7. Goniometrické funkce

Oblouková míra

jednotkový úhel obloukové míry $\ldots$ 1 radián

1 radián = velikost úhlu, který na jednotkové kružnici se středem ve vrcholu úhlu vytíná oblouk jednotkové délky (na kružnici o poloměru r vytíná oblouk délky r)

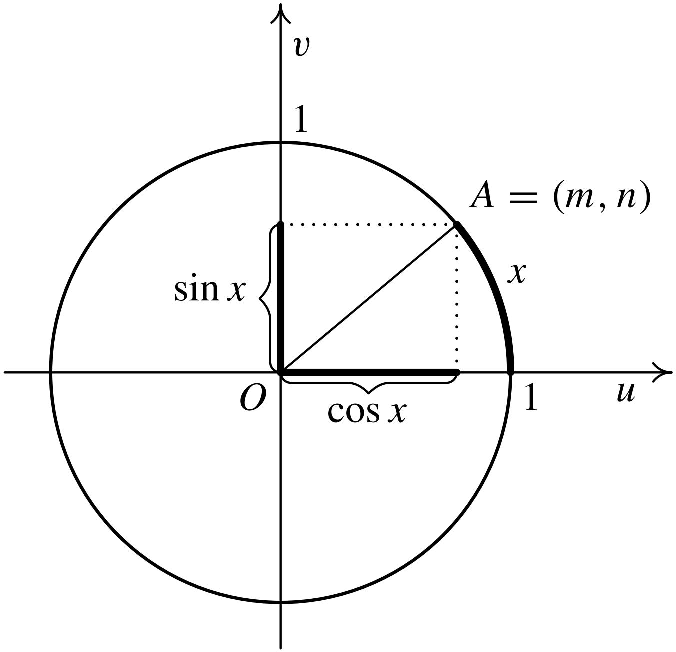
$\rightarrow$ vztah pro výpočet délky oblouku: $s = \varphi r$

plný úhel $\ldots 2\pi$

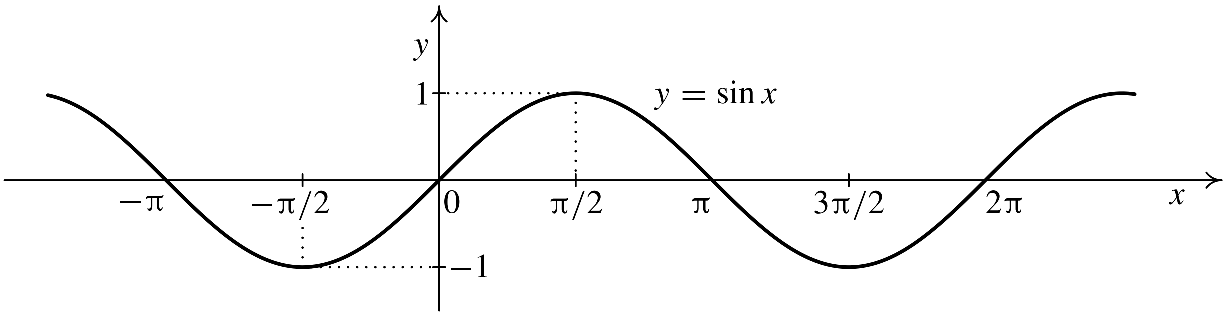
základní velikost úhlu φ $\ldots$ z intervalu $\langle 0, 2\pi)$

Goniometrické funkce

Sinus a kosinus



Funkce sinus



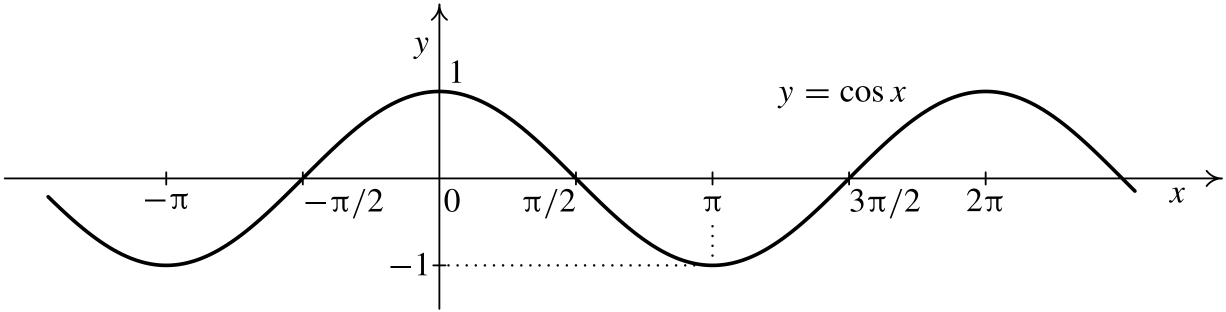
Vlastnosti:

$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$

funkce je lichá $\quad \rightarrow \quad \sin(-x) = -\sin x$

základní perioda: $2\pi \quad \rightarrow \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad k \in \mathbb{Z}$

Funkce kosinus



Vlastnosti:

$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$

funkce je sudá $\quad \rightarrow \quad \cos(-x) = \cos x$

základní perioda: $2\pi \quad \rightarrow \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad k \in \mathbb{Z}$

Funkce tangens

$$f : y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Vlastnosti:

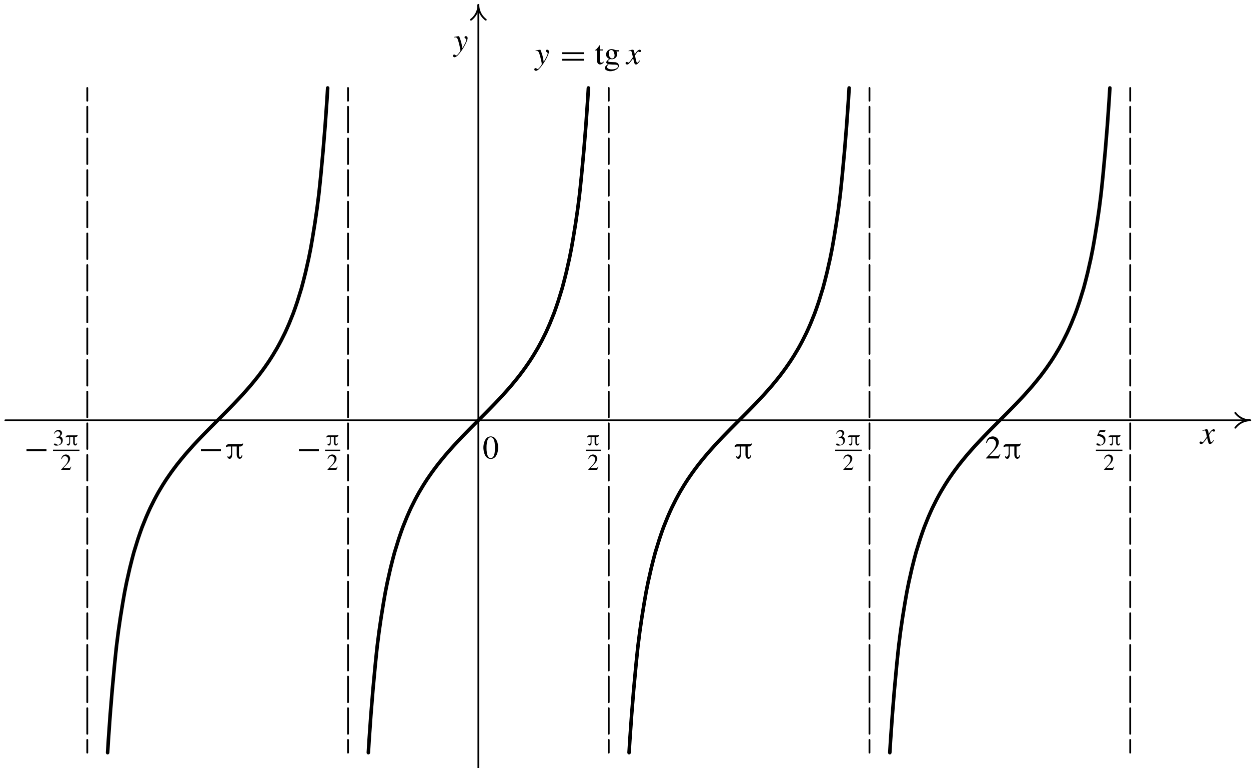
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $H(f) = \mathbb{R}$
funkce je lichá $\quad\rightarrow\quad \mathrm{tg}\,(-x) = \mathrm{tg}\,x$
základní perioda: $\pi \quad\rightarrow\quad \mathrm{tg}\,(x + k\pi) = \mathrm{tg}\,x, \quad k \in \mathbb{Z}$

Funkce kotangens

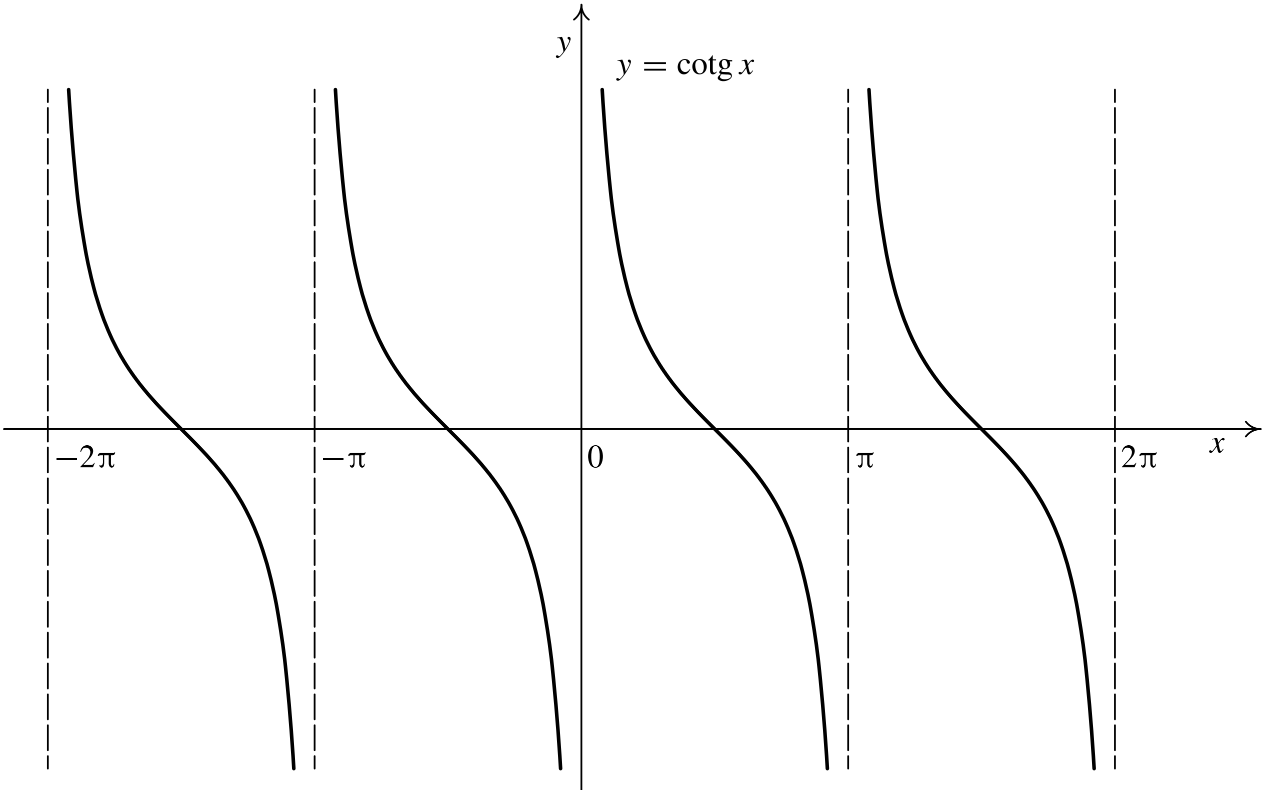
$$f : y = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Vlastnosti:

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $H(f) = \mathbb{R}$
funkce je lichá $\quad\rightarrow\quad \mathrm{cotg}\,(-x) = \mathrm{cotg}\,x$
základní perioda: $\pi \quad\rightarrow\quad \mathrm{cotg}\,(x + k\pi) = \mathrm{cotg}\,x, \quad k \in \mathbb{Z}$



y
$y = \operatorname{tg} x$
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
x


y
y = cotg x
x
−2π
−π
0
π
2π

Hodnoty goniometrických funkcí ve význačných bodech

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
$\operatorname{cotg} x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0

Příklad.

Vypočítejte (bez použití kalkulačky):

$$\text{a)}\ \sin\frac{5}{6}\pi\,, \qquad\qquad \text{b)}\ \cos 240^\circ$$

Určete základní velikost úhlu v radiánech, víte-li, že platí:

$$\text{a)}\ \sin x_1 = -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad \cos x_1 > 0\,, \qquad\qquad \text{b)}\ \cos x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Grafy goniometrických funkcí

Načrtněte grafy následujících funkcí:

$$f_1 : y = \sin 2x$$

$$f_2 : y = \sin(-2x)$$

$$f_3 : y = \sin(x + 2)$$

$$f_4 : y = \cos x - \frac{\pi}{4}$$

$$f_5 : y = \sin 2\pi x$$

$$f_6 : y = -3 + 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

Základní vztahy a vzorce

Následující vztahy platí všude, kde je současně definována levá i pravá strana rovnosti

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1\,, \qquad \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1\,,$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y\,,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y\,,$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x\,,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x\,,$$

$$\left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}\,, \qquad \left|\cos \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}\,,$$

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

Příklad:

Ani určíte hodnotu x, určete hodnoty zbývajících gioniometrických funkcí v bodě x, víte-li, že platí:

$$\operatorname{tg} x = \frac{15}{8}\,, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Příklady:

Načrtněte grafy následujících funkcí:

$$f_1 : y = \sin x \cos x$$

$$f_2 : y = \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$f_3 : y = \sin^2 x + \cos^2 x$$