SBÍRKA PŘÍKLADŮ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY III

J. DANĚČEK, M. ZAHRADNÍKOVÁ

Symbolem ⋆ jsou označeny obtížnější příklady.

Posloupnosti

Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2n+1}{2n^2+5n+3} \qquad \left[\frac{3}{2}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}-3n}{\sqrt[3]{n^4+2n}} \qquad [0]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{n-1}\right)^n \qquad [+\infty]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right) \qquad \left[\frac{1}{2}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!} \qquad [0]$$

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n!} \qquad [1]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(4+\frac{1}{n}+\frac{3n^2}{n^2-2n}\right)\left(5-\frac{1}{n^2}\right) \qquad [35]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+1} \qquad [0]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n^2 \qquad [0]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} \qquad [0]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right) \qquad [0]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right) \qquad \left[\frac{1}{2}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n} \qquad [0]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n} \qquad [e^{-3}]$$

$$\bigstar \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{n+7} \qquad [e^{-3}]$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)^{20}(3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}} \qquad \left[\frac{3^{30}}{2^{30}}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{n}+3^{n}}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}} \qquad \left[\frac{1}{3}\right]$$

Nalezněte limitu posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$\bigstar \quad a_n=\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2}}, \qquad n\in\mathbb{N} \qquad \left[\frac{3}{2}\right]$$

$$a_n=\frac{(n+1)^3+2n(n^2-1)}{-n^3-1}, \qquad n\in\mathbb{N} \qquad [-3]$$

Určete, zda-li existuje limita posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Pokud neexistuje, určete $\liminf$ a $\limsup$ posloupnosti.
Řešení. [limita neexistuje, $\liminf=-1$, $\limsup=1$]

Určete, zda-li existuje limita posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{2}$$

Pokud neexistuje, určete $\liminf$ a $\limsup$ posloupnosti.
Řešení. [limita neexistuje, $\liminf=0$, $\limsup=1$]

Číselné řady

Rozhodněte o konvergenci řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$$ [konvergentní]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ [divergentní]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n+1}$$ [divergentní]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$$ [divergentní]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$$ [divergentní]

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$ [divergentní]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{n^n}$$ [konvergentní]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$$ [konvergentní]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$$ [konvergentní]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$ [konvergentní]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt[k]{n}}, \quad k \in \mathbb{N}, 0 < a < 1$$ [konvergentní]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$$ [konvergentní]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$ [konvergentní]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{3^n}$$ [konvergentní]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$$ [divergentní]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)!} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \qquad \text{[divergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} \qquad \text{[konvergentní]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!} \qquad \text{[divergentní]}$$

★ Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p$$

v závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$.
Řešení. [konverguje pro $p > 0$]

Vyšetřete konvergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n}}{1+\sin\frac{2}{n}-\cos\frac{2}{n}} \frac{1}{n}\sqrt{\mathrm{tg}\frac{1}{n}} \qquad \text{[konverguje]}$$

$$\star \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt[3]{n^3+n}}{\sqrt{n^3}} \qquad \text{[konverguje]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathrm{arctg}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right) \qquad \text{[konverguje]}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} \qquad \text{[konverguje - odmocn. kr.]}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n \qquad \text{[konverguje - odmocn. kr.]}$$

Pro které parametry $p \in \mathbb{R}$ konverguje řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{pn} \qquad [p \in (-\infty, 0)]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p\mathrm{e}^{-pn}}{n^2} \qquad [p \in [0, \infty)]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-p^{2n}}}{n^2} \qquad [p \in [-1, 1]]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)}{n^p} \qquad [p \in (-1/2, \infty)]$$

Rozhodněte o konvergenci řady a určete, kolik členů řady je nutno sečíst, aby chyba byla menší než dané ε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \varepsilon = 10^{-3} \qquad [n > 1000]$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}, \quad \varepsilon = 10^{-2} \qquad [n > 20]$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}, \quad \varepsilon = 10^{-1} \qquad \left[n > \mathrm{e}^{10}\right]$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}, \quad \varepsilon = 10^{-2} \qquad [n > 770]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}, \quad \varepsilon = 10^{-3} \qquad [n > 1000]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{7n}\right)^n, \quad \varepsilon = 10^{-3} \qquad [n > 9]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n, \quad \varepsilon = 10^{-2} \qquad [n > 5]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^{n^2}}, \quad \varepsilon = 10^{-3} \qquad [n > 4]$$

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \ln(1+2^n)$$

$\Big[$Nápověda: $\ln(1+2^n) \leq \ln 2^{n+1} = (n+1)\ln 2$, pak podílovým a srovnávacím kr. Řešení: konverguje.$\Big]$

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right) \sin 2^n$$

$\left[\text{Nápověda: } |\sin 2^n| \leq 1, \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right) \leq \pi\left(\frac{1}{4}\right)^n\text{, pak srovnávacím kr. Řešení: konverguje.}\right]$

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

$\left[\text{Nápověda: } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}\text{. Řešení: diverguje.}\right]$

Určete Cauchyův součin řad

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j}{j!}\,.$$

Výsledek:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}.$$

Určete Cauchyův součin řad

$$\sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1}, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j-1} jq^{j-1}\,.$$

Výsledek:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^{2n-2}.$$

Funkční řady

Příklad . Určete obor konvergence následujících řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad [x \in (-1,1)]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{x}{2^{n+1}} \qquad [x \in (-\infty,\infty)]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n \qquad [x \in (-\infty,0)]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^n \qquad \left[x \in (-\infty,-\tfrac{1}{2})\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^n \qquad \left[x \in \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2} \qquad \left[x \in \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \qquad [x \in (-2,2)]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^x \sin\left(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}\right) \qquad \left[x \in (-\infty, \tfrac{1}{3})\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+1)^n}{n^{n+1}} x^n \qquad \left[x \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\right]$$

Příklad . Dokažte, že následující řady konvergují stejnoměrně na daném intervalu I:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n^2}, \qquad I = [0,\infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad I = [-b,b], \forall\, 0 < b < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right), \qquad I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}, \qquad I = (-\infty,\infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{3/2}}, \qquad I = (-\infty,\infty)$$

Dokažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$ za předpokladu, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Dokažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$ za předpokladu, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Příklad . Určete obor konvergence a obor stejnoměrné konvergence řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$$

Výsledek: konverguje na $(0, \infty)$, konverguje stejnoměrně na $[a, \infty)$, $\forall\, a > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$$

Výsledek: konverguje na $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right)$, konverguje stejnoměrně na $[a, b]$, $\forall\ \frac{1}{\mathrm{e}} < a < b < \mathrm{e}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\mathrm{e}^{nx}}$$

Výsledek: konverguje na $[0, \infty)$, konverguje stejnoměrně na $[a, \infty)$, $\forall\, a > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^4 + n^2}$$

Výsledek: konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}$$

Výsledek: konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-nx}$$

Výsledek: konverguje stejnoměrně na $[0, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

Výsledek: konverguje stejnoměrně na $[-1, 1]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$$

Výsledek: konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$

Příklad . Určete obor stejnoměrné konvergence řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^3}$$

Výsledek: $(-\infty, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}$$

Výsledek: $(-\infty, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2 x}$$

Výsledek: konverguje na $(0, \infty)$, konverguje stejnoměrně na $[a, \infty)$, $\forall\, a > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^n}$$

Výsledek: $(-\infty, \infty)$

Příklad . Určete poloměr konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^n} x^n \qquad [\varrho = \mathrm{e}]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad [\varrho = \infty]$$

Příklad . Určete poloměr a obor konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} (x-1)^n$$

Výsledek: $\varrho = 1$, obor konvergence $[0, 2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}} x^n$$

Výsledek: $\varrho = 1$, obor konvergence $[-1, 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n}$$

Výsledek: $\varrho = 1/2$, obor konvergence $(-1/2, 1/2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{1}{n}$$

Výsledek: $\varrho = 1$, obor konvergence $[-1, 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}(x+3)^n$$

Výsledek: $\varrho = 2$, obor konvergence $(-5, -1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n$$

Výsledek: $\varrho = 1$, obor konvergence $[0, 2)$

Příklad . Určete součet řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$$

Výsledek: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2x}\ln(1-x) - \frac{x}{2}\ln(1-x)$, $x \in [-1, 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}$$

Výsledek: $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$, $x \in (-1, 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

Výsledek: $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$, $x \in (-1, 1)$

Příklad . Je dána řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

(a) Určete obor konvergence řady.

(b) Určete součet řady.

Výsledek:

(a) $[-1, 1)$

(b) $-\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}$

Příklad . Je dána řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

(a) Určete obor konvergence řady.

(b) Určete součet řady.

Výsledek:

(a) $(-1,1)$

(b) $-\frac{x}{(1-x)^2}$

Příklad . Rozviňte do Taylorovy řady o středu $c=0$ funkci $f(x)=\operatorname{arctg} x$ a určete obor konvergence této řady.
Výsledek: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x\in[-1,1]$

Příklad . Rozviňte do Taylorovy řady o středu $c=0$ funkci $f(x)=\ln(4-x^2)$ a určete obor konvergence této řady.
Výsledek: $f(x)=2\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n2^{2n}}$, $x\in(-2,2)$

Příklad . Rozviňte do Taylorovy řady o středu $c=0$ funkci $f(x)=\frac{1}{(1-x)(1+2x)}$ a určete obor konvergence této řady.
Výsledek: $f(x)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+2(-2)^n\right)x^n$, $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Příklad . Rozviňte do Taylorovy řady o středu $c=0$ funkci $f(x)=\frac{1}{(1+x)(1+3x)}$ a určete obor konvergence této řady.
Výsledek: $f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3^{n+1}-1)x^n$, $x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

Příklad . Odvoďte rozvoj funkce $f(x)=\ln(1+x)$ v nekonečnou řadu na základě vztahu $f'(x)=\frac{1}{1+x}$.
Výsledek: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, $x\in(-1,1]$

Fourierovy řady

Příklad . Napište Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \\ 0 & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Nakreslete standartizované periodické prodloužení a vyšetřete konvergenci této řady na $\mathbb{R}$.
Výsledek:

$$a_0 = 2 \int_0^{1/2} x \, dx = \frac{1}{4}$$

$$a_n = 2 \int_0^{1/2} x \cos(2n\pi x) \, dx = \frac{\cos n\pi - 1}{2n^2\pi^2} = \frac{(-1)^n - 1}{2n^2\pi^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = 2 \int_0^{1/2} x \sin 2n\pi x \, dx = -\frac{\cos n\pi}{2n\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n\pi}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) \sim \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \cos(2n\pi x) + (-1)^{n+1} \sin(2n\pi x) \right]$$

Příklad . Určete v intervalu $[-\pi, \pi]$ Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}.$$

Nakreslete standartizované periodické prodloužení a vyšetřete konvergenci této řady na $\mathbb{R}$.
Výsledek:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \right]$$

Příklad . Určete v intervalu $[-1, 1]$ Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \in [-1, 0), \\ x - 1 & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Nakreslete standartizované periodické prodloužení a vyšetřete konvergenci této řady na $\mathbb{R}$.
Výsledek: $a_n = 0$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$

$$f(x) \sim -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi x)$$

Příklad . Určete v intervalu $[-\pi, \pi]$ Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, 0], \\ 1 & x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Nakreslete standartizované periodické prodloužení a vyšetřete konvergenci této řady na $\mathbb{R}$.
Výsledek: $a_0 = 1$, $a_n = 0$ pro $n = 1, 2, \ldots$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \sin(nx) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)x$$

Příklad . Určete v intervalu $[-\pi, \pi]$ Fourierovu řadu funkce

$$f(x) = |x| \,.$$

Nakreslete standartizované periodické prodloužení a vyšetřete konvergenci této řady na $\mathbb{R}$.
Výsledek: $b_n = 0$ pro $n = 1, 2, \ldots$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$$

Příklad . Je dána funkce

$$f(x) = x - 1, \quad x \in (0, 1] \,.$$

Určete kosinovou Fourierovu řadu této funkce, nakreslete standartizované periodické prodloužení a vyšetřete konvergenci této řady na $\mathbb{R}$.
Výsledek: $b_n = 0$ pro $n = 1, 2, \ldots$

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(n\pi x) = -\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x$$

Dvojné integrály

Příklad . Zakreslete v kartézském souřadnicovém systému $\langle O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\rangle$ množiny:

1) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ x \leq y,\ y \leq 1,\ x \geq 0\}$,

2) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ |x| \leq y,\ y \leq 2\}$,

3) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ y \leq x,\ y \geq x^2\}$,

4) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq x,\ y \geq 0\}$,

5) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 - 4x \leq 0,\ x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$,

6) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ x \leq y \leq x^2,\ \frac{3}{x} \leq y \leq \frac{5}{x}\}$,

7) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 - 2y \leq 0,\ y^2 \leq x + 1\}$,

8) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 - 2y \leq 0,\ x + y^2 - 2y + 1 \geq 0\}$,

9) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 + 4x \leq 0,\ x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 \leq 0\}$.

Příklad . Zakreslete v kartézském souřadnicovém systému $\langle O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\rangle$ kompaktní (tj. uzavřenou a ohraničenou) množinu A vymezenou křivkami:

1) $A:\ x = 1,\ x = 2,\ y = x,\ y = \frac{1}{x}$,
$\left[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \leq x \leq 2,\ y \leq x,\ y \geq \frac{1}{x}\}\right]$,

2) $A:\ y = 0,\ y = 1,\ x = \sqrt{y},\ x = 3 - 2y$,
$\left[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ y \geq 0,\ x \geq \sqrt{y},\ x \leq 3 - 2y\}\right]$,

3) $A:\ y^2 = 2x,\ x = y + 4$,
$[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ y \geq x - 4,\ y^2 \leq 2x\}]$,

4) $A:\ y = x^2 + 1,\ y = (x-1)^3,\ x = 0,\ y = -x + 3$,
$\left[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ y \leq x^2 + 1,\ y \geq (x-1)^3,\ 0 \leq x \leq 2,\ y \leq -x + 3\}\right]$,

5) $A:\ x - y^2 = 0,\ x^2 + y = 0,\ x + y + 1 = 0$,
$[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ y \geq -x - 1,\ y \leq -x^2,\ y^2 \geq x\}]$,

6) $A:\ y - x = 0,\ y^2 - x = 0,\ x^2 - 4y + 2 = 0$,
$\Big[$$A$ není určena jednoznačně, existují čtyři různé kompaktní množiny vymezené danými křivkami:
$A_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ y - x \geq 0,\ y^2 - x \leq 0,\ x^2 - 4y + 2 \geq 0\}$,
$A_2 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ y - x \geq 0,\ y^2 - x \leq 0,\ x^2 - 4y + 2 \leq 0\}$,
$A_3 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ y - x \leq 0,\ y^2 - x \leq 0,\ x^2 - 4y + 2 \leq 0\}$,
$A_4 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ y - x \leq 0,\ y^2 - x \geq 0,\ x^2 - 4y + 2 \leq 0\}\Big]$,

7) $A:\ y = 4 - x^2,\ y = x^3,\ x + 4y + 3 = 0$,
$\Big[$$A$ není určena jednoznačně, existují dvě různé kompaktní množiny vymezené danými křivkami:
$A_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ y \leq 4 - x^2,\ y \geq x^3,\ x + 4y + 3 \geq 0\}$,
$A_2 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ y \leq 4 - x^2,\ y \leq x^3,\ x + 4y + 3 \geq 0\}\Big]$.

Příklad . Zakreslete v kartézském souřadnicovém systému $\langle O;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\rangle$ množinu A a vyjádřete ji jako elementární obor 1. typu $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$ nebo 2. typu $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$, event. vyjádřete A jako sjednocení elementárních oborů :

1) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^3 \le y,\ y^2 \le x\}$,
$\left[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x^3 \le y \le \sqrt{x}\ \}\right.$ nebo $\left.A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le \sqrt[3]{y}\}\right]$,

2) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \le -2x,\ y^2 \le x\}$,
$\left[\ A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{1}{4},\ -\sqrt{x} \le y \le -2x\}\right]$,

3) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 9(y+2) \ge (x-1)^3,\ x - y - 3 \ge 0,\ x \ge 0\}$,
$\left[\ A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 4,\ \frac{1}{9}(x-1)^3 - 2 \le y \le x - 3\}\right]$,

4) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \ge x^2,\ y \le \sqrt{8x},\ y \ge -2x + 3\}$,
$\left[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \le x \le 1,\ -2x + 3 \le y \le \sqrt{8x}\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le \sqrt{8x}\}\right]$,

5) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \le -x^2 - 1,\ (y+1)^2 \le x\}$,
$\left[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ -\sqrt{x} - 1 \le y \le -x^2 - 1\}\right.$ nebo $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : -2 \le y \le -1,\ (y+1)^2 \le x \le \left.\sqrt{-y-1}\}\right]$,

6) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \le x^3,\ y^2 \ge 4x,\ 2x - y - 4 \le 0,\ y \le 0\}$,
$\left[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : -2 \le x \le 0,\ 2x - 4 \le y \le x^3\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 2x - 4 \le y \le -\sqrt{2x}\}\right]$,

7) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 2\sqrt{2}y \le x^2,\ y^2 \le x,\ x - y - 2 \le 0,\}$,
$\left[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ -\sqrt{x} \le y \le \frac{x^2}{2\sqrt{2}}\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ x - 2 \le y \le \frac{x^2}{2\sqrt{2}}\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x \le 4,\ x - 2 \le y \le \sqrt{x}\}\right.$, nebo $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y \le 0,\ y^2 \le x \le y + 2\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}y} \le x \le y + 2\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{2} \le y \le 2,\ y^2 \le \left.x \le y + 2\}\right]$,

8) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \ge \sqrt[5]{x^2},\ y \le 2 - x^2\}$,
$\left[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ \sqrt[5]{x^2} \le y \le 2 - x^2\}\right]$,

9) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : -\sin x \le y \le 1 + \cos x,\ |x| \le \pi\}$,
$\left[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : -\frac{pi}{2} \le x \le \pi,\ -\sin x \le y \le 1 + \cos x\}\right]$.

10) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \ge \operatorname{arctg} x \ge \frac{\pi}{4},\ y \le \frac{\pi}{3}\}$,
$\left[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le \sqrt{3},\ \operatorname{arctg} x \le y \le \frac{\pi}{3}\}\right]$,

11) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \ge \operatorname{arctg} x,\ y \ge -\frac{\pi}{4}x^3,\ y \le \frac{\pi}{4}\}$,
$\left[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ \operatorname{arctg} x \le y \le \frac{\pi}{4}\}\right.$ nebo lépe $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \frac{\pi}{4},\ -\sqrt[3]{\frac{4y}{\pi}} \le x \le \left.\operatorname{tg} y\}\right]$,

12) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \ge 1 - x,\ y \ge \ln x,\ y \le 2\}$,
$\left[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ 1 - x \le y \le 2\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le e^2,\ \ln x \le y \le 2\}\right.$
nebo lépe $\left.A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2,\ 1 - y \le x \le e^y\}\right]$,

13) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^3 + y - 2 \geq 0,\ y^2 - 3y + x + 1 \leq 0\}$,
$\Big[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq x \leq 1,\ 2 - x^3 \leq y \leq \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} - x}\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq \frac{5}{4},\ \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4} - x} \leq y \leq \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} - x}\}$ nebo lépe $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq y \leq 3,\ \sqrt[3]{2-y} \leq x \leq -y^2 + 3y - 1\}\Big]$.

Příklad . Zakreslete v kartézském souřadnicovém systému $\langle O;\ \vec{i},\ \vec{j}\rangle$ kompaktní množiny A vymezené křivkami a zapište je jako elementární obor 1. nebo 2. typu:

1) $A:\ y = \frac{1}{x},\ y = \frac{8}{x},\ y = x^2,\ y = 4x$,
$[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{1}{2} \leq x \leq 1,\ \frac{1}{x} \leq y \leq 4x\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x \leq \sqrt{2},\ \sqrt{2} \leq y \leq 2\}]$,

2) $A:\ y = 2x,\ y = \frac{x}{2},\ y^3 = x^2$,
$\Big[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq \frac{1}{8},\ \frac{x}{2} \leq y \leq 2x\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{1}{8} \leq x \leq 8,\ \frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt[3]{x^2}\}\Big]$,

3) $A:\ y = 2 - x^2,\ y = \sqrt{-x},\ y^2 = x^3$,
$\Big[A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq x \leq \frac{0}{,}\ \sqrt{-x} \leq y \leq 2 - x^2\} \cup \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1,\ \sqrt{x^3} \leq y \leq 2 - x^2\}\Big]$.

Příklad . Vypočtěte následující dvojnásobné integrály:

$$\int_0^2 [\int_0^1 \left(x^2 + 2y\right)\, dx]\, dy, \qquad \left[\frac{14}{3}\right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\int_{\cos y}^1 x^4\, dx]\, dy, \qquad \left[\frac{15\pi - 16}{150}\right]$$

$$\int_0^1 [\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\, dy]\, dx, \qquad \left[\frac{\pi}{12}\right]$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\int_0^{3\cos\varphi} r^2 \sin^2\varphi\, dr]\, d\varphi, \qquad \left[\frac{12}{5}\right]$$

$$\int_1^2 [\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2}\, dy]\, dx, \qquad \left[\frac{9}{4}\right]$$

$$\int_0^a [\int_0^{\sqrt{x}} dy]\, dx, \qquad \left[\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\int_1^2 [\int_0^{\ln y} e^x\, dx]\, dy, \qquad \left[\frac{1}{2}\right]$$

$$\int_0^1 [\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dy]\, dx. \qquad \left[\frac{\pi}{6}\right]$$

Příklad . Vypočtěte integrály přes dvojrozměrný interval D:

$$\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dxdy, \qquad D=[3,4]\times[1,2], \qquad \left[\ln\frac{25}{24}\right]$$

$$\iint_D e^{x+y}\,dxdy, \qquad D=[0,1]\times[0,2], \qquad \left[(e-1)\left(e^2-1\right)\right]$$

$$\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dxdy, \qquad D=[0,1]\times[0,1], \qquad \left[\frac{\pi}{12}\right]$$

$$\iint_D \sqrt{xy}\,dxdy \qquad D=[0,a]\times[0,b], \qquad \left[\frac{4}{9}\sqrt{a^3b^3}\right]$$

$$\iint_D \sin(2x+y)\,dxdy, \qquad D=[0,\pi]\times\left[\frac{\pi}{4},\pi\right], \qquad [0]$$

$$\iint_D x^2y\cos\left(xy^2\right)dxdy, \qquad D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2], \qquad \left[-\frac{\pi}{16}\right]$$

$$\iint_D xy\cos(x+y)\,dxdy, \qquad D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,\pi], \qquad [2-2\pi]$$

$$\iint_D x^3y\cos(xy^2)\,dxdy, \qquad D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2], \qquad \left[-\frac{\pi^2}{32}\right]$$

$$\iint_D xy^2\mathrm{e}^{xy}\,dxdy, \qquad D=[0,2]\times[0,1], \qquad [2]$$

$$\iint_D xy\mathrm{e}^{xy^2}\,dxdy, \qquad D=\left[\frac{1}{2},1\right]\times\left[\frac{1}{2},1\right]. \qquad \left[\frac{1}{2}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{1/2}-4\mathrm{e}^{1/4}+4\mathrm{e}^{1/8})\right]$$

Příklad . Převeďte dvojný integrál $\iint_D f(x,y)\ dxdy$ na dvojnásobný, je-li dána kompaktní množina D:

1) Množina D je vymezena trojúhelníkem s vrcholy $A[0,0],\ B[1,0],\ C[1,1]$,
$\left[\int_0^1[\int_y^1 f(x,y)dx]dy = \int_0^1[\int_0^x f(x,y)dy]dx\right]$,

2) Množina D je vymezena rovnoběžníkem s vrcholy $K[1,2],\ L[2,4],\ M[2,7],\ N[1,5]$,
$\left[\int_1^2[\int_{2x}^{2x+3} f(x,y)dy]dx = \int_2^4[\int_1^{y/2} f(x,y)dx]dy + \int_4^5[\int_1^2 f(x,y)dx]dy + \int_5^7[\int_{\frac{y-3}{2}}^2 f(x,y)dx]dy\right]$,

3) Množina D je ohraničená hyperbolou $y^2-x^2=1$ a kružnicí $x^2+y^2=9$, přičemž obsahuje bod $O=(0,0)$,

$$\Big[\int_{-3}^{-2}\Big[\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy\Big]dx+\int_{-2}^{2}\Big[\int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)dy\Big]dx+\int_{2}^{3}\Big[\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy\Big]dx =$$

$$\int_{-\sqrt{5}}^{-1}\Big[\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)dx\Big]dy+\int_{-\sqrt{5}}^{-1}\Big[\int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx\Big]dy+\int_{-1}^{1}\Big[\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx\Big]dy+$$

$$\int_{1}^{\sqrt{5}}\Big[\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)dx\Big]dy+\int_{1}^{\sqrt{5}}\Big[\int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx\Big]dy\Big],$$

4) Množina $D = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq a^2\}$,

$$\left[\int_{-a}^{a}\Big[\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy\Big]dx = \int_{-a}^{a}\Big[\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx\Big]dy\right].$$

Příklad . Vypočtěte následující integrály $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, je-li D kompaktní rovinný obrazec vymezený danými křivkami:

$$\iint\limits_D (x-y)\ dxdy, \qquad D: y=0,\ y=x,\ x+y=2, \qquad \left[\frac{2}{3}\right]$$

$$\iint\limits_D \left(x^2+y\right)\ dxdy, \qquad D: y=x^2,\ y^2=x, \qquad \left[\frac{33}{140}\right]$$

$$\iint\limits_D \frac{x}{3}\,dxdy, \qquad D: x=2+\sin y,\ x=0,\ y=0,\ y=2\pi, \qquad \left[\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy, \qquad D: x=2,\ y=x,\ xy=1, \qquad \left[\frac{9}{4}\right]$$

$$\iint\limits_D \cos(x+y)\,dxdy, \qquad D: x=0,\ y=\pi,\ y=x, \qquad [-2]$$

$$\iint\limits_D xy\,dxdy, \qquad D: y\geq 0,\ (x-2)^2+y^2=1, \qquad \left[\frac{4}{3}\right]$$

$$\iint\limits_D (x+y+10)\ dxdy, \qquad D: x^2+y^2=4, \qquad [40\pi]$$

$$\iint\limits_D |(x-1)\,y|\,dxdy, \qquad D:\ x=0,\ y=-x+2,\ y=-1. \qquad \left[\frac{41}{24}\right]$$

Příklad . Vypočtěte integrály

$$\iint\limits_M e^{\frac{x}{y}}\,dxdy, \qquad M=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x>0, y>1, y<2, y>\sqrt{x}\right\}, \qquad \left[e^2-\frac{3}{2}\right]$$

$$\iint\limits_M \frac{x^2}{y^2}\,dxdy, \qquad M=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x<3, y>1/x, y<4x\right\}, \qquad \left[\frac{1225}{64}\right]$$

$$\iint\limits_M x\,(y+\sin(\pi y))\;dxdy, \qquad M=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x>0, y>0, y<-x+1\right\}, \qquad \left[\frac{\pi^3+12\pi^2-48}{24\pi^3}\right]$$

$$\iint\limits_M x(1-y)\,dxdy, \qquad M=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1, y>0, y<x\right\}, \qquad \left[\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{1}{16}\right]$$

$$\iint\limits_M (x^2+y)\,dxdy, \qquad M=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : y>x^2, y<1\right\}, \qquad \left[\frac{16}{15}\right]$$

$$\iint\limits_M xy^2\,dxdy, \qquad M=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1, y>-x+1\right\}, \qquad \left[\frac{1}{20}\right]$$

$$\iint\limits_M xy\,dxdy, \qquad M=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : y<\ln\frac{1}{x}, y<1, y>0, 0<x<1\right\}, \qquad \left[\frac{1}{8}\left(1-\frac{3}{\mathrm{e}^2}\right)\right]$$

$$\iint\limits_M |xy|\,dxdy, \qquad M=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : y<1, y>|x|\right\}. \qquad \left[\frac{1}{4}\right]$$

Příklad . Vyjádřete dvojný integrál použitím vhodné transformace a následně vypočítejte pro zadanou funkci:

1) $\int\limits_0^4[\int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)dy]dx,\ f(x,y)=x+y,\ u=x,\ v=y-2x,$
[Návod: Užijte transformační rovnice: $u=x,\ v=y-2x$.]

2) $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le x\le 2,\ 1-x\le y\le 2-x,\ y\ge 0\},\ f(x,y)=(x-y)^2,$
[Návod: Užijte transformační rovnice: $u=x+y,\ v=x-y$.]

3) $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le x\le 2,\ 1-x\le y\le 2-x\},\ f(x,y)=(x-y)^2,$
[Návod: Užijte transformační rovnice: $u=x,\ v=x+y$.]

4) $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$ D je kompaktní rovinný obrazec vymezený křivkami: $xy=\frac{1}{2},\ xy=2,\ 2y=x,\ y=2x,$ pro $x\ge 0,\ y\ge 0,\ f(x,y)=1,$
[Návod: Užijte transformační rovnice: $u=xy,\ y=vx$.]

5) $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$ D je kompaktní rovinný obrazec vymezený křivkami: $y^2=x,\ y^2=2x,\ xy=2,\ xy=1,$ zaveďte proměnné $u=xy,\ y^2=vx,\ f(x,y)=1,$
[Návod: Užijte transformační rovnice: $u=xy,\ y^2=vx$]

6) $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$ D je kompaktní rovinný obrazec vymezený křivkami: $y^2=x,\ y^2=8x,\ y=x^2,\ y=\frac{x^2}{8},\ f(x,y)=1,$
[Návod: Užijte transformační rovnice: $x^2=uy,\ y^2=vx$.]

7) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$, množina D je vymezena nerovnicí: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\le a^{\frac{2}{3}},\ a\ge 0,\ f(x,y)=1.$
[Návod: Užijte transformační rovnice: $x=\varrho\cos^3\varphi,\ y=\varrho\sin^3\varphi.$]

Řešení.

1) $\left[\int_0^4[\int_0^u f\left(u,\ v+2u\right)\ dv]du\right]$, $\left[\frac{224}{3}\right]$,

2) $\left[\frac{1}{2}\int_1^2[\int_{-u}^u f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)dv]du\right]$, $\left[\frac{5}{4}\right]$,

3) $\left[\int_0^2[\int_1^2 f\left(u,v-u\right)dv]du\right]$, $\left[\frac{10}{3}\right]$,

4) $\left[\int_{1/2}^2[\int_{1/2}^2 f\left(\sqrt{\frac{u}{v}},\sqrt{uv}\right)\frac{1}{2|v|}du]dv\right]$, $\left[\frac{3}{2}\ln 2\right]$,

5) $\left[\int_1^2[\int_1^2 f\left(\sqrt[3]{\frac{u^2}{v}},\sqrt[3]{uv}\right)\frac{1}{3|v|}\ du]dv\right]$, $\left[\frac{1}{3}\ln 2\right]$,

6) $\left[\int_1^8[\int_1^8 f\left(\sqrt[3]{u^2v},\sqrt[3]{uv^2}\right)\frac{1}{3}\ du]dv\right]$, $\left[\frac{49}{3}\right]$,

7) $\left[3\int_0^a[\int_0^{2\pi} f\left(\varrho\cos^3\varphi,\ \varrho\sin^3\varphi\right)\varrho\cos^2\varphi\ \sin^2\varphi\ d\varphi]dr\right]$, $\left[\frac{3}{8}\pi a^2\right]$.

Příklad . Vyjádřete dvojný integrál použitím transformace do polárních souřadnic:

1) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\le r^2\},$

2) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\le ax\}$, je-li a) $a\ge 0$, b) $a\le 0$,

3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\le by\}$, je-li a) $b\ge 0$, b) $b\le 0$,

4) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy,\ D=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\le 16,\ x^2+y^2\ge 1,\ y\ge x,\ y\ge -x\ \},$

5) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$, kde D je kompaktní rovinný obrazec vymezený křivkami: $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=8x,\ y=x,\ y=2x,$

6) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$, kde D je kompaktní rovinný obrazec vymezený křivkami: $y=x,\ y=0,\ x=1,$

7) $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$, kde D je vnitřní část pravé smyčky Bernoulliovy lemniskáty $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right),a\ge 0,$

Řešení.

1) $\left[\int_0^{2\pi}[\int_0^{r} f\left(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi\right)\varrho\ d\varrho]d\varphi\right],$

2) $\left[a)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^{a\cos\varphi} f\left(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi\right)\varrho\ d\varrho]d\varphi,\ b)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}[\int_0^{a\cos\varphi} f\left(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi\right)\varrho\ d\varrho]d\varphi\right],$

3) $\left[a)\ \int_0^{\pi}[\int_0^{b\sin\varphi} f\left(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi\right)\varrho\ d\varrho]d\varphi,\ b)\ \int_{-\pi}^{0}[\int_0^{b\sin\varphi} f\left(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi\right)\varrho\ d\varrho]d\varphi\right],$

4) $\left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}[\int_1^{4} f\left(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi\right)\varrho\ d\varrho]d\varphi\right],$

5) $\left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2}[\int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f\left(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi\right)\varrho\ d\varrho]d\varphi\right],$

6) $\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f\left(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi\right)\varrho\ d\varrho]d\varphi\right],$

7) $\left[\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}[\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f\left(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi\right)\varrho\ d\varrho]d\varphi\right],$

Příklad . Vypočtěte integrály s použitím transformace do polárních souřadnic:

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)\,dxdy, \qquad D=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}, \qquad \left[\frac{\pi a^4}{8}\right]$$

$$\int_0^4[\int_0^{\sqrt{16-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)dy]dx, \qquad \left[\frac{\pi}{4}\left(17\ln 17-16\right)\right]$$

Příklad . Vypočtěte integrály

$$\iint_M (x^2+y^2)\,dxdy, \qquad M=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2<a^2\right\}, \qquad \left[\frac{1}{2}\pi a^4\right]$$

$$\iint_M (x^2+y^2)\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,dxdy, \qquad M=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ x<y<\sqrt{3}x, 0<x^2+y^2<1\right\}, \qquad \left[\frac{\pi}{24}\right]$$

$$\iint_M \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy, \qquad M=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x>0, y>x, x^2+y^2<1\right\}, \qquad \left[\frac{1}{4}\pi(2-\sqrt{3})\right]$$

$$\iint_M \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy, \qquad M=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<ax\right\},\ a>0, \qquad \left[\frac{a^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)\right]$$

$$\iint_M \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) dxdy, \qquad M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 9, \frac{\sqrt{3}}{3}x < y < \sqrt{3}x\right\}, \qquad \left[\frac{\pi^2}{6}\right]$$

$$\iint_M \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\, dxdy, \qquad M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x^2+y^2 < 1\right\}, \qquad \left[\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\iint_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\, dxdy, \qquad M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x < y < \sqrt{3}x, 1 < x^2+y^2 < 4\right\}, \qquad \left[\frac{\pi}{12}\ln^2 2\right]$$

$$\iint_M \ln(1+x^2+y^2)\, dxdy, \qquad M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 < 16, x > 0, y > 0\right\}. \qquad \left[\frac{\pi}{4}(17\ln 17 - 16)\right]$$

Příklad . Vypočtěte integrály

$$\iint_M \frac{y}{x^2+y^2}\, dxdy, \qquad M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < y, y^2 < 2x\right\}, \qquad \left[\frac{1}{2}\left(5\ln 2 - 3\ln 3\right)\right]$$

$$\iint_M |xy|\, dxdy, \qquad M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < a^2\right\}, a > 0, \qquad \left[\frac{1}{2}a^4\right]$$

$$\iint_M x\, dxdy, \qquad M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < \cosh x\right\}. \qquad \left[1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$$

Příklad . Vypočtěte dvojný integrál pomocí transformace do zobecněných polárních souřadnic $x = a\varrho\cos^p\varphi,\ y = b\varrho\sin^p\varphi$, kde a, b, p jsou vhodně zvolené konstanty:

1) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dxdy,\ \ D = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,\ a > 0,\ b > 0\right\},$

[Nápověda: $x = a\varrho\cos\varphi,\ y = b\varrho\sin\varphi$. Řešení: $\dfrac{2\pi ab}{3}$.]

2) $\displaystyle\iint_D xy\, dxdy, \qquad D = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2\ :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ a \ge 0,\ b \ge 0\right\},$

[Nápověda: $x = a\varrho\cos\varphi,\ y = b\varrho\sin\varphi$. Řešení: $\dfrac{a^2b^2}{8}$.]

3) $\displaystyle\iint_D dxdy$, D je kompaktní rovinný obrazec vymezený křivkou: $\sqrt[4]{\frac{x}{4}} + \sqrt[4]{\frac{y}{9}} = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,$

[Nápověda: $x = 4\varrho\cos^8\varphi,\ y = 9\varrho\sin^8\varphi$. Řešení: $\dfrac{18}{35}$.]

4) $\displaystyle\iint_D dxdy$, D je kompaktní rovinný obrazec vymezený křivkou: $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b},\ x \ge 0,\ y \ge 0,$

[Nápověda: $x = a\varrho\cos^2\varphi,\ y = b\varrho\sin^2\varphi$. Řešení: $\dfrac{ab}{12}$.]

Geometrické a fyzikální aplikace dvojného integrálu

Příklad . Vypočtěte obsah kompaktního rovinného obrazce A vymezeného křivkami:

1) $x+y=1,\ x+y=2,\ y=\frac{1}{2}x,\ y=2x,$ $\left[\frac{1}{2}\right]$
2) $y=\cos x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ y=0,$ $[1]$
3) $y=4,\ y=2^x,\ y=2^{-2x},$ $\left[12-\frac{9}{\ln 4}\right]$
4) $y=x^2,\ y=4-x^2,$ $\left[\frac{16\sqrt{2}}{3}\right]$
5) $y=-2,\ y=x+2,\ y=2,\ y^2=x,$ $\left[\frac{40}{3}\right]$
6) $y=x^2,\ y=\sqrt{x},$ $\left[\frac{1}{3}\right]$
7) $xy=a^2,\ x^2=ay,\ y=2a,\ x=0,\ (a\ge 0)\,,$ $\left[a^2\left(\frac{2}{3}+\ln 2\right)\right]$
8) $y=\frac{1}{x},\ y=4x,\ y=8,$ $\left[\frac{15}{2}-\ln 4\right]$
9) A kompaktní obrazec vymezený křivkou $x^2+y^2=5$, tečnou k této křivce v bodě $A=[1,2]$ a přímkou $y=0$, $\left[5-\frac{5}{2}\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$
10) $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=2x,\ y=x,\ y=0,$ $\left[\frac{3}{4}(\pi+2)\right]$
11) $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=8x,\ y=2x,\ y=x,$ $[12\operatorname{arctg}2+6\sin 2\operatorname{arctg}2-3\pi-6]$
12) $(x-a)^2+y^2=a^2,\ x^2+(y-a)^2=a^2,$ $\left[a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right]$
13) $y^2=2px+p^2,\ y^2=-2qx+q^2,\ p,\ q>0,$ $\left[\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}\right]$
14) $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2).$ $\left[\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}\right]$

Příklad . Vypočtěte obsah rovinného obrazce A:

1) $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ y\le -x^2,\ y\le x^3-2,\ 3x+2y+9\ge 0\},$ $\left[\frac{34}{3}\right]$
2) $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ y\le -x^3,\ y\le 2x^3,\ y\ge x^3-1\},$ $\left[\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right]$
3) $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ 9\,(y+2)\ge (x-1)^3\,,\ x-y-3\ge 0,\ x\ge 0\},$ $\left[\frac{9}{4}\right].$
4) $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ (y+3)^2\le 3x-2,\ y+1+x^2\le 0\},$ $\left[\frac{5}{3}\right]$
5) $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ y\ge x^2,\ y\le\sqrt{8x},\ y\ge -2x+3\},$ $\left[\frac{19}{12}\right]$
6) $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ y\le x^2+1,\ y\ge (x-1)^3\,,\ y\le -x+3,\ x\ge 0\},$ $\left[\frac{17}{6}\right]$
7) $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ 2x-y-4\le 0,\ y^2\ge 4x,\ y+|x|^3\le 0\},$ $\left[\frac{29}{3}\right]$
8) $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ x\ge 0,\ \operatorname{arctg}x\le y\le 1\},$ $\left[\ln\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 1}\right]$
9) $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ y\le 1,\ y\le x-1,\ y\ge\ln x\},$ $\left[\frac{2e-5}{2}\right]$
10) $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ y\le 1-x,\ y\le e^x,\ y\ge 0\},$ $\left[\frac{3}{2}\right]$
11) $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\le 4,\ x+y\ge 2\},$ $[\pi-2]$
12) $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1,\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}\ge 1\},$ $\left[\frac{3}{2}(\pi-2)\right]$
13) $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ x\ge 1,\ \frac{1}{x^3}\le y\le\frac{1}{x^2}\},$ $\left[\frac{1}{2}\right],$ Pozor, nevlastní integrál!
14) $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ x\le 0,\ e^{3x}\le y\le e^x\},$ $\left[\frac{2}{3}\right]$
15) $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ x\ge 0,\ -e^{-x}\le y\le\frac{1}{x^2+1}\}.$ $\left[\frac{\pi+2}{2}\right]$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah části roviny ohraničené křivkou $x^2+y^2=5$, tečnou k této křivce v bodě $A=[1,2]$ a přímkou $y=0$.

Řešení. $\left[5\left(1-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right]$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah části roviny

$$\Omega = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y > x^3, y < 2, x > 0, y < x+1\right\} \qquad \left[\frac{1}{2}\left(3\sqrt[3]{2}-1\right)\right]$$

$$\Omega = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y < x+1, x^2+y^2 < 1, y > 0\right\} \qquad \left[\frac{\pi+2}{4}\right]$$

$$\Omega = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, 0 < y < a, (x-a)^2+(y-a)^2 > a^2\right\}, a > 0 \qquad \left[a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\Omega = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2-6y < 0,\ x^2+y^2-2y > 0,\ x < y < \sqrt{3}x\right\}. \qquad \left[\frac{2}{3}\pi - 2\sqrt{3}+4\right]$$

$$\Omega = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 < 2ax,\ x^2+y^2 < 2by,\right\},\ a,b > 0,$$

$$\left[a^2\frac{\pi}{2} + \frac{a^2-b^2}{2}\left(\sin(2\operatorname{arctg}\frac{a}{b}) - 2\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right)\right]$$

$$\Omega = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x^2+y^2 > a^2, (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) < 0\right\}, a > 0. \qquad \left[\frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa (tělesem rozumíme kompaktní množinu v trojrozměrném prostoru) W, je-li W vymezeno plochami:

1) $6x - 9y + 5z = 0,\ 3x - 2y = 0,\ 4x - y = 0,\ x + y = 5,\ z = 0,$ $\left[\frac{15}{2}\right]$
2) $x + y + z = 6,\ 3x + 2y = 12,\ y = 0,\ z = 0,$ $[4]$
3) $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = \pi,\ y = \pi,\ z = \sin^2 x \sin^2 y,$ $\left[\frac{\pi^2}{4}\right]$
4) $z = x^2 + y^2,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,$ $\left[\frac{1}{6}\right]$
5) $z = 2x^2 + y^2 + 1,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,$ $\left[\frac{3}{4}\right]$
6) $y = x^2,\ x + y + z = 4,\ y = 1,\ z = 0,$ $\left[\frac{68}{15}\right]$
7) $x^2 = 6 - 5y,\ y^2 = x,\ 0 \le z \le 9,$ $\left[\frac{243}{5}\right]$
8) $x^2 = y,\ x^2 = 4 - 3y,\ z = 0,\ z = 9,$ $[16]$
9) $y = x^2,\ x = y^2,\ z = 12 + y - x^2,\ z = 0,$ $\left[\frac{569}{140}\right]$
10) $z = x^2 - y^2,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x \le 1,$ $\left[\frac{1}{3}\right]$
11) $x^2 + z^2 = 16,\ y = 0,\ z = 0,\ y = x,\ x \ge 0,$ $\left[\frac{64}{3}\right]$
12) $y = x^2,\ y^2 = x,\ z = x^2 - y^2,$ $\left[\frac{1}{35}\right]$
13) $z = 4 - x^2 - y^2,\ 2z = 2 + x^2 + y^2,$ $[3\pi]$
14) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2,\ 2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9},$ $[8\pi]$
15) $x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 - z^2 = -4,$ $\left[\frac{32\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\right]$
16) $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0,\ x^2 + y^2 - z^2 = -4,$ $\left[\frac{32\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$
17) $x^2 + y^2 = a^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2,$ $\left[\frac{4\pi a^3}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)\right]$
18) $x^2 + y^2 - 2ax = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2,\ a \ge 0,$ $\left[\frac{16a^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)\right]$
19) $x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \ge 0,$ $\left[\frac{32}{9}\right]$
20) $z = 4 - y^2,\ y = \frac{x^2}{2},\ z = 0,$ $\left[\frac{256}{21}\right]$
21) $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z^2 = x^2 + y^2,\ z \ge 0,$ $\left[21\pi\left(2-\sqrt{2}\right)\right]$
22) $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 3z,$ $\left[\frac{19\pi}{6}\right]$
23) $z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = x,\ x^2 + y^2 = 2x,\ z = 0,$ $\left[\frac{45\pi}{32}\right]$
24) $z = xy,\ x^2 + y^2 = 2x,\ z \ge 0,$ $\left[\frac{2}{3}\right]$
25) $z = -y^3,\ z = -x$ pro $-x \le y \le 0,\ x \le 1,$ $\left[\frac{23}{60}\right]$
26) $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1,$ $[16\pi]$

27) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z^2,\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1,$ $\left[4\pi\left(2-\sqrt{2}\right)\right]$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa

$$\Omega=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : z>2(x^2+y^2), z<1-\sqrt{x^2+y^2}\right\} \qquad \left[\frac{5}{48}\pi\right]$$

$$K=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : [x,y]\in\Omega, 0<z<x^2+y^2\right\}, \qquad \Omega=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2<y<\sqrt{x}\right\} \qquad \left[\frac{6}{35}\right]$$

$$\Omega=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : z>2(x^2+y^2),\ z<1-\sqrt{x^2+y^2}\right\} \qquad \left[\frac{5}{48}\pi\right]$$

$$\Omega=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2<1, x>0, y>0, z>0, z<\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \qquad \left[\frac{\sqrt{3}}{16}\pi\right]$$

$$\Omega=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2<1, z>x^2+y^2-1\right\} \qquad \left[\frac{7}{6}\pi\right]$$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah části plochy S, je-li:

1) $S=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ 6x+3y+2z=12,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\ \},$ $[14]$
2) $S=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ x+y+z-4=0,\ x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=2\ \},$ $[4\sqrt{3}]$
3) $S=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ z^2=2xy,\ x\geq 0,\ x\leq 3,\ y\geq 0,\ y\leq 6,\ z\geq 0\ \},$ $[36]$
4) $S=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ 2z=x^2,\ y\leq 2x,\ y\geq\frac{x}{2},\ x\leq 2\sqrt{2}\ \right\},$ $[13]$
5) $S=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+z^2=1,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y\leq 2\ \},$ $[2\pi]$
6) $S=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2=2z,\ x^2+y^2\leq 1\ \},$ $\left[\frac{2}{3}\pi\left(\sqrt{8}-1\right)\right]$
7) $S=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ z=xy,\ x^2+y^2\leq a^2\ \},$ $\left[\frac{2\pi}{3}\left((1+a^2)^{\frac{3}{2}}-1\right)\right]$
8) $S=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ y^2+z^2=x^2,\ x^2+y^2\leq a^2\ \},$ $[2\pi a^2]$
9) $S=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\ \right\},$ $\left[\frac{2}{3}\pi ab\left(\sqrt{8}-1\right)\right]$
10) $S=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2\leq 1,\ z\geq 0\ \},$ $\left[4\pi\left(2-\sqrt{3}\right)\right]$
11) $S=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ 3x^2+3y^2\leq z^2\ \right\},$ $\left[4\pi\left(2-\sqrt{3}\right)\right]$
12) $S=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2=9,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1\ \right\},$ $\left[72\arcsin\frac{2}{3}\right]$
13) $S=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ x^2+y^2-x\leq 0\ \right\},$ $[\pi-2]$
14) $S=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2\leq 2x\ \right\},$ $[\sqrt{2}\pi]$
15) $S=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ y^2+z^2=2ax,\ y^2\leq ax,\ x\leq a,\ a\ >\ 0\ \},$ $\left[\frac{\pi a^2}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)\right]$
16) $S=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z^2\leq 2y\ \right\},$ $[\pi\sqrt{2}]$
17) $S=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ z^2=4x,\ y^2\leq 4x,\ x\leq 1\ \},$ $\left[\frac{16}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)\right]$
18) $S=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+z^2=1,\ x^2+y^2\leq 1\ \},$ $[8]$
19) $S=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 :\ z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \frac{x^2}{4}+y^2<1\right\}.$ $\left[\frac{4}{3}\pi\right]$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah části plochy $x^2+z^2=1$ ohraničené plochami $y=0,\ z=0,\ x+y=2.$
Řešení. $[2\pi]$

Příklad . Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah části plochy $z=x^2+y^2,\quad 0<z<a,\ a>0.$
Řešení. $\left[\frac{\pi}{6}\left((1+4a)\sqrt{1+4a}-1\right)\right]$

Příklad . Vypočtěte hmotnost rovinné desky A, je-li:

1) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0,\ x \leq 4,\ y \geq 0,\ y \leq 3\ \}$, $\sigma(x,y)$ v jejím libovolném bodě P je přímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti bodu P od $O = (0,0)$,

2) A kompaktní obrazec vymezený křivkami: $y = e^x,\ y = e^{\pi}$ pro $x \geq 0$; $\sigma(x,y) = |\sin x|$,

3) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \leq 2x^3,\ y \leq \frac{2}{x},\ x - y \leq 1\ \}$, $\sigma(x,y) = |x-1|$,

4) A kompaktní obrazec vymezený křivkami: $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 1$ pro $x \geq 0$; $\sigma(x,y) = |y-x|$,

5) A kompaktní obrazec vymezený křivkami: $y = \sqrt{x},\ y = x^4$ pro $x \geq 0$; $\sigma(x,y) = |y - x^2|$,

6) A kompaktní obrazec vymezený křivkami: $y = \sqrt{2-x},\ y = 0$ pro $x \geq 0$; $\sigma(x,y) = |y - x^2|$,

7) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - y - 1 \leq 0,\ x - y + 1 \geq 0\ \}$, $\sigma(x,y) = |x-1|$,

8) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \leq \frac{\pi}{3},\ y \geq -x,\ y \geq \operatorname{arctg} x\ \}$, $\sigma(x,y) = |x|$,

9) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq x^{\frac{2}{3}},\ y \leq 2 - x^2\ \}$, $\sigma(x,y) = |x+y-2|$,

10) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 \leq 0\ \}$, $\sigma(x,y) = |y|$,

11) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \leq x^2 + y^2 - 2y,\ y \leq -x\ \}$, $\sigma(x,y) = |x|$,

12) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 - 2x \geq 0,\ x^2 + y^2 - 4x \leq 0;\}$, $\sigma(x,y) = |y|$,

13) $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq ay,\ y + \sqrt{3}x \geq 0,\ a \geq 0\ \}$, $\sigma(x,y) = |x|$,

14) A kompaktní obrazec vymezený křivkami: $x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 1,\ x \leq y \leq 0$, $\sigma(x,y) = |x|y^2$,

Řešení.
1) $[100]$, 2) $\left[e^{\pi} - \frac{1}{2}e^{2\pi} - \frac{1}{2}\right]$, 3) $\left[\frac{21-10\ln 2}{10}\right]$ 4) $\left[\frac{11}{60}\right]$, 5) $\left[\frac{13}{140}\right]$, 6) $\left[\frac{512\sqrt{2}-238}{420}\right]$ 7) $\left[\frac{37}{12}\right]$ 8) $\left[\frac{\pi^3-27\pi+81\sqrt{3}}{162}\right]$ 9) $\left[\frac{8}{3}\right]$ 10) $[12\pi]$ 11) $\left[\frac{112}{3}\right]$, 12) $\left[\frac{28}{3}\right]$, 13) $\left[\frac{23a^3}{192}\right]$, 14) $\left[\frac{31\sqrt{3}}{60}\right]$.

Příklad . Vypočtěte statický moment S_x vzhledem k ose x, resp. S_y vzhledem k ose y:

1) $S_x,\ S_y$ kompaktního rovinného obrazce vymezeného křivkami: $y = \frac{x}{2} + 3,\ y = \frac{x}{2} - 3,\ x = 0,$ $x = 4,\ \sigma(x,y) = 1$,

2) $S_x,\ S_y$ kompaktního rovinného obrazce vymezeného křivkami: $y^2 = 4x + 4,$ $y^2 = -2x + 4,\ \sigma(x,y) = |x|$,

3) S_x rovinného obrazce $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq |\sin x|,\ 0 \leq x \leq \pi\ \}$, $\sigma(x,y) = |\cos x|$,

4) S_x kompaktního rovinného obrazce vymezeného křivkami: $y = -1,\ y = 2,\ y = x,$ $y = \ln x,\ \sigma(x,y) = k$,

5) S_y rovinného obrazce $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \leq x,\ y \leq \frac{1}{x},\ y \geq \frac{1}{2}\ \}$, $\sigma(x,y) = 2y$,

6) S_y rovinného obrazce $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\ \}$, $\sigma(x,y) = x\sqrt{4 - x^2 - y^2}$,

7) S_y rovinného obrazce $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, 4x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \leq 0\ \}$, $\sigma(x,y) = |xy|$,

8) S_y rovinného obrazce $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2 + \frac{y^2}{4} \le 4,\ y \ge 0\ \},\ \sigma(x,y) = |x|$,

9) Statický moment půlkruhu o poloměru $r = a$ vzhledem k jeho průměru, $\sigma(x,y) = 1$,

10) Statický moment obdélníka o stranách a, b vzhledem ke straně a, $\sigma(x,y) = 1$.

Řešení.
1) $[S_x = 24,\ S_y = 48]$, 2) $\left[S_x = 2,\ S_y = \frac{192}{35}\right]$. 3) $\left[S_x = \frac{1}{3}\right]$, 4) $\left[S_x = k\left(\mathrm{e}^2 + \frac{2}{\mathrm{e}} - \frac{8}{3}\right)\right]$, 5) $\left[S_y = -\frac{15}{64} + \ln 2\right]$, 6) $\left[S_y = \frac{32}{15}\pi\right]$, 7) $\left[S_y = \frac{3}{40}\right]$, 8) $\left[S_x = \frac{14}{3}\right]$, 9) $\left[S = \frac{56}{3}\pi a^2\right]$, 10) $\left[S = \frac{1}{2}ab^2\ \right]$.

Příklad . Vypočtěte statický moment vzhledem k ose y tenké homogenní rovinné desky

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, y < \cosh x\right\}$$

Řešení. $\left[S_y = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\ kgm\right]$

Příklad . Vypočtěte hmotnost a statický moment vzhledem k ose x tenké homogenní rovinné desky

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y > 0, (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1\right\}$$

Řešení. $\left[m = \dfrac{\pi}{2}\ kg, S_x = \dfrac{2}{3}\ kgm\right]$

Příklad . Vypočtěte souřadnice (souřadnici) těžiště:

1) x_T rovinného obrazce $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le a^2,\ 0 \le x \le y\ \},\ a \ge 0,\ \sigma(x,y) = x$,

2) y_T rovinného obrazce $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le y \le 3,\ y \le \frac{1}{x}\ \},\ \sigma(x,y) = k$,

3) T kompaktního rovinného obrazce vymezeného křivkami: $xy = a^2,\ y^2 = 8ax,\ x = 2a,\ a \ge 0$, $\sigma(x,y) = 1$,

4) T rovinného obrazce $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le 1,\ y \le x + 1,\ y \ge 0\ \},\ \sigma(x,y) = 1$,

5) x_T rovinného obrazce $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le y \le x\ \},\ \sigma(x,y) = xy$,

6) T rovinného obrazce $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le ay,\ \},\ a \ge 0,\ \sigma(x,y) = y$,

7) T kompaktního rovinného obrazce vymezeného křivkami: $x = 0,\ y = 0,\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2,\ a \ge 0,\ \sigma(x,y) = 1$,

8) T rovinného obrazce $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\ \},\ a > 0,\ b > 0,\ \sigma(x,y) = 1$,

9) T kompaktního rovinného obrazce vymezeného křivkami: $x = 1,\ y = 0,\ y = \sqrt{x},\ \sigma(x,y) = \frac{1}{|x+1|}$,

10) T kompaktního rovinného obrazce vymezeného křivkami: $y = -x,\ y = 2x - x^2,\ \sigma(x,y) = |x|$,

11) T kompaktního rovinného obrazce vymezeného křivkami: $y = \sin x,\ y = 0,\ x = \frac{\pi}{4},\ \sigma(x,y) = 1$,

12) T kompaktního rovinného obrazce vymezeného křivkami: $y^2 = 4x + 4,\ y^2 = -2x + 4,\ \sigma(x,y) = 1$,

13) T kruhové výseče o středovém úhlu α, poloměru a, $\sigma(x,y) = 1$,

14) T kruhové desky $x^2 + y^2 \le a^2,\ a \ge 0$ je-li $\sigma(x,y)$ v každém jejím bodě M přímo úměrná vzdálenosti $\varrho(A, M)$, $A = [a, 0]$.

Řešení.
1) $\left[x_T = \frac{3(\pi-2)a}{16(2-\sqrt{2})}\right]$, 2) $\left[y_T = \frac{14}{3(1+2\ln 3)}\right]$, 3) $\left[T\left[\frac{51a}{20(1+3\ln 2)},\ \frac{15a}{8(1+3\ln 2)}\right]\right]$, 4) $\left[T\left[\frac{2}{3(\pi+2)},\ \frac{2}{\pi+2}\right]\right]$,
5) $\left[x_T = \frac{124\left(4-\sqrt{2}\right)}{225}\right]$, 6) $\left[T\left[0,\ \frac{5a}{8}\right]\right]$, 7) $\left[T\left[\frac{a(10-3\pi)}{3(4-\pi)},\ \frac{a(10-3\pi)}{3(4-\pi)}\right]\right]$, 8) $\left[T\left[\frac{4a}{3\pi},\ \frac{4b}{3\pi}\right]\right]$, 9) $\left[T\left[\frac{3\pi-8}{12-3\pi},\ \frac{1-\ln 2}{4-\pi}\right]\right]$,
10) $\left[T\left[\frac{9}{5},\ \frac{9}{10}\right]\right]$, 11) $\left[T\left[\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{2}+1\right),\ \frac{\pi-2}{16}\left(2+\sqrt{2}\right)\right]\right]$, 12) $\left[T\left[\frac{2}{5},\ 0\right]\right]$, 13) $\left[T\left[\frac{2a\sin\alpha}{3\alpha},\ -\frac{2a(\cos\alpha-1)}{3\alpha}\right]\right]$,
14) $\left[T\left[-\frac{a}{5},\ 0\right]\right]$.

Příklad . Vypočtěte těžiště tenké homogenní rovinné desky

$$\Omega = \left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : y > -\frac{h}{b^2}x^2 + h, y > 0,\right\}, h > 0, b > 0 \qquad \left[T = \left[0, \frac{2}{5}h\right]\right]$$

$$\Omega = \left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : y < \frac{1}{x}, y > \frac{\sqrt{3}}{3}x, y < \sqrt{3}x\right\} \qquad [T = [0.91, 0.91]]$$

$$\Omega = \left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1, y < x+1, y > 0\right\} \qquad \left[T = \left[\frac{2}{3(\pi+2)}, \frac{2}{\pi+2}\right]\right]$$

$$\Omega = \left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : xy > a^2, y^2 < 8ax, x < 2a\right\}, a > 0 \qquad \left[T = \left[\frac{47}{10(\frac{14}{3}-\ln 4)}a, \frac{27}{4(\frac{14}{3}-\ln 4)}a\right]\right]$$

Příklad . Vypočtěte moment setrvačnosti :

1) I_x kompaktního rovinného obrazce vymezeného křivkami: $x+y=2,\ x=2,\ y=2,\ \sigma(x,y)=1$,
2) I_y kompaktního rovinného obrazce vymezeného křivkami: $x=0,\ x=4,\ y=\frac{x}{2}+3,\ y=\frac{x}{2}-3,\ \sigma(x,y)=x$,
3) $I_x,\ I_y$ rovinného obrazce $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2\le y\le x\ \},\ \sigma(x,y)=k$,
4) I_x rovinného obrazce $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ y\le\left(-\frac{h}{b^2}\right)x^2+h,\ y\ge 0,\ h\ge 0,\ b>0\ \},\ \sigma(x,y)=1$,
5) I_x kompaktního rovinného obrazce vymezeného křivkami: $y=\sqrt{x},\ y=x^4,\ \sigma(x,y)=|y-x^2|$,
6) $I_x,\ I_y$ kompaktního rovinného obrazce vymezeného křivkami: $xy=a^2,\ xy=2a^2,\ x=2y,\ 2x=y,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ \sigma(x,y)=1, a>0$,
7) I_x rovinného obrazce $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\le a^2,\ a\ge 0\ \},\ \sigma(x,y)=1$,
8) I_x kompaktního rovinného obrazce vymezeného křivkami: $x^2+y^2=a^2,\ y=a\sin\varphi,\ y=-a\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ \sigma(x,y)=1, a>0$,
9) I_x rovinného obrazce $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge x,\ y\ge -x\ \},\ \sigma(x,y)=y$,
10) I_x rovinného obrazce $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1,\ 2x-\sqrt{3}y\le 0,\ x\ge 0\ \},\ \sigma(x,y)=|x|$,
11) I_x a I_y rovinného obrazce $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\le 1,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\ge 1\ \},\ \sigma(x,y)=1$,
12) I_x a I_y rovinného obrazce $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<4, y>x, y>-x\}$,
13) I_x a I_y rovinného obrazce $A=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<a^2, 0<y<v\}, 0<v\le a$

14) I_x kompaktního rovinného obrazce vymezeného jedním obloukem cykloidy: $x = a\,(t - \sin t)\,,\ y = a\,(1 - \cos t)\,,\ y = 0,\ \sigma(x,y) = 1,\ a > 0.$
(Integrační proměnné $t,\ y.$)

Řešení.
1) $[I_x = 4]$, 2) $[I_y = 384]$, 3) $\left[I_x = \frac{k}{28},\ I_y = \frac{k}{20}\right]$, 4) $\left[I_x = \frac{32}{105}bh^3\right]$, 5) $\left[I_x = \frac{31}{1530}\right]$, 6) $\left[I_x = \frac{9a^4}{8},\ I_y = \frac{9a^4}{8}\right]$,
7) $\left[I_x = \frac{1}{24}a^4 \sin 2\alpha \cos^2\alpha\right]$, 8) $\left[I_x = \frac{a^4}{2}\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\right]$, 9) $\left[I_x = \frac{31}{6}\sqrt{2}\right]$,
10) $\left[I_x = \frac{24}{5}\left(1 - \frac{8}{7\sqrt{7}}\right)\right]$, 11) $\left[I_x = \frac{27}{4}\pi,\ I_y = \frac{111}{4}\pi\right]$, 12) $\left[I_x = \frac{15(\pi+2)}{16}, I_y = \frac{15(\pi-2)}{16}\right]$,
13) $\left[I_x = \frac{1}{4}\left(\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)a^4, I_y = \frac{1}{4}\left[\alpha + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos^2\alpha\right)\sin 2\alpha\right]a^4, \alpha = \arcsin\frac{v}{a}\right]$, 14) $\left[I_x = \frac{35}{12}\pi a^4\right]$.

Křivkové integrály

Příklad 1. Vypočtěte křivkové integrály 1. druhu po dané křivce γ:

1. $\displaystyle\int_\gamma xy\,ds$, kde γ je obvod obdélníku určený křivkami $x=0$, $x=4$, $y=0$, $y=2$. $[24]$

2. $\displaystyle\int_\gamma (x^{4/3}+y^{4/3})\,ds$, kde γ je asteroida $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, $a>0$ konstanta. $\left[4a^{7/3}\right]$

3. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2}{x^2+y^2}\,ds$, kde γ je oblouk šroubovice $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, $t\in[0,2\pi]$. $\left[8\pi\sqrt{2}/3\right]$

4. $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{16x^2+y^2}\,ds$, kde γ je elipsa $x^2+\frac{y^2}{4}=1$, $t\in[0,2\pi]$. $[10\pi]$

5. $\displaystyle\int_\gamma (2z-\sqrt{x^2+y^2})\,ds$, kde γ je první závit kuželové šroubovice $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$, $t\in[0,2\pi]$. $\left[2\sqrt{2}\left(\sqrt{(2\pi^2+3)^3}-1\right)/3\right]$

6. $\displaystyle\int_\gamma xy\,ds$, kde γ je elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a,b>0$ konstanty. $\left[ab\left(a^2+ab+b^2\right)/(3(a+b))\right]$

7. $\displaystyle\int_\gamma 2(z-y^2)xy\,ds$, kde γ je proniková křivka ploch $x^2+y^2=1$, $z=x^2$ pro $y\geq 0$, $y\geq -x$.
$\left[\left(\sqrt{8}-1\right)/6\right]$

8. $\displaystyle\int_\gamma x(y-1)\,ds$, kde γ je proniková křivka ploch $x^2+y^2-2y=0$ pro $x\geq 0$, $z=x^2+y^2$. $[0]$

9. $\int_\gamma xy^2\,ds$, kde křivka $\gamma\subset\mathbb{R}^2$ je dána rovnicí $x^2+y^2=ax$, $a>0$. $\left[\frac{\pi a^4}{16}\right]$

10. $I=\int_\gamma \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,ds$, kde je křivka $\gamma\subset\mathbb{R}^3$ dána parametrickými rovnicemi $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $t\in[0,2\pi]$, $a>0$, $b>0$. $\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\left(\sqrt{a^2+4\pi^2b^2}-a\right)\right]$

11. $\int_\gamma \frac{1}{x-y}\,ds$, kde γ je usečka AB, $A=[0,-2]$, $B=[4,0]$. $\left[\sqrt{5}\ln 2\right]$

12. $\int_\gamma x^2\,ds$, kde γ je oblouk AB křivky dané rovnicí $y=\ln x$ pro $A=[2,\ln 2]$, $B=[1,0]$.
$\left[(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})/3\right]$

13. $\int_\gamma (x-y)\,ds$, kde γ je kružnice $x^2+y^2-ax=0$, $a>0$. $\left[\frac{1}{2}\pi a^2\right]$

14. $\int_\gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds$, kde γ je oblouk šroubovice $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$, $t\in[0,2\pi]$, $a>0$.
$\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3(4\pi^2+3)\right]$

15. $\int_\gamma z\,ds$, kde γ je křivka $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t \in [0, \sqrt{2}]$. $\left[\frac{2}{3}(4-\sqrt{2})\right]$

16. $\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, kde γ je křivka $x^2+y^2-ax = 0$, $a > 0$. $[2a^2]$

17. $\int_\gamma \sqrt{2y}\,ds$, kde γ je křivka $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$. $[4\pi a\sqrt{a}]$

18. $\int_\gamma (x+y)\,ds$, kde γ je obvod trojúhelníka s vrcholy $A = [1, -1]$, $B = [2, -1]$, $C = [1, 0]$. $[1+\sqrt{2}]$

19. $\int_\gamma (x^2+y^2)\,ds$, kde γ je křivka $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$. $[2\pi^2 a^3\,(1+2\pi^2)]$

20. $\int_\gamma x^2 y\,ds$, kde γ je oblouk o parametrických rovnicích $\varphi(t) = a\cos t$, $\psi(t) = a\sin t$, $t \in [0, \pi/2]$. $\left[\frac{a^4}{3}\right]$

21. $\int_\gamma x\,ds$, kde γ je dána rovnicí $y = x^2$, $x \in [1, 2]$. $\left[\frac{1}{12}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})\right]$

Příklad 2. Vypočítejte křivkové integrály 2. druhu po dané křivce γ (uvažujeme pravotočivý souřadnicový systém):

1. $\displaystyle\int_\gamma y\,dx + x\,dy$, kde γ je čtvrtkružnice $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t), 0 < t < \pi/2$ a $A = [a, 0]$ je počáteční bod, $a > 0$ konstanta. $[0]$

2. $\displaystyle\int_\gamma x\,dx + y\,dy + (x+y-1)\,dz$, kde γ je úsečka $\overrightarrow{AB}$, $A = [1, 1, 1], B = [2, 3, 4]$. $[13]$

3. $\displaystyle\int_\gamma (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, kde γ je křivka $y = 1 - |1-x|$, $0 \le x \le 2$ a počáteční bod $A = [2, 0]$. $[-4/3]$

4. $\displaystyle\int_\gamma yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, kde γ je oblouk šroubovice $\vec{r}(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt/2\pi)$ od bodu $A = [a, 0, 0]$ do $B = [a, 0, b]$, $a, b > 0$ konstanty. $[0]$

5. $\displaystyle\int_\gamma (2a-y)\,dx + x\,dy$, kde γ je oblouk cykloidy $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$ konstanta. $[-2\pi a^2]$

6. $\displaystyle\int_\gamma y^2\,dx - x^2\,dy$ mezi body $A = [1, 0]$, $B = [0, 1]$ po čtvrtkružnici. $[-4/3]$

7. $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{|x|+|y|}\,dx + \frac{1}{|x|+|y|}\,dy$, kde γ je obvod čtverce $[1, 0]$, $[0, 1]$, $[-1, 0]$, $[0, -1]$. $[0]$

8. $\displaystyle\int_\gamma (x^2-2xy)\,dx + (y^2-2xy)\,dy$, kde γ je oblouk $\widehat{AB}$ paraboly $y = x^2$, $A = [-1, 1], B = [1, 1]$. $[-14/15]$

9. $\displaystyle\int_\gamma (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, kde γ je oblouk $\widehat{ABC}$ elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $A=[0,b]$, $B=[x_B>0, y_B>0]$, $C=[a,0]$ $[(a^2+b^2)/2]$

10. $\int_\gamma \frac{x\,dx+y\,dy,+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$, kde γ je orientovaná úsečka AB, s počátečním bodem $A=[1,1,1]$ a koncovým bodem $B=[4,4,4]$; $[3\sqrt{3}]$

11. $\int_\gamma (y^2-x^2)\,dx+(x^2+y^2)\,dy$, kde γ je orientovaná křivka $x+|y-1|=1$ pro $0\le y\le 2$ s koncovým bodem $B=[0,2]$; $[4/3]$

12. $\int_\gamma xy\,dx+y^2\,dy$, kde γ je oblouk AB křivky $y=\operatorname{arctg} x$ od bodu $A=[1,?]$ do bodu $B=[0,?]$.

$$\left[-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2}-1\right)-\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{\pi}{4}\right)^3\right]$$

13. $\int_\gamma y\,dx+z\,dy+x\,dz$, kde γ je oblouk ABC křivky, která je průnikem ploch $z=xy$ a $x^2+y^2=1$ od bodu $A=[1,?,?]$ do bodu $C=[-1,?,?]$, $B=[?,1,?]$. $[(4-3\pi)/6]$

14. $\int_\gamma x\,dx+12y\,dy+18\,dz$, kde γ je oblouk AB křivky, která je průnikem ploch $x+y-1=0$ a $9x^2+4y^2-36z=0$ od bodu $A=[1,?,?]$ do bodu $B=[?,1,?]$. $[-9]$

15. $\displaystyle\int_\gamma 2(x^2+y^2)\,dx + (2y-8)\,dy$, kde γ je část kružnice $\vec{r}(t)=(a\cos t, a\sin t), 0<t<\pi$ a $A=[a,0]$ je počáteční bod, $a>0$ konstanta. $[-4a^3]$

16. $\displaystyle\int_\gamma (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, kde γ je obvod trojúhelníku s vrcholy $A=[0,0]$, $B=[1,0]$, $C=[0,1]$, počáteční bod je $A=[0,0]$. $[0]$

17. $\displaystyle\int_\gamma y\,dx + x\,dy$, kde γ je oblouk $\widehat{ABC}$ křivky $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$ orientovaný od bodu $A=[0,y_A<0]$ do bodu $C=[1,y_C>0]$, je-li $B=[\sqrt{2},0]$. $[\sqrt{2}]$

18. $\int_\gamma (xy+x+y)\,dx-(xy+x-y)\,dy$, kde γ je kladně orientovaná kružnice $x^2+y^2=ax$, $a>0$ je konstanta. $[-\pi a^2(2+a/2)/4]$

Příklad 3. Užitím Greenovy věty vypočtěte následující integrály: [Ověřte, že jsou splněny podmínky pro její užití.]

1. $\displaystyle\int_\gamma (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$, kde γ je elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ souhlasně orientovaná se souřadnicovým systémem. $[-2\pi ab]$

2. $\displaystyle\int_\gamma (x^2-y^2)\,dx + (x^2+y^2)\,dy$, kde γ je křivka tvořená půlkružnicí $\sqrt{r^2-x^2}$ a osou x. $[4r^3/3]$

3. $\displaystyle\int_\gamma (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$, kde γ je křivka tvořená sinusoidou $y=\sin x$ a úsečkou na ose x pro $0\le x\le\pi$. $[-4\pi]$

4. $\int_\gamma (x+y)^2\,dx \;-\; (x+y)^2\,dy$, kde γ je trojúhelník s vrcholy $O=[0,0]$, $A=[1,0]$, $B=[0,1]$.

$[-4/3]$

5. $\int_\gamma y^2\,dx \;+\; x\,dy$, kde γ je kružnice $x^2+y^2=r^2$ souhlasně orientovaná se souřadnicovým systémem.

$[\pi r^2]$

6. $\int_\gamma (xy+x^2)\,dx \;+\; x^2y\,dy$, kde γ je kladně orientovaná hranice oblasti $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 0\le x\le y\le 1\}$. $[1/12]$

7. $\int_\gamma \frac{1}{y}\,dx \;-\; \frac{1}{x}\,dy$, kde γ je trojúhelník s vrcholy $A=[1,1]$, $B=[2,1]$, $C=[2,2]$. $[1/2]$

8. $\int_\gamma (xy+x+y)\,dx \;+\; (xy+x-y)\,dy$, kde γ je kladně orientovaná kružnice $x^2+y^2=ax$, $a>0$ konstanta. $[-\pi a^3/8]$

9. $\int_\gamma \frac{1}{x}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\,dx+\frac{2}{y}\mathrm{arctg}\frac{x}{y}\,dy$, kde γ je hranice oblasti $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<4, x<y<\sqrt{3}\,x\}$ orientovaná kladně. $[\pi\ln 2/12]$

10. Vypočtěte rozdíl integrálů I_1-I_2, je-li $I_1=\int_\gamma (x+y)^2\,dx \;-\; (x-y)^2\,dy$, kde γ je úsečka $\overrightarrow{AB}$, $I_2=\int_\gamma (x+y)^2\,dx \;-\; (x-y)^2\,dy$, kde γ je oblouk $\widehat{AB}$ paraboly $y=x^2$, $A=[0,0], B=[1,1]$.

$[1/3]$

11. $I=\int\limits_\gamma (x^2y-x)\,dx-(xy^2+y)\;dy$, kde γ je křivka o rovnici $x^2+y^2=2y$, orientovaná ve směru pohybu hodinových ručiček. $\left[\frac{3}{2}\pi\right]$

Geometrické a fyzikální aplikace křivkových integrálů

Příklad 1. Vypočtěte délku křivky γ

1. Vypočtěte délku křivky γ s parametrickými rovnicemi $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$.

$[8a\ m]$

2. Vypočtěte délku křivky $\gamma\subset\mathbb{R}^3$ s parametrickými rovnicemi $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$, $t\in[0,2\pi]$. $\left[\sqrt{2}\,\pi\sqrt{1+2\pi^2}+\ln\left(\sqrt{2}\,\pi+\sqrt{1+2\pi^2}\right)\ m\right]$

3. Vypočtěte délku křivky $\gamma\subset\mathbb{R}^3$ s parametrickými rovnicemi $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $z=4\cos(t/2)$, $t\in[0,\pi]$. $\left[4\sqrt{2}\ m\right]$

4. Vypočtěte délku křivky γ, je-li $\gamma:\vec{r}=a\cos t\vec{i}+a\sin t\vec{j}+vt\vec{k}$ pro $t\in[0,\pi/2]$, $a,v>0$ konstanty.

$\left[\pi\sqrt{a^2+v^2}/2\right]$

5. Vypočtěte délku křivky γ, kde γ je část křivky na pronikové křivce ploch $y=x^2$, $z=\frac{4}{3}x^{3/2}$ pro $0\le x\le 1$. $[2]$

6. Vypočtěte délku křivky γ, kde γ je část křivky na pronikové křivce ploch $z = -\mathrm{e}^x, x + y = 1$ pro $x \geq 0,\ y \geq 0$. $\left[\sqrt{\mathrm{e}^2+2} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}\ln(\sqrt{\mathrm{e}^2+2} - \sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right]$

Příklad 2. Vypočtěte obsah části válcové plochy Ψ s danou řídící křivkou γ a danými tvořícími přímkami.

1. Vypočtěte obsah části válcové plochy Ψ s řídící křivkou $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ danou rovnicí $y = \ln x,\ x \in [1, \sqrt{e}]$ v rovině $z = 0$ a tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezenými plochami: $z = 0,\ z = x^2$. $\left[\left(\sqrt{(\mathrm{e}^2+1)^3} - 1\right)/3\right]$

2. Vypočtěte obsah části válcové plochy $\Psi:\ 4x^2 + 9y^2 = 36$ pro $y \geq 0$ s řídící křivkou γ v rovině $z = 0$, tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezenými plochami $z = 0,\ z = -xy$. $\left[\frac{76}{5}\, m^2\right]$

3. Vypočtěte obsah části válcové plochy $\Psi:\ x^2 + y^2 = 1$ s řídící křivkou γ v rovině $z = 0$, tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezenými plochami $z = x^2,\ z = 2 + y^2$. $[4\pi\, m^2]$

4. Vypočtěte obsah části válcové plochy $\Psi:\ x^2 + y^2 = a^2$ pro $x \geq 0$ s řídící křivkou γ v rovině $z = 0$, tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezenými plochami $z = -x^2,\ z = x$. $[a^2(2 + a\pi/2))\, m^2]$

5. Vypočtěte obsah části válcové plochy $\Psi:\ y = \ln x$ pro $|y| \leq 2$ s řídící křivkou γ v rovině $z = 0$, tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezenými plochami $z = x^2,\ z = 0$. $\left[(\mathrm{e}^2 - 6/\left(3\mathrm{e}^6\right))\left(\mathrm{e}^4+1\right)^{3/2}\ m^2\right]$

6. Vypočtěte obsah části válcové plochy $x^2 + y^2 = a^2$ pro $x \geq 0$ vymezené plochami $z = -x^2,\ z = x$, $a > 0$ konstanta. $[a^2(2 + a\pi/2))]$

Příklad 3. Vypočtěte hmotnost dané křivky.

1. Vypočtěte hmotnost asteroidy $x = a\cos t^3,\ y = a\sin t^3,\ t \in [0, 2\pi],\ a > 0$ konstanta. $[12a/15]$

2. Vypočtěte hmotnost konické šroubovice $x = at\cos t,\ y = at\sin t, z = bt,\ t \in [0, 2\pi],\ a > 0,\ b \neq 0$ jsou konstanty. $\left[\pi\sqrt{a^2+b^2}/2\right]$

   kdyby hustota $\sigma(x, y, z) = z$, potom $\left[v\left(\sqrt{(a^2(4\pi^2+1)+v^2)^3} - \sqrt{(a^2+v^2)^3}\right)/(3a^2)\right]$

3. Vypočtěte hmotnost křivky $\gamma : \vec{r} = \mathrm{e}^t(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \vec{k})$ pro $t \leq 0$, je-li hustota $h(x, y, z) = z$. $\left[\sqrt{3}/2\right]$

4. Vypočtěte hmotnost křivky γ , kde γ je část křivky na pronikové křivce ploch $x^2 + y^2 - 2y = 0$, pro $y \geq 1, z = x^2 + y^2$ je-li hustota $h(x, y, z) = |x(y - 1)|$. $\left[(5\sqrt{5} - 1)/6\right]$

Příklad 4. Vypočtěte statický moment

1. Vypočtěte statický moment vzhledem k rovině $x = 0$ křivky $\gamma : \vec{r} = t\vec{i} + t\vec{j} + \sqrt{t}\vec{k}$ pro $t \in [0, 2]$, je-li hustota $h(x, y, z) = |z|$. $\left[\left((17^{5/2} - 1)/5 - (17^{3/2} - 1)/3\right)/64\right]$

2. Vypočtěte statický moment vzhledem k rovině $y = 0$ křivky γ , kde γ je část křivky na pronikové křivce ploch $x^2 + y^2 = 1$, pro $y \geq 0, z = -x$ je-li hustota $h(x, y, z) = |xy|$. (Pozor na vyjádření absolutní hodnoty). $[0]$

3. 16) Vypočtěte statický moment vzhledem k rovině $z = 0$ křivky $\gamma : \vec{r} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \mathrm{e}^t\vec{k}$ pro $t \leq 1$, je-li hustota $h(x, y, z) = z$. $\left[\left((1 + \mathrm{e}^2)^{3/2} - 1\right)/3\right]$

Příklad 5. Vypočtěte souřadnice těžiště

1. Vypočtěte souřadnice těžiště T homogeního oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$ konstanta. $[T = [a\pi, 4a/3]]$

2. Vypočtěte souřadnici y_T těžiště T křivky $\gamma : \vec{r} = a(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k})$ pro $t \in [0, 2\pi], a > 0$ je konstanta, je-li hustota $h(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2+y^2}$. $[-3a/(2\pi)]$

3. 19) Vypočtěte souřadnice těžiště T oblouku $\gamma : \vec{r} = \mathrm{e}^t(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \vec{k})$, $t \in (-\infty, 0]$, je-li hustota $h(x, y, z) = k$. $[T = [2/5, -1/5, 1/2]]$

Příklad 6. V každém bodě silového pole v $\mathbb{R}^2$ působí síla $\overrightarrow{F}$. Vypočítejte práci tohoto pole při pohybu hmotného bodu po orientované křivce γ:

1. $\overrightarrow{F} = (xy, x + y)$, γ je oblouk AB křivky γ dané rovnicí $y = \operatorname{arctg} x$ od bodu $A = [1, ?]$ do bodu $B = [0, ?]$; $\left[\frac{1}{32}(16 - 8\pi - \pi^2) - \ln 2\ J\right]$

2. γ : $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t)$ orientované souhlasně s daným parametrickým vyjádřním pro $t \in [0, \pi/2]$; $\overrightarrow{F} = (x + y, x)$, $a > 0$. $[-a^2/2\ J]$

3. γ : $y = \ln x$ orientované souhlasně s daným parametrickým vyjádřním od bodu $M = [?, 1]$, do bodu $N = [e^2, ?]$, $\overrightarrow{F} = (xy, -\ln y)$. $[(3\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^2 - 6)/4\ J]$

4. V každém bodě silového pole v $\mathbb{R}^2$ působí síla $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (\frac{x^3y}{3} + x + y)\vec{j}$. Vypočítejte práci tohoto pole při pohybu hmotného bodu po uzavřené rovinné kladně orientované křivce γ ohraničující rovinnou oblast $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0,\ y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. $[a^3b^2/15]$

Příklad 7. V každém bodě silového pole v $\mathbb{R}^3$ působí síla $\overrightarrow{F}$. Vypočítejte práci tohoto pole při pohybu hmotného bodu po orientované křivce γ:

1. $\overrightarrow{F} = (y, z, yz)$, γ : $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, ct)$ orientované souhlasně s daným parametrickým vyjádřením pro $t \in [0, \pi]$, $c > 0$. $\left[\frac{\pi}{2}(2c^2 - 4c - 1)\ J\right]$

2. γ : $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \mathrm{e}^t)$ orientované souhlasně s daným parametrickým vyjádřním pro $t \in [0, \pi]$; $\overrightarrow{F} = (y, z, yz)$, $c > 0$. $\left[\frac{2\mathrm{e}^{2\pi} - 5\mathrm{e}^{\pi} - 5\pi - 3}{10}\ J\right]$

3. γ je lomená čára $OABCO$ kladně orientovaná $O = [0, 0, 0]$, $A = [0, 1, 0]$, $B = [1, 1, 0]$, $C = [1, 1, 1]$; $\overrightarrow{F} = (x, y, z)$. $[0\ J]$

4. V každém bodě silového pole v $\mathbb{R}^3$ působí síla $\vec{F} = \vec{r}$. Vypočítejte práci tohoto pole při pohybu hmotného bodu po křivce γ která je pronikovou křivkou ploch $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = ax$ v prvním oktantě od bodu $M = [0, ?, ?]$, do bodu $N = [a, ?, ?]$, $a > 0$ konstanta. $[a^2]$

5. V každém bodě silového pole v $\mathbb{R}^3$ působí síla $\vec{F} = (yz, xz, x)$. Vypočítejte práci tohoto pole při pohybu hmotného bodu po křivce γ, která v rovině $y = 0$ ohraničuje rovinnou oblast $\Omega = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2; z \leq 4 - x^2,\ x \geq 0,\ z \geq 0\}$, orientace γ je souhlasná s orientací oblouku $\widehat{ABC} \in \gamma$, kde $A = [x_A > 0, 0, z_A > 0]$, $B = [0, 0, z_B > 0]$, $C = [x_C > 0, 0, 0]$. $[16/3]$

6. V každém bodě silového pole v $\mathbb{R}^3$ působí síla $\vec{F} = (xy^2, -y, z)$. Vypočítejte práci tohoto pole při pohybu hmotného bodu po křivce γ, která je pronikovou křivkou ploch $y = \sqrt{3x}$, $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ od bodu $A = [?, ?, 0]$ do bodu $B = [0, ?, ?]$. $[5/2]$

7. V každém bodě silového pole v $\mathbb{R}^3$ působí síla $\vec{F} = xz\vec{i} + x^3\vec{j} + yz\vec{k}$. Vypočítejte práci tohoto pole při pohybu hmotného bodu po křivce γ, která je pronikovou křivkou ploch $z = \sqrt{y - x^2}$, $y = 4 - x^2$ od bodu $A = [x_A > 0, ?, 0]$ do bodu $B = [x_B < 0, ?, 0]$. $\left[16\sqrt{2}/5\right]$

8. V každém bodě silového pole v $\mathbb{R}^3$ působí síla $\vec{F} = (y, -x, -yz)$. Vypočítejte práci tohoto pole při pohybu hmotného bodu po oblouku $\widehat{ABC}$ od bodu A do bodu C ležícím na pronikové křivce ploch $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2$ kde $A = [x_A > 0, 0, ?]$, $B = [x_B > 0, y_B > 0, z_B > 0]$, $C = [x_C < 0, y_C = -x_C, ?]$. $\left[(7\sqrt{2} - 45\pi)/60\right]$

Příklad 8. Vypočítejte práci silového pole v $\mathbb{R}^2$ při pohybu hmotného bodu po dané křivce γ:

1. V každém bodě silového pole v $\mathbb{R}^2$ směřuje síla do počátku souřadnicového systému a její velikost je rovna převrácené hodnotě vzdálenosti působiště síly od počátku souřadnicového systému. Vypočítejte práci tohoto pole při pohybu hmotného bodu po menším oblouku křivky $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ od bodu $A = [-a, 0]$ do bodu $B = [0, b]$, $a, b > 0$ konstanty. $[a - b]$

Příklad 9. Vypočítejte práci silového pole v $\mathbb{R}^3$ při pohybu hmotného bodu po dané křivce γ:

1. V každém bodě silového pole v $\mathbb{R}^3$ působí síla, která je nesouhlasně kolineární s jednotkovým vektorem osy y a její velikostje rovna vzdálenosti jejího působiště od počátku souřadnicového systému. Vypočítejte práci tohoto pole při pohybu hmotného bodu po uzavřené křivce γ v prvním oktantě tvořené oblouky na ploše $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, které leží postupně v rovinách $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Křivka γ je orientována souhlasně s obloukem $\widehat{ABC}$, kde $A = [1, ?, ?]$, $B = [?, 1, ?]$, $C = [?, ?, 1]$. $[0]$

2. V každém bodě silového pole v $\mathbb{R}^3$ působí síla, která směřuje kolmo k ose y a jejíž velikostje rovna vzdálenosti působiště síly od osy y. Vypočítejte práci tohoto pole při pohybu hmotného bodu po oblouku $\widehat{ABC}$ od bodu A do bodu C ležícím na pronikové křivce ploch $y = x^2 + z^2$, $y = 4 - x^2$ kde $A = [x_A > 0, ?, 0]$, $B = [x_B > 0, ?, z_B > 0]$, $C = [0, ?, z_C > 0]$. $\left[(2\sqrt{2} - 8)/3\right]$

Příklad 10. Ověřte, že práce v daném silovém poli nezávisí na integrační cestě, určete potenciál tohoto silového pole a vypočtěte danou práci.

1. Ověřte, že práce v silovém poli $\vec{F} = (x \cos 2y + 1)\vec{i} - x^2 \sin 2y\vec{j}$ nezávisí na integrační cestě, určete potenciál tohoto silového pole a vypočtěte práci od bodu $M = \left[0, -\frac{\pi}{2}\right]$ do bodu $N = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
$[V(x, y) = (1/2)x^2 \cos y + x + c,\ W = \pi(\pi + 4)/8]$

2. Ověřte, že práce v silovém poli $\vec{F} = (x^2 - y^2, 5 - 2xy)$ nezávisí na integrační cestě, určete potenciál tohoto silového pole a vypočtěte práci od bodu $M = [1, 2]$ do bodu $N = [2, 3]$.
$[V(x, y) = x^3/3 - xy^2 + 5y + c,\ W = -20/3]$

3. Ověřte, že práce v silovém poli $\vec{F} = (\frac{1}{z}, -\frac{3}{z}, \frac{3y-x}{z^2})$ nezávisí na integrační cestě, určete potenciál tohoto silového pole a vypočtěte práci od bodu $M = [0, 2, 1]$ do bodu $N = [1, -1, 2]$.
$[V = (x - 3y)/z,\ W = 8]$

4. Ověřte, že práce v silovém poli $\vec{F} = (x^2 + yz)\vec{i} + (y^2 + xz)\vec{j} + (z^2 + xy)\vec{k}$ nezávisí na integrační cestě, určete potenciál tohoto silového pole a vypočtěte práci od bodu $M = [1, -2, 3]$ do bodu $N = [2, 3, 4]$. $[V(x, y, z) = (x^3 + y^3 + z^3)/3 + xyz + c,\ W = 169/3]$

5. Ověřte, že práce v silovém poli $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k}$ nezávisí na integrační cestě a vypočtěte práci od bodu $M = [2, 3, 4]$ do bodu $N = [1, 1, 1]$ po vhodné křivce.

$[V(x, y, z) = (x^2 + y^2)/2 + z + c,\ W = -17/2]$

Příklad 11. Vypočtěte práci v silovém poli $\vec{F} = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}$ po kladně orientované uzavřené křivce γ, skládající se z hladkých částí ležících na křivkách $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \frac{\pi}{4}$, $x = 0$. $[\pi/8 - \pi^2/16 - (1 - \ln 2)/2]$

Příklad 12. Užitím Greenovy věty vypočtěte obsah elipsy. $[\pi ab\, m^2]$

Příklad 13. Užitím Greenovy věty vypočtěte obsah množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kde Ω je ohraničená obloukem hyperboly o parametrických rovnicích $x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$, $t \in (-\infty, \infty)$, $a, b > 0$, osou x a spojnicí počátku souřadné soustavy s bodem $A = [x_0, y_0]$ hyperboly, kde x_0, $y_0 > 0$.

$\left[\frac{ab}{2} \ln\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)\ m^2\right]$

Příklad 14. Aplikací Greenovy věty vypočtěte obsah rovinného obrazce $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 \le y \le x\}$.

$[1/6]$

Příklad 15. Ověřte, že daný integrál nezávisí na integrační cestě a pomocí potenciálu vypočtěte jeho hodnou od bodu A do bodu B:

1. $\int\limits_{AB} \frac{1-y^2}{(1+x)^2}\, dx + \frac{2y}{1+x}\, dy$, $A = [0, 0]$, $B = [1, 1]$. $\left[V(x, y) = \frac{y^2-1}{1+x} + c, \quad c \in \mathbb{R}, W = 1\right]$

2. $\int\limits_{AB} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right) dy$, $A = [3, 4]$, $B = [5, 12]$.

   $\left[V(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy + c, \quad c \in \mathbb{R}, W = 56\right]$,

3. $\int\limits_{AB} xz^2\, dx + y^3\, dy + x^2 z\, dz$, $A = [-1, 1, 2]$, $B = [-4, 2, -1]$.

   $[V(x, y, z) = x^2 z^2/2 + y^4/4 + c, c \in \mathbb{R}, W = 39/4]$

4. $\int\limits_{AB} \left(\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}\right) dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right) dy$, $A = [1, 2]$, $B = [2, 6]$

   $\left[V(x, y) = \frac{xy}{y-x} + \ln \frac{y}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}, W = 1 + \ln \frac{3}{2}\right]$

5. $\int\limits_{AB} \frac{x}{(x+y)^2}\, dx + \frac{2x+y}{(x+y)^2}\, dy$, $A = [1, 1]$, $B = [3, 2]$.

   $[V(x, y) = \ln(x + y) + y/(x + y) + c, \quad c \in \mathbb{R},\ W = \ln(5/2) - 1/10]$,

6. $\int\limits_{AB} yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz$, $A = [1, 2, 3]$ $B = [3, 2, 1]$ $[V(x, y, z) = xyz + c, c \in \mathbb{R}, W = 0]$

7. $\int\limits_{AB} x\, dx + y^2\, dy - z^3\, dz$, $A = [1, 1, 1]$ $B = [1, 1, -1]$ $\left[V(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}z^4 + c, c \in \mathbb{R}, W = 0\right]$

8. $\int\limits_{AB} \frac{x}{x^2+y^2}\, dx + \frac{y}{x^2+y^2}\, dy$, $A = [-2, -6]$, $B = [1, 0]$; $\left[V(x, y) = (1/2) \ln(x^2 + y^2), c \in \mathbb{R}, W = -\frac{1}{2} \ln 40\right]$

9. Ukažte, že integrál $\int_\gamma \left(2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2x}{y^2}\right) dx + \left(2x^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3}\right) dy$ nezávisí na integrační cestě a vypočtěte jeho hodnotu pro $A = [2, 1]$, $B = [1, 2]$. $[W = -15/4]$

Literatura

[1] VANŽURA, Jiří. Řešené příklady z matematické analýzy. 3., upr. vyd. Praha: Karolinum, 2003. ISBN 978-802-4606-286. Dostupné také z: http://users.math.cas.cz/~ vanzura/SBIR8.PDF

[2] ŠARŠON, Jan. Sbírka úloh z matematiky [online]. 2008 [cit. 2015-09-02]. Dostupné z: http://kam.mff.cuni.cz/~ sbirka/show_category.php?c=89