

8. Goniometrické rovnice a nerovnice, trigonometrie

Trigonometrie

Pythagorova věta

V každém pravoúhlém trojúhelníku platí $a^2 + b^2 = c^2$, kde a, b jsou délky odvěsen a c délka přepony.

Jiná formulace:

Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku se rovná součtu obsahů čtverců nad jeho odvěsnami.

Goniometrické funkce ostrého úhlu

α ... vnitřní úhel pravoúhlého trojúhelníku, $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$

sinus úhlu α ... poměr délky odvěsny protilehlé k úhlu a délky přepony

kosinus úhlu α ... poměr délky odvěsny přilehlé k úhlu a délky přepony

tangens úhlu α ... poměr délky odvěsny protilehlé k úhlu a délky přilehlé odvěsny

kotangens úhlu α ... poměr délky odvěsny přilehlé k úhlu a délky protilehlé odvěsny

Sinová věta

Pro každý trojúhelník ABC , jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany délky a, b, c , platí:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Můžeme vyjádřit také ve tvaru:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

Kosinová věta

Pro každý trojúhelník ABC , jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany délky a, b, c , platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Příklady:

1. Určete délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC , je-li dáno:

$$b = 5 \text{ cm}, \quad \alpha = 110^\circ, \quad \beta = 28^\circ$$

2. Určete délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC , je-li dáno:

$$a = 7 \text{ cm}, \quad c = 12 \text{ cm}, \quad \beta = 124^\circ$$

3. Vypočítejte velikost nejmenšího úhlu v trojúhelníku ABC , znáte-li délky stran

$$a = 7 \text{ cm}, \quad b = 8 \text{ cm}, \quad c = 9 \text{ cm}$$

Goniometrické rovnice

Základní goniometrické rovnice:

1. Rovnice tvaru

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad a \in \langle -1; 1 \rangle$$

- nekonečně mnoho řešení (kořenů)
- pomocí jednotkové kružnice najdeme kořeny x_1, x_2 z intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$
- všechna řešení: $x_1 + 2k\pi, x_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. Rovnice tvaru

$$\operatorname{tg} x = a, \quad \operatorname{cotg} x = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

- nekonečně mnoho řešení
- $a = 0$: $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0, \quad \operatorname{cotg} x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$
- $a \neq 0$: najdeme (právě jeden) kořen $x_1 \in \langle 0; \pi \rangle$
- všechna řešení: $x_1 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Složitější goniometrické rovnice:

- obvykle řešíme převedením na základní goniometrickou rovnici (vhodnou substitucí nebo užitím vzorců pro goniometrické funkce)

substituce:

$$y = \{\text{argument goniometrické funkce}\}$$

$$y = \{\text{goniometrická funkce}\} \text{ (např. } y = \sin x \text{)}$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\text{tg } x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
$\text{cotg } x$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0

Základní vztahy a vzorce

Následující vztahy platí všude, kde je současně definována levá i pravá strana rovnosti:

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1, & \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x &= 1, \\ \sin x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), & \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \\ \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x, \\ \left|\sin \frac{x}{2}\right| &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, & \left|\cos \frac{x}{2}\right| &= \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \\ \sin x \pm \sin y &= 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}\end{aligned}$$

Příklady:

Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

$$\cos \left(3x + \frac{5}{6}\pi \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \left(4x - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{2}$$

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$$

$$\sin x + \sin 2x = 0$$

$$1 = \cos 2x - \sin x$$

$$4 \sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$$

$$* \sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$$

Goniometrické nerovnice

Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

$$|\sin x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin^2 x < 1$$