# 9. Komplexní čísla

*Život je komplexní. Má reálnou a imaginární složku.*

# Číselné obory

## Číselný obor

- číselná množina, na které jsou definovány bez omezení početní operace sčítání a násobení (číselný obor je vůči těmto operacím *uzavřený*)

$\mathbb{N}$ . . . obor přirozených čísel
$\mathbb{Z}$ . . . obor celých čísel
$\mathbb{Q}$ . . . obor racionálních čísel
$\mathbb{R}$ . . . obor reálných čísel

## Reálná čísla

Každé reálné číslo je na číselné ose znázorněno právě jedním bodem a každý bod číselné osy je obrazem právě jednoho reálného čísla.

*Absolutní hodnota* reálného čísla $a$ ($|a|$) je rovna vzdálenosti obrazu tohoto čísla na číselné ose od počátku.

Obor reálných čísel je uzavřený také vzhledem k operacím odčítání a dělení nenulovým číslem.

# Zavedení komplexních čísel

$$x^2 + 1 = 0$$

- v $\mathbb{R}$ nemá řešení
- předpokládejme, že existuje prvek (označme jej i) dosud neznámého číselného oboru, pro který platí

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

$\rightarrow$ i je kořenem výše uvedené rovnice (stejně tak $-\mathrm{i}$)

- předpoklad existence takového čísla umožňuje řešit i jiné kvadratické rovnice, např.:

$$x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

$$\vdots$$

- řešením vždy výrazy tvaru $a + b\mathrm{i}$

# Komplexní čísla

*Komplexním číslem* nazveme výraz tvaru $a + b\mathrm{i}$, kde $a, b$ jsou reálná čísla a i je číslo, pro něž $\mathrm{i}^2 = -1$.

$a$ ... reálná část
$b$ ... imaginární část
i ... imaginární jednotka

Zápis komplexního čísla $z$ ve tvaru $a + b\mathrm{i}$ se nazývá *algebraický tvar komplexního čísla* $z$.

$b = 0 \quad \rightarrow \quad$ reálná čísla
$a = 0 \quad \rightarrow \quad$ ryze imaginární čísla

**Rovnost komplexních čísel**
Komplexní čísla se rovnají, právě když se rovnají jejich reálné části i jejich imaginární části.

$$a + b\mathrm{i} = c + d\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad (a = c \wedge b = d)$$

## Sčítání, odčítání a násobení komplexních čísel

Komplexní čísla sčítáme, odčítáme a násobíme jako dvojčleny:

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}$$

$$(a + b\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i}) = (a - c) + (b - d)\mathrm{i}$$

$$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = ac + bd\mathrm{i}^2 + ad\mathrm{i} + bc\mathrm{i} = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$$

## Čísla komplexně sdružená

Čísla komplexně sdružená se liší znaménkem imaginární části:

$$z = a + b\mathrm{i}, \qquad \overline{z} = a - b\mathrm{i}$$

Součin komplexně sdružených čísel je nezáporné reálné číslo.

## Dělení komplexních čísel

Podíl dvou komplexních čísel určíme tak, že celý zlomek rozšíříme číslem komplexně sdruženým s komplexním číslem v jeho jmenovateli.

**Absolutní hodnota komplexního čísla**

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

Pro $z = a + b\mathrm{i}$ je

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Platí:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|\,, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{pro } \ z_2 \neq 0$$

*Komplexní jednotka* je číslo $z$, jehož absolutní hodnota je rovna jedné:

$$|z| = 1$$

$$\text{imaginární jednotka} \times \text{komplexní jednotka}$$

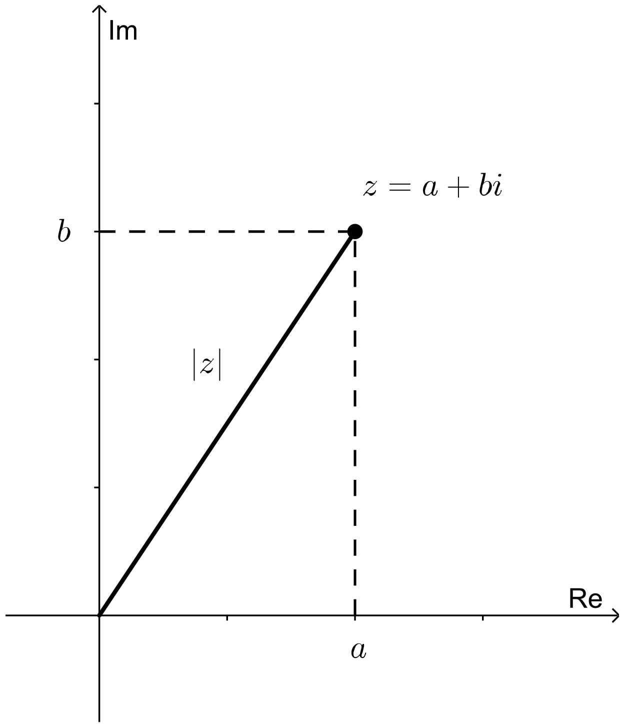
$$a^2 + b^2 = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})$$

**Příklad.** Pro daná komplexní čísla $z_1, z_2$ určete: součet, rozdíl, součin, komplexně sdružená čísla, podíl, absolutní hodnotu.

$$z_1 = 1 + 2\mathrm{i}\,, \qquad z_2 = 2 - \mathrm{i}$$

# Geometrické znázornění komplexních čísel

*Rovina komplexních čísel (Gaussova rovina)* je rovina, jejíž body považujeme za obrazy komplexních čísel.



Absolutní hodnota komplexního čísla je rovna vzdálenosti jeho obrazu v Gaussově rovině od počátku.

Absolutní hodnota rozdílu komplexních čísel určuje jejich vzdálenost v Gaussově rovině.

## Goniometrický tvar komplexního čísla

- vyjádření ve tvaru

$$z = |z| \left(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\right)$$

$\varphi$ ... argument komplexního čísla $z$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|}\,, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{|z|}$$

## Násobení a dělení komplexních čísel v goniometrickém tvaru

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

**Příklad.**

1. V Gaussově rovině znázorněte všechna komplexní čísla $z$, pro která platí:

$$|1 - \mathrm{i}| > |z| \geq 1$$

$$|z - \mathrm{i}| \geq |z + 1 - 2\mathrm{i}|$$

2. Zapište v goniometrickém, resp. algebraickém tvaru čísla:

$$z_1 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$$

$$z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

## Moivreova věta

Pro každé přirozené číslo $n$ a libovolné reálné číslo $\varphi$ platí

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi$$

Pro každé přirozené číslo $n$ a každé komplexní číslo $z = |z|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ platí

$$[|z|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)]^n = |z|^n\,(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$$

**Příklad.** Vypočítejte: $\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)^{62}$

## Exponenciální tvar komplexního čísla

Eulerův vzorec:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

$\Rightarrow$

$$z = |z|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

# Řešení rovnic v oboru komplexních čísel

## Kvadratické rovnice s reálnými koeficienty

Kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ s reálnými koeficienty a záporným diskriminantem $D$ má v oboru komplexních čísel právě dva kořeny, a to komplexně sdružená čísla

$$x_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-D}}{2a}$$

Každý kvadratický trojčlen $ax^2+bx+c$ s reálnými koeficienty lze vyjádřit jako součin $a(x-x_1)(x-x_2)$, kde $x_1, x_2$ jsou kořeny rovnice $ax^2 + bx + c = 0$.

**Příklad.** Rozložte v součin lineárních činitelů trojčlen $4x^2 - 12x + 25$.

## Binomické rovnice

Binomickou rovnicí nazýváme rovnici tvaru

$$x^n - a = 0\,,$$

kde $a$ je dané komplexní číslo, $x$ je neznámá a $n > 1, n \in \mathbb{N}$.
Její kořeny pro $a = |a|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$ jsou čísla:

$$x_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + \sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Jejich obrazy leží pro $n > 2$ ve vrcholech pravidelného $n$-úhelníku vepsaného do kružnice se středem v počátku a s poloměrem $\sqrt[n]{|a|}$.

**Příklad.** V množině $\mathbb{C}$ řešte rovnice:

$$x^3 + 27 = 0$$

$$x^4 + 2 - 2\mathrm{i} = 0$$

**Základní věta algebry**

Každá algebraická rovnice $n$-tého stupně s komplexními koeficienty má aspoň jeden komplexní kořen (právě $n$ komplexních kořenů, počítáme-li kořeny i s jejich násobnostmi).

Každá algebraická rovnice $n$-tého stupně s komplexními koeficienty má nejvýše $n$ reálných kořenů.

Pokud je číslo $x = a + b\mathrm{i}$, $b \neq 0$, kořenem algebraické rovnice $n$-tého stupně s reálnými koeficienty, potom i číslo komplexně sdružené $x = a - b\mathrm{i}$ je kořenem této algebraické rovnice.