebraické operace, uspořádání a normu, neboli např.

$$[u] + [v] := [u + v], \quad \|[u]\|_p := \|u\|_p$$

a

$$[u] \le [v], \text{ když existují } \tilde{u} \in [u] \text{ a } \tilde{v} \in [v] \text{ tak, že } \tilde{u} \le \tilde{v}$$

V matematické literatuře se tento formalismus nepoužívá a dává se přednost méně přesnému, ale přehlednějšímu vyjadřování. Toho se budeme držet i my. Namísto dvou prostorů $\mathcal{L}^p$ a L^p budeme používat jen jeden prostor značený L^p, jehož prvky budou funkce. Budeme mluvit o L^p-normě funkcí, i když to norma není. Důležité je, že "víme, jak to spravit", pokud bychom se chtěli odvolávat na obecnou teorii normovaných prostorů.

L^p-norma splňuje všechny axiomy normy až na výše zmíněnou konvenci. Ověření je triviální s výjimkou trojúhelníkové nerovnosti pro $1 < p < +\infty$. Tuto dokážeme níže pod názvem "Minkowského nerovnost".

16.3. **Věta** (Youngova nerovnost)**.** *Jsou-li $a, b \ge 0$, $p, q \in (1, \infty)$, $pq = p + q$, pak*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz. Pro $a = 0$ nebo $b = 0$ je důkaz triviální. Jinak z konkavity logaritmu dostáváme, že

$$\ln(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}) \ge \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab).$$

□

16.4. **Věta** (Hölderova nerovnost)**.** *Jsou-li u, v μ-měřitelné funkce na X, $p, q \in (1, \infty)$, $pq = p + q$, pak*

$$\|uv\|_1 \le \|u\|_p \|v\|_q.$$

Rovnost nastává, právě když existují $a, b \in [0, \infty)$ (aspoň jedno z nich nenulové) tak, že $a|u|^p = b|v|^q$ skoro všude.

Důkaz. Označme

$$s = \|u\|_p, \quad t = \|v\|_q.$$

Můžeme předpokládat, že funkce u, v jsou nezáporné a že $0 < s < \infty$, $0 < t < \infty$. Potom pro skoro každé $x \in X$ máme z Youngovy nerovnosti

$$\frac{u(x)}{s}\,\frac{v(x)}{t} \le \frac{u(x)^p}{ps^p} + \frac{v(x)^q}{qt^q}.$$

Zintegrováním podle x dostaneme

$$\frac{1}{st}\int_X uv\,d\mu \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Tvrzení o rovnosti dostaneme analýzou důkazu. □

16.5. **Věta** (Minkowského nerovnost)**.** *Jsou-li u, v měřitelné funkce na X, $p \in (1, \infty)$, pak*

$$\|u + v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $0 < \|u\|_p < \infty$, $0 < \|v\|_p < \infty$. Pro skoro každé $x \in X$ máme

$$|u(x)| \le \Big(|u(x)|^p + |v(x)|^p\Big)^{1/p},$$
$$|v(x)| \le \Big(|u(x)|^p + |v(x)|^p\Big)^{1/p},$$

tedy po sečtení a umocnění na p

$$|u(x) + v(x)|^p \le \big(|u(x)| + |v(x)|\big)^p \le 2^p(|u(x)|^p + |v(x)|^p),$$

takže $\|u + v\|_p < \infty$. S pomocí Hölderovy nerovnosti, kde definujeme $q = \frac{p}{p-1}$, dostaneme

$$\begin{aligned}\int_X |u+v|^p\,d\mu &\le \int_X |u+v|^{p-1}|u|\,d\mu + \int_X |u+v|^{p-1}|v|\,d\mu \\ &\le \Big(\int_X |u+v|^p\,d\mu\Big)^{1/q}\Big(\int_X |u|^p\,d\mu\Big)^{1/p} \\ &\quad + \Big(\int_X |u+v|^p\,d\mu\Big)^{1/q}\Big(\int_X |v|^p\,d\mu\Big)^{1/p}.\end{aligned} \tag{43}$$

Jelikož

$$0 < \Big(\int_X |u+v|^p\,d\mu\Big)^{1/q} < \infty,$$

můžeme tímto výrazem vydělit obě strany nerovnosti (43) a dostaneme požadovaný výsledek. □

16.6. **Věta** (Úplnost prostorů L^p)**.** *Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost prvků $L^p(X)$, cauchyovská v normě $\|\dots\|_p$. Pak existuje $f \in L^p(X)$ tak, že $\|f_j - f\|_p \to 0$. Dále existuje posloupnost $\{g_j\}$ vybraná z $\{f_j\}$ tak, že $g_j \to f$ μ-skoro všude.*

Důkaz. Důkaz provedeme pro $p < \infty$; případ $p = \infty$ je odlišný a snadnější. Jelikož $\{f_j\}$ je cauchyovská posloupnost, lze z ní vybrat posloupnost g_j tak, že pro všechna $j = 1, 2, \dots$ platí

$$\|g_{j+1} - g_j\| < 2^{-j}. \tag{44}$$

Položme

$$h_k = |g_1| + |g_2 - g_1| + \dots + |g_k - g_{k-1}|,$$
$$h = \lim_{k\to\infty} h_k$$

Z trojúhelníkové nerovnosti pro L^p-normu a (44) dostaneme

$$\|h_k\|_p \le \|g_1\|_p + \sum_{j=1}^{k-1} \|g_{j+1} - g_j\|_p \le \|g_1\|_p + 1.$$

Podle Leviho věty 4.13 a předchozího odhadu je

$$\int_X h^p\,d\mu = \lim_k \int_X h_k^p\,d\mu = \lim_k \|h_k\|_p^p \le (\|g_1\|_p + 1)^p$$

Funkce h^p je tedy integrovatelná a tím spíš skoro všude konečná (viz věta 4.8 (c)). Uvažujme bod x, v němž $h(x) < \infty$. Potom řada

$$g_1(x) + \sum_{j=1}^{\infty}\big(g_{j+1}(x) - g_j(x)\big)$$

konverguje, neboť konverguje řada absolutních hodnot. Tím jsme dokázali existenci limity

$$f(x) := \lim_{j\to\infty} g_j(x)$$

v každém takovém bodě x. Lebesgueova věta 6.2 s majorantou h^p dává

$$\lim_{j\to\infty}\int_X |f - g_j|^p\,d\mu = \int_X \lim_{j\to\infty} |f - g_j|^p\,d\mu = 0.$$

Znovu použijeme, že $\{f_j\}$ je cauchyovská posloupnost, a dostáváme

$$\|f - f_j\|_p \le \|f - g_j\|_p + \|g_j - f_j\|_p \to 0.$$

Tvrzení o konvergenci skoro všude jsme dokázali v průběhu. □

16.7. **Věta** (Hustota jednoduchých funkcí)**.** *Jednoduché L^p-funkce jsou husté v $L^p(X)$, $1 \le p < \infty$.*

Důkaz. Nechť $f \in L^p(X)$. Chceme najít posloupnost $\{f_j\}$ jednoduchých funkcí tak, aby $\|f_j - f\|_p \to 0$. Můžeme předpokládat, že $f \geq 0$. Podle věty 3.12 existují jednoduché funkce $f_j \geq 0$ tak, že $f_j \nearrow f$. Z Lebesgueovy věty 6.2 (majoranta $|f|^p$) dostaneme

$$\int_X |f_j - f|^p \, dx \to 0.$$

$\square$

17. Derivování a rozklad měr

17.1. **Definice** (Absolutní spojitost a singulárnost)**.** Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Nechť μ a ν jsou míry na $\mathcal{S}$. Řekneme, že ν je *absolutně spojitá vzhledem k* μ, značení $\nu << \mu$, jestliže pro každou $E \in \mathcal{S}$ platí

$$\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0. \tag{45}$$

Řekneme, že ν a μ jsou navzájem *singulární*, značení $\mu \perp \nu$, jestliže existují X_a, $X_s \in \mathcal{S}$ tak, že

$$X = X_a \cup X_s, \qquad \mu(X_s) = \nu(X_a) = 0. \tag{46}$$

17.2. **Definice** (Míra s hustotou)**.** Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou a f je nezáporná μ-měřitelná funkce na X. Položme

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu, \qquad E \in \mathcal{S}.$$

Potom ν je míra, která se nazývá *míra s hustotou* f (vzhledem k μ). Naopak f se v této situaci nazývá *hustota* nebo *Radon-Nikodýmova derivace* míry ν (vzhledem k μ) a značí $\frac{d\nu}{d\mu}$. Má-li ν hustotu vzhledem k μ, pak ν je zřejmě absolutně spojitá. Opak platí také, ale není již tak snadný, je to tvrzení hlavní věty kapitoly, věty 17.4.

17.3. **Větička.** Nechť μ, ν jsou σ-konečné míry na $(X, \mathcal{S})$ a $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. Potom pro každou μ-měřitelnou funkci g na $E \in \mathcal{S}$ platí

$$\int_E g \, d\nu = \int_E gf \, d\mu,$$

pokud integrál aspoň na jedné straně má smysl.

Důkaz. Pro charakteristické funkce to platí a přechod přes jednoduché a nezáporné měřitelné funkce k obecnému případu kopíruje konstrukci integrálu. $\square$

17.4. **Věta** (Radon–Nikodýmova)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor se σ-konečnou mírou a ν je σ-konečná míra na $\mathcal{S}$. Nechť $\nu << \mu$. Potom existuje právě jedna (až na modifikace na množinách μ-míry nula) μ-měřitelná funkce f tak, že*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu$$

pro každou $E \in \mathcal{S}$, neboli $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. Pokud ν je konečná, f je μ-integrovatelná.

Důkaz. Důkaz provedeme v případě, že obě míry jsou konečné, obecný případ se dostane ze speciálního rutinními rozdělením na podmnožiny, na nichž jsou obě míry konečné, definováním f na každé z nich a slepením.

Položme $\sigma = \mu + \nu$ a definujme funkcionál J na $L^2(\sigma) = L^2(X, \mathcal{S}, \sigma)$ předpisem

$$J(v) = \int_X v^2 \, d\sigma - 2 \int_X v \, d\nu.$$

Hledáme $u \in L^2(\sigma)$ tak, aby platilo

$$J(u) = \min\{Jv : \ v \in L^2(\sigma)\}.$$

Motiv je následující: Kdyby existovala funkce $w = \frac{d\nu}{d\sigma}$, pak by bylo podle větičky 17.3

$$J(v) = \int_X |v - w|^2 \, d\sigma - \int_X w^2 \, d\sigma \geq - \int_X w^2 \, d\sigma, \qquad v \in L^2(\sigma)$$

a

$$J(w) = - \int_X |w|^2 \, d\sigma = \min\{Jv : \ v \in L^2(\sigma)\}.$$

Položme tedy

$$s = \inf\{Jv : \ v \in L^2(\sigma)\}.$$

Nejprve ukážeme, že $s > -\infty$. Jelikož

$$\int v\,d\nu \le \int |v|\,d\nu \le \int |v|\,d\sigma, \qquad v \in L^2(\sigma),$$

je

$$J(v) \ge \int_X (|v|^2 - 2|v|)\,d\sigma = \int_X \Big((|v|-1)^2 - 1\Big)\,d\sigma \ge -\sigma(X) > -\infty, \qquad v \in L^2(\sigma).$$

Uvažujme tzv. minimizující posloupnost, posloupnost $\{u_j\}_j$ funkcí z $L^2(\sigma)$ splňujících

$$J(u_j) \to s.$$

Nechť $i, j \in \mathbb{N}$, potom

$$2\int_X \Big|\frac{u_j - u_i}{2}\Big|^2\,d\sigma + 2\int_X \Big|\frac{u_j + u_i}{2}\Big|^2\,d\sigma = \int_X |u_i|^2\,d\sigma + \int_X |u_j|^2\,d\sigma \tag{47}$$

a

$$-4\int_X \frac{u_j + u_i}{2}\,d\nu = -2\int_X u_j\,d\nu - 2\int_X u_i\,d\nu, \tag{48}$$

sečtením (47) a (48) dostaneme

$$2\int_X \Big|\frac{u_j - u_i}{2}\Big|^2\,d\sigma + 2J\Big(\frac{u_j + u_i}{2}\Big) = J(u_j) + J(u_i).$$

Odtud

$$\frac{1}{2}\int_X \big|u_j - u_i\big|^2\,d\sigma = -2J\Big(\frac{u_j + u_i}{2}\Big) + J(u_j) + J(u_i) \le -2s + J(u_j) + J(u_i) \to 0$$

pro $i, j \to \infty$. Tedy posloupnost $\{u_j\}_j$ je cauchyovská v normě $L^2(\sigma)$ a podle věty 16.6 existuje limita u posloupnosti $\{u_j\}_j$ v $L^2(\sigma)$. Podle této věty též můžeme předpokládat, že $u_j \to u$ skoro všude (jinak přejdeme k podposloupnosti). Potom Fatouovo lemma dává

$$\int_X |u|^2\,d\sigma \le \liminf_j \int_X |u_j|^2\,d\sigma$$

a s pomocí Hölderovy nerovnosti (věta 16.4)

$$\Big|\int_X u_j\,d\nu - \int_X u\,d\nu\Big| \le \int_X |u_j - u|\,d\nu \le \int_X |u_j - u|\,d\sigma \le \Big(\int_X |u_j - u|^2\,d\sigma\Big)^{1/2}\Big(\sigma(X)\Big)^{1/2} \to 0.$$

Tedy

$$s \le J(u) \le \liminf_j J(u_j) = s.$$

Dokázali jsme, že u je minimizér J. Pro každou $v \in L^2(\sigma)$ a $t > 0$ máme

$$0 \le \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \int_X \frac{|u+tv|^2 - |u|^2}{t}\,d\sigma - 2\int_X \frac{u + tv - u}{t}\,d\nu = \int_X (2uv - tv^2)\,d\sigma - \int_X 2v\,d\nu.$$

Limitní přechod $t \to 0_+$ dává

$$\int_X uv\,d\sigma \ge \int_X v\,d\nu.$$

Zvolme $E \in \mathcal{S}$ a aplikujme předchozí odhad $v = \pm\chi_E$, dostaneme

$$\int_E u\,d\sigma = \nu(E).$$

Tedy našli jsme zatím $u = \frac{d\nu}{d\sigma}$. Nechť $F \in \mathcal{S}$ a $u \ge 1$ na F. Potom

$$\nu(F) = \int_F u\,d\sigma \ge \sigma(F) = \nu(F) + \mu(F),$$

tedy $\mu(F) = 0$ a z absolutní spojitosti ν dostáváme též $\nu(F) = 0$ a $\sigma(F) = 0$. Tedy $u < 1$ σ-skoro všude. Ještě jednodušší je ukázat, že $u \ge 0$ σ-s.v., to ponecháme čtenáři. Nyní položme

$$g = \frac{1}{1-u}, \qquad f = \frac{u}{1-u}.$$

Potom podle větičky 17.3 platí

$$\int_E f\,d\mu + \int_E f\,d\nu = \int_E f\,d\sigma = \int_E ug\,d\sigma = \int_E g\,d\nu.$$

Položme $X_k = \{g \le k\}$, $k = 1, 2, \dots$. Potom f, g jsou omezené měřitelné na X_k a tudíž můžeme odečíst

$$\int_{E\cap X_k} f\,d\mu = \int_{E\cap X_k} (g-f)\,d\nu = \nu(E\cap X_k).$$

Limitní přechod $X_k \nearrow X$ dává

$$\int_E f\,d\mu = \nu(E), \qquad E \in \mathcal{S},$$

neboli $f = \frac{d\mu}{d\sigma}$. Tím jsme dokázali existenci, tvrzení o jednoznačnosti je snadné. $\square$

17.5. **Věta** (Lebesgueova o rozkladu). *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor se σ-konečnou mírou a ν je σ-konečná míra na $\mathcal{S}$. Potom existuje právě jeden rozklad $\nu = \nu_a + \nu_s$, kde ν_a a ν_s jsou míry na $(X, \mathcal{S})$, $\nu_a << \mu$ a $\nu_s \perp \mu$.*

Důkaz. Důkaz provedeme podrobně opět jen v případě, kdy μ a ν jsou konečné.

Existence: Jako v důkazu věty 17.4 najděme $u = \frac{d\nu}{d\sigma}$, kde $\sigma = \mu + \nu$. Položme

$$X_a = \{u < 1\}, \qquad X_s = \{u = 1\},$$

Definujme míry ν_a a ν_s předpisem

$$\nu_a(E) = \nu(E \cap X_a), \quad \nu_s(E) = \nu(E \cap X_s), \qquad E \in \mathcal{S}.$$

Potom

$$\nu_s(X_a) = \nu(X_s \cap X_a) = 0,$$
$$\mu(X_s) = \sigma(X_s) - \nu(X_s) = \sigma(X_s) - \int_{X_s} u\,d\sigma = 0,$$

tedy μ a ν_s jsou navzájem singulární. Nechť nyní $E \in \mathcal{S}$, $\mu(E) = 0$. Předpokládejme, že $\nu_a(E) > 0$. Potom i $\sigma(E) > 0$ a $\mu(E \cap X_a) = 0$ a tudíž

$$\nu_a(E) = \nu(E\cap X_a) = \int_{E\cap X_a} u\,d\sigma < \sigma(E\cap X_a) = \mu(E\cap X_a) + \nu(E\cap X_a) = \nu(E\cap X_a) = \nu_a(E).$$

To je spor, takže $\nu_a(E) = 0$ a $\nu_a << \mu$.

Jednoznačnost: Buď $u = \frac{d\nu}{d\sigma}$ a buď $\nu = \nu_a + \nu_s$ rozklad ν na absolutně spojitou a singulární část. Potom existuje disjunktní rozklad $X = X_a \cup X_s$, kde $X_a, X_s \in \mathcal{S}$ a $\nu_s(X_a) = \mu(X_s) = 0$. Jelikož $\nu_a << \mu$, je $\nu_a(X_s) = 0$. Rozklad tedy musí být tvaru

$$\nu_a(E) = \nu(E\cap X_a), \quad \nu_s(E) = \nu(E\cap X_s), \quad E \in \mathcal{S}.$$

Je-li $E \in \mathcal{S}$, $E \subset X_s$, pak $\mu(E) = 0$, $\nu(E) = \sigma(E)$, tedy $u = 1$ σ-s.v. na E. Naopak

$$\sigma(\{u=1\} \setminus X_s) = \sigma(\{u=1\} \cap X_a) = \nu(\{u=1\} \cap X_a),$$

tedy

$$\mu(\{u=1\} \cap X_a) = 0$$

a

$$\nu(\{u=1\} \cap X_a)) = \nu_a(\{u=1\} \cap X_a) = 0.$$

Odtud $\sigma(\{u=1\} \setminus X_s) = 0$, tedy X_s se liší od $\{u=1\}$ nejvýš o množinu σ-míry nula a rozklad tedy musí být stejný jako rozklad popsaný v existenční části. $\square$

17.6. **Definice** (Absolutně spojitá a singulární část). Míře ν_a z věty 17.5 se říká *absolutně spojitá část* míry ν a míře $\nu_s := \nu - \nu_a$ se říká *singulární část* míry ν. Rozkladu $\nu = \nu_a + \nu_s$ se říká *Lebesgueův rozklad* míry ν.

17.7. **Definice** (Spojité a diskrétní míry). Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Předpokládejme, že $\mathcal{S}$ obsahuje všechny jednobodové množiny. Řekneme, že míra μ na $\mathcal{S}$ je

- *spojitá*, jestliže $\mu(\{x\}) = 0$ pro všechna $x \in X$,
- *diskrétní*, jestliže existuje spočetná množina $S \subset X$ tak, že $\mu(X \setminus S) = 0$.

17.8. **Větička** (Charakterizace diskrétních měr). *Míra μ je diskrétní, právě když existuje spočetná množina $S \subset X$ tak, že*

$$\mu(E) = \sum_{x \in E \cap S} \mu(\{x\}), \quad E \in \mathcal{S}.$$

Důkaz. Důkaz je zřejmý. □

17.9. **Věta** (Rozklad míry na spojitou a diskrétní část). *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor se σ-konečnou mírou. Předpokládejme, že $\mathcal{S}$ obsahuje všechny jednobodové množiny. Potom existuje rozklad*

$$\mu = \mu_c + \mu_d,$$

kde μ_c je spojitá a μ_d je diskrétní.

Důkaz. Položme

$$S = \{x : \mu(\{x\}) > 0\}.$$

Jelikož μ je σ-konečná a jednobodové množiny jsou měřitelné, množina S je spočetná a měřitelná. Definujme míry μ_c a μ_d předpisem

$$\mu_c(E) = \mu(E \setminus S), \quad \mu_d(E) = \mu(E \cap S), \qquad E \in \mathcal{S}.$$

Zřejmě μ_c je spojitá a μ_d je diskrétní. □

18. Znaménkové míry

18.1. **Definice** (Znaménková míra, vektorová míra). Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a $\mathbb{V} = (\mathbb{V}, |\cdot|)$ je normovaný lineární prostor (dále jen "NLP"). Množinová funkce $\nu : \mathcal{S} \to \mathbb{V}$ se nazývá *vektorová míra* na $\mathcal{S}$, jestliže splňuje

(ZVM-1) $\nu(\emptyset) = 0$,

(ZVM-2) jestliže $A_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \dots$, jsou po dvou disjunktní, $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, potom

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j).$$

Součet v (ZVM-2) se chápe ve smyslu konvergence částečných součtů v normě prostoru $\mathbb{V}$. V dalším se budeme zabývat především *znaménkovými měrami*, tj. "vektorovými" měrami s hodnotami v $\mathbb{R}$. Jelikož $\mathbb{R}$ je také normovaný lineární prostor, můžeme znaménkové míry chápat jako zvláštní případ právě definovaného pojmu. Někdy se pro znaménkovou míru používá termín *náboj*, nebo *reálná míra*. Také se hojně studují *komplexní míry*, tj. s hodnotami ve $\mathbb{V} = \mathbb{C}$. Oproti míře, znaménková míra může nabývat i záporných hodnot, ale nesmí nabývat hodnot $+\infty$, $-\infty$.

Snadno nahlédneme, že systém všech znaménkových (nebo vektorových) měr tvoří vektorový prostor.

Omezení na konečné hodnoty vylučuje Lebesgueovu míru nebo některé množinové funkce, které lze získat jako rozdíly nezáporných měr. Lze uvažovat zobecnění znaménkových měr, které zahrne i tyto případy, ale zde se tím nebudeme zabývat.

18.2. **Příklady.** (a) Je-li f μ-integrovatelná funkce, pak

$$E \mapsto \int_E f\, d\mu, \qquad E \in \mathcal{S}$$

je znaménková míra.

(b) Jsou-li μ, ν konečné míry, pak $\mu - \nu$ je znaménková míra.

18.3. **Definice** (Variace vektorové míry). Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a ν je vektorová míra na $\mathcal{S}$. Pro $E \in \mathcal{S}$ definujme

$$|\nu|(E) = \sup\Big\{\sum_j |\nu(E_j)| : \ E_j \in \mathcal{S} \text{ jsou po dvou disjunktní, } \bigcup_j E_j \subset E\Big\}.$$

Množinová funkce $|\nu|$ se nazývá *variace* vektorové míry ν. V definici variace není podstatné, zda uvažujeme konečné či nekonečné součty. Také můžeme uvažovat jen takové součty, že sjednocení množin E_j je celé E.

18.4. **Věta** (Variace míry je míra). *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a $\mathbb{V}$ je NLP. Nechť $\nu : \mathcal{S} \to \mathbb{V}$ je vektorová míra na $\mathcal{S}$. Potom $|\nu|$ je míra na $\mathcal{S}$.*

Důkaz. Uvažujme posloupnost $\{E_j\}$ po dvou disjunktních měřitelných množin a jejich sjednocení E. Jsou-li

$$\sum_i |\nu(E_j^i)|$$

dolní součty k $|\nu|(E_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, pak

$$\sum_{i,j} |\nu(E_j^i)|$$

je dolní součet k $|\nu|(E)$. Odtud

$$|\nu|(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\nu|(E_j). \tag{49}$$

Naopak, buď

$$\sum_k |\nu(A_k)|$$

dolní součet k $|\nu|(E)$. Potom z (ZVM-2) dostaneme

$$|\nu(A_k)| = |\sum_j \nu(A_k \cap E_j))| \leq \sum_j |\nu|(A_k \cap E_j), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

a z (49) plyne

$$\sum_k |\nu|(A_k \cap E_j) \leq |\nu|(E_j), \qquad j = 1, 2, \ldots.$$

Tedy

$$\begin{aligned}\sum_k |\nu(A_k)| &\leq \sum_k \Big(\sum_j |\nu|(A_k \cap E_j)\Big) = \sum_j \Big(\sum_k |\nu|(A_k \cap E_j)\Big) \\ &\leq \sum_j |\nu|(E_j).\end{aligned}$$

Přechodem k supremu přes všechny dolní součty k $|\nu|(E)$ dostáváme

$$|\nu|(E) \leq \sum_j |\nu|(E_j). \tag{50}$$

Z (49) a (50) plyne, že $|\nu|$ je míra. □

18.5. **Lemma.** Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ je vektorová míra. Nechť ν je omezená na podmnožinách $A \in \mathcal{S}$. Potom $|\nu|(A) < \infty$.

Důkaz. Nechť $C = \sup\{|\nu(B)| : B \in \mathcal{S},\ B \subset A\}$. Mějme rozklad $\{A_k\}_{k=1}^m$ množiny A. Označme

$$M_i^+ = \big\{k : \nu_i(A_k) > 0\big\}, \quad M_i^- = \big\{k : \nu_i(A_k) < 0\big\}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Potom

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m |\nu(A_k)| &\leq \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n |\nu_i(A_k)| = \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{k \in M_i^+} \nu_i(A_k) - \sum_{k \in M_i^-} \nu_i(A_k)\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n \bigg(\nu_i\Big(\bigcup_{k \in M_i^+} A_k\Big) - \nu_i\Big(\bigcup_{k \in M_i^-} A_k\Big)\bigg) \leq 2Cn.\end{aligned}$$

Přechodem k supremu přes všechny dolní součty k $|\nu(A)|$ dostaneme

$$|\nu|(A) \leq 2Cn.$$

□

18.6. **Lemma.** Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, $\nu : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ je vektorová míra a $A \in \mathcal{S}$. Jestliže $|\nu|(A) = \infty$, potom existuje $B \in \mathcal{S}$ tak, že $B \subset A$, $|\nu(B)| \geq 1$ a $|\nu|(A \setminus B) = \infty$.

Důkaz. Z lemmatu 18.5 víme, že ν není omezená na podmnožinách A, tedy existuje $E \in \mathcal{S}$ tak, že $E \subset A$ a $|\nu(E)| > |\nu(A)| + 1$. Potom ovšem $|\nu(E)| \geq 1$ a z trojúhelníkové nerovnosti $|\nu(A \setminus E)| = |\nu(A) - \nu(E)| \geq |\nu(E)| - |\nu(A)| \geq 1$. Aspoň jedna z množin E, $A \setminus E$ musí mít nekonečnou variaci $|\nu|$, ta druhá z nich splňuje požadavky kladené na B. □

18.7. **Věta** (o variaci). *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, $\mathbb{V}$ je normovaný lineární prostor konečné dimenze a ν je vektorová míra na $\mathcal{S}$. Potom $|\nu|(X) < \infty$.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$. Pro spor předpokládejme, že $|\nu|(X) = \infty$. Podle lemmatu 18.6 najdeme $B_1 \in \mathcal{S}$ tak, že $|\nu(B_1)| \geq 1$ a $|\nu|(X \setminus B_1)| = \infty$. Podobně v množině $X \setminus B_1$ najdeme $B_2 \in \mathcal{S}$ tak, že $|\nu(B_2)| \geq 1$ a $|\nu|((X \setminus B_1) \setminus B_2) = \infty$. Takto postupně zkonstruujeme posloupnost po dvou disjunktních $\mathcal{S}$-měřitelných množin $\{B_k\}$ tak, že $|\nu(B_k)| \geq 1$, $k = 1, 2, \dots$. Z axiomu (ZVM-2) ale má být

$$\nu(\bigcup_k B_k) = \sum_k \nu(B_k),$$

což není možné, protože ta suma vůbec nekonverguje. □

18.8. **Definice** (Jordanův rozklad znaménkové míry na kladnou a zápornou část). Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a ν je znaménková míra. Potom existuje (právě jedna) dvojice (ν^+, ν^-) (nezáporných) měr na $(X, \mathcal{S})$ tak, že

$$\nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E), \quad E \in \mathcal{S},$$
$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E), \quad E \in \mathcal{S}.$$

Míra ν^+ se nazývá *kladná část* ν, míra ν^- se nazývá *záporná část* ν a rozklad $\nu = \nu^+ - \nu^-$ se nazývá *Jordanův rozklad*. Míry ν^+ a ν^- dostaneme ze vzorců

$$\nu^+(E) = \frac{|\nu|(E) + \nu(E)}{2}, \quad \nu^-(E) = \frac{|\nu|(E) - \nu(E)}{2}, \quad E \in \mathcal{S}.$$

18.9. **Definice** (Integrování podle znaménkové míry). Nechť ν je znaménková míra na $(X, \mathcal{S})$ a f je $\mathcal{S}$-měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$. Definujeme

$$\int_D f\, d\nu = \int_D f\, d\nu^+ - \int_D f\, d\nu^-$$

pokud rozdíl vpravo má smysl.

18.10. **Definice** (Hahnův rozklad znaménkové míry). Nechť ν je znaménková míra na $(X, \mathcal{S})$. Dvojici (P, N) množin z $\mathcal{S}$ nazveme *Hahnův rozklad* X podle míry ν, jestliže $P \cup N = X$, $\quad P \cap N = \emptyset$ a pro každou $E \in \mathcal{S}$ máme

(51) $$E \subset P \implies \nu(E) \geq 0, \quad E \subset N \implies \nu(E) \leq 0.$$

18.11. **Věta** (Existence Hahnova rozkladu). *Nechť ν je znaménková míra na $(X, \mathcal{S})$. Potom existuje Hahnův rozklad X podle ν.*

Důkaz. Nechť $f = \frac{d\nu^+}{d|\nu|}$, $g = \frac{d\nu^-}{d|\nu|}$ a položme

$$P = \{f \geq g\}, \qquad N = \{f < g\}.$$

Pro každou $E \in \mathcal{S}$ dostaneme

$$E \subset P \implies \nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E) = \int_E (f - g)\, d|\nu| \geq 0,$$

a

$$E \subset N \implies \nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E) = \int_E (f - g)\, d|\nu| \leq 0.$$

□

19. Měřitelná zobrazení a obraz míry

19.1. **Definice** (Měřitelné zobrazení). Nechť $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory a $D \in \mathcal{S}$. Řekneme, že $f : D \to Y$ je *měřitelné zobrazení*, přesněji, měřitelné zobrazení $(D \subset X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$, jestliže pro každou $E \in \mathcal{T}$ je $f^{-1}(E) \in \mathcal{S}$.

19.2. **Větička** (Skládání měřitelných zobrazení). *Nechť $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$, $(Z, \mathcal{U})$ jsou měřitelné prostory, f je měřitelné zobrazení $(X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ a g je měřitelné zobrazení $(Y, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{U})$. Potom $g \circ f$ je měřitelné zobrazení $(X, \mathcal{S}) \to (Z, \mathcal{U})$.*

Důkaz. Důkaz je zřejmý. □

19.3. **Větička** (Měřitelnost-postačující podmínka). *Nechť* $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ *jsou měřitelné prostory,* $D \in \mathcal{S}$. *Nechť* $\mathcal{G} \subset 2^Y$, $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{G})$. *Potom* $f : D \to Y$ *je měřitelné zobrazení, právě když pro každou* $E \in \mathcal{G}$ *je* $f^{-1}(E) \in \mathcal{S}$.

Důkaz. Systém množin $\mathcal{F} := \{M \subset Y : \{f \in M\} \in \mathcal{S}\}$ je zřejmě σ-algebra obsahující všechny množiny z $\mathcal{G}$. Jelikož $\mathcal{T}$ je nejmenší σ-algebra s takovou vlastností, je nutně $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$. □

19.4. **Poznámka.** Měřitelné funkce jsou zvláštní případ měřitelných zobrazení. Snadno nahlédneme, že $\mathcal{S}$-měřitelné funkce na X jsou právě měřitelná zobrazení $(X, \mathcal{S})$ do $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ viz. větička 3.7. Speciálně, lebesgueovsky měřitelné funkce jsou měřitelná zobrazení $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Všimněte si a zapamatujte, že pro proměnnou a funkční hodnoty používáme různé σ-algebry. To má za následek, že složení dvou měřitelných funkcí reálné proměnné nemusí být měřitelná funkce a inverzní funkce k měřitelné funkci nemusí být měřitelná. Měřitelná zobrazení $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{M})$ nemají valný praktický význam.

19.5. **Příklad.** Nechť φ je Cantorova funkce a C Cantorovo diskontinuum z příkladu 22.12. Funkce $\psi(x) = \varphi(x) + x$ zobrazuje $[0, 1] \setminus C$ na množinu míry 1, tedy obraz $\psi(C)$ musí mít míru 1. V každé množině kladné míry existuje neměřitelná množina, buď M neměřitelná podmnožina $\psi(C)$. Množina $N = \psi^{-1}(M)$ je nulová, tudíž měřitelná. Buď g inverzní funkce k ψ a $f = \chi_N$. Potom f je měřitelná, g je spojitá, ale $f \circ g = \chi_M$ je neměřitelná.

Nyní předpokládejme, že N má mohutnost kontinua. Nechť bijekce u intervalu $[0, 1]$ na $[0, 2]$ splývá s ψ na $[0, 1] \setminus C$, ale zobrazuje nějakou borelovskou podmnožinu množiny C na M. Potom u zůstává měřitelné, protože se od měřitelné ψ liší jen na množině míry 0, avšak u^{-1} není měřitelné zobrazení.

19.6. **Definice** (Obraz míry). Nechť $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory, μ je míra na $(X, \mathcal{S})$ a f je měřitelné zobrazení $(X, \mathcal{S})$ do $(Y, \mathcal{T})$. Potom množinová funkce

$$f(\mu) : E \mapsto \mu(f^{-1}(E)), \qquad E \in \mathcal{T}$$

se nazývá *obraz míry* μ.

Obraz míry je zřejmě míra.

19.7. **Příklad.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení, $G' = f(G)$. Definujme míru μ na $\mathbb{R}^n$ předpisem

$$\mu(E) = \int_E Jf(x)\,dx, \qquad E \in \mathfrak{M}.$$

Potom $f(\mu)$ splývá s λ na G.

19.8. **Poznámka.** Nechť $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory, ν je míra na $(Y, \mathcal{T})$ a f je měřitelné zobrazení $(X, \mathcal{S})$ do $(Y, \mathcal{T})$. Vzorec

$$\mu(A) := \nu(f(A))$$

nemusí definovat míru na $(X, \mathcal{S})$. Především nemáme zaručeno

$$A \in \mathcal{S} \implies f(A) \in \mathcal{T}. \tag{52}$$

I kdyby (52) bylo splněno, μ nemusí být aditivní, když f není prostá. S jistou dávkou opatrnosti se dá uvažovat o vzorci

$$\mu(A) = \int_Y \mathcal{N}(f, A, y)\,dy, \tag{53}$$

kde $\mathcal{N}(f, A, y)$ je počet prvků množiny $\{x \in A\colon f(x) = y\}$. Vzorec (53) má šanci definovat míru, pokud nejsou problémy s měřitelností.

19.9. **Větička** (o obrazu míry). *Nechť* $(X, \mathcal{S}, \mu)$, $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ *jsou prostory s mírou,* f *je měřitelné zobrazení* $(X, \mathcal{S})$ *do* $(Y, \mathcal{T})$ *a* $\nu = f(\mu)$. *Potom pro každou* $\mathcal{T}$*-měřitelnou funkci* u *na* Y *je*

$$\int_Y u(y)\,d\nu(y) = \int_X u(f(x))\,d\mu(x)$$

pokud aspoň jedna strana má smysl.

Důkaz. Důkaz je rutinní záležitost (přes charakteristické funkce, jednoduché funkce, ...). □

20. Míry na topologických prostorech

20.1. **Definice** (Radonovy míry)**.** Nechť $(\mathcal{S},\mu)$ je úplná míra na lokálně kompaktním Hausdorffově topologickém prostoru X (je možno si představit otevřenou nebo uzavřenou podmnožinu $\mathbb{R}^n$). Řekneme, že μ je *Radonova*, jestliže platí:

(R-1) Je-li $K \subset X$ kompaktní, pak $K \in \mathcal{S}$ a $\mu(K) < \infty$,

(R-2) Je-li $E \in \mathcal{S}$, pak $\mu(E) = \sup\{\mu(K):\ K \subset E,\ K \text{ kompaktní}\}$.

Nechť $(\mathcal{S},\nu)$ je úplná znaménková míra na lokálně kompaktním Hausdorffově topologickém prostoru X. Řekneme, že ν je *Radonova znaménková míra*, jestliže ν^+ a ν^- jsou Radonovy míry.

20.2. **Poznámky.** Místo vnitřní regularity se v některé literatuře požaduje "vnější regularita", tj. že míra měřitelné množiny je infimum měr otevřených nadmnožin. V naší obecnosti to vyjde nastejno, ale v obecnějších topologických prostorech tím vzniká nejednoznačnost v chápání pojmu Radonovy míry.

V našem výkladu požadujeme úplnost Radonovy míry, ani v tomto není obecně užívaná terminologie zajedno.

Příkladem míry, která není Radonova je tzv. k-rozměrná Hausdorffova míra v $\mathbb{R}^n$ pro $0 \le k < n$. Tato míra měří homogenně množiny nižší dimenze, např. "plochy" nebo "fraktály". Když se však omezíme na podmnožiny pevné plochy, můžeme tak dostat Radonovu míru (například "povrchovou míru na sféře") a aplikovat výsledky této kapitoly.

20.3. **Definice** (LS funkce intervalu)**.** Připomeňme, že $\mathcal{I} = \mathcal{I}_n$ je systém všech omezených n-rozměrných intervalů v $\mathbb{R}^n$ a $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n$ je systém všech poloprostorů tvaru $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i \le c\}$, kde $i \in \{1,\dots,n\}$ a $c \in \mathbb{R}^n$. Funkci $\mathbf{m}\colon \mathcal{I} \to [0,\infty)$ mazveme *LS funkcí intervalu*, jestliže platí

(LS-1) Jestliže $Q \in \mathcal{I}$ a $H \in \mathcal{H}$, pak $\mathbf{m}(Q) = \mathbf{m}(Q \cap H) + \mathbf{m}(Q \setminus H)$ a $\mathbf{m}(Q) = \mathbf{m}(Q \cap H^\circ) + \mathbf{m}(Q \setminus H^\circ)$ (aditivita),

(LS-2) Jestliže $Q, \mathcal{Q}_j \in \mathcal{I}$ a $Q \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$, potom $\mathbf{m}(Q) \le \sum\limits_{j\to\infty} \mathbf{m}(Q_j)$ (spočetná subaditivita).

20.4. **Poznámky.** Z aditivity plyne následující: Jestliže Q, $Q_j \in \mathcal{I}$, $j = 1,\dots,m$, intervaly Q_j jsou po dvou disjunktní a $Q = \bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$, potom

$$\mathbf{m}(Q) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{m}(Q_j).$$

Uvažujme vlastnosti

(LS-2′) Jestliže $Q_j \in \mathcal{I}$, $Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$ a $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} Q_j = 0$, pak $\lim\limits_{j\to\infty} \mathbf{m}(Q_j) = 0$.

(LS-2″) Jestliže $Q_j \in \mathcal{I}$, $Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$ a $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} Q_j = Q$, pak $\lim\limits_{j\to\infty} \mathbf{m}(Q_j) = \mathbf{m}(Q)$.

(LS-2‴) Jestliže $Q_j \in \mathcal{I}$, $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots$ a $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j = Q \in \mathcal{I}$, pak $\lim\limits_{j\to\infty} \mathbf{m}(Q_j) = \mathbf{m}(Q)$.

Potom za předpokladu (LS-1) jsou vlastnosti (LS-2), (LS-2′), (LS-2″), (LS-2‴) ekvivalentní.

Ekvivalence (LS-2′), (LS-2″) a (LS-2‴) je celkem snadné cvičení. Z (LS-2) dostaneme (LS-2‴). Chceme-li dokázat (LS-2) ze zbylých vlastností, postupujeme jako v důkazu věty 10.2.

Každá LS funkce intervalu je jednoznačně určena svými hodnotami na polouzavřených intervalech tvaru $(a_1,b_1] \times \dots \times (a_n,b_n]$.

20.5. **Příklad.** Definujme na $\mathbb{R}$ množinovou funkci

$$\mathbf{m}(I) = \begin{cases} 1, & I \text{ obsahuje pravé okolí nuly}, \\ 0, & I \text{ neobsahuje pravé okolí nuly}, \end{cases} \qquad I \in \mathcal{I}.$$

Potom $\mathbf{m}$ je konečně aditivní, ale není spočetně subaditivní.

20.6. **Definice** (Lebesgue-Stieltjesovy míry)**.** Jestliže μ je míra, která vznikla z LS funkce intervalu základní konstrukcí, řekneme, že μ je *Lebesgue-Stieltjesova míra*, nebo krátce *LS míra* (generovaná množinovou funkcí $\mathbf{m}$). V této kapitole ukážeme, že LS míry jsou právě Radonovy míry v $\mathbb{R}^n$.

20.7. **Věta** (Úspěšnost základní konstrukce)**.** *Nechť $\mathbf{m}$ je LS funkce intervalu a $(\mathcal{S},\mu)$ je vygenerovaná LS míra. Potom $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$ a $\mathbf{m} = \mu$ na $\mathcal{I}$.*

Důkaz. Důkaz se dostane podobně jako v případě Lebesgueovy míry (kapitola 10). □

20.8. **Lemma.** *Nechť $(\mathcal{S}, \mu)$ je Lebesgue-Stieltjesova míra na $\mathbb{R}^n$ a $E \in \mathcal{S}$. Potom*

(a) *ke každému $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^n$ tak, že $E \subset G$ a $\mu(G \setminus E) < \varepsilon$,*

(b)

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \ K \text{ kompaktní, } K \subset E\}.$$

Důkaz. Nechť μ je generovaná LS funkcí intervalu $\mathbf{m}$. Potom existují kompaktní množiny X_k tak, že $\mu(X_k) < \infty$ a $\bigcup_k X_k = \mathbb{R}^n$, například můžeme volit $X_k = [-k, k]^n$.

(a) Předpokládejme nejprve, že $\mu(E) < \infty$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a najděme horní součet

$$\sum_j \mathbf{m}(Q_j), \qquad j = 1, 2, \dots,$$

kde $Q_j \in \mathcal{I}$, $E \subset \bigcup_j Q_j$ a

$$\sum_j \mathbf{m}(Q_j) < \mathbf{m}^*(E) + \varepsilon = \mu(E) + \varepsilon.$$

Intervaly Q_j trochu zvětšíme na otevřené intervaly $P_j \supset Q_j$ tak, že stále platí

$$\sum_j \mu(P_j) < \mu(E) + \varepsilon.$$

Položme

$$G = \bigcup_j P_j.$$

Potom G je otevřená a

$$\mu(G) < \sum_j \mu(P_j) < \mu(E) + \varepsilon,$$

takže

$$\mu(G \setminus E) = \mu(G) - \mu(E) < \varepsilon.$$

V obecném případě najdeme množiny E_k konečné míry, $k = 1, 2, \dots$, tak, že $E = \bigcup_k E_k$ (například $E_k = E \cap X_k$). Ke každé E_k najdeme otevřenou množinu $G_k \subset E_k$ tak, že $\mu(G_k \setminus E_k) < 2^{-k}\varepsilon$ a položíme

$$G = \bigcup_k G_k.$$

Potom

$$G \setminus E \subset \bigcup_k (G_k \setminus E_k)$$

a tudíž $\mu(G \setminus E) < \varepsilon$.

(b) Vyjdeme z (a) a přechodem k doplňkům najdeme posloupnost F_j uzavřených množin tak, že $\mu(E \setminus F_j) < 2^{-j}$. Uvažme, že množiny $F_j \cap X_k$ jsou kompaktní podmnožiny E a že

$$\mu(E) = \sup_{j,k} \mu(F_j \cap X_k).$$

□

20.9. **Věta** (Charakterizace měřitelných množin). *Nechť $(\mathcal{S}, \mu)$ je Lebesgue-Stieltjesova míra na $\mathbb{R}^n$. Je ekvivalentní:*

(i) *$E \in \mathcal{S}$,*

(ii) *pro každé $\varepsilon > 0$ existují otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^n$ a uzavřená množina $F \subset \mathbb{R}^n$ tak, že $F \subset E \subset G$ a $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$,*

(iii) *existují borelovské množiny $P, Q \subset \mathbb{R}^n$ (přesněji, P typu F_σ a Q typu G_δ) tak, že $P \subset E \subset Q$ a $\mu(Q \setminus P) = 0$,*

(iv) *existují borelovské množiny M, N tak, že $\mu(N) = 0$ a $E \triangle M \subset N$.*

Důkaz. (i) $\implies$ (ii): Podle lemmatu 20.8(a) najdeme otevřenou množinu G a (přechodem k doplňku) uzavřenou množinu F tak, že

$$F \subset E \subset G, \quad \mu(G \setminus E) < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \mu(E \setminus F) < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

(ii) $\implies$ (iii): Na základě (ii) najdeme uzavřené množiny F_j a otevřené množiny G_j, $j = 1, 2, \dots$, tak, že $F_j \subset E \subset G_j$ a $\mu(G_j \setminus F_j) < 2^{-j}$. Nyní stačí položit

$$P = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j, \qquad Q = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j.$$

(iii) $\implies$ (iv): Položme $M = P$ (nebo $M = Q$), $N = Q \setminus P$.

(iv) $\implies$ (i): To je důsledek úplnosti LS měr a měřitelnosti borelovských množin. $\square$

20.10. **Věta.** *Nechť $(\mathcal{S}, \mu)$ je úplná míra na $\mathbb{R}^n$. Potom je ekvivalentní*

(i) *μ je Radonova míra,*

(ii) *μ je Lebesgueova-Stieltjesova míra (tj. existuje LS funkce intervalu $\mathbf{m}$ tak, že μ je LS míra generovaná $\mathbf{m}$).*

Důkaz. Nechť μ je *LS* míra. Podle věty 20.7 je v $\mathcal{S}$ každý interval, což nageneruje všechny borelovské množiny, tím spíš kompaktní množiny. Každá kompaktní množina K se vejde do nějakého omezeného intervalu Q, tedy $\mu(K) \le \mu(Q) = \mathbf{m}(Q) < \infty$. Podle lemmatu 20.8 je μ Radonova. Naopak, nechť $(\mathcal{S}, \mu)$ je Radonova míra na $\mathbb{R}^n$. Položme

$$\mathbf{m}(Q) := \mu(Q), \qquad Q \in \mathcal{I}.$$

Nechť $(\mathcal{T}, \nu)$ je LS míra generovaná $\mathbf{m}$. Potom podle věty 10.8 $\nu = \mu$ na $\mathcal{I}$ a podle věty 12.4 je $\nu = \mu$ na σ-algebře generované intervaly, což je borelovská σ-algebra. Zbývá ukázat, že $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ a že $\mu = \nu$ na neborelovských podmnožinách $\mathcal{S}$. Je-li $E \in \mathcal{T}$, pak podle věty 20.9 existují borelovské množiny M a N tak, že $\mu(N) = 0$ a $E \triangle M \subset N$. Vzhledem k úplnosti ν je $E \triangle M \in \mathcal{S}$ a $\mu(E \triangle M) = \mu(N) = 0$. Tudíž $E \in \mathcal{S}$ a $\nu(E) = \mu(E)$. Je-li $E \in \mathcal{S}$ a $Q \in \mathcal{I}$, najdeme podle definice kompaktní množiny $K_j \subset Q \cap E$ a $L_j \subset Q \setminus E$ tak, že $\mu(K_j) \to \mu(Q \cap E)$ a $\mu(L_j) \to \mu(Q \setminus E)$. Položme $P = \bigcup_j K_j$, $R = \bigcup_j L_j$. Potom P, R jsou borelovské množiny, $P \subset E \cap Q \subset Q \cap R^c$ a $\nu((Q \cap R^c) \setminus P) = \mu((Q \cap R^c) \setminus P) = 0$. Tedy podle věty 20.9 je $E \cap Q \in \mathcal{T}$. Odtud dostaneme že $E = \bigcup_k (E \cap [-k, k]^n) \in \mathcal{T}$. $\square$

20.11. **Věta** (Luzinova věta)**.** *Nechť $(\mathcal{S}, \mu)$ je Radonova míra na $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce a $\varepsilon > 0$. Potom existuje spojitá funkce $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a otevřená množina G tak, že $\mu(G) < \varepsilon$ a $f = g$ na $\mathbb{R}^n \setminus G$.*

Důkaz. Důkaz pouze naznačíme. Uspořádejme všechny otevřené jednorozměrné intervaly s racionálními konci do posloupnosti $\{I_k\}_k$ a označme

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \in I_k\}$$

Podle věty 20.9 existují otevřené množiny G_k a uzavřené množiny F_k tak, že $F_k \subset E_k \subset G_k$ a $\mu(G_k \setminus F_k) < 2^{-k}\varepsilon$. Položme

$$G = \bigcup_j (G_k \setminus F_k).$$

Potom $\mu(G) < \varepsilon$ a f je spojitá na $\mathbb{R}^n \setminus G$. Podle Tietzeovy rozšiřovací věty existuje spojitá funkce $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tak, že $g = f$ na $\mathbb{R}^n \setminus G$, ta má požadované vlastnosti. $\square$

20.12. **Poznámka.** Věta platí i pro obecnější lokálně kompaktní prostory, zde se omezujeme na $\mathbb{R}^n$, abychom nemuseli pro Radonovy míry dokazovat vlastnosti uvedené ve větě 20.9. Platí též obrácené tvrzení: jestliže f splňuje pro každé $\varepsilon > 0$ vlastnost z tvrzení Luzinovy věty, pak f je měřitelná. Vskutku, jsou-li g_j spojité funkce odpovídající $\varepsilon_j = 2^{-j}$, pak $g_j \to f$ skoro všude a tudíž je f měřitelná jakožto limita posloupnosti měřitelných funkcí.

20.13. **Definice** (Prostory spojitých funkcí)**.** Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor. Buď $C_b(X)$ Banachův prostor všech omezených spojitých funkcí na X se supremovou normou. *Nosičem* funkce f se nazývá nejmenší uzavřená množina obsahující $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Množina všech spojitých funkcí na X s kompaktním nosičem se značí $C_c(X)$, je to lineární podprostor $C_b(X)$. Uzávěr $C_c(X)$ v $\mathcal{C}_b(X)$ se značí $\mathcal{C}_0(X)$, to je opět Banachův prostor.

20.14. **Věta** (Rieszova věta o reprezentaci)**.** *Nechť X je separabilní lokálně kompaktní metrický prostor. Nechť Φ je lineární funkcionál na množině $\mathcal{C}_c(X)$. Nechť Φ je nezáporný, tj. $f \ge 0 \implies \Phi(f) \ge 0$. Potom existuje právě jedna Radonova míra μ na X tak, že pro každou funkce $f \in \mathcal{C}_c(X)$ platí*

$$\Phi(f) = \int_X f \, d\mu. \tag{54}$$

Důkaz. Důkaz vynecháme. Těžší část je existence, k tomuto účelu se definuje množinová funkce

$$\mathbf{m}(G) = \sup\Big\{\Phi(f):\ f \in \mathcal{C}_c(X),\ 0 \le f \le \chi_G\Big\},$$

kde G probíhá všechny otevřené podmnožiny X, a na tuto množinovou funkci $\mathbf{m}$ se aplikuje základní konstrukce. Dokázat, že výsledná míra μ splňuje (54) ovšem dá dost práce. □

20.15. **Věta.** *Nechť X je separabilní lokálně kompaktní metrický prostor. Nechť Φ je spojitý lineární funkcionál na prostoru $\mathcal{C}_0(X)$. Potom existuje právě jedna znaménková Radonova míra μ na X tak, že pro každou funkci $f \in \mathcal{C}_0(X)$ platí*

$$\Phi(f) = \int_X f\,d\mu. \tag{55}$$

Důkaz nebudeme uvádět. □

21. Lebesgue-Stieltjesův integrál

21.1. **Definice** (Lebesgue-Stieltjesův integrál)**.** Nechť g je neklesající funkce na intervalu $[a,b]$. Budeme používat symbol $g(x+)$ pro limitu zprava a $g(x-)$ pro limitu zleva. Potom existuje právě jedna *LS* míra μ na $\mathbb{R}$ tak, že pro každé $c \in \mathbb{R}$ máme

$$\mu((-\infty,c]) = \begin{cases} 0, & c < a,\\ g(c+) - g(a), & a \le c < b,\\ g(b) - g(a), & b \le c. \end{cases}$$

Nechť f je μ-měřitelná funkce na $[a,b]$, kde vztah mezi μ a g je jako výše. Pak definujeme

$$\int_a^b f\,dg = \int_{[a,b]} f\,d\mu.$$

Tento integrál se nazývá *Lebesgue-Stieltjesův integrál* funkce f podle g. Poznamenejme, že platí aditivita vzhledem k intervalům, totiž, je-li $c \in [a,b]$, pak

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg.$$

Totiž, případný skok funkce g v bodě c se rozdělí, $g(c) - g(c-)$ se započítá do prvého integrálu vpravo a $g(c+) - g(c)$ do druhého integrálu vpravo. Symbol $\int_a^b f\,dg$ může mít význam i za obecnějších předpokladů, tím se však zde nebudeme zabývat. Značení dg pro "diferenciál g" je téměř konzistentní se značením dx pro integrál podle Lebesgueovy míry, v kterémžto případě je $g(x) = x$. Naopak, ve značení $\int_I f\,d\mu$ je symbol diferenciálu "d" užit poněkud nelogicky.

21.2. **Věta** (per partes pro LS integrál)**.** *Nechť $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou neklesající funkce, f je zprava spojitá v bodech nespojitosti g a a g je zleva spojitá v bodech nespojitosti f. Potom*

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f\,dg + \int_a^b g\,df.$$

Důkaz. BÚNO můžeme předpokládat, že $f(0) = g(0) = 0$. Použijeme Fubiniovu větu (samostatně ověřte předpoklady) a dostaneme

$$\begin{aligned} f(b)g(b) &= \mu\otimes\nu([a,b]\times[a,b]) = \mu\otimes\nu(\{a \le x \le y \le b\}) + \mu\otimes\nu(\{a \le y < x \le b\})\\ &= \int_{[a,b]} \Big(\mu([a,y])\Big)\,d\nu(y) + \int_{[a,b]} \Big(\nu([a,x))\Big)\,d\mu(x) = \int_{[a,b]} f\,d\nu + \int_{[a,b]} g\,d\mu. \end{aligned}$$

Vskutku: $\mu([a,y]) = f(y+) - f(a)$ pro $y < b$ a $f(b) - f(a)$ pro $y = b$. Nerovnost $f(y+) \ne f(y)$ může nastat jen na spočetné množině v bodech spojitosti g, což je množina ν-míry nula. Podobně se zachází s druhým integrálem. □

22. Distribuční funkce jedné proměnné

22.1. **Definice** (Náhodná veličina). Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je *pravděpodobnostní prostor*, neboli prostor s pravděpodobnostní mírou. $\mathcal{A}$-měřitelná funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se bude nazývat *náhodná veličina*.

22.2. **Definice** (Distribuční funkce a rozdělení náhodné veličiny). Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a X je náhodná veličina na Ω. Funkce

$$F(x) = P(\{X \leq x\})$$

se nazývá *distribuční funkce* náhodné veličiny X a značí F_X. Míru $X(P)$ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (obraz míry, viz. větička 19.6) lze zúplnit na pravděpodobnostní LS míru, která se nazývá *rozdělení* náhodné veličiny X a značí μ_X;

22.3. **Pozorování** (Využití rozdělení náhodné veličiny). *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, X je náhodná veličina na Ω a $\mu = \mu_X$. Potom pro každou borelovskou množinu $E \subset \mathbb{R}$ je*

$$P(\{X \in E\}) = \mu(E).$$

Nechť $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je borelovsky měřitelná funkce. Potom

$$\int_\Omega \phi \circ X \, dP = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \, d\mu(x),$$

pokud má aspoň jedna strana smysl.

Důkaz. Plyne z větičky 19.9. □

22.4. **Větička** (Vlastnosti distribučních funkcí). *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, X je náhodná veličina na Ω a $F = F_X$. Potom*

(DF-1) *F je neklesající,*
(DF-2) *F je zprava spojitá a*
(DF-3) $F(-\infty+) = 0, \quad F(+\infty-) = 1.$

Důkaz. Důkaz je zřejmý. □

22.5. **Věta** (Neklesající funkce a rozdělení). *Nechť $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje (DF-1)–(DF-3) z větičky 22.4. Potom existuje právě jedna LS míra $(\mathcal{S}, \mu)$ na $\mathbb{R}$ tak, že*

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a), \qquad (a, b] \in \mathcal{I}_1, \tag{56}$$

Důkaz. Míru μ zkonstruujeme pomocí věty 10.8 z LS funkce intervalu

$$(a, b] \mapsto F(b) - F(a).$$

Jednoznačnost plyne z věty 13.5. □

22.6. **Větička** (Charakterizace distribučních funkcí). Větičku 22.4 můžeme obrátit. *Jestliže $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje* (DF-1)–(DF-3), *pak existuje pravděpodobnostní prostor* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *a náhodná veličina X na Ω tak, že F je distribuční funkce X.*

Důkaz. Uvažujme identickou funkci $X : x \mapsto x$ na pravděpodobnostním prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{S}, \mu)$, kde $(\mathcal{S}, \mu)$ je jako ve větě 22.5. □

22.7. **Poznámka.** Na základě větiček 22.4 a 22.6 můžeme termín "distribuční funkce" používat pro funkci $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující (DF-1)–(DF-3), aniž bychom měli na mysli nějakou konkrétní náhodnou veličinu, které by byla funkce F přiřazena.

22.8. **Větička** (Rozklad míry). Nechť μ je LS míra na $\mathbb{R}$. Potom existuje rozklad $\mu = \mu_a + \mu_d + \mu_{sc}$, spočetná množina $S \subset \mathbb{R}$ a Lebesgueovsky nulová množina $N \subset \mathbb{R}$ tak, že

(a) $\lambda(E) = 0 \implies \mu_a(E) = 0, \qquad E \in \mathfrak{M},$
(b) $\mu_{sc}(\{x\}) = 0, \qquad x \in \mathbb{R},$
(c) $\mu_{sc}(\mathbb{R} \setminus N) = 0,$
(d) $\mu_d(\mathbb{R} \setminus S) = 0.$

Důkaz. Důkaz plyne z vět 17.5 a 17.9. □

22.9. **Tvrzení** (Skoky a derivace distribuční funkce)**.** Nechť F je distribuční funkce, μ je LS míra na $\mathbb{R}$ a platí (56). Nechť S, N, μ_a, μ_{sc} a μ_d jsou jako ve větě 22.8. Buď

$$F_a(x) = \mu_a((-\infty, x]).$$

Potom

(a) Derivace F' a F'_a existují skoro všude a $F' = F'_a$ s.v.
(b) $F_a(x) = \int_{\infty}^{x} F'(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}$,
(c) $\mu(\{x\}) = \mu_d(\{x\}) = F(x) - F(x-), \qquad x \in \mathbb{R}$,
(d) S je množina bodů nespojitosti F.

Důkaz. Důkaz nebudeme uvádět. Tvrzení (c), (d) jsou příliš snadná a tvrzení (a), (b) příliš těžká. □

22.10. **Definice** (Distribuční funkce absolutně spojité, singulární spojité a funkce skoků)**.** Nechť F je distribuční funkce, μ je LS míra na $\mathbb{R}$ a platí (56). Nechť S je množina bodů nespojitosti F. Řekneme, že F je *absolutně spojitá*, jestliže existuje integrovatelná funkce f na $\mathbb{R}$ tak, že

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{57}$$

Řekneme, že F je *funkce skoků*, jestliže

$$F(x) = \sum_{t \in S \cap (-\infty, x]} (F(t) - F(t-)), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Řekneme, že F je *singulární spojitá*, jestliže $S = \emptyset$ a $F' = 0$ s.v.

22.11. **Tvrzení.** Nechť vše je jak v definici 22.10.
(a) Je-li F je absolutně spojitá, pak $F' = f$ s.v.
(b) F je absolutně spojitá, právě když $\mu = \mu_a$.
(c) F je singulární spojitá, právě když $\mu = \mu_{sc}$.
(d) F je funkce skoků, právě když $\mu = \mu_d$.

Důkaz. Nebudeme dokazovat (není všechno snadné). □

22.12. **Příklady** (distribučních funkcí)**.** Každá spojitě diferencovatelná distribuční funkce je příkladem absolutně spojité distribuční funkce, třeba

$$F(x) = 1/2 + \frac{1}{\pi}\arctan x.$$

Funkce $\chi_{[0,\infty)}$ je typická funkce skoků. Příkladem singulární spojité funkce je tzv. Cantorova funkce. Ta se konstruuje následovně: Položme $\varphi_0(x) = x$. Pro $k = 1, 2, \dots$ konstruujme rekurentně

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi_{k-1}(3x), & x \in [0, \frac{1}{3}], \\ \frac{1}{2}, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varphi_{k-1}(3x-2), & x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Potom posloupnost $\{\varphi_k\}$ je stejnoměrně konvergentní a její limitou je Cantorova funkce φ. Platí

$$\varphi(1) - \varphi(0) = 1 \neq 0 = \int_0^1 \varphi'(x)\,dx$$

a funkce φ je tedy "protipříklad" na Newton-Leibnizovu formuli.

Poznamenejme, že množina bodů $x \in [0, 1]$, v nichž není φ lokálně konstantní, je známé *Cantorovo diskontinuum.*

22.13. **Větička.** Využití distribuční funkce náhodné veličiny *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, X je náhodná veličina na Ω a $F = F_X$.*

(a) *Nechť F je absolutně spojitá. Potom pro každou borelovskou množinu $E \subset \mathbb{R}$ je*

$$P(\{X \in E\}) = \int_E F'(x)\,dx.$$

Nechť $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je borelovsky měřitelná funkce. Potom

$$\int_\Omega \phi \circ X\,dP = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,F'(x)\,dx,$$

pokud má aspoň jedna strana smysl.

(b) *Nechť F je funkce skoků a S_F je množina skoků funkce F. Potom pro každou borelovskou množinu $E \subset \mathbb{R}$ je*

$$P(\{X \in E\}) = \sum_{x \in S_F \cap E} (F(x) - F(x-)).$$

Nechť $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je borelovsky měřitelná funkce. Potom

$$\int_\Omega \phi \circ X \, dP = \sum_{x \in S_F} \phi(x)(F(x) - F(x-)),$$

pokud má aspoň jedna strana smysl.

Důkaz. Tvrzení je snadným důsledkem pozorování 22.3 a tvrzení 22.11. □

23. Distribuční funkce více proměnných

23.1. **Definice** (Distribuční funkce více proměnných)**.** Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a $X_1, \dots, X_n$ jsou náhodné veličiny na Ω. Funkce

$$F(x) = P(\{X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n\})$$

se nazývá *distribuční funkce* n-rozměrné náhodné veličiny $X = (X_1, \dots, X_n)$ a značí F_X. Míru $X(P)$ na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ (obraz míry, viz. větička 19.6) lze zúplnit na pravděpodobnostní LS míru, která se nazývá *rozdělení* náhodné veličiny X a značí μ_X.

23.2. **Poznámka.** Obdobně jako v jednorozměrném případě bychom chtěli konstruovat LS míru μ_X pouze na základě znalosti rozdělení F. K tomuto účelu je třeba funkci F přiřadit LS funkci intervalu. Pokud F vznikla jako distribuční funkce n-rozměrné náhodné veličiny, musí splňovat

(DFn-1) F je neklesající ve všech proměnných:

$$x_1 \le y_1, \dots, x_n \le y_n \implies F(x) \le F(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}^n;$$

(DFn-2) F je (separátně) zprava spojitá ve všech proměnných;

(DFn-3) $\lim_{t \to -\infty} F(x + t\boldsymbol{e}_i) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ i \in \{1, \dots, n\};$

(DFn-4) $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) = 1$.

Nechť tedy F má tyto vlastnosti. Pro každý interval $Q = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] \in \mathcal{I}_n$ označme $V(Q) = \{a_1, b_1\} \times \cdots \times \{a_n, b_n\}$ množinu všech vrcholů Q. Pro každý vrchol $x \in V(Q)$ buď $\sigma(x)$ počet prvků množiny $\{i \in \{1, \dots, n\} \colon x_i = a_i\}$. Položme

$$\mathbf{m}(Q) = \sum_{x \in V(Q)} (-1)^{\sigma(x)} F(x).$$

Potom $\mathbf{m}$ je LS funkce intervalu a jejím rozšířením dostaneme LS míru μ takovou, že

$$\mu((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]) = F(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

24. Dodatky

Buď $(X, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s mírou.

24.1. **Větička** (Čebyševova nerovnost)**.** *Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$, $p > 0$ a $a > 0$. Potom*

$$\mu(D \cap \{f \ge a\}) \le \frac{\int_D |f|^p \, d\mu}{a^p}.$$

Důkaz. Zřejmě

$$\mu(D \cap \{|f| \ge a\}) \le \int_{D \cap \{|f| \ge a\}} \frac{|f|^p}{a^p} \, d\mu \le \frac{\int_D |f|^p \, d\mu}{a^p}.$$

□

24.2. **Věta** (ε-δ spojitost integrálu)**.** *Nechť f je integrovatelná funkce na X. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $E \in \mathcal{S}$ platí*

$$\mu(E) < \delta \implies \int_E |f| \, d\mu < \varepsilon.$$

Důkaz. Nechť
$$E_j = \{|f| \geq j\}.$$
Podle Lebesgueovy věty 6.2 (majoranta $|f|$) je
$$\lim_{j\to\infty} \int_{E_j} |f|\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_X |f|\chi_{E_j}\, d\mu = 0,$$
takže existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že
$$\int_{E_k} |f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Nechť $E \in \mathcal{S}$, $\mu(E) < \delta := \frac{\varepsilon}{2k}$. Potom
$$\begin{aligned}\int_E |f|\, d\mu &= \int_{E\cap E_k} |f|\, d\mu + \int_{E\setminus E_k} |f|\, d\mu \\ &\leq \int_{E_k} |f|\, d\mu + k\,\mu(E) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$
□

24.3. **Definice** (Limity posloupností množin)**.** Nechť $\{E_j\}$ je posloupnost množin. Značíme
$$\limsup_{j\to\infty} E_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j,$$
$$\liminf_{j\to\infty} E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} E_j,$$

24.4. **Věta** (Borel–Cantelliho)**.** *Nechť $\{E_j\}$ je posloupnost měřitelných podmnožin X. Jestliže*
$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) < \infty,$$
potom
$$\mu\Big(\limsup_j E_j\Big) = 0.$$

Důkaz. Máme
$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\Big) &\leq \inf_{k\in\mathbb{N}} \mu\Big(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\Big) \\ &\leq \inf_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j=k}^{\infty} \mu(E_j) = 0.\end{aligned}$$
□

24.5. **Definice** (Konvergence v míře)**.** Nechť f, f_j, $j = 1, 2, \ldots$, jsou měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Řekneme, že $f_j \to f$ v míře, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí
$$\lim_{j\to\infty} \mu\big(\{|f_j - f| \geq \varepsilon\}\big) = 0.$$

24.6. **Věta** (Jegorovova)**.** *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, která je konečná a $f : X \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{S}$-měřitelná. Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost $\mathcal{S}$-měřitelných funkcí na X. Předpokládejme, že $f_j \to f$ skoro všude. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje množina $G \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu(G) < \varepsilon$ a $f_j \to f$ stejnoměrně na $X \setminus G$.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $f = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Označme
$$E_k^j = \bigcup_{i\geq j} \{|f_i| \geq 1/k\}.$$
Potom
$$\lim_j \mu(E_k^j) = \mu\Big(\bigcap_j E_k^j\Big) = 0$$

(zde jsme využili, že $\mu(X) < \infty$, viz větička 1.16(c)), a proto existuje $G_k \in \{E_k^j : j \in \mathbb{N}\}$ tak, že

$$\mu(G_k) < 2^{-k}\varepsilon.$$

Položme

$$G = \bigcup_k G_k.$$

Potom $\mu(G) < \varepsilon$. Je-li dáno přirozené k, potom existuje přirozené j tak, že $G_k = E_k^j$. Je-li $i \geq j$ a $x \notin G$, potom $|f_i(x)| < 1/k$. Tedy $f_j \to 0$ stejnoměrně na $X \setminus G$. □

24.7. **Poznámky** (Vztah konvergence v míře, konvergence skoro všude a konvergence v L^p)**.** Nechť f, f_j jsou měřitelné funkce na X. Připomeňme, že konvergence $f_j \to f$ v L^p znamená podle definice $\|f_j - f\|_p \to 0$.

(a) *Nechť $f_j \to f$ v $L^p(X)$. Potom $f_j \to f$ v míře.*

To je snadný důsledek Čebyševovy nerovnosti (větička 24.1).

(b) *Nechť $f_j \to f$ v míře. Nechť existuje "integrovatelná majoranta" $g \in L^p(X)$, $p < \infty$, tak, že $|f_j| \leq g$ skoro všude, $j = 1, 2, \ldots$. Potom $f_j \to f$ v $L^p(X)$.*

Bez újmy na obecnosti $f = 0$. Pro každé $\varepsilon > 0$ máme

$$\begin{aligned}\int_X |f_j|^p \, d\mu &\leq \int_{\{|f_j| \leq \varepsilon g\}} |f_j|^p \, d\mu + \int_{\{g < \varepsilon\}} |f_j|^p \, d\mu + \int_{\{|f_j| \geq \varepsilon^2\}} |f_j|^p \, d\mu \\ &\leq \varepsilon \int_X g^p \, d\mu + \int_{\{g < \varepsilon\}} g^p \, d\mu + \int_{\{|f_j| \geq \varepsilon^2\}} g^p \, d\mu.\end{aligned}$$

První integrál jde k nule pro $\varepsilon \to 0$. Druhý také, to plyne z Lebesgueovy věty 6.2 s majorantou g^p. Třetí integrál jde k nule pro $j \to \infty$ z věty 24.2 a definice konvergence v míře.

(c) *Nechť $\mu(X) < \infty$. Jestliže $f_j \to f$ skoro všude, pak $f_j \to f$ v míře.*

To je snadný důsledek Jegorovovy věty 24.6.

(d) *Jestliže $f_j \to f$ v míře, pak existuje vybraná posloupnost, která konverguje skoro všude.*

Bez újmy na obecnosti $f = 0$. Položme $f_j^{(0)} = f_j$ a pro $m = 1, 2, \ldots$ najdeme $\{f_j^{(m)}\}_j$ vybranou z $\{f_j^{(m-1)}\}_j$ tak, že

$$\sum_j \mu\big(\{|f_j^{(m)}| \geq 1/m\}\big) < \infty.$$

Podle Borel–Cantelliho věty 24.4 je pak i

$$\mu(E_m) = 0, \text{ kde } E_m = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} \{|f_j^{(m)}| \geq 1/m\}.$$

Zřejmě

$$x \notin E_m \implies \limsup_j |f_j^{(m)}(x)| \leq 1/m.$$

Položme $g_j = f_j^{(j)}$. Potom pro každé m je $\{g_j\}_j$ až na konečně mnoho členů vybraná posloupnost z $\{f_j^{(m)}\}_j$, tedy $g_j \to 0$ skoro všude.

25. Funkce Gamma*

25.1. **Příklad** (Vztah funkcí Gamma a Beta)**.** Substitucí $x = r^2$ získáme

$$\Gamma(s) = 2 \int_0^\infty r^{2s-1} e^{-r^2} \, dr. \tag{58}$$

Substituce $x = \cos^2 \alpha$ (tedy $1 - x = \sin^2 \alpha$) dává

$$\mathrm{B}(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \, dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \alpha \, \sin^{2q-1} \alpha \, d\alpha.$$

Tedy použitím polárních souřadnic dostaneme

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_{\{x>0,\,y>0\}} x^{2p-1}y^{2q-1}\,e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\\ &= 4\int_{\{r>0,\,0<\alpha<\pi/2\}} r^{2p+2q-1}e^{-r^2}\cos^{2p-1}\alpha\,\sin^{2q-1}\alpha\,d\alpha\,dr\\ &= \Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,q).\end{aligned}$$

25.2. **Příklad** (Vyjádření funkce Gamma limitou)**.** Označme

$$f_n(x) = x^{s-1}\Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n\,\chi_{(0,n)}(x), \qquad x\in(0,\infty).$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^{s-1}e^{-x}, \qquad x\in(0,\infty).$$

Z nerovnosti

$$e^{-\frac{x}{n}} \ge 1-\frac{x}{n} \ge 0, \qquad 0<x<n$$

dostaneme umocněním na n-tou

$$0\le f_n(x)\le x^{s-1}e^{-x},$$

což je integrovatelná funkce proměnné $x\in(0,\infty)$. Lebesgueova věta 6.2 dává

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^n x^{s-1}\Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n\,dx.$$

Substitucí $x=ny$ dostaneme

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^s y^{s-1}(1-y)^n\,dy = \lim_{n\to\infty} n^s\,B(s,n+1).$$

S pomocí (24) máme

$$\begin{aligned} n^s\,B(s,n+1) &= n^s\,\frac{n}{s}\,B(s+1,n) = n^s\,\frac{n(n-1)}{s(s+1)}\,B(s+2,n-1)\\ &= \ldots = n^s\,\frac{n!}{s(s+1)\ldots(s+n-1)}\,B(s+n,1) = \frac{n^s\,n!}{s(s+1)\ldots(s+n-1)}\int_0^1 x^{s+n-1}\,dx\\ &= \frac{n^s\,n!}{s(s+1)\ldots(s+n)}.\end{aligned}$$

Tedy

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^s\,n!}{s(s+1)\ldots(s+n)}. \tag{59}$$

25.3. **Definice** (Rozšíření definičního oboru funkce Γ)**.** Funkci Γ můžeme definovat vzorcem (22) i pro komplexní hodnoty proměnné s, pokud $\mathrm{Re}(s)>0$. Beze změn v důkazu dostaneme formule (24) i (59). Limita na pravé straně formule (59) však existuje pro “většinu” komplexních čísel s bez ohledu na znaménko $\mathrm{Re}(s)$. Přesněji, existuje pro každé komplexní číslo s s výjimkou nuly a záporných celých čísel. Vskutku, dokážeme indukcí podle k následující tvrzení:

Pro každé komplexní číslo $s\in\{z:\mathrm{Re}\,z>1-k\}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$ existuje

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^s\,n!}{s(s+1)\ldots(s+n)}.$$

Pro $k=1$ použijeme odvození pomocí integrálního počtu jako v příkladu 25.2. Nechť $k>1$, tvrzení platí pro $k-1$ a s je komplexní číslo, jehož reálná část je větší než $1-k$. Potom $\mathrm{Re}(s+1)>2-k$ a podle indukčního předpokladu existuje

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{s+1}\,n!}{(s+1)\ldots(s+1+n)}.$$

Tedy existuje také

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^s\,n!}{s(s+1)\ldots(s+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{s+1}\,n!}{(s+1)\ldots(s+1+n)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{s+1+n}{sn} = \frac{1}{s}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^{s+1}\,n!}{(s+1)\ldots(s+1+n)}.$$

Závěr je následující: definujeme-li funkci Γ limitou (59), její definiční obor je celá množina komplexních čísel s výjimkou nuly a záporných celých čísel. Pouze pro kladnou reálnou část však dostáváme integrální reprezentaci (22).

25.4. **Příklad** (Objem koule v $\mathbb{R}^n$)**.** Nechť $\alpha_n r^n$ je objem n-rozměrné koule o poloměru r v $\mathbb{R}^n$ a

$$I := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx.$$

Konstantu α_n určíme z výpočtu

$$\begin{aligned}
I^n &= \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\Big)^n = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\dots\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}e^{-x_2^2}\dots e^{-x_n^2}\,dx_n\Big)\dots\Big)\,dx_2\Big)dx_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2-x_2^2-\dots-x_n^2}\,dx_1\,dx_2\,\dots\,dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\boldsymbol{x}|^2}\,d\boldsymbol{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_0^{e^{-|\boldsymbol{x}|^2}} dt\Big)\,d\boldsymbol{x} = \int_0^1\Big(\int_{\{\boldsymbol{x}:\,0<t<e^{-|\boldsymbol{x}|^2}\}} d\boldsymbol{x}\Big)\,dt \\
&= \int_0^1\Big(\int_{\{|\boldsymbol{x}|<\sqrt{\ln\frac{1}{t}}\}} d\boldsymbol{x}\Big)\,dt = \int_0^1 \lambda_n(B(0,\sqrt{\ln\tfrac{1}{t}}))\,dt \\
&= \int_0^1 \alpha_n\Big(\ln\tfrac{1}{t}\Big)^{n/2}\,dt = \alpha_n\int_0^\infty y^{n/2}e^{-y}\,dy \\
&= \alpha_n\Gamma\Big(1+\frac{n}{2}\Big).
\end{aligned}$$

Použili jsme Fubiniovu větu a substituci

$$y = \ln\tfrac{1}{t}, \quad \text{neboli } t = e^{-y}.$$

Jelikož

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x_1^2-x_2^2}\,dx_1\,dx_2 = \int_0^\infty\Big(\int_0^{2\pi} re^{-r^2}\,d\alpha\Big)\,dr \\
&= 2\pi\int_0^\infty re^{-r^2}\,dr = 2\pi[\tfrac{1}{2}e^{-r^2}]_{r=0}^\infty = \pi
\end{aligned}$$

(z polárních souřadnic), máme $I = \sqrt{\pi}$,

$$\alpha_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}.$$

Gamma funkci v $1+n/2$ spočteme rekurentně. Z (58) plyne

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-r^2}\,dr = I = \sqrt{\pi},$$

tedy podle (23)

$$\begin{aligned}
\Gamma(\tfrac{3}{2}) &= \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}, \\
\Gamma(\tfrac{5}{2}) &= \tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{3}{2}\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}, \\
&\dots
\end{aligned}$$

25.5. **Příklad** (Stirlingova formule)**.** Dokážeme

$$L := \lim_{s\to\infty}\frac{1}{\sqrt{s}}\Big(\frac{e}{s}\Big)^s\Gamma(s+1) = \sqrt{2\pi}.$$

Máme

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s}}\exp\left(s-x+s\ln x-s\ln s\right)\,dx \\
&= \lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s}}\exp\left(-s(\tfrac{x}{s}-1-\ln\tfrac{x}{s})\right)\,dx \\
&= \lim_{a\to 0+}\int_0^\infty a\exp\Big(-\frac{a^2x-1-\ln(a^2x)}{a^2}\Big)\,dx.
\end{aligned}$$

(V posledním řádku jsme zaměnili $s = a^{-2}$). Substituce $t = \frac{\ln a^2 x}{a}$ dává

(60)
$$L = \lim_{a\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\Big(\frac{e^{at} - 1 - at}{a^2} - at\Big)\right) dx.$$

Jelikož

$$\lim_{a\to 0^+} \Big(\frac{e^{at} - 1 - at}{a^2} - at\Big) = \frac{t^2}{2},$$

je

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi},$$

pokud můžeme zaměnit limitu a integrál. Záměnu provedeme podle Lebesgueovy věty. Nalezení majoranty není tak úplně triviální. Označme

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} - t, & t \geq 0, \\ e^t - t - 1, & t < 0 \end{cases}$$

a pro pevné $a \in (0,1)$ buď

$$g(t) = \frac{e^{at} - at - 1}{a^2} - at - f(t).$$

Pro $t > 0$ je

$$g'(t) = \frac{e^{at} - 1}{a} - a - t + 1,$$
$$g''(t) = e^{at} - 1 \geq 0.$$

Pro $t < 0$ máme

$$g'(t) = \frac{e^{at} - 1}{a} - a - e^t + 1,$$
$$g''(t) = e^{at} - e^t \geq 0.$$

Funkce $g(t)$ je tedy spojitá, konvexní na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ a limitním přechodem v derivaci snadno zjístíme

$$g'(0+) = 1 - a > 0, \qquad g'(0-) = -a < 0.$$

Odtud je zřejmé, že $g(t) > 0$ pro $t \neq 0$, tedy

$$\frac{e^{at} - at - 1}{a^2} - at \geq f(t).$$

Majoranta integrandu v (60) vzhledem k $a \in (0,1)$ je

$$e^{-f(t)} = \begin{cases} e^{-\frac{t^2}{2} + t}, & t > 0, \\ e^{1 + t - e^t}, & t < 0, \end{cases}$$

což je zřejmě integrovatelná funkce. Tím je důkaz završen.

25.6. **Příklad** (Výpočet jistého určitého integrálu)**.** Budeme počítat

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2p}}{1 + x^{2q}}\, dx,$$

kde $p < q$ jsou přirozená čísla. Vytvořme indexové množiny

$$A^+ = \{1, 3, \dots, 2q - 1\}, \qquad A^- = \{-1, -3, \dots, -2q + 1\},$$
$$A = A^+ \cup A^-.$$

Potom v komplexním oboru máme rozklad

$$z^{2q} + 1 = \prod_{k\in A} (z - z_k),$$

kde

$$z_k = e^{\mathrm{i}k\alpha}, \qquad \alpha = \frac{\pi}{2q}.$$

Označme

$$P_k(z) = \prod_{j \in A\setminus\{k\}} (z - z_j)$$

Potom zderivováním rovnosti

$$z^{2q}+1=(z-z_k)\,P_k(z)$$

dostaneme

$$2q\,z^{2q-1}=P_k(z)+(z-z_k)P_k'(z)$$

Dosazením $z=z_k$ odvodíme

$$2q\,z_k^{2q-1}=P_k(z_k). \tag{61}$$

Uvažujme rozklad racionální funkce na částečné zlomky

$$\frac{z^{2p}}{z^{2q}+1}=\sum_{j\in A}\frac{a_j}{z-z_j},$$

kde a_j jsou komplexní čísla, která zatím neznáme. Obě strany vynásobíme výrazem $z-z_k$ a dostaneme

$$\frac{z^{2p}}{P_k(z)}=\sum_{j\in A}\frac{a_j(z-z_k)}{z-z_j}$$

Limitní přechod pro $z\to z_k$ dává

$$\frac{z_k^{2p}}{P_k(z_k)}=a_k$$

a dosazením z (61) máme

$$a_k=\tfrac{1}{2q}\,z_k^{2p-2q+1}=-\tfrac{1}{2q}\,z_k^{2p+1},$$

neboť z_k řeší rovnici $z_k^{2q}=-1$. Nyní se budeme zabývat integrálem

$$I_k(R)=q\int_{-R}^{R}\Big(\frac{a_k}{x-z_k}+\frac{a_{-k}}{x-z_{-k}}\Big)\,dx,\quad k\in A^+.$$

Označme

$$\beta=(2p+1)\,\alpha,\quad \text{takže}\quad q\,a_k=-\tfrac{1}{2}\,e^{\mathrm{i}k\beta}.$$

Máme

$$\begin{aligned}q\Big(\frac{a_k}{x-z_k}+\frac{a_{-k}}{x-z_{-k}}\Big)&=-\frac{1}{2}\Big(\frac{e^{\mathrm{i}k\beta}}{x-e^{\mathrm{i}k\alpha}}+\frac{e^{-\mathrm{i}k\beta}}{x-e^{-\mathrm{i}k\alpha}}\Big)\\&=\frac{\cos(k\beta-k\alpha)-x\cos k\beta}{x^2-2x\cos k\alpha+1}.\end{aligned}$$

Substituce $x=y+\cos\alpha$ dává

$$\begin{aligned}I_k(R)&=\int_{-R}^{R}\frac{\cos(k\beta-k\alpha)-x\cos k\beta}{x^2-2x\cos k\alpha+1}\,dx=\int_{-R-\cos k\alpha}^{R-\cos k\alpha}\frac{\sin k\beta\,\sin k\alpha-y\cos k\beta}{y^2+\sin^2 k\alpha}\,dy\\&=\int_{-R-\cos k\alpha}^{R-\cos k\alpha}\frac{\sin k\beta\,\sin k\alpha}{y^2+\sin^2 k\alpha}\,dy-\int_{-R-\cos k\alpha}^{R-\cos k\alpha}\frac{y\cos k\beta}{y^2+\sin^2 k\alpha}\,dy.\end{aligned} \tag{62}$$

V druhém integrálu pravé strany rovnosti (62) využijeme lichost integrandu. Pokud $\cos k\alpha>0$, dostaneme

$$\begin{aligned}\Big|\int_{-R-\cos k\alpha}^{R-\cos k\alpha}\frac{y\cos k\beta}{y^2+\sin^2 k\alpha}\,dy\Big|&=\Big|\int_{-R-\cos k\alpha}^{-R+\cos k\alpha}\frac{y\cos k\beta}{y^2+\sin^2 k\alpha}\,dy+\int_{-R+\cos k\alpha}^{R-\cos k\alpha}\frac{y\cos k\beta}{y^2+\sin^2 k\alpha}\,dy\Big|\\&=\Big|\int_{-R-\cos k\alpha}^{-R+\cos k\alpha}\frac{y\cos k\beta}{y^2+\sin^2 k\alpha}\,dy\Big|\le\int_{-R-1}^{-R+1}\frac{R+1}{(R-1)^2}\,dy\\&=\frac{2R+2}{(R-1)^2}\to 0.\end{aligned}$$

Ke stejnému závěru dojdeme analogicky i v případě $\cos k\alpha<0$. Tedy

$$\lim_{R\to\infty}I_k(R)=\lim_{R\to\infty}\int_{-R-\cos k\alpha}^{R-\cos k\alpha}\frac{\sin k\beta\,\sin k\alpha}{y^2+\sin^2 k\alpha}\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin k\beta\,\sin k\alpha}{y^2+\sin^2 k\alpha}\,dy=\pi\sin k\beta,$$

neboť integrál přes $\mathbb{R}$ konverguje. Jelikož integrál I konverguje, máme

$$q\,I=q\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x^{2p}}{x^{2q}+1}\,dx=\lim_{R\to\infty}\sum_{k\in A^+}I_k(R)=\sum_{k\in A^+}\lim_{R\to\infty}I_k(R)=\pi\sum_{k\in A^+}\sin k\beta$$

Počítejme

$$\begin{aligned}\frac{q\,I}{\pi} &= \operatorname{Im}\sum_{k\in A^+} e^{\mathrm{i}k\beta} = \operatorname{Im}\sum_{j=0}^{q-1} e^{\mathrm{i}(2j+1)\beta} = \operatorname{Im}\frac{e^{\mathrm{i}\beta}(1-e^{2\mathrm{i}q\beta})}{1-e^{2\mathrm{i}\beta}} = \operatorname{Im}\frac{2\,e^{\mathrm{i}\beta}}{1-e^{2\mathrm{i}\beta}} = \operatorname{Im}\frac{2}{e^{-\mathrm{i}\beta}-e^{\mathrm{i}\beta}}\\ &= \operatorname{Im}\frac{2i^2}{e^{\mathrm{i}\beta}-e^{-\mathrm{i}\beta}} = \operatorname{Im}\frac{i}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\beta}.\end{aligned}$$

Zde jsme využili, že $2q\beta$ je lichý násobek π, takže $e^{2\mathrm{i}q\beta} = -1$. Tedy

$$I = \frac{\pi}{q\sin\left(\pi\frac{2p+1}{2q}\right)}.$$

25.7. **Příklad** (Výpočet dalších určitých integrálů)**.** Nyní budeme počítat

$$J(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{1+t}\,dt, \qquad s\in(0,1).$$

Nejprve uvažujme

$$s = \frac{2p+1}{2q},$$

kde p,q jsou jako v příkladu 25.6. Substituce $t = x^{2q}$ vede na

$$J(s) = 2q\int_0^\infty \frac{x^{2p}}{1+x^{2q}}\,dx = q\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2p}}{1+x^{2q}}\,dx.$$

Podle předchozího příkladu 25.6 je

$$J(s) = \frac{\pi}{\sin\pi s}. \tag{63}$$

Vzorec (63) platí pro s z husté podmnožiny intervalu $(0,1)$. Ze spojitosti obou stran (ověřte samostatně předpoklady věty o spojitosti integrálu závislého na parametru) dostáváme (63) pro všechna $s\in(0,1)$.

Nyní budeme počítat hodnotu Beta funkce $B(1-s,s)$, $s\in(0,1)$. Máme

$$B(1-s,s) = \int_0^1 x^{-s}(1-x)^{s-1}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1-x}{x}\right)^{s-1}\frac{dx}{x}.$$

Substituce $t = (1-x)/x$ dává

$$B(1-s,s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin\pi s}, \qquad s\in(0,1).$$

Konečně aplikací na Gamma funkci dostáváme

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin\pi s}, \qquad s\in(0,1).$$