



Diplomová práce

**Jednoperametrické bifurkace
v autonomních systémech
diferenciálních rovnic**

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně pouze za odborného vedení pana doc. RNDr. Josefa Kalase, CSc. Dále prohlašuji, že veškeré podklady, ze kterých jsem čerpal, jsou uvedeny v seznamu literatury.

V Brně, dne 7. 5. 2007

Petr Lukeš

Poděkování

Rád bych poděkoval panu doc. RNDr. Josefu Kalasovi, CSc. za vedení diplomové práce, za cenné rady a připomínky a za čas strávený při konzultacích.

Obsah

Úvod	5
1 Spojité dynamické systémy	6
1.1 Definice dynamického systému	6
1.2 Autonomní systémy diferenciálních rovnic	8
2 Topologické ekvivalence a bifurkace	12
2.1 Ekvivalence spojitých dynamických systémů	12
2.2 Topologická klasifikace obecných ekvilibríí	16
2.3 Bifurkace a bifurkační diagramy	17
2.4 Topologické normální tvary bifurkací	21
3 Jednparametrické bifurkace rovnovážných bodů	25
3.1 Normální tvar bifurkace typu fold	26
3.2 Obecná bifurkace typu fold	28
3.3 Normální tvar Hopfovy bifurkace	29
3.4 Obecná Hopfova bifurkace	33
3.5 Postačující podmínky pro vidličkovou a transkritickou bifurkaci	41
4 Příklady bifurkací v matematických modelech	43
4.1 Model růstu populace	43
4.2 Brusselátor	44
4.3 Model dravec-kořist	46
Použitá literatura	49
Seznam Obrázků	50

Úvod

Tato práce se zabývá popisem bifurkací v autonomních systémech diferenciálních rovnic. Zaměřuji se především na studium jednorozměrných a dvourozměrných autonomních systémů, které jsou závislé na jednom parametru.

Celý text předpokládá základní znalost lineární algebry a matematické analýzy, především teorii diferenciálních rovnic. Cílem této diplomové práce je zavést pojem bifurkace a prohloubit tak u čtenáře znalosti teorie autonomních systémů.

Text je členěn do čtyř kapitol. V té první je věnován prostor pro zavedení pojmu dynamický systém a jeho vztahu k systémům autonomních diferenciálních rovnic. Dále se tato kapitola soustředí na srozumitelné vysvětlení pojmů jako např. rovnovážný bod, trajektorie, stabilita rovnovážného bodu, či limitní cyklus.

Druhá kapitola rozšiřuje teorii spojitých dynamických systémů o další pojmy. Jedná se především o topologické ekvivalence, bifurkace, či hyperbolické rovnovážné body. Studium bifurkací je doplněn o několik příkladů. V těchto příkladech jsou uvedeny základní typy bifurkací, které studuje třetí kapitola, která tvoří těžiště této práce. Zabývá se podrobně zejména Hopfovou bifurkací a bifurkací typu fold.

V závěrečné kapitole je nastíněna možnost aplikací bifurkací v matematických modelech.

Kapitola 1

Spojité dynamické systémy

1.1 Definice dynamického systému

Pojem dynamický systém představuje matematické zobecnění obecného vědeckého přístupu k deterministickým procesům. Budoucí a minulé stavy mnoha fyzikálních, chemických, biologických, ekologických a ekonomických systémů mohou být do jisté míry předpovězeny, za předpokladu, že známe jejich současný stav a zákony řídící jejich vývoj. Pojem dynamický systém zahrnuje množinu všech možných stavů (*fázový prostor*) a zákon *vývoje v čase*. Nejprve vysvětlíme tyto nové pojmy a poté uvedeme formální definici dynamického systému.

Všechny možné stavy systému jsou charakterizovány pomocí bodů nějaké množiny X . Tato množina se nazývá *fázový* (nebo také *stavový*) *prostor*. Specifikace bodu $x \in X$ musí být nejen dostačující pro popis současného stavu systému, ale také pro určení jeho budoucího vývoje.

Vývoj dynamického systému znamená změnu ve stavu systému v čase $t \in T$, kde T je nějaká množina čísel. V celé práci budeme předpokládat, že $T = \mathbb{R}$. Systémy tohoto typu se nazývají *spojité dynamické systémy*. V případě, že $T = \mathbb{Z}$, hovoříme o *diskrétních dynamických systémech*.

Hlavní součástí dynamického systému je zákon vývoje, který určuje stav x_t systému v čase t za předpokladu, že počáteční stav x_0 je znám. Nejobecnější cesta ke stanovení vývoje je předpokládat, že pro daná $t \in T$ je definováno ve fázovém prostoru X zobrazení

$$\varphi^t : X \rightarrow X,$$

kteřé představuje transformaci počátečního stavu x_0 do stavu $x_t \in X$ v čase t , tedy

$$x_t = \varphi^t x_0.$$

Zobrazení φ^t se nazývá *evoluční operátor* dynamického systému. Třída evolučních operátorů $\{\varphi^t\}_{t \in T}$ se nazývá *tok*. Dynamický systém s evolučním operátorem φ^t , který je definovaný pro $t \geq 0$ a i pro $t < 0$, se nazývá *invertibilní* (v tomto případě počáteční stav x_0 definuje nejen budoucí stavy systému, ale také i stavy minulé.) Evoluční operátory mají dvě přirozené vlastnosti, které vyjadřují deterministický charakter chování dynamického systému:

$$\varphi^0 = \text{id}, \tag{1.1}$$

kde id je identické zobrazení v X a

$$\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s, \quad (1.2)$$

což znamená, že

$$\varphi^{t+s}x = \varphi^t(\varphi^s x)$$

pro všechna $x \in X$ a $t, s \in T$, taková, že obě strany poslední rovnice jsou definovány.

V invertibilních dynamických systémech evoluční operátor φ^t splňuje vlastnost (1.2) i pro ta t a s , která jsou záporná. V takových systémech platí, že evoluční operátor φ^{-t} je inverzní k φ^t , tedy

$$(\varphi^t)^{-1} = \varphi^{-t}.$$

Nyní uvedeme formální definici dynamického systému.

Definice 1.1. Nechť T je časová množina, X fázový prostor a $\varphi^t : X \rightarrow X$ třída evolučních operátorů, které jsou parametrizovány $t \in T$ a které splňují vlastnosti (1.1) a (1.2), pak trojice $\{T, X, \varphi^t\}$ se nazývá *Dynamický systém*.

Na závěr této podkapitoly uvedeme definici variety a větu o implicitní, resp. inverzní funkci.

Definice 1.2. Množina $M \in \mathbb{R}^n$ všech bodů, které vyhovují systému m skalárních rovnic

$$F(x) = 0,$$

kde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m \leq n$) se nazývá *varieta*. Varieta M se nazývá *hladká*, jestliže zobrazení F je hladké a hodnota Jacobiho matice F_x je rovna m v každém bodě $x \in M$.

Uvažujme zobrazení

$$(x, y) \mapsto F(x, y),$$

kde

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

je hladké zobrazení definované v okolí bodu $(x, y) = (0, 0)$ s vlastností

$$F(0, 0) = 0.$$

Nechť $F_y(0, 0)$ značí matici parciálních derivací prvního řádu zobrazení F vzhledem k y vyčíslenou v bodě $(0, 0)$, tedy

$$F_y(0, 0) = \left(\frac{\partial F_i(x, y)}{\partial y_j} \right) \Big|_{(x, y) = (0, 0)}.$$

Věta 1.3 (Věta o implicitní funkci). *Je-li matice $F_y(0, 0)$ regulární, pak existuje lokálně definovaná funkce $y = f(x)$,*

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

taková že

$$F(x, f(x)) = 0$$

pro všechna x v nějakém okolí počátku v \mathbb{R}^n . Navíc platí:

$$f_x(0) = -F_x(0, 0) [F_y(0, 0)]^{-1}.$$

Přitom stupeň hladkosti funkce f je stejný jako u zobrazení F .

Uvažujme nyní zobrazení

$$y = g(x),$$

kde

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

je hladká funkce definovaná v okolí bodu $x = 0$ a splňující rovnost $g(0) = 0$. Pak následující věta je důsledkem Věty o implicitní funkci.

Věta 1.4 (Věta o inverzní funkci). *Jestliže je matice $g_x(0)$ regulární, potom existuje hladká lokálně definovaná funkce $x = f(y)$,*

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

taková že

$$g(f(y)) = y$$

pro všechna y v nějakém okolí počátku v \mathbb{R}^n .

Funkce f se nazývá *inverzní funkce* k funkci g a značí se $f = g^{-1}$.

1.2 Autonomní systémy diferenciálních rovnic

Nejobvyklejší způsob, jak definovat spojitý dynamický systém, je vyjádřit tento systém pomocí diferenciálních rovnic. Předpokládejme, že fázový prostor systému je $X = \mathbb{R}^n$ se souřadnicemi (x_1, \dots, x_n) . Jestliže je tento systém definován na nějaké varietě, jeho souřadnice mohou být považovány za lokální souřadnice na této varietě. Velmi často je zákon vývoje dán implicitně pomocí systému diferenciálních rovnic

$$\frac{dx_i}{dt} = x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

nebo ve vektorovém tvaru

$$x' = f(x),$$

kde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je dostatečně diferencovatelná (hladká) vektorová funkce. Rovnice (1.3) představuje systém n *autonomních diferenciálních rovnic*.

Následující věta popisuje dobře známý fakt, že pro hladké funkce na pravé straně rovnice (1.3) je zaručena existence a jednoznačnost řešení, uvádíme ji proto bez důkazu.

Věta 1.5 (O existenci, jednoznačnosti a hladké závislosti). *Uvažujme systém obyčejných diferenciálních rovnic*

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

kde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je hladká funkce v otevřené oblasti $U \subset \mathbb{R}^n$. Pak existuje právě jedna funkce $x = x(t, x_0)$, $x : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, která je hladká v bodě (t, x) a splňuje pro každé $x_0 \in U$ následující podmínky:

$$(i) \quad x(0, x_0) = x_0;$$

(ii) existuje interval $\mathcal{J} = (-\delta_1, \delta_2)$, kde $\delta_{1,2}(x_0) > 0$, takový, že pro všechna $t \in \mathcal{J}$ platí

$$y(t) = x(t, x_0) \in U$$

a

$$y'(t) = f(y(t)).$$

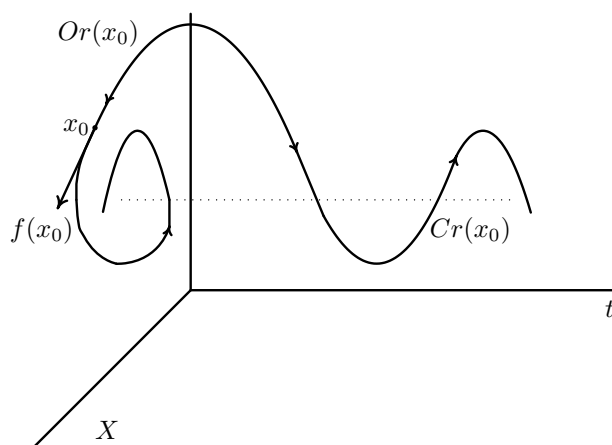
Funkce $x = x(t, x_0)$ uvažovaná jako funkce času t se nazývá řešení začínající v bodě x_0 . Toto řešení definuje pro každé $x_0 \in U$ dva objekty: křivku řešení

$$Cr(x_0) := \{(t, x); x = x(t, x_0), t \in \mathcal{J}\} \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$$

a trajektorii, která je kolmý průmět $Cr(x_0)$ do fázového prostoru,

$$Or(x_0) := \{x; x = x(t, x_0), t \in \mathcal{J}\} \subset \mathbb{R}^n,$$

viz Obr. 1.1. Obě křivky jsou parametrizovány časem t a orientovány ve směru růstu



Obr. 1.1: Trajektorie

času t . Bodem $x_0 \in U$ může procházet nejvýše jedna trajektorie. Za podmínek Věty 1.5 trajektorie buď opustí oblast U v $t = -\delta_1$ ($t = \delta_2$), nebo zůstane v U navždy. V druhém případě tedy můžeme položit $\mathcal{J} = (-\infty, \infty)$.

Nyní můžeme definovat evoluční operátor $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vztahem

$$\varphi^t x_0 = x(t, x_0),$$

který přiřazuje k bodu x_0 bod na příslušné trajektorii, ve kterém se trajektorie nachází o t časových jednotkách později. Zřejmě platí, že $\{\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ je spojitý dynamický systém. Poznamenejme, že tento systém je invertibilní.

Než uvedeme další důležité definice, všimneme si, že trajektorie tvoří rozklad fázového prostoru, tj. každý bod fázového prostoru je obsažen v právě jedné trajektorii.

Definice 1.6. Rozdělení fázového prostoru na jednotlivé trajektorie se nazývá *fázový portrét*.

Uvažujme autonomní systém (1.3) s dostatečně hladkou pravou stranou. Podmnožina $S \subset X$ s vlastností

$$x(0) \in S \Rightarrow x(t) \in S \quad \text{pro } t \in (-\infty, \infty)$$

se nazývá *invariantní množina* autonomního systému. Zřejmě platí, že invariantní množina S obsahuje trajektorie dynamického systému a každá jednotlivá trajektorie $Or(x_0)$ je invariantní množina.

Definice 1.7. Bod x^0 se nazývá *rovnovážný bod* (*stacionární bod*, *singulární bod*) systému (1.3), jestliže $f(x^0) = 0$. Trajektorie rovnice (1.3) se nazývá *cyklus*, jestliže je uzavřenou křivkou.

Následující věta popisuje jediné možné typy trajektorií, které se mohou vyskytnout.

Věta 1.8. *Autonomní systém (1.3) může mít pouze trajektorie následujících třech typů:*

1. *Rovnovážné body, odpovídající konstantním řešením.*
2. *Cykly, odpovídající nekonstantním periodickým řešením.*
3. *Trajektorie, které samy sebe neprotínají.*

Důkaz. Viz [2], str. 97. □

Označme O^+ trajektorii systému rovnic (1.3) odpovídající řešení $x(t)$, $t \geq t_0$. Pak ω -*limitním bodem* trajektorie O^+ rozumíme libovolný bod $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, takový, že existuje posloupnost $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$, $t_m \rightarrow \infty$ tak, že $x(t_m) \rightarrow \hat{x}$ při $m \rightarrow \infty$. Množinu všech ω -limitních bodů trajektorie O^+ značíme $\Omega(O^+)$ a nazýváme ω -*limitní množinou* trajektorie O^+ .

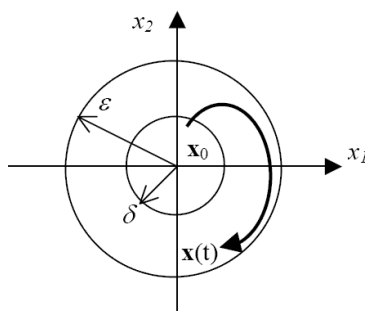
Obdobným způsobem, je-li O^- trajektorie rovnice (1.3) odpovídající řešení $x(t)$, $t \leq t_0$, definujeme α -*limitní bod* trajektorie O^- a α -*limitní množinu* $A(O^-)$ trajektorie O^- . Je-li O trajektorie rovnice (1.3) odpovídající řešení $x(t)$, které je definované pro $t \in (-\infty, \infty)$, rozumíme její *limitní množinou* množinu $A(O) = A(O^-) \cup \Omega(O^+)$.

Trajektorie O_0 odpovídající úplnému řešení $x_0(t)$, $t \in (\omega_-, \omega_+)$, taková, že $O_0 \subseteq \Omega(O^+)$, $O^+ \not\subseteq O_0$ pro nějakou trajektorii O^+ , se nazývá (ω) -*limitní trajektorií*. Jestliže kromě toho je řešení $x_0(t)$ periodické, nazývá se trajektorie O_0 (ω) -*limitním cyklem*. Podobně nahradíme-li trajektorii O^+ trajektorií O^- , definujeme (α) -*limitní trajektorii* a (α) -*limitní cyklus*.

Nyní se budeme zabývat stabilitou rovnovážných bodů systémů obyčejných diferenciálních rovnic. Jelikož lze libovolný rovnovážný bod systému (1.3) transformovat posunutím do počátku, lze vyslovit definici stability rovnovážného bodu následujícím způsobem.

Definice 1.9. Rovnovážný bod $x^0 = 0$ autonomního systému (1.3) se nazývá *Ljapunovsky stabilní* (nebo stručněji *stabilní*), jestliže pro každé reálné číslo $\varepsilon > 0$ existuje reálné číslo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, takové že při $|x(0)| \leq \delta(\varepsilon)$ je splněna podmínka $|x(t)| \leq \varepsilon$ pro $t > 0$.

Tato definice říká, že rovnovážný stav je stabilní, jestliže po malém vychýlení z tohoto stavu, zůstane trajektorie systému v ε -okolí rovnovážného stavu, viz Obr. 1.2. Jinými slovy, jestliže zvolíme ε -okolí pro které existuje δ -okolí, ze kterého vybereme libovolný počáteční stav x_0 a trajektorie systému zůstane pro $t > 0$ v ε -okolí, pak je systém Ljapunovsky stabilní.



Obr. 1.2: Oblast stability

Definice 1.10 (Asymptotická stabilita). Rovnovážný bod $x^0 = 0$ autonomního systému (1.3) se nazývá *asymptoticky stabilní*, je-li stabilní ve smyslu předchozí definice a jestliže všechny trajektorie, které jsou dostatečně blízké rovnovážnému bodu konvergují do bodu $x^0 = 0$ pro $t \rightarrow \infty$.

Na závěr této kapitoly uvedeme známou větu.

Věta 1.11. *Uvažujme autonomní systém*

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

kde $f(x)$ je hladká funkce. Předpokládejme, že tento systém má rovnovážný bod x^0 a nechť A je Jacobiho matice funkce $f(x)$ vyčíslená v bodě x^0 , tedy $A = f_x(x^0)$. Pak rovnovážný bod x^0 rovnice (1.4) je *asymptoticky stabilní*, jestliže každé vlastní číslo λ_i , $i = 1, \dots, n$, matice A má zápornou reálnou část. Má-li alespoň jedno vlastní číslo matice A kladnou reálnou část, pak je rovnovážný bod x^0 *nestabilní*.

Kapitola 2

Topologické ekvivalence a bifurkace

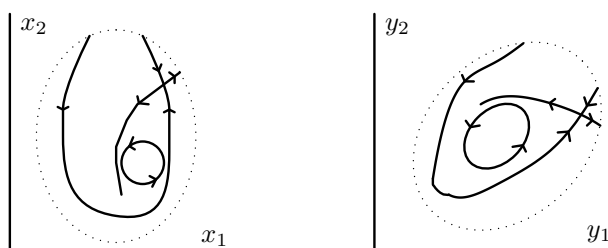
V této kapitole zavedeme nové pojmy, jako např. topologické ekvivalence dynamických systémů, bifurkace, bifurkační diagramy a topologicky normální tvary bifurkací.

2.1 Ekvivalence spojitých dynamických systémů

V celé této podkapitole budeme pracovat pouze s dynamickými systémy se stavovým prostorem $X = \mathbb{R}^n$.

Studium obecných vlastností chování dynamických systémů je založeno na pojmu *relace ekvivalence*¹, neboť pak máme možnost definovat třídy ekvivalentních objektů a studovat přechodná stádia mezi těmito třídami.

Definice ekvivalentních systémů musí vyhovovat některým intuitivním kritériím. Např. je přirozené očekávat, že ekvivalentní systémy mají stejný počet rovnovážných bodů a cyklů stejného typu stability. Jinými slovy, dynamické systémy budeme považovat za ekvivalentní, jestliže jejich fázové portréty jsou „kvalitativně podobné“, zejména, jestliže jeden fázový portrét může být získán z druhého pomocí spojitě transformace (viz Obr. 2.1).



Obr. 2.1: Topologická ekvivalence

Definice 2.1. Dynamický systém $\{T, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ se nazývá *topologicky ekvivalentní* s dynamickým systémem $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$, jestliže existuje homeomorfismus² $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, který zobrazuje trajektorie prvního systému na trajektorie druhého systému a zachovává směr plynutí času.

¹Což je reflexivní, symetrická a tranzitivní relace.

²Spojitě invertibilní zobrazení, jehož inverze je také spojitě zobrazení.

Uvažujme dva spojitě topologicky ekvivalentní systémy

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

$$y' = g(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (2.2)$$

s hladkými pravými stranami. Nechť φ^t a ψ^t značí odpovídající toky. Ukážeme, že existují dva případy topologických ekvivalencí mezi (2.1) a (2.2), které mohou být vyjádřeny analyticky.

Předpokládejme, že $g = h(x)$ je invertibilní zobrazení ($h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$), které je hladké spolu s jeho inverzí (h je difeomorfismus) a takové, že pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$f(x) = M^{-1}(x)g(h(x)), \quad (2.3)$$

kde $M(x) = \frac{dh(x)}{dx}$ je Jacobiho matice funkce $h(x)$ vyčíslená v bodě x . Pak systém (2.1) je topologicky ekvivalentní se systémem (2.2). Skutečně systém (2.2) lze získat ze systému (2.1) pomocí hladké změny souřadnic $y = h(x)$, tedy h zobrazuje řešení systému (2.1) na řešení systému (2.2),

$$h(\varphi^t x) = \psi^t(h(x))$$

a může mít tedy roli homeomorfismu ve smyslu Definice 2.1.

Definice 2.2. Systémy (2.1) a (2.2) splňující vztah (2.3) pro nějaký difeomorfismus h se nazývají *hladce ekvivalentní* (nebo *difeomorfní*).

Poznámka. Jestliže nás bude zajímat stupeň hladkosti h , pak o systémech (2.1) a (2.2) můžeme psát, že jsou C^k ekvivalentní nebo C^k difeomorfní.

Skutečně, dva difeomorfní systémy jsou prakticky totožné a mohou být chápány jako stejné systémy, které jsou popsány pomocí různých souřadnic. Např. vlastní čísla odpovídající konkrétním rovnovážným bodům jsou stejná.

Nechť x_0 a $y_0 = h(x_0)$ jsou taková ekvilibría a necht' $A(x_0)$ a $B(y_0)$ označují odpovídající Jacobiho matice. Pak derivací (2.3) získáme

$$A(x_0) = M^{-1}(x_0)B(y_0)M(x_0),$$

proto charakteristické polynomy matic $A(x_0)$ a $B(y_0)$ jsou shodné.

Nechť $\mu = \mu(x) > 0$ je kladná skalární funkce a necht' pro pravé strany výrazů (2.1) a (2.2) platí vztah

$$f(x) = \mu(x)g(x) \quad (2.4)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$. Pak jsou zřejmě systémy (2.1) a (2.2) topologicky ekvivalentní, protože jejich trajektorie jsou identické. V tomto případě homeomorfismus h z Definice 2.1 je identické zobrazení $h(x) = x$.

Definice 2.3. Systémy (2.1) a (2.2) splňující (2.4) pro hladkou funkci μ se nazývají *orbitálně ekvivalentní*.

Je zřejmé, že orbitálně ekvivalentní systémy mohou být nedifeomorfní, s cykly, které vypadají jako stejná uzavřená křivka ve fázovém prostoru, ale s rozdílnými periodami.

Velmi často studujeme systémovou dynamiku lokálně, tedy ne v celém prostoru \mathbb{R}^n , ale pouze v nějaké oblasti $U \subset \mathbb{R}^n$. Zaměříme-li se např. na nějaké okolí rovnovážného bodu nebo cyklu, získáme tak následující modifikaci Definice 2.1.

Definice 2.4. Dynamický systém $\{T, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ s rovnovážným bodem x_0 se nazývá *lokálně topologicky ekvivalentní* s dynamickým systémem $\{T, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ s rovnovážným bodem y_0 , jestliže existuje homeomorfismus $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, takový, že

- (i) je definován v malém okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu x_0 ,
- (ii) splňuje rovnost $y_0 = h(x_0)$,
- (iii) zobrazuje trajektorie prvního systému na trajektorie druhého systému v oblasti $V = h(U) \subset \mathbb{R}^n$ se zachováním plynutí směru času.

Poznámka. Jestliže U je otevřené okolí bodu x_0 , pak také V je otevřené okolí bodu y_0 . Pozice bodů x_0 a y_0 , a stejně tak i poloha oblastí U a V mohou splývat.

Porovnejme výše uvedené ekvivalence na následujícím příkladě.

■ **Příklad 2.1 (Ekvivalence uzal-ohnisko).** Uvažujme dva lineární dynamické systémy v rovině:

$$\begin{aligned}x_1' &= -x_1, \\x_2' &= -x_2\end{aligned}\tag{2.5}$$

a

$$\begin{aligned}x_1' &= -x_1 - x_2, \\x_2' &= x_1 - x_2.\end{aligned}\tag{2.6}$$

V polárních souřadnicích (ρ, θ) mohou být tyto systémy zapsány jako

$$\begin{aligned}\rho' &= -\rho, \\ \theta' &= 0\end{aligned}\tag{2.7}$$

a

$$\begin{aligned}\rho' &= -\rho, \\ \theta' &= 1.\end{aligned}\tag{2.8}$$

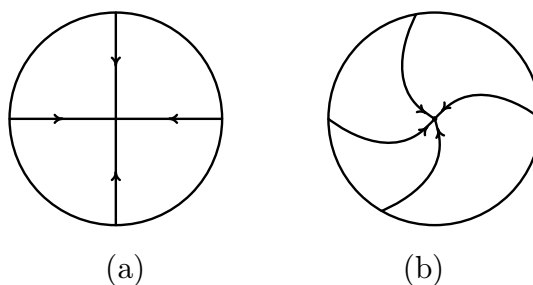
Tedy

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \rho_0 e^{-t}, \\ \theta(t) &= \theta_0\end{aligned}$$

představuje řešení systému (2.7) a

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \rho_0 e^{-t}, \\ \theta(t) &= \theta_0 + t\end{aligned}$$

představuje řešení systému (2.8). Je zřejmé, že počátek je stabilní rovnovážný bod v obou systémech, neboť $\rho(t) \rightarrow 0$, při $t \rightarrow \infty$. Všechny další trajektorie systému (2.5) jsou přímky, zatímco trajektorie systému (2.6) jsou spirály. Fázové portréty jsou uvedeny na obrázku 2.2.



Obr. 2.2: Ekvivalence uzul-ohnisko

Rovnovážný bod systému (2.5) se nazývá *uzel* (viz PŘ. 2.2, na str. 16) zatímco v případě systému (2.6) se jedná o *ohnisko*.

Oba systémy nejsou ani orbitálně ani hladce ekvivalentní. První fakt je zřejmý, zatímco druhý vyplývá z faktu, že vlastní čísla rovnovážných bodů systému (2.5) ($\lambda_1 = \lambda_2 = -1$) se liší od rovnovážných bodů systému (2.6) ($\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \pm i$). Nicméně lze dokázat, že systémy (2.5) a (2.6) jsou topologicky ekvivalentní, např. v uzavřené množině (kruh se středem v počátku)

$$U = \{(x_1, x_2); x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} = \{(\rho, \theta); \rho \leq 1\}.$$

■

Definice 2.5. Systémy (2.1) a (2.2) se nazývají *hladce orbitálně ekvivalentní*, jestliže systém (2.2) je hladce ekvivalentní se systémem, který je orbitálně ekvivalentní se systémem (2.1).

Podle této definice, dva systémy jsou ekvivalentní (v \mathbb{R}^n , nebo v nějaké oblasti $U \subset \mathbb{R}^n$), jestliže lze provést transformaci jednoho ze systémů na druhý, pomocí hladké invertibilní změny souřadnic a násobení kladnou hladkou funkcí souřadnic. Je zřejmé, že dva hladce orbitálně ekvivalentní systémy jsou topologicky ekvivalentní, zatímco opačně to neplatí.

2.2 Topologická klasifikace obecných ekvilií

V této podkapitole se zaměříme na vlastnosti fázových portrétů poblíž rovnovážných bodů v autonomních systémech diferenciálních rovnic. Dále zde uvedeme jejich topologickou klasifikaci.

Uvažujme autonomní systém

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.9)$$

kde f je hladká funkce. Nechť dále x_0 je rovnovážný bod tohoto systému a nechť A označuje Jacobiho matici $\frac{df}{dx}$ vyčíslenou v bodě x_0 . Nechť n_- , n_0 a n_+ představují odpovídající počet vlastních čísel A (včetně násobností) se zápornými, nulovými a kladnými reálnými částmi.

Definice 2.6. O rovnovážném bodu řekneme, že je *hyperbolický*, jestliže $n_0 = 0$. Tedy na imaginární ose v rovině komplexních čísel se nevyskytuje ani jedno vlastní číslo. Hyperbolický rovnovážný bod se nazývá *hyperbolické sedlo*, jestliže $n_- n_+ \neq 0$.

Následující věta uvádí topologickou klasifikaci hyperbolických rovnovážných bodů.

Věta 2.7. *Fázové portréty systémů (2.9) blízko dvou hyperbolických rovnovážných bodů x_0 a y_0 jsou lokálně topologicky ekvivalentní právě tehdy, když tyto rovnovážné body mají stejná čísla n_- a n_+ pro vlastní čísla s $\operatorname{Re} \lambda < 0$ a s $\operatorname{Re} \lambda > 0$.*

■ **Příklad 2.2 (Hyperbolické rovnovážné body rovinných systémů).** Uvažujme obecný dvoudimenzionální systém

$$x' = f(x), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2,$$

kde f je hladká funkce. Předpokládejme, že $x = 0$ je rovnovážný bod a nechť

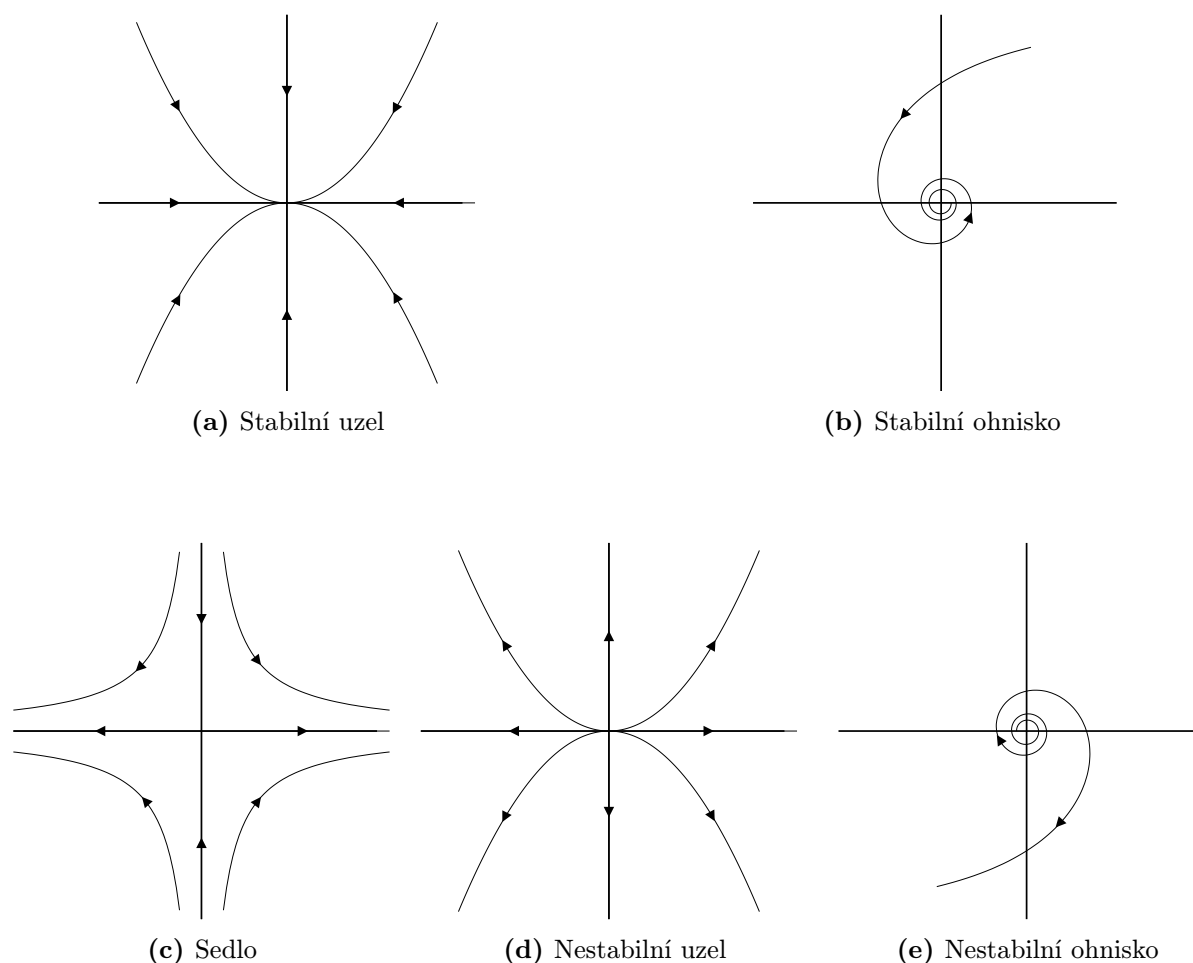
$$A = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0} \quad (2.10)$$

je Jacobiho matice, která má obecně dvě vlastní čísla λ_1 a λ_2 . Tato vlastní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

kde $\sigma = \operatorname{tr} A$ a $\Delta = \det A$. Uvažujme dvojici čísel (n_+, n_-) (viz Definice 2.6), pak mohou nastat tyto tři typy hyperbolických rovnovážných bodů:

1. $(n_+, n_-) = (0, 2)$. Pak rovnovážný bod tohoto typu se buď nazývá *stabilní uzel* (obr. 2.3(a)), kdy vlastní čísla matice A v (2.10) leží na záporné části reálné osy, nebo (stabilní) *ohnisko* v ostatních případech (obr. 2.3(b)).
2. $(n_+, n_-) = (1, 1)$. V tomto případě jedno z vlastních čísel leží na kladné části a druhé na záporné části reálné osy. Tento rovnovážný bod, který je nestabilní, se nazývá *sedlo* (obr. 2.3(c)).
3. $(n_+, n_-) = (2, 0)$. Tento typ rovnovážného bod se buď nazývá *nestabilní uzel* (obr. 2.3(d)), kdy vlastní čísla matice A v (2.10) leží na kladné části reálné osy, nebo (nestabilní) *ohnisko* v ostatních případech (obr. 2.3(e)). ■



Obr. 2.3: Zjednodušené fázové portréty v okolí hyperbolických rovnovážných bodů

2.3 Bifurkace a bifurkační diagramy

Uvažujme spojitý dynamický systém

$$x' = f(x, \alpha), \quad (2.11)$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr. Fázový portrét tohoto systému se mění v závislosti na změně parametru; vznikají tak nové systémy. Je zřejmé, že jsou dvě možnosti: Buď tyto systémy zůstanou topologicky ekvivalentní a nebo se jejich topologie změní.

Definice 2.8. Situace, kdy se v závislosti na změně parametru objeví topologicky neekvivalentní fázové portréty, se nazývá *bifurkace*.

Tedy bifurkace je změna topologického typu systému v závislosti na tom, jak se parametr systému mění kolem bifurkační (kritické) hodnoty, kterou budeme značit α_0 .

■ **Příklad 2.3 (Andronova-Hopfova bifurkace).** Uvažujme následující rovinný systém závislejší na jednom parametru:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ x'_2 &= x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

V polárních souřadnicích má tento systém tvar

$$\begin{aligned}\rho' &= \rho(\alpha - \rho^2), \\ \theta' &= 1,\end{aligned}\tag{2.13}$$

a tudíž může být integrován explicitně. Protože v (2.13) jsou obě rovnice pro ρ či θ nezá-



Obr. 2.4: Andronova-Hopfova bifurkace

vislé, můžeme snadněji nakreslit fázové portréty systému v pevném okolí počátku (viz Obr. 2.4), který je zřejmě rovnovážným bodem. Pro $\alpha \leq 0$ je rovnovážný bod stabilní ohnisko, neboť $\rho' < 0$ a $\rho(t) \rightarrow 0$, jestliže začneme z libovolného počátečního bodu. Na druhé straně, jestliže $\alpha > 0$, pak $\rho' > 0$ pro malé $\rho > 0$ (rovnovážný bod se stává nestabilním ohniskem) a nebo $\rho' < 0$ pro dostatečně velké ρ .

Je zřejmé z (2.13), že systém má periodickou trajektorii pro libovolný parametr $\alpha > 0$ s průvodičem $\rho_0 = \sqrt{\alpha}$. Navíc tato periodická trajektorie je stabilní v případě, když $\rho' > 0$ uvnitř a $\rho' < 0$ vně cyklu. Proto $\alpha = 0$ je hodnota bifurkačního parametru. Skutečně, fázový portrét s limitním cyklem nemůže být deformován prostou transformací na fázový portrét tvořený jediným rovnovážným bodem. Přítomnost limitního cyklu představuje *topologickou invarianci*. Náš případ, kdy α roste a přechází přes 0, představuje bifurkaci systému (2.12), která se nazývá *Andronova-Hopfova bifurkace*. ■

Mělo by být zřejmé, že Andronova-Hopfova bifurkace může být zjištěna pokud se zaměříme na libovolně malé okolí rovnovážného bodu. Takové bifurkace se nazývají *lokální*. Bifurkace, které nemohou být zjištěny tím, že se zaměříme na malé okolí rovnovážného bodu nebo cyklu, se nazývají *globální*.

■ **Příklad 2.4 (Heteroklinická bifurkace).** Uvažujme následující autonomní systém, který závisí na jednom parametru:

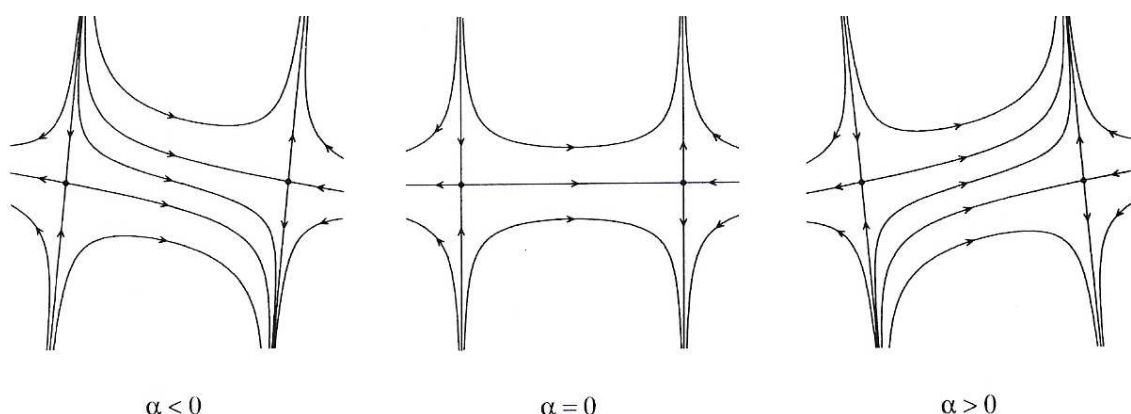
$$\begin{aligned}x_1' &= 1 - x_1^2 - \alpha x_1 x_2, \\ x_2' &= x_1 x_2 + \alpha(1 - x_1^2).\end{aligned}\tag{2.14}$$

Tento systém má dva rovnovážné body – sedla:

$$x_{(1)} = (-1, 0), \quad x_{(2)} = (1, 0)$$

pro všechny hodnoty parametru α (viz Obr 2.5). Pro $\alpha = 0$ je horizontální osa invariantní, a proto jsou sedla spojena trajektorií, která je asymptotická vzhledem k prvnímu sedlu pro $t \rightarrow -\infty$ a vzhledem k druhému sedlu pro $t \rightarrow +\infty$. Taková trajektorie se nazývá *heteroklinická*. Podobně, trajektorie, která je asymptotická vzhledem ke stejnému rovnovážnému bodu pro $t \rightarrow \infty$ a $t \rightarrow -\infty$ se nazývá *homoklinická*.

Pro $\alpha \neq 0$ osa x_1 není invariantní a výše popsané spojení zmizí. Jedná se zřejmě o globální bifurkaci. ■



Obr. 2.5: Heteroklinická bifurkace

Jak je vidět v následujícím příkladě, existují globální bifurkace, ve kterých jsou zahrnuty i jisté lokální bifurkace. V takových případech studium lokálních bifurkací poskytuje pouze částečné informace o chování systémů.

■ **Příklad 2.5 (Homoklinická bifurkace typu sedlo-uzel).** Zkoumejme následující systém:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) - x_2(1 + \alpha + x_1), \\ x_2' &= x_1(1 + \alpha + x_1) + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2), \end{aligned} \quad (2.15)$$

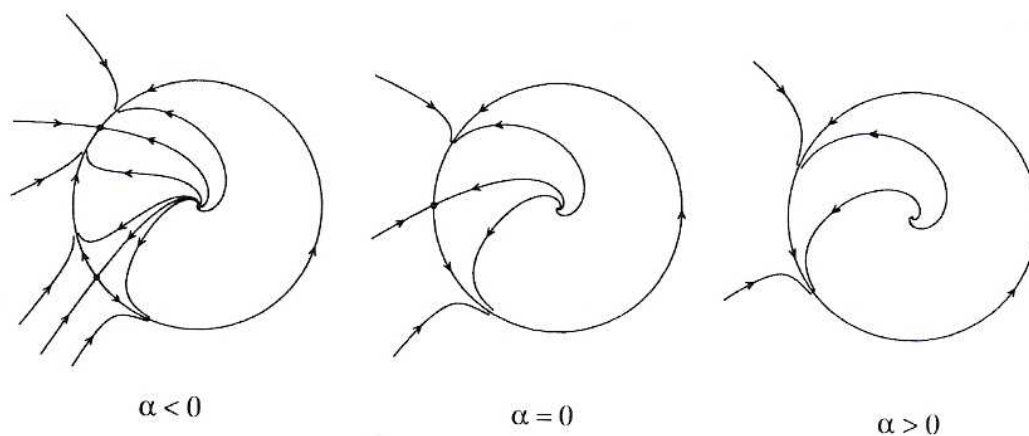
kde α je parametr. V polárních souřadnicích (ρ, θ) přejde tento systém do následující podoby:

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho(1 - \rho^2), \\ \theta' &= 1 + \alpha + \rho \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Zaměříme se na úzké mezikruží okolo jednotkového kruhu $\{(\rho, \theta); \rho = 1\}$. V tomto mezikruží existuje pro $\alpha = 0$ nehyperbolický rovnovážný bod systému (2.16) (viz Obr. 2.6):

$$x_0 = (\rho_0, \theta_0) = (1, \pi).$$

Tento rovnovážný bod má vlastní čísla $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -2$. Pro malé kladné hodnoty α singulární bod $(1, \pi)$ zmizí, zatímco pro malé záporné hodnoty α se ve fázovém portréту objeví dva rovnovážné body – sedlo a uzel. Tato bifurkace se nazývá bifurkace typu *sedlo-uzel*, nebo typu *fold*. Pro $\alpha > 0$ se v systému, který splývá s jednotkovou kružnicí, objeví stabilní *limitní cyklus*. Tato kružnice je vždy invariantní množina v systému, ale pro $\alpha \leq 0$ obsahuje rovnovážné body. Pokud bychom se dívali pouze na malé okolí nehyperbolického rovnovážného bodu, nevšimli bychom si globálního výskytu tohoto cyklu. ■



Obr. 2.6: Homoklinická bifurkace sedlo-uzel

Vraťme se nyní k obecnému popisu bifurkací v parametricky závislém systému (2.11). Položme $\alpha = \alpha_0$ a uvažujme maximální souvislou parametrickou množinu (takovou množinu budeme nazývat *vrstvou*), která obsahuje α_0 a která se skládá z těch bodů pro které má systém fázový portrét, který je topologicky ekvivalentní se systémem pro hodnotu α_0 . Říkáme, že všechny takové vrstvy v parametrickém prostoru \mathbb{R}^m tvoří *parametrický portrét systému*.

Např. systém (2.12) představující Andronovu-Hopfovou bifurkaci má parametrický portrét tvořený dvěma vrstvami: $\{\alpha \leq 0\}$ a $\{\alpha > 0\}$. V systému (2.14) jsou tři vrstvy: $\{\alpha < 0\}$, $\{\alpha = 0\}$ a $\{\alpha > 0\}$.

Parametrický portrét spolu s jeho charakteristickým fázovým portrétem představuje *bifurkační diagram*.

Definice 2.9. *Bifurkační diagram* dynamického systému představuje rozvrstvení jeho parametrického prostoru, který je indukovan topologickou ekvivalencí, spolu s fázovým portrétem pro každou vrstvu.

Poznamenejme, že bifurkační diagram závisí obecně na oblasti uvažovaného fázového portrétu.

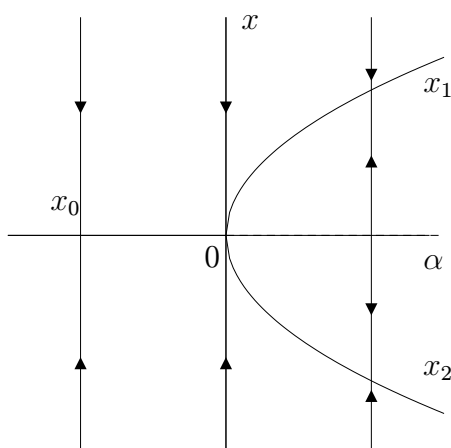
Poznámka. Pokud má dynamický systém fázový prostor dimenze jedna nebo dva a je-li závislý pouze na jednom parametru, pak jeho bifurkační diagram může být zobrazen v direktním součinu fázového a parametrického prostoru, $\mathbb{R}^{1,2} \times \mathbb{R}^1$ s fázovým portrétem, který je reprezentován řezy $\alpha = \text{konst.}$ dimenze jedna, či dva.

V následujících příkladech uvedeme dva jednoduché příklady jednoparametrických bifurkací.

■ **Příklad 2.6.** Uvažujme skalární systém

$$x' = \alpha x - x^3, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Tento systém má rovnovážný bod $x_0 = 0$ pro všechna α . Tento rovnovážný bod je stabilní pro $\alpha \leq 0$ a nestabilní pro $\alpha > 0$. Pro $\alpha > 0$ má tento systém dva rovnovážné body $x_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$, které jsou stabilní. Tato bifurkace se nazývá *vidličková bifurkace* (viz Obr. 2.7). ■



Obr. 2.7: Bifurkační diagram vidličkové bifurkace

■ **Příklad 2.7.** Zkoumejme skalární systém

$$x' = \alpha x - x^2.$$

Tento systém má dva rovnovážné body $x_0 = 0$ a $x_1 = \alpha$. Pro $\alpha < 0$ je rovnovážný bod x_0 stabilní a x_1 nestabilní, kdežto pro $\alpha > 0$ je rovnovážný bod x_1 stabilní a x_0 nestabilní. Tato bifurkace se nazývá *transkritická bifurkace*, viz Obr 2.8. ■

V nejjednodušších případech, je parametrický portrét složen z konečně mnoha oblastí v \mathbb{R}^m . Uvnitř každé takové oblasti jsou fázové portréty topologicky ekvivalentní. Tyto oblasti jsou mezi sebou odděleny *bifurkačními hranicemi*, které představují hladké podvariety prostoru \mathbb{R}^n (tj. křivky, či plochy). Tyto hranice se mohou protínat nebo křížit.

Bifurkační hranice je definována pomocí specifikace fázového objektu (rovnovážný bod, cyklus, ...) *bifurkačních podmínek*, které určují typ bifurkace (Hopfova, fold).

Např. Andronova-Hopfova bifurkace rovnovážného bodu je charakterizována jednou bifurkační podmínkou, a to výskytem dvojice ryze imaginárních vlastních čísel Jacobiho matice vyčíslené v rovnovážném bodě:

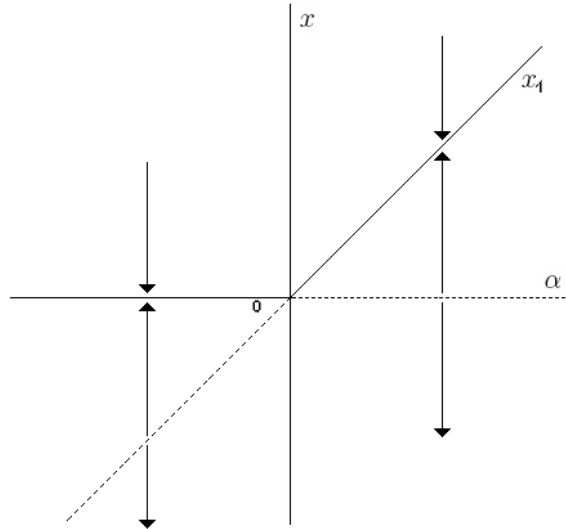
$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0.$$

Definice 2.10. Uvažujme systém (2.11). Rozdíl dimenze parametrického prostoru a odpovídající bifurkační hranice se nazývá *kodimenze bifurkace*.

Jinak řečeno, kodimenze bifurkace (codim) představuje počet nezávislých podmínek, které určují bifurkaci. Z toho je zřejmé, že kodimenze bifurkace je stejná ve všech obecných systémech závislých na dostatečném množství parametrů.

2.4 Topologické normální tvary bifurkací

Je důležité umět rozhodnout, kdy dva systémy mají „kvalitativně podobné“ nebo ekvivalentní bifurkační diagramy.



Obr. 2.8: Bifurkační diagram transkritické bifurkace

Uvažujme dva konečné dynamické systémy

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad (2.17)$$

$$y' = g(y, \beta), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^m, \quad (2.18)$$

s hladkými pravými stranami a se stejným počtem proměnných a parametrů.

Následující definice je podobná Definici 2.1 na str. 12 až na určitou modifikaci, která je nutná kvůli parametrické závislosti.

Definice 2.11. Dynamický systém (2.17) se nazývá *topologicky ekvivalentní* se systémem (2.18), jestliže

1. existuje homeomorfismus parametrického prostoru $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\beta = p(\alpha)$,
2. existuje parametricky závislý homeomorfismus fázového prostoru $h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y = h_\alpha(x)$, který zobrazuje trajektorie systému (2.17) při hodnotě parametru α na trajektorie systému (2.18) při hodnotě parametru $\beta = p(\alpha)$ se zachováním směru plynutí času.

Zřejmě homeomorfismus p převádí parametrický portrét systému (2.17) na parametrický portrét systému (2.18), přičemž homeomorfismus h_α zobrazuje na sebe odpovídající fázové portréty. Podle této definice topologicky ekvivalentní systémy, které jsou závislé na parametrech, mají topologicky ekvivalentní bifurkační diagramy.

Následující definice má vztah k lokálnímu chování systémů při malých hodnotách parametrů.

Definice 2.12. Systémy (2.17) a (2.18) se nazývají *lokálně topologicky ekvivalentní* blízko počátku, jestliže existuje zobrazení $(x, \alpha) \mapsto (h_\alpha(x), p(\alpha))$, které je definováno v malém okolí bodu $(x, \alpha) = (0, 0)$ v direktním součinu $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, pro které dále platí, že

1. $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je homeomorfismus definovaný v malém okolí $\alpha = 0$, $p(0) = 0$,

2. $h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je homeomorfismus závislý na parametru, který je definovaný v malém okolí U_α bodu $x = 0$, $h_0(0) = 0$, který dále zobrazuje trajektorie systému (2.17) v U_α na trajektorie systému (2.18) v $h_\alpha(U_\alpha)$ se zachováním plynutí času.

Pro lokální bifurkace rovnovážných bodů jsou bifurkační diagramy popsány pomocí topologických normálních tvarů, které představují velmi důležitou část teorie bifurkací.

Někdy je možné sestavit jednoduchý systém³

$$\xi' = g(\xi, \beta; \sigma), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^k, \quad \sigma \in \mathbb{R}^l, \quad (2.19)$$

který má pro $\beta = 0$ rovnovážný bod $\xi = 0$. Tento systém dále splňuje k bifurkačních podmínek, které určují kodimenzi k bifurkace tohoto rovnovážného bodu. Dále σ zde představuje vektor koeficientů σ_i , $i = 1, 2, \dots, l$ polynomů v (2.19). V nejjednodušších případech koeficienty σ_i nabývají pouze konečně mnoha celočíselných hodnot. V obecnějším případě některé složky vektoru σ ale mohou nabývat i reálných hodnot.

Spolu se systémem (2.19) uvažujme systém

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k, \quad (2.20)$$

který má pro $\alpha = 0$ rovnovážný bod $x = 0$.

Definice 2.13. Systém (2.19) se nazývá *topologický normální tvar* bifurkace, jestliže libovolný generický systém (2.20) s rovnovážným bodem $x = 0$, který splňuje stejné bifurkační podmínky pro $\alpha = 0$, je lokálně topologicky ekvivalentní blízko počátku se systémem (2.19) pro některé hodnoty koeficientů σ_i .

Generický systém zde znamená, že tento systém splňuje konečně mnoho *generických podmínek*. Tyto podmínky jsou tvaru:

$$N_i[f] \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

kde N_i je nějaká algebraická funkce určité parciální derivace funkce $f(x, \alpha)$ (vzhledem k x a α), která je vyčíslena v $(x, \alpha) = (0, 0)$.

Generické podmínky určené systémem pro kritickou hodnotu parametru $\alpha = 0$ se nazývají *nedegenerované podmínky*. Tyto podmínky mohou být vyjádřeny ve tvaru parciálních derivací $f(x, 0)$ vzhledem k x a vyčíslené v $x = 0$. Všechny další podmínky, ve kterých jsou obsaženy derivace $f(x, \alpha)$ vzhledem k α se nazývají *transverzální podmínky*.

Systém (2.12) z příkladu 2.3 odpovídá v případě pro $\sigma = -1$ dvoudimenzionálnímu topologickému normálnímu tvaru pro tuto bifurkaci:

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \beta \xi_1 - \xi_2 + \sigma \xi_1 (\xi_1^2 + \xi_2^2), \\ \xi_2' &= \xi_1 + \beta \xi_2 + \sigma \xi_2 (\xi_1^2 + \xi_2^2). \end{aligned}$$

Podmínky specifikující generický systém, který demonstruje tuto bifurkaci, jsou následující:

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \operatorname{Re} \lambda_{1,2}(\alpha) \right|_{\alpha=0} \neq 0 \quad (2.21)$$

³tento systém je polynomiální v ξ_i

a

$$l_1(0) \neq 0. \tag{2.22}$$

První podmínka, transversalita, znamená, že dvojice komplexně sdružených vlastních čísel $\lambda_{1,2}(\alpha)$ překračuje imaginární osu s „nenulovou rychlostí“. Druhá podmínka, nedegenerovanost, naznačuje, že určitá kombinace Taylorových koeficientů pravých stran nejvýše třetího řádu nevymizí. Explicitní vzorec pro $l_1(0)$ je odvozen na str. 39.

Kapitola 3

Jednparametrické bifurkace rovnovážných bodů

V této kapitole se budeme podrobněji zabývat nejjednoduššími bifurkacemi rovnovážných bodů ve spojitých systémech. Zaměříme se především na Hopfovou a fold bifurkaci. Tyto bifurkace budeme zkoumat v prostoru s co nejmenší dimenzí.

Uvažujme spojitý systém závisící na parametru

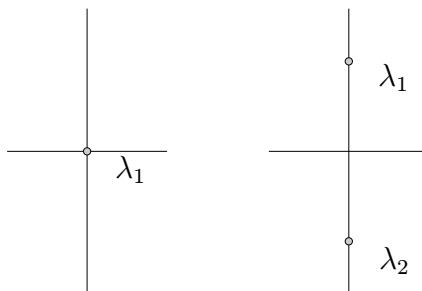
$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

kde f je hladká funkce vzhledem k proměnným x a α . Nechť $x = x_0$ je hyperbolický rovnovážný bod v systému, kde $\alpha = \alpha_0$ je kritická hodnota parametru α , viz str. 17.

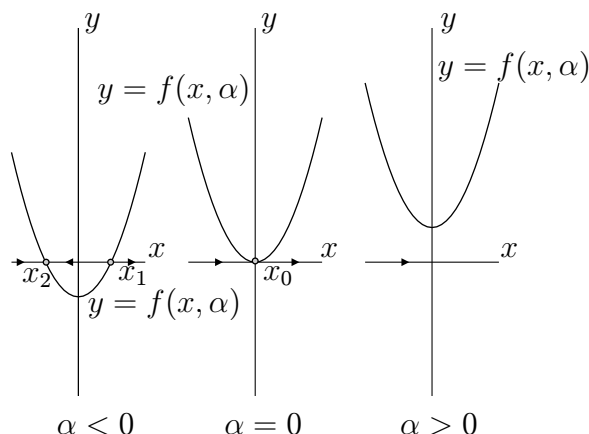
Obecně existují pouze dva způsoby porušení hyperbolických podmínek. Buď se jednoduché reálné vlastní číslo přiblíží k nule (tedy platí $\lambda_1 = 0$), nebo se objeví dvojice ryze imaginárních vlastních čísel

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 > 0,$$

viz Obr. 3.1. Než začneme zkoumat normální tvary bifurkací, musíme korektně zadefinovat dva typy bifurkací, které nás budou zajímat. Poznamejme, že první typ bifurkace může nastat, pouze tehdy, když $n \geq 1$ a druhý typ, pouze tehdy, když $n \geq 2$.



Obr. 3.1: Porušení hyperbolických podmínek



Obr. 3.2: Bifurkace typu fold

Definice 3.1. Bifurkace spjatá s výskytem $\lambda_1 = 0$ se nazývá *bifurkace typu fold* (nebo také *tečná bifurkace*, *bifurkace typu sedlo-uzel*).

Definice 3.2. Bifurkace, která odpovídá výskytu $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$ se nazývá *Hopfova* (nebo také *Andronova-Hopfova*) *bifurkace*.

3.1 Normální tvar bifurkace typu fold

Uvažujme následující jednodimenzionální systém závisející na jednom parametru

$$x' = \alpha + x^2 \equiv f(x, \alpha). \quad (3.1)$$

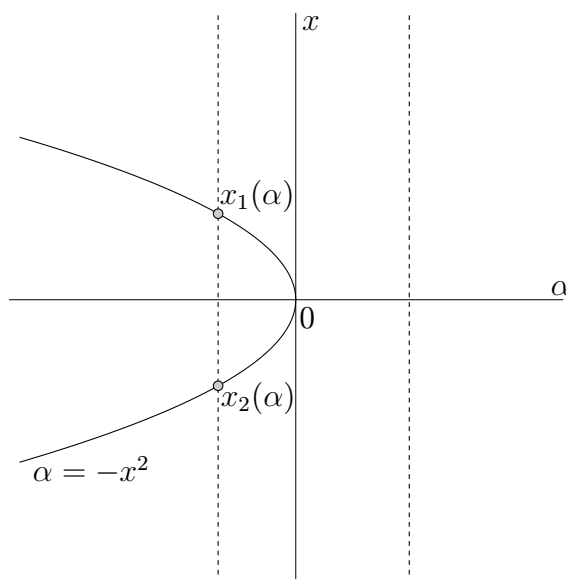
Tento systém má pro $\alpha = 0$ nehyperbolický rovnovážný bod $x_0 = 0$ s vlastním číslem $\lambda = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. Chování tohoto systému je zřejmé z Obr. 3.2. Pro $\alpha < 0$ má tento systém (3.1) dva rovnovážné body:

$$x_1 = \sqrt{-\alpha} \text{ (nestabilní)} \quad \text{a} \quad x_2 = -\sqrt{-\alpha} \text{ (stabilní)}.$$

V případě, kdy $\alpha > 0$, systém nemá žádné rovnovážné body. Parametr α mění postupně svoje hodnoty od záporných ke kladným; rovnovážné body se střetnou pro $\alpha = 0$, kdy $\lambda = 0$, a poté vymizí. Tento případ představuje bifurkaci typu fold. Tuto bifurkaci můžeme také studovat pomocí bifurkačního diagramu v direktním součinu fázového a parametrického prostoru. Rovnice $f(x, \alpha) = 0$ definuje *varietu rovnovážných bodů*, což je v tomto případě parabola $\alpha = -x^2$ (viz Obr. 3.3).

V případě, kdy α je libovolný, ale pevně zvolený parametr, můžeme snadno určit počet rovnovážných bodů systému pro tuto hodnotu parametru. Projekce variety rovnovážných bodů na osu parametru α má singularitu typu fold v $(x, \alpha) = (0, 0)$.

Poznámka. Studie systému $x' = \alpha - x^2$ dává velmi podobné výsledky, které vedou ke zjištění, že pro $\alpha > 0$ má tento systém dva rovnovážné body.



Obr. 3.3: Bifurkace typu fold v direktním součinu fázového a parametrického prostoru

Jak uvidíme v následujícím lemmatu, přidáním členů o vyšších řádech, které mohou hladce záviset na parametru, se může stát to, že tyto členy nemění kvalitativně chování systému blízko počátku $x = 0$ pro hodnoty parametru, které jsou blízké hodnotě $\alpha = 0$.

Lemma 3.3. *Uvažujme dva skalární systémy:*

$$x' = \alpha + x^2 + O(x^3), \quad (3.2)$$

$$x' = \alpha + x^2. \quad (3.3)$$

Pak systém (3.2) je lokálně topologicky ekvivalentní blízko počátku se systémem (3.3).

Důkaz. Je založen na faktu, že pro skalární systémy platí, že homeomorfismus zobrazující rovnovážné body na rovnovážné body zobrazuje také trajektorie, které tyto rovnovážné body vzájemně spojují.

Nejprve budeme podrobně zkoumat rovnovážné body. Nechť y je skalární proměnná. Přepišme systém (3.2) do následujícího tvaru:

$$y' = F(y, \alpha) = \alpha + y^2 + \psi(y, \alpha), \quad (3.4)$$

kde $\psi = O(y^3)$ je hladká funkce proměnných (y, α) v okolí $(0, 0)$.

Uvažme varietu rovnovážných bodů systému (3.4) blízko počátku $(0, 0)$ v rovině (y, α) :

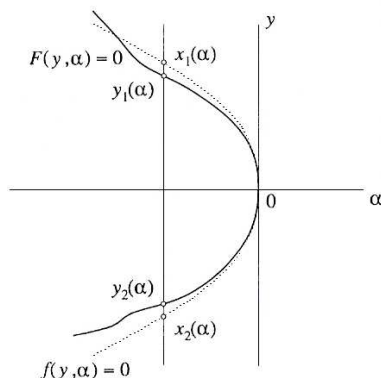
$$M = \{(y, \alpha); F(y, \alpha) = \alpha + y^2 + \psi(y, \alpha) = 0\}.$$

Křivka M prochází počátkem. Podle Věty o implicitní funkci (viz str. 7) a z faktu, že $F_\alpha(0, 0) = 1$, křivka M může být lokálně parametrizována pomocí proměnné y :

$$M = \{(y, \alpha); \alpha = g(y)\},$$

kde g je hladká funkce definovaná pro malé hodnoty $|y|$, platí

$$g(y) = -y^2 + O(y^3).$$



Obr. 3.4: Bifurkace typu fold perturbovaného systému

Tedy pro jakékoli dostatečně malé $\alpha < 0$ má systém (3.4) dva rovnovážné body blízko počátku $y_1(\alpha)$ a $y_2(\alpha)$, které se nacházejí blízko u rovnovážných bodů systému (3.1), tedy $x_1(\alpha) = \sqrt{-\alpha}$ a $x_2(\alpha) = -\sqrt{-\alpha}$ pro stejné hodnoty parametru (viz Obr. 3.4).

Pro malé $|\alpha|$ provedme konstrukci parametricky závislého zobrazení $y = h_\alpha(x)$ ($h_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) následujícím způsobem:

$$h_\alpha(x) = \begin{cases} x & \text{pro } \alpha \geq 0, \\ a(\alpha) + b(\alpha)x & \text{pro } \alpha < 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

kde a, b jsou jednoznačně dané koeficienty, které lze určit pomocí podmínek

$$h_\alpha(x_j(\alpha)) = y_j(\alpha), \quad j = 1, 2.$$

Zobrazení (3.5) je homeomorfismus zobrazující trajektorie systému (3.1) blízko počátku na odpovídající trajektorie systému (3.4) se zachováním plynutí času. Tato vlastnost představuje lokální topologickou ekvivalenci systémů závislých na parametru. \square

3.2 Obecná bifurkace typu fold

V této podkapitole ukážeme, že systém (3.1) je topologicky normální tvar obecného generického jednodimenzionálního systému, který má bifurkaci typu fold.

Věta 3.4. *Uvažujme jednodimenzionální systém*

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

kde f je hladká funkce. Nechť má tento systém pro $\alpha = 0$ rovnovážný bod $x = 0$ s vlastním číslem $\lambda = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. Předpokládejme, že jsou splněny následující podmínky:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0, 0) \neq 0. \quad (3.8)$$

Pak lze systém (3.6) převést pomocí invertibilních souřadnicových a parametrických změn na systém

$$\eta' = \beta \pm \eta^2 + O(\eta^3).$$

Důkaz. Viz [1], str. 84. □

Po eliminaci členu $O(\eta^3)$ pomocí Lemmatu 3.3 můžeme již uvést následující důležitou větu.

Věta 3.5 (Topologický normální tvar bifurkace typu fold). *Libovolný generický (viz str. 23) skalární jednoparametrický systém (3.6), který má pro $\alpha = 0$ rovnovážný bod $x = 0$ s $\lambda = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ je lokálně topologicky ekvivalentní blízko počátku s jedním z následujících dvojice normálních tvarů*

$$\eta' = \beta \pm \eta^2.$$

Poznámka. Podmínka (3.7), resp. (3.8) z Věty 3.4, odpovídá generické, resp. transverzální podmínce, viz str. 23.

3.3 Normální tvar Hopfovy bifurkace

Uvažujme následující autonomní systém, který je závislý na jednom parametru

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ x_2' &= x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Tento systém má rovnovážný bod $(x_1, x_2)^T = (0, 0)^T$ pro všechny hodnoty parametru α . Příslušná Jacobiho matice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$. Zavedeme komplexní proměnnou z , $z = x_1 + ix_2$. Dále platí $\bar{z} = x_1 - i x_2$, $|z| = x_1^2 + x_2^2$. Tato proměnná vyhovuje diferenciální rovnici

$$z' = x_1' + ix_2' = \alpha(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) - (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2),$$

a proto můžeme přepsat systém (3.9) do následujícího tvaru

$$z' = (\alpha + i)z - z|z|^2. \quad (3.10)$$

Vyjádříme-li komplexní proměnnou z v exponenciálním tvaru $z = \rho e^{i\varphi}$, můžeme rovnici (3.10) zapsat ve tvaru

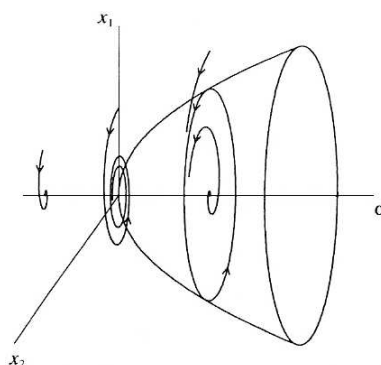
$$\rho' e^{i\varphi} + i\rho\varphi' e^{i\varphi} = \rho e^{i\varphi}(\alpha + i - \rho^2), \quad (3.11)$$

což odpovídá zápisu systému (3.9) v polárních souřadnicích

$$\rho' = \rho(\alpha - \rho^2), \quad (3.12a)$$

$$\varphi' = 1. \quad (3.12b)$$

První rovnice, kterou uvažujeme pouze pro $\rho \geq 0$ má rovnovážný bod $\rho = 0$ pro všechny hodnoty parametru α . Rovnovážný bod je lineárně stabilní, jestliže $\alpha < 0$. Pro $\alpha = 0$



Obr. 3.5: Superkritická Hopfova bifurkace v prostoru (x, y, α)

zůstává tento rovnovážný bod rovněž stabilní, ale stabilita je *nelineární*, tedy řešení už nekonverguje k nule exponenciálně. Pro $\alpha > 0$ se rovnovážný bod stává lineárně nestabilní. Navíc se v tomto případě objeví další stabilní rovnovážný bod $\rho_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$, pro $\alpha > 0$.

Rovnice (3.12b) popisuje rotaci s konstantní rychlostí. Z rovnic (3.12a) a (3.12b) lze proto získat bifurkační diagram systému (3.9) (viz Obr. 3.6). Náš systém má vždy rovnovážný bod v počátku. Tento rovnovážný bod je ohnisko, které je stabilní pro $\alpha < 0$ a nestabilní pro $\alpha > 0$. Pro kritickou hodnotu parametru $\alpha = 0$ je rovnovážný bod nelineárně stabilní a navíc je topologicky ekvivalentní s ohniskem¹. Tento rovnovážný bod je pro $\alpha > 0$ ohraničen uzavřenou trajektorií (limitní cyklus), která má následující vlastnosti: Je určena jednoznačně, je stabilní a pro její poloměr platí $\rho_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$. Všechny trajektorie začínající vně nebo uvnitř cyklu kromě počátku směřují pro $t \rightarrow \infty$ k tomuto cyklu. Všechny tyto vlastnosti jsou charakteristické pro Andronovu-Hopfovu bifurkaci.

Tato bifurkace může být zobrazena v třírozměrném prostoru o souřadnicích (x, y, α) . Viz Obr. 3.5. Systém

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ x_2' &= x_1 + \alpha x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{aligned} \quad (3.13)$$

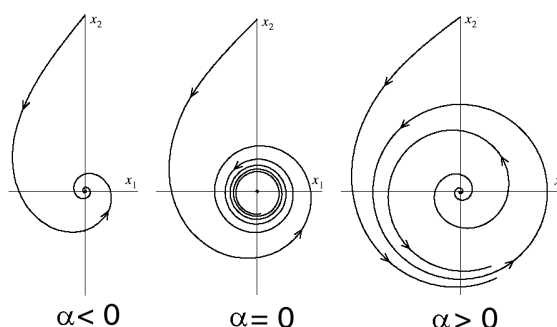
který má komplexní tvar

$$z' = (\alpha + i)z + |z|^2 z,$$

může být zkoumán stejným způsobem. Tento systém představuje pro $\alpha = 0$ rovněž Andronovu-Hopfovu bifurkaci. Na rozdíl od systému (3.9) se v (3.13) objeví nestabilní limitní cyklus, který zmizí v okamžiku, kdy α přechází od záporných hodnot ke kladným hodnotám, viz Obr. 3.7 a 3.8. Rovnovážný bod v počátku má stejnou stabilitu pro $\alpha \neq 0$ jako počátek v systému (3.9), tedy je stabilní pro $\alpha < 0$ a nestabilní pro $\alpha > 0$. Pro $\alpha = 0$ je ale rovnovážný bod nelineárně nestabilní.

Poznámka. Systémy (3.9) a (3.13) reprezentují dva typy Andronovy Hopfovy bifurkace. Bifurkace v systému (3.9) se velmi často nazývá *superkritická* (viz Obr. 3.6), neboť se cyklus objeví až pro kladné hodnoty parametru α . Bifurkace v systému (3.13) se nazývá *subkritická* (viz Obr. (3.7)), protože se cyklus objeví pro záporné hodnoty parametru.

¹Tento typ rovnovážného bodu se někdy nazývá *slabě přitahující ohnisko*.



Obr. 3.6: Superkritická Hopfova bifurkace

Uvažujme nyní následující systém ve vektorovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4), \quad (3.14)$$

kde $x = (x_1, x_2)^T$, $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ a člen $O(\|x\|^4)$ závisí hladce na parametru α . Tento systém má stejnou matici určující lineární členy jako systém (3.9). V následujícím lemmatu uvidíme, že členy o vyšším řádu nemají žádný vliv na bifurkační chování systému.

Lemma 3.6. *Systém (3.14) je lokálně topologicky ekvivalentní blízko počátku se systémem (3.9).*

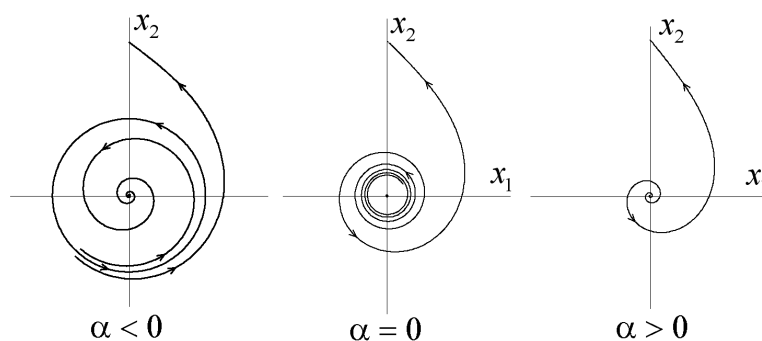
Po zavedení komplexní proměnné $z = x_1 + ix_2$, viz str. 29, dokážeme toto lemma v ekvivalentním tvaru:

Lemma 3.7. *Uvažujme následující systémy:*

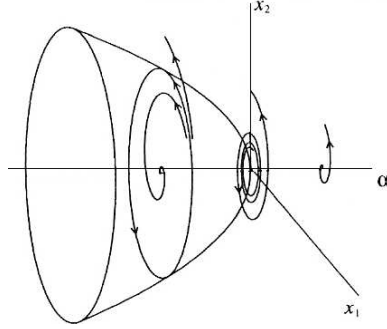
$$z' = (\alpha + i)z - z|z|^2 + O(|z|^4), \quad (3.15)$$

$$z' = (\alpha + i)z - z|z|^2. \quad (3.16)$$

Pak systém (3.15) je lokálně topologicky ekvivalentní blízko počátku se systémem (3.16).



Obr. 3.7: Subkritická Hopfova bifurkace v prostoru



Obr. 3.8: Subkritická Hopfova bifurkace v prostoru (x, y, α)

Důkaz. Nejprve dokážeme existenci a jednoznačnost cyklu. Přepíšeme systém (3.15) pomocí polárních souřadnic (ρ, φ) do následujícího tvaru:

$$\begin{aligned}\rho' &= \rho(\alpha - \rho^2) + \Phi(\rho, \varphi), \\ \varphi' &= 1 + \Psi(\rho, \varphi),\end{aligned}\tag{3.17}$$

kde $\Phi = O(|\rho|^4)$, $\Psi = O(|\rho|^3)$. Trajektorie systému (3.17) začínající v $(\rho, \varphi) = (\rho_0, 0)$ lze vyjádřit následujícím způsobem: $\rho = \rho(\varphi, \rho_0)$, $\rho_0 = \rho(0, \rho_0)$, kde ρ vyhovuje rovnici

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\rho(\alpha - \rho^2) + \Phi}{1 + \Psi} = \rho(\alpha - \rho^2) + R(\rho, \varphi),\tag{3.18}$$

kde $R = O(|\rho|^4)$. Přechod od (3.17) k (3.18) představuje zavedení nové parametrizace, takové, že $\varphi' = 1$. Platí $\rho(\varphi; 0) \equiv 0$, a tedy Taylorův rozvoj pro $\rho(\varphi; \rho_0)$ má tvar

$$\rho = u_1(\varphi)\rho_0 + u_2(\varphi)\rho_0^2 + u_3(\varphi)\rho_0^3 + O(|\rho_0|^4).\tag{3.19}$$

Dosazením (3.19) do (3.18) a řešením výsledných lineárních diferenciálních rovnic v odpovídajících mocninách ρ_0 spolu s počátečními podmínkami $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = u_3(0) = 0$ dostaneme

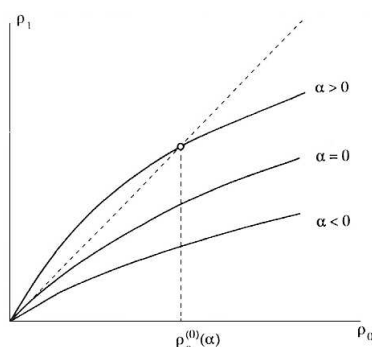
$$u_1(\varphi) = e^{\alpha\varphi}, \quad u_2(\varphi) \equiv 0, \quad u_3(\varphi) = e^{\alpha\varphi} \frac{1 - e^{2\alpha\varphi}}{2\alpha}.$$

Tyto výrazy jsou nezávislé na členu $R(\rho, \varphi)$, proto zpětné zobrazení $\rho_0 \mapsto \rho_1 = \rho(2\pi, \rho_0)$ má tvar

$$\rho_1 = e^{2\pi\alpha} \rho_0 - e^{2\pi\alpha} [2\pi + O(\alpha)] \rho_0^3 + O(\rho_0^4)\tag{3.20}$$

pro všechna $R = O(\rho^4)$. Zobrazení (3.20) může být snadněji zkoumáno pro dostatečně malá ρ_0 a $|\alpha|$. Existuje okolí počátku, ve kterém má zobrazení (3.20) pouze triviální pevný bod pro malé $\alpha < 0$ a další pevný bod $\rho_0^{(0)} = \sqrt{\alpha} + \dots$, pro malé $\alpha > 0$, viz Obr. 3.9.

Stabilita pevných bodů se dá lehce ověřit z (3.20). Vzhledem k tomu, že kladný pevný bod zobrazení odpovídá limitnímu cyklu systému, můžeme učinit závěr, že systém (3.17) s libovolnými členy $O(|z|^4)$ má jednoznačný stabilní limitní cyklus, který se rozdvouje od počátku a existuje pro $\alpha > 0$, podobně jako v systému (3.16). Proto členy vyšších řádů nemají vliv na bifurkaci limitního cyklu v nějakém okolí bodu $z = 0$ pro dostatečně malé hodnoty parametru α .



Obr. 3.9: Pevné body zpětného zobrazení

Nyní se budeme snažit dokázat topologickou ekvivalenci fázových portrétů. Nechť α je malé, ale kladné. Oba systémy (3.15), (3.16) mají limitní cyklus v nějakém okolí počátku. Předpokládejme, že časová reparametrizace s konstantním návratovým časem 2π je obsažena v systému (3.15). Rovněž požadujeme, aby lineární změna měřítka souřadnic v systému (3.15) byla taková, aby pro bod průniku cyklu a horizontální osy platilo

$$x_1 = \sqrt{\alpha}.$$

Definujme zobrazení

$$z \mapsto \tilde{z},$$

kde $z = x_1 + ix_2$. Hledejme hodnoty (ρ_0, τ_0) , kde τ_0 je minimální čas nutný proto, aby se trajektorie systému (3.16) začínající od horizontální poloosy s $\rho = \rho_0$ dostala do bodu z . Nyní uvažujme bod na ose s $\rho = \rho_0$ a sestrojme trajektorii systému (3.15) na časovém intervalu $[0, \tau]$. Výsledný bod označme jako $\tilde{z} = \tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2$ (viz Obr. 3.10).

Položme $\tilde{z} = 0$ pro $z = 0$. Sestrojené zobrazení je homeomorfismus takový, že pro $\alpha > 0$ zobrazuje trajektorie systému (3.16) v nějakém okolí počátku na trajektorie systému (3.15) se zachováním směru plynutí času. V případě, že $\alpha < 0$ se postupuje analogicky. \square

3.4 Obecná Hopfova bifurkace

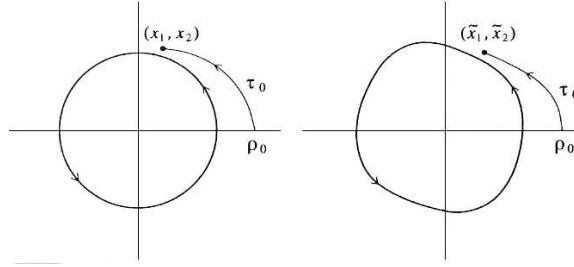
V této podkapitole ukážeme, že libovolný generický dvoudimenzionální systém s Hopfovou bifurkací lze převést na tvar (3.14). Přičemž tento tvar je určen jednoznačně až na znaménko u kubických členů.

Uvažujme systém

$$x' = f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (3.21)$$

s hladkou funkcí f , která má pro $\alpha = 0$ rovnovážný bod $x = 0$ s vlastními čísly $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$. Podle Věty o implicitní funkci (viz str. 7) má tento systém právě jeden rovnovážný bod $x_0(\alpha)$ v nějakém okolí počátku pro všechna dostatečně malá $|\alpha|$, neboť $\lambda = 0$ není vlastní číslo Jacobiho matice. Můžeme proto provést posun souřadnic, tak aby byl rovnovážný bod v počátku. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x = 0$ je rovnovážný bod systému pro $|\alpha|$ dostatečně malá. Tedy systém (3.21) lze zapsat ve tvaru

$$x' = A(\alpha)x + F(x, \alpha), \quad (3.22)$$



Obr. 3.10: Konstrukce homeomorfismu u Hopfovy bifurkace

kde F je hladká vektorová funkce, jejíž složky mají Taylorovy rozvoje s minimálně kvadratickými členy, tedy $F = O(\|x\|^2)$. Jacobiho matici $A(\alpha)$ můžeme zapsat ve tvaru

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} a(\alpha) & b(\alpha) \\ c(\alpha) & d(\alpha) \end{pmatrix},$$

kde jednotlivé složky matice jsou hladké funkce proměnné α . Vlastní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

kde $\sigma = \text{tr } A(\alpha)$ a $\Delta = \det A(\alpha)$, proto se dají vyjádřit jako

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma(\alpha) \pm \sqrt{\sigma^2(\alpha) - 4\Delta(\alpha)}}{2}.$$

Aby byly splněny podmínky Hopfovy bifurkace musí platit

$$\sigma(0) = 0, \quad \Delta(0) = \omega_0^2 > 0.$$

Položíme-li pro malá α

$$\mu(\alpha) = \frac{\sigma(\alpha)}{2}, \quad \omega(\alpha) = \frac{\sqrt{4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha)}}{2},$$

můžeme tak získat následující vyjádření vlastních čísel

$$\lambda_1(\alpha) = \mu(\alpha), \quad \lambda_2(\alpha) = \overline{\lambda_1(\alpha)},$$

kde

$$\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha), \quad \mu(0) = 0, \quad \omega(0) = \omega_0 > 0.$$

Lemma 3.8. *Systém (3.22) lze po zavedení komplexní proměnné z psát pro dostatečně malá α v následujícím tvaru:*

$$z' = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha), \tag{3.23}$$

kde $g = O(|z|^2)$ je hladká funkce vzhledem k (z, \bar{z}, α) .

Důkaz. Nechť $q(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ je vlastní vektor matice $A(\alpha)$ odpovídající vlastnímu číslu $\lambda(\alpha)$, tedy

$$A(\alpha)q(\alpha) = \lambda(\alpha)q(\alpha).$$

Dále nechť $p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ je vlastní vektor matice $A^T(\alpha)$ odpovídající vlastnímu číslu $\overline{\lambda(\alpha)}$:

$$A^T(\alpha)p(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)}p(\alpha).$$

Přitom lze provést normování p vzhledem ke q , tedy

$$\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = 1,$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalární součin v \mathbb{C}^2 : $\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2$. Libovolný vektor $x \in \mathbb{R}^2$ může být jednoznačně vyjádřen pro libovolné malé α ve tvaru

$$x = zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha) \quad (3.24)$$

pro nějaké komplexní z . Nyní můžeme určit z pomocí explicitní formule

$$z = \langle p(\alpha), x \rangle. \quad (3.25)$$

Tuto formuli lze získat tak, že provedeme skalární součin obou stran rovnice (3.24) s vektorem p . Pro korektní ověření (3.25) musíme však dokázat, že platí

$$\langle \bar{q}(\alpha), p(\alpha) \rangle = 0. \quad (3.26)$$

Vztah (3.26) evidentně platí, neboť

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \left\langle p, \frac{A\bar{q}}{\bar{\lambda}} \right\rangle = \frac{\langle A^T p, \bar{q} \rangle}{\bar{\lambda}} = \frac{\lambda \langle p, \bar{q} \rangle}{\bar{\lambda}},$$

a proto

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0.$$

Z faktů, že $\lambda \neq \bar{\lambda}$ a $\omega(\alpha) > 0$ vyplývá, že $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$. Komplexní proměnná z zřejmě splňuje rovnici

$$z' = \lambda(\alpha)z + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle.$$

Tato rovnice představuje tvar (3.23), neboť platí

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle. \quad \square$$

Funkce g lze vyjádřit ve tvaru Taylorova rozvoje v proměnných z a \bar{z} :

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l}{k!l!},$$

kde

$$g_{kl}(\alpha) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle \Big|_{z=0},$$

pro $k+l \geq 2$, $k, l = 0, 1, \dots$

Naší další snahou bude zjednodušit vztah (3.23).

Lemma 3.9. *Rovnici*

$$z' = \lambda z + \frac{g_{20}z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + \frac{g_{02}\bar{z}^2}{2} + O(|z|^3), \quad (3.27)$$

kde $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, $\mu(0) = 0$ a $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, lze pro všechna dostatečně malá α převést pomocí parametricky závislé invertibilní změny komplexních souřadnic

$$z = w + \frac{h_{20}w^2}{2} + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}\bar{w}^2}{2}$$

na rovnici bez kvadratických členů

$$w' = \lambda w + O(|w|^3).$$

Důkaz. Inverzní změna souřadnic je určena vztahem

$$w = z - \frac{h_{20}z^2}{2} - h_{11}z\bar{z} - \frac{h_{02}\bar{z}^2}{2} + O(|z|^3).$$

Proto platí

$$\begin{aligned} w' &= z' - h_{20}zz' - h_{11}(z'\bar{z} + z\bar{z}') - h_{02}\bar{z}\bar{z}' + \dots = \lambda z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20}\right)z^2 + \\ &+ (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda}h_{11})z\bar{z} + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda}h_{02}\right)\bar{z}^2 + \dots = \lambda w + \\ &+ \frac{(g_{20} - \lambda h_{20})w^2}{2} + (g_{11} - \bar{\lambda}h_{11})w\bar{w} + \frac{(g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda)h_{02})\bar{w}^2}{2} + O(|w|^3). \end{aligned}$$

Pokud nyní položíme

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda},$$

kde všechny výrazy ve jmenovatelech jsou nenulové pro všechna dostatečně malá $|\alpha|$, pak všechny kvadratické členy v (3.27) vymizí. \square

Následující lemma ukazuje, že lze podobným způsobem, který byl použit v předchozím lemmatu, odstranit i kubické členy.

Lemma 3.10. *Rovnici*

$$z' = \lambda z + \frac{g_{30}z^3}{6} + \frac{g_{21}z^2\bar{z}}{2} + \frac{g_{12}z\bar{z}^2}{2} + \frac{g_{03}\bar{z}^3}{6} + O(|z|^4), \quad (3.28)$$

kde $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$, $\mu(0) = 0$ a $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$ lze pro všechna dostatečně malá $|\alpha|$ převést pomocí parametricky závislé invertibilní změny komplexních souřadnic

$$z = w + \frac{h_{30}w^3}{6} + \frac{h_{21}w^2\bar{w}}{2} + \frac{h_{12}w\bar{w}^2}{2} + \frac{h_{03}\bar{w}^3}{6}$$

na rovnici s jediným kubickým členem

$$w' = \lambda w + c_1w^2\bar{w} + O(|w|^4), \quad (3.29)$$

kde $c_1 = c_1(\alpha)$.

Důkaz. Je velmi podobný důkazu Lemmatu 3.9. Lze ho nalézt v [1], str. 95. \square

Poznámka. Kubický člen $w^2\bar{w}$ v (3.29) se často nazývá *rezonující člen*.

Zkombinujeme-li dvě předchozí lemmata obdržíme následující větu.

Věta 3.11 (Poincarého normální tvar Hopfovy bifurkace). *Rovnici*

$$z' = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{g_{kl} z^k \bar{z}^l}{k!l!} + O(|z|^4), \quad (3.30)$$

kde $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ a $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, lze převést pro všechna dostatečně malá $|\alpha|$ pomocí hladké parametricky závislé invertibilní změny komplexních souřadnic

$$z = w + \frac{h_{20}w^2}{2} + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}\bar{w}^2}{2} + \frac{h_{30}w^3}{6} + \frac{h_{12}w\bar{w}^2}{2} + \frac{h_{03}\bar{w}^3}{6}$$

na rovnici s jediným kubickým členem (rezonující člen)

$$w' = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4), \quad (3.31)$$

kde $c_1 = c_1(\alpha)$.

Důkaz. Důkaz provedeme složením transformací, které jsou definovány v Lemmatech 3.9 a 3.10. Transformace

$$z = w + \frac{h_{20}w^2}{2} + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}\bar{w}^2}{2}, \quad (3.32)$$

kde koeficienty

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda - \lambda}$$

jsou definovány v Lemmatu (3.9), vyruší sice všechny kvadratické členy, ale změní koeficienty u kubických členů.

Budeme-li místo $\frac{g_{21}}{2}$ považovat $\frac{\tilde{g}_{21}}{2}$ jako koeficient u členu $w^2\bar{w}$, pak tím vytvoříme transformaci, která eliminuje všechny kubické členy až na rezonující člen, jehož koeficient je $\frac{\tilde{g}_{21}}{2}$. Protože členy čtvrtého a vyššího řádu, které se objeví ve složené transformaci, jsou řádu $O(|w|^4)$, můžeme je zanedbat. \square

Jediné co potřebujeme k výpočtu koeficientu c_1 , který se vyskytuje v rovnici (3.30), je umět spočítat nový koeficient $\frac{\tilde{g}_{21}}{2}$ u členu $w^2\bar{w}$, který se objeví po kvadratické transformaci (3.32). Tento výpočet můžeme provést invertováním vztahu (3.32). Bohužel tento postup vyžaduje znalost inverzního zobrazení, které zahrnuje všechny členy až do kubického členu včetně. Existuje ale možnost, jak se nepříjemného invertování (3.32) vyvarovat.

Můžeme totiž vyjádřit z' ve tvaru, kde se vyskytují členy w a \bar{w} , dvojným způsobem. První způsob představuje dosazení vztahu (3.32) do původní rovnice (3.30). Druhý způsob je založen na faktu, že známe výsledný tvar (3.31), na který lze rovnici (3.30) převést a také z toho, že z' může být spočítána pomocí diferencování (3.32),

$$z' = w' + h_{20}ww' + h_{11}(w\bar{w}' + \bar{w}w') + h_{02}\bar{w}'\bar{w}$$

a následnou úpravou w' pomocí (3.31). Porovnáním koeficientů u kvadratických členů v získaných tvarech z' získáme výše uvedené formule pro h_{20} , h_{11} a h_{02} . Porovnáme-li koeficienty před $w\bar{w}$, získáme vztah

$$c_1 = \frac{g_{20}g_{11}(2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}. \quad (3.33)$$

Pro hodnotu bifurkačního parametru $\alpha = 0$ přejde předchozí rovnice na následující tvar

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3} \right) + \frac{g_{21}}{2}. \quad (3.34)$$

Následující Lemma podává přirozenější tvar Věty 3.11.

Lemma 3.12. *Uvažujme rovnici*

$$\frac{dw}{dt} = (\mu(\alpha) + i\omega(\alpha))w + c_1(\alpha)w|w|^2 + O(|w|^4), \quad (3.35)$$

kde $\mu(0) = 0$ a $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Předpokládejme, že $\mu'(0) \neq 0$ a $\operatorname{Re} c_1(0) \neq 0$. Potom rovnici (3.35) lze převést pomocí parametricky závislé lineární transformace souřadnic, změny časového měřítka a nelineární časové reparametrizace na rovnici

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4), \quad (3.36)$$

kde u je nová komplexní souřadnice, θ nová časová proměnná, β nový parametr a $s = \operatorname{sign} \operatorname{Re} c_1(0) = \pm 1$.

Důkaz. Důkaz probíhá ve třech krocích. *Krok 1 (lineární změna časového měřítka).* Zdefinujme novou časovou proměnnou $\tau = \omega(\alpha)t$. Směr plynutí času je zachován, protože $\omega(\alpha) > 0$ pro všechna dostatečně malá $|\alpha|$. Pak

$$\frac{dw}{d\tau} = (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4),$$

kde

$$\beta = \beta(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)}, \quad d_1(\beta) = \frac{c_1(\alpha(\beta))}{\omega(\alpha(\beta))}.$$

Nyní můžeme považovat β za nový parametr, neboť

$$\beta(0) = 0, \quad \beta'(0) = \frac{\mu'(0)}{\omega(0)} \neq 0,$$

a proto podle Věty o inverzní funkci je zaručena lokální existence a hladkost parametru α jako funkce β .

Krok 2 (nelineární časová reparametrizace). Provedeme změnu časové parametrizace podél trajektorií. Zavedme novou časovou proměnnou $\theta = \theta(\tau, \beta)$, kde

$$d\theta = (1 + e_1(\beta)|w|^2) d\tau, \quad e_1(\beta) = \operatorname{Im} d_1(\beta).$$

Tato časová změna představuje téměř identickou transformaci v malém okolí počátku. Použitím nové časové definice získáme následující vztah

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i)w + l_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4),$$

kde $l_1(\beta) = \operatorname{Re} d_1(\beta) - \beta e_1(\beta)$, $l_1(\beta) \in \mathbb{R}$ a

$$l_1(0) = \frac{\operatorname{Re} c_1(0)}{\omega(0)}. \quad (3.37)$$

Krok 3 (lineární změna souřadnicového měřítka). Zavedeme komplexní proměnnou u takto:

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}},$$

což má smysl vzhledem k tomu, že $\operatorname{Re} c_1(0) \neq 0$ a $l_1(0) \neq 0$. Nyní konečně získáme požadovaný tvar rovnice:

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + \frac{l_1(\beta)u|u|^2}{|l_1(\beta)|} + O(|u|^4) = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4),$$

kde

$$s = \operatorname{sign} l_1(0) = \operatorname{sign} \operatorname{Re} c_1(0). \quad \square$$

Definice 3.13. Reálná funkce $l_1(\beta)$ se nazývá *první Ljapunovův koeficient*.

Ze vztahu (3.37) vyplývá, že pro první Ljapunovův koeficient pro $\beta = 0$ platí

$$l_1(0) = \frac{\operatorname{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21})}{2\omega_0^2}. \quad (3.38)$$

Poznámka. To, zdali je Andronova-Hopfova bifurkace subkritická či superkritická, záleží na hodnotě s , $s = \operatorname{sign} l_1(0) = \pm 1$. Jestliže $s = -1$, pak se jedná o superkritický typ, kdežto při $s = 1$ jedná se o subkritický typ Andronovy-Hopfovy bifurkace.

Taylorovy koeficienty pro výpočet prvního Ljapunova koeficientu pro $\alpha = 0$ mohou být vypočítány následovně. Nechť $F(x, \alpha)$ je funkce, která byla definována v (3.22). Napišme Taylorův rozvoj $F(x, 0)$ pro $x = 0$ takto:

$$F(x, 0) = \frac{B(x, x)}{2} + \frac{C(x, x, x)}{6} + O(\|x\|^4),$$

kde $B(x, y)$ a $C(x, y, u)$, kde $x, y, u \in \mathbb{R}^2$, jsou symetrické multilineární vektorové funkce pro jejichž složky platí:

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^2 \left. \frac{\partial^2 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \right|_{\xi=0} x_j y_k,$$

$$C_i(x, y, u) = \sum_{j,k,l=1}^2 \left. \frac{\partial^3 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \right|_{\xi=0} x_j y_k u_l,$$

kde $i = 1, 2$. Pak

$$B(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) = z^2 B(q, q) + 2z\bar{z}B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}),$$

kde $q = q(0)$, $p = p(0)$. Tedy Taylorovy koeficienty g_{kl} , ($k + l = 2$) kvadratických členů v $g(z, \bar{z}, 0)$ mohou být vyjádřeny následovně:

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle, \quad g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle.$$

Z předešlých poznatků vyplývá následující věta.

Věta 3.14. *Uvažujme dvoudimenzionální systém*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (3.39)$$

s hladkou funkcí f . Nechť má tento systém pro všechna dostatečně malá $|\alpha|$ rovnovážný bod $x = 0$ s vlastními čísly $\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$, kde $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Nechť jsou splněny následující podmínky:

$$l_1(0) \neq 0, \quad (3.40)$$

$$\mu'(0) \neq 0, \quad (3.41)$$

kde $l_1(0)$ je první Ljapunovův koeficient. Potom lze rovnici (3.39) převést pomocí invertibilních souřadnic, změny parametru a časové reparametrizace na rovnici

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4).$$

Poznámka. Podmínka (3.40), resp. (3.41), představuje nedegenerovanou, resp. transversální podmínku. Viz str 23.

Lemma 3.6 nám umožní vynechat člen $O(\|y\|^4)$, což vede k následujícímu finálnímu výsledku.

Věta 3.15 (Topologicky normální tvar Hopfovy bifurkace). *Uvažujme libovolný generický dvoudimenzionální systém*

$$x' = f(x, \alpha), \quad (3.42)$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr. Nechť má tento systém má pro $\alpha = 0$ rovnovážný bod $x = 0$ s vlastními čísly

$$\lambda_{1,2}(0) = i\omega_0, \quad \omega_0 > 0.$$

Nechť dále platí podmínky (3.40) a (3.41). Pak je systém (3.42) lokálně topologicky ekvivalentní blízko počátku s jedním ze dvou následujících systémů:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Na konci této kapitoly uvedeme ještě jednu větu potřebnou pro studium Hopfovy bifurkace.

Věta 3.16 (Hopfova bifurkační věta). *Uvažujme dvoudimenzionální systém*

$$\begin{aligned}x'_1 &= f(x_1, x_2, \alpha), \\x'_2 &= g(x_1, x_2, \alpha),\end{aligned}$$

kde f a g jsou dostatečně hladké funkce. Nechť má tento systém pro $\alpha = 0$ rovnovážný bod $x = (x_1, x_2)^T = (0, 0)^T$ s vlastními čísly $\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$.
Bud'

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobiho matice uvažovaná pro $(x_1, x_2, \alpha) = (0, 0, 0)$. Nechť jsou dále splněny následující dvě podmínky

$$d = (f_{\alpha x_1} + g_{\alpha x_2})|_{(x_1, x_2, \alpha) = (0, 0, 0)} \neq 0, \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned}a &= \left[\frac{1}{16} (f_{x_1 x_1 x_1} + g_{x_1 x_1 x_2} + f_{x_1 x_2 x_2} + g_{x_2 x_2 x_2}) + \right. \\ &+ \frac{1}{16\omega_0} (f_{x_1 x_2} (f_{x_1 x_1} + f_{x_2 x_2}) - g_{x_1 x_2} (g_{x_1 x_1} + g_{x_2 x_2}) - \\ &\left. - f_{x_1 x_1} g_{x_1 x_1} + f_{x_2 x_2} g_{x_2 x_2}) \right]_{(x_1, x_2, \alpha) = (0, 0, 0)} \neq 0, \quad (3.44)\end{aligned}$$

pak platí:

- (a) Jestliže platí $ad > 0$, pak se křivka periodických řešení odděluje od počátku souřadnic pro $\alpha < 0$. Jestliže platí $ad < 0$ pak se křivka periodických řešení odděluje od počátku souřadnic pro $\alpha > 0$.
- (b) Jestliže platí $d < 0$, pak je počátek stabilní pro $\alpha > 0$ a nestabilní pro $\alpha < 0$. Opačně, jestliže $d > 0$, pak je počátek stabilní pro $\alpha < 0$ a nestabilní pro $\alpha > 0$.
- (c) Periodická řešení jsou stabilní, respektive nestabilní, jestliže je počátek nestabilní, respektive stabilní.

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [4], str. 228. □

3.5 Postačující podmínky pro vidličkovou a transkritickou bifurkaci

Na konci této kapitoly uvedeme postačující podmínky pro vidličkovou a transkritickou bifurkaci, viz Př. 2.6 a 2.7.

Věta 3.17. *Uvažujme systém*

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.45)$$

Nechť dále platí

$$f(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Pak:

(i) *V systému (3.45) se objeví transkritická bifurkace jestliže jsou splněny následující podmínky:*

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}(0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0.$$

(ii) *V systému (3.45) se objeví vidličková bifurkace jestliže jsou splněny následující podmínky:*

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}(0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0.$$

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [6], str. 49.

□

Kapitola 4

Příklady bifurkací v matematických modelech

V této kapitole uvedeme několik příkladů výskytu bifurkací v matematických modelech. Půjde o bifurkaci typu fold a Hopfovu bifurkaci.

4.1 Model růstu populace

Uvažujme diferenciální rovnici

$$x' = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha \equiv F(x, \alpha), \quad (4.1)$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $K > 0$ a $x(0) > 0$. Tato rovnice modeluje růst izolované populace (v našem případě budeme uvažovat např. populaci ryb), která roste v prostředí s pevnou kapacitou prostředí K . Hodnota parametru r , resp. α , představuje *specifickou míru růstu*, resp. *míru výlovu populace ryb*. Ukážeme, že se v systému (4.1) objeví bifurkace typu fold.

Rovnovážné body $x_{1,2}$ systému (4.1) vypočítáme řešením rovnice $F(x, \alpha) = 0$, která přejde po úpravě na kvadratickou rovnici

$$rx^2 - rKx + \alpha K = 0.$$

Diskriminant této rovnice je $D = r^2K^2 - 4r\alpha K$. Položíme-li $D = 0$, pak snadno můžeme vypočítat kritickou hodnotu parametru α :

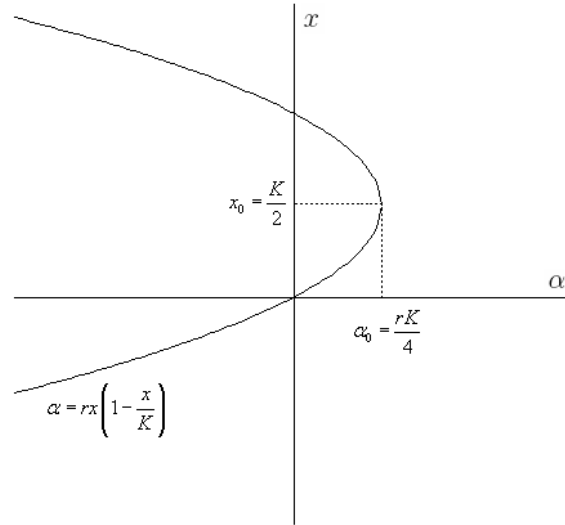
$$\alpha_0 = \frac{rK}{4}.$$

Pro $\alpha < \frac{rK}{4}$ má tento systém dva rovnovážné body

$$x_1 = \frac{rK + \sqrt{r^2K^2 - 4r\alpha K}}{2r} \quad (\text{stabilní}) \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{rK - \sqrt{r^2K^2 - 4r\alpha K}}{2r} \quad (\text{nestabilní})$$

V případě, kdy $\alpha = \alpha_0 = \frac{rK}{4}$ má systém právě jeden rovnovážný bod

$$x_0 = \frac{K}{2}$$



Obr. 4.1: Bifurkační diagram pro model růstu populace

a pro $\alpha > \frac{rK}{4}$ systém nemá žádné rovnovážné body. Bifurkační diagram je na Obr. 4.1.

Dokažme existenci bifurkace typu fold. Nejprve musíme dokázat nulovost vlastního čísla λ , které je příslušné rovnovážnému bodu x_0 . Platnost této podmínky je zaručena, neboť platí:

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \alpha_0) = \left[r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{rx}{K} \right] \Big|_{x=x_0, \alpha=\alpha_0} = 0.$$

Protože platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \alpha_0) &= \frac{-2r}{K} < 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_0, \alpha_0) &= -1, \end{aligned}$$

je zaručena (vzhledem k Lemmatu 3.3) platnost podmínek¹ (3.7) a (3.8) z Věty 3.4, a tudíž jsou splněny postačující podmínky pro bifurkaci typu fold.

Na závěr poznamenejme, že v případě, kdy $\alpha > \alpha_0$ dochází k nadměrnému výlovu ryb. Bez ohledu na počáteční podmínky, dochází k zániku rybí populace.

4.2 Brusselátor

Model Brusselátoru patří mezi modely popisující chemické reakce. Pomocí Věty 3.16 ukážeme na výskyt Hopfovy bifurkace v tomto modelu. Model Brusselátoru je popsán pomocí následujícího autonomního systému diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1' &= A - (\alpha + 1)x_1 + x_1^2 x_2, \\ x_2' &= \alpha x_1 - x_1^2 x_2, \end{aligned} \tag{4.2}$$

¹nedegenerované a transversální podmínky, viz str. 23

kde α je parametr a $A > 0$. Tento systém má jediný rovnovážný bod

$$x^0 = (x_1, x_2)^T = \left(A, \frac{\alpha}{A} \right)^T.$$

Pro Jacobiho matici platí

$$J(x^0) = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & A^2 \\ -\alpha & -A^2 \end{pmatrix}.$$

Tato matice má charakteristickou rovnici $\lambda^2 + (A^2 + 1 - \alpha)\lambda + A^2 = 0$, její diskriminant je $D = (A^2 + 1 - \alpha)^2 - 4A^2$. Nechť $D < 0$. Položíme-li

$$\alpha = 1 + A^2, \tag{4.3}$$

pak má systém (4.2) dvojici komplexně sdružených vlastních čísel $\lambda_{1,2} = \pm iA$. Nechť nadále platí (4.3). Vlastní vektory příslušné vlastním číslům $\pm iA$ jsou

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \pm i \end{pmatrix}.$$

Proto transformace

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -A & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = -\frac{1}{A} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ A & A \end{pmatrix},$$

převeďte matici $J(1 + A^2)$ na kanonický tvar, tedy platí

$$T^{-1}JT = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

Posunutím rovnovážného bodu do počátku souřadnic dospějeme k následující rovnosti:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & A^2 \\ -\alpha & -A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{A}x_1^2 + 2Ax_1x_2 + x_1^2x_2 \\ \frac{\alpha}{-A}x_1^2 - 2Ax_1x_2 - x_1^2x_2 \end{pmatrix}.$$

Položme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au \\ -Au - v \end{pmatrix},$$

pak platí

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 - (\alpha - 1) & -A \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\alpha - 2A^2)u^2 - 2Auv - A^2u^3 - Au^2v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní můžeme použít Větu 3.16. V tomto případě se vztah (3.44) zjednoduší na

$$a = \left[\frac{f_{uuu} + f_{uvv}}{16} + \frac{f_{uv}(f_{uu} + f_{vv})}{16A} \right] \Big|_{(x,y,\alpha)=(0,0,1+A^2)},$$

a proto platí

$$d > 0, \quad a < 0$$

Z těchto nerovností vyplývá, že stabilní limitní cyklus se odděluje od počátku pro $\alpha > 1 + A^2$.

4.3 Model dravec-kořist

V této podkapitole ukážeme příklad výskytu Andronovy-Hopfovy bifurkace. Uvažujme následující dvoudimenzionální systém:

$$\begin{aligned}x_1' &= rx_1(1 - x_1) - \frac{cx_1x_2}{\alpha + x_1}, \\x_2' &= -dx_2 + \frac{cx_1x_2}{\alpha + x_1}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Tento systém představuje model *dravec-kořist*, kde x_1 a x_2 odpovídají velikostem populací kořisti, resp. dravce a r, c, d, α ($c > d$) jsou kladné parametry popisující chování a vzájemné interakce izolovaných populací.

Pro usnadnění práce zavedeme polynomiální systém a to tak, že obě strany (4.4) vynásobíme $(\alpha + x_1)$ a zavedeme novou časovou proměnnou τ , $dt = (\alpha + x_1)d\tau$. Nově získaný systém

$$\begin{aligned}x_1' &= rx_1(\alpha + x_1)(1 - x_1) - cx_1x_2, \\x_2' &= -\alpha dx_2 + (c - d)x_1x_2\end{aligned}\tag{4.5}$$

má pro $x_1 > -\alpha$ stejné trajektorie jako původní systém². Systém (4.5) má netriviální rovnovážný bod

$$E_0 = \left(\frac{\alpha d}{c - d}, \frac{r\alpha}{c - d} \left[1 - \frac{\alpha d}{c - d} \right] \right).$$

Jacobiho matice vyčíslená v bodě E_0 je

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha rd(c+d)}{(c-d)^2} \left[\frac{c-d}{c+d} - \alpha \right] & -\frac{\alpha cd}{c-d} \\ \frac{ar(c-d(1+\alpha))}{(c-d)} & 0 \end{pmatrix},$$

a proto

$$\mu(\alpha) = \frac{\sigma(\alpha)}{2} = \frac{\alpha rd(c+d)}{2(c-d)^2} \left[\frac{c-d}{c+d} - \alpha \right].$$

Rovnost $\mu(\alpha_0) = 0$ nastává pro

$$\alpha_0 = \frac{c-d}{c+d},$$

navíc platí

$$\omega^2(\alpha_0) = \frac{rc^2d(c-d)}{(c+d)^3} > 0.\tag{4.6}$$

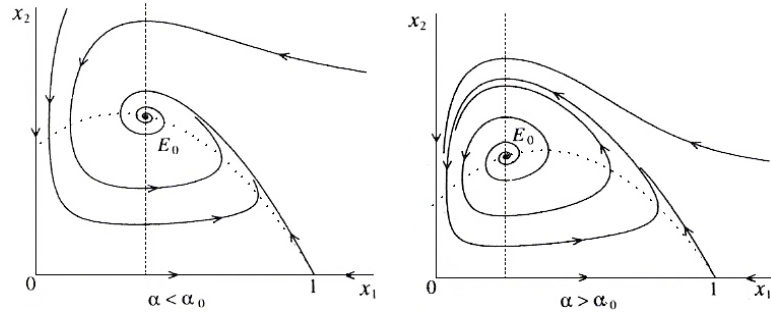
Pro $\alpha = \alpha_0$ má rovnovážný bod E_0 ³ vlastní čísla $\lambda_{1,2} = \pm i\omega(\alpha_0)$ a tudíž se jedná o Hopfovu bifurkaci.

Abychom mohli pro analýzu této bifurkace použít Větu o topologickém normálním tvaru, musíme ověřit platnost podmínek (3.40), (3.41) Ze vztahu

$$\mu'(\alpha_0) = -\frac{\alpha_0 rd(c+d)}{2(c-d)^2} < 0$$

²Jde tedy o orbitální ekvivalenci.

³Obecně jsou v tomto případě rovnovážné body je stabilní pro $\alpha > \alpha_0$ a nestabilní pro $\alpha < \alpha_0$.



Obr. 4.2: Hopfova bifurkace v modelu dravec-kořist

vyplývá platnost podmínky (3.41). Nyní musíme provést výpočet prvního Ljapunova koeficientu. Nechť α je parametr s kritickou hodnotou α_0 . Pro $\alpha = \alpha_0$ má netriviální rovnovážný bod souřadnice

$$x_1^{(0)} = \frac{d}{c+d}, \quad x_2^{(0)} = \frac{rc}{(c+d)^2}.$$

Pomocí následující změny souřadnic

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^{(0)} + \xi_1, \\ x_2 &= x_2^{(0)} + \xi_2. \end{aligned}$$

provedeme posun počátku souřadnic do tohoto rovnovážného bodu. To znamená, že se provede transformace systému (4.5) se na systém

$$\begin{aligned} \xi_1' &= -\frac{cd}{c+d}\xi_2 - \frac{rd}{c+d}\xi_1^2 - c\xi_1\xi_2 - r\xi_1^3 \equiv F_1(\xi_1, \xi_2), \\ \xi_2' &= \frac{cr(c-d)}{(c+d)^2}\xi_1 + (c-d)\xi_1\xi_2 \equiv F_2(\xi_1, \xi_2). \end{aligned}$$

Tento systém lze vyjádřit jako

$$\xi' = A\xi + \frac{B(\xi, \xi)}{2} + \frac{C(\xi, \xi, \xi)}{6},$$

kde $A = A(\alpha_0)$; B, C jsou multilineární funkce, které na vektorech $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$, $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)^T$, $(\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^2)$ nabývají hodnot

$$B(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} -\frac{2rd\xi_1\eta_1}{c+d} - c(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) \\ (c-d)(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) \end{pmatrix}$$

a

$$C(\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} -6r\zeta_1\eta_1\zeta_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matici $A(\alpha_0)$ lze psát ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{cd}{c+d} \\ \frac{\omega^2(c+d)}{cd} & 0 \end{pmatrix},$$

kde ω^2 je definována v (4.6). Nyní je snadné ukázat, že komplexní vektory, pro které platí

$$q \sim \begin{pmatrix} cd \\ -i\omega(c+d) \end{pmatrix}, \quad p \sim \begin{pmatrix} \omega(c+d) \\ -icd \end{pmatrix},$$

jsou vlastními vektory:

$$Aq = i\omega q, \quad A^T p = -i\omega p.$$

Pro dokázání nutné podmínky $\langle p, q \rangle = 1$ stačí položit, např.

$$q = \begin{pmatrix} cd \\ -i\omega(c+d) \end{pmatrix}, \quad p = \frac{1}{2\omega cd(c+d)} \begin{pmatrix} \omega(c+d) \\ -icd \end{pmatrix}.$$

Nyní již můžeme spočítat hodnoty

$$\begin{aligned} g_{20} &= \langle p, B(q, q) \rangle = \frac{cd(c^2 - d^2 - rd) + i\omega c(c+d)^2}{c+d}, \\ g_{11} &= \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle = -\frac{rcd^2}{c+d}, \\ g_{21} &= \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle = -3rc^2d^2. \end{aligned}$$

Tyto hodnoty dosadíme do (3.38) a vypočítáme tak první Ljapunovův koeficient:

$$l_1(\alpha_0) = \frac{\operatorname{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega g_{21})}{2\omega^2} = -\frac{rc^2d^2}{\omega} < 0.$$

Nyní je zřejmé, že $l_1(\alpha_0) < 0$ pro všechny kombinace pevných parametrů a je tedy zajištěna platnost podmínky (3.40) z Věty 3.14, proto jednoznačně určený stabilní cyklus podléhá Hopfově bifurkaci rovnovážného bodu pro $\alpha < \alpha_0$. Situace je zřejmá z Obr. 4.2.

Použitá literatura

- [1] Y. A. Kuznetsov: *Elements Of Applied Bifurcation Theory*. 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1998.
- [2] J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice*. Druhé vydání, MU Brno, 2001.
- [3] J. Kalas, Z. Pospíšil: *Spojité modely v Biologii*. První vydání, MU Brno, 2001.
- [4] P. Glendinning: *Stability, instability and chaos*. Cambridge university Press, Cambridge, 1993.
- [5] J. Guckenheimer, P. Holmes: *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Druhé vydání, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [6] W. O. Bray: *Nonlinear Dynamics & Biological systems*. University of Maine, 2002. Stav k 17. 3. 2007, <http://germain.umemat.maine.edu/faculty/bray/archive.html>.
- [7] Scholarpedia: *Andronov-Hopf Bifurcation*. Stav k 17. 3. 2007, http://www.scholarpedia.org/article/Andronov-Hopf_Bifurcation.
- [8] O. Modrlák: *Nelineární systémy*. Studijní materiály, Technická univerzita v Liberci, Stav k 17. 3. 2007, http://www.fm.vslib.cz/~krtsub/fm/tr2/tar2_nel.pdf.

Seznam obrázků

1.1	Trajektorie	9
1.2	Oblast stability	11
2.1	Topologická ekvivalence	12
2.2	Ekvivalence uzal-ohnisko	15
2.3	Zjednodušené fázové portréty v okolí hyperbolických rovnovážných bodů	17
2.4	Andronova-Hopfova bifurkace	18
2.5	Heteroklinická bifurkace	19
2.6	Homoklinická bifurkace sedlo-uzel	20
2.7	Bifurkační diagram vidličkové bifurkace	21
2.8	Bifurkační diagram transkritické bifurkace	22
3.1	Porušení hyperbolických podmínek	25
3.2	Bifurkace typu fold	26
3.3	Bifurkace typu fold v direktním součinu fázového a parametrického prostoru	27
3.4	Bifurkace typu fold perturbovaného systému	28
3.5	Superkritická Hopfova bifurkace v prostoru (x, y, α)	30
3.6	Superkritická Hopfova bifurkace	31
3.7	Subkritická Hopfova bifurkace v prostoru	31
3.8	Subkritická Hopfova bifurkace v prostoru (x, y, α)	32
3.9	Pevné body zpětného zobrazení	33
3.10	Konstrukce homeomorfismu u Hopfovy bifurkace	34
4.1	Bifurkační diagram pro model růstu populace	44
4.2	Hopfova bifurkace v modelu dravec-kořist	47