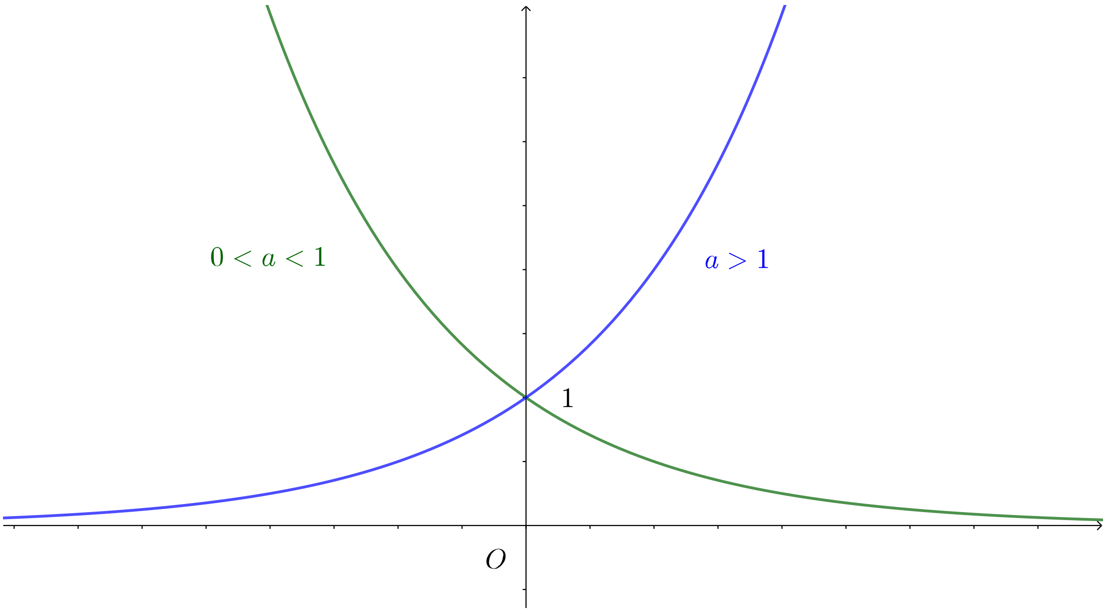
6. Exponenciální a logaritmické funkce, rovnice a nerovnice

Exponenciální a logaritmická funkce

Exponenciální funkce

Nechť $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$. Funkci $f : y = a^x, x \in \mathbb{R}$ nazýváme *exponenciální funkcí o základu a*.



Vlastnosti:

$D(f) = \mathbb{R}$

$H(f) = (0, \infty)$

- prostá na svém definičním oboru

- grafem *exponenciální křivka*

- exponenciální funkce o základu e (Eulerovo číslo, $e \approx 2.718218$) - *přirozená exponenciální funkce*

- exponenciální funkce o základu 10 - *dekadická exponenciální funkce*

Pravidla pro počítání:

Nechť $a \in \mathbb{R}^+$. Pak pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$a^{x+y} = a^x a^y , \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy} .$$

Logaritmická funkce

Inverzní funkce f^{-1} k funkci $f: y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$ se nazývá *logaritmická funkce o základu* a.

Značení:

$$f^{-1}: \quad y = \log_a x\,, \quad a > 0\,, \quad a \neq 1$$

Platí tedy:

$D(f^{-1}) = H(f) = (0, \infty)$

$H(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$

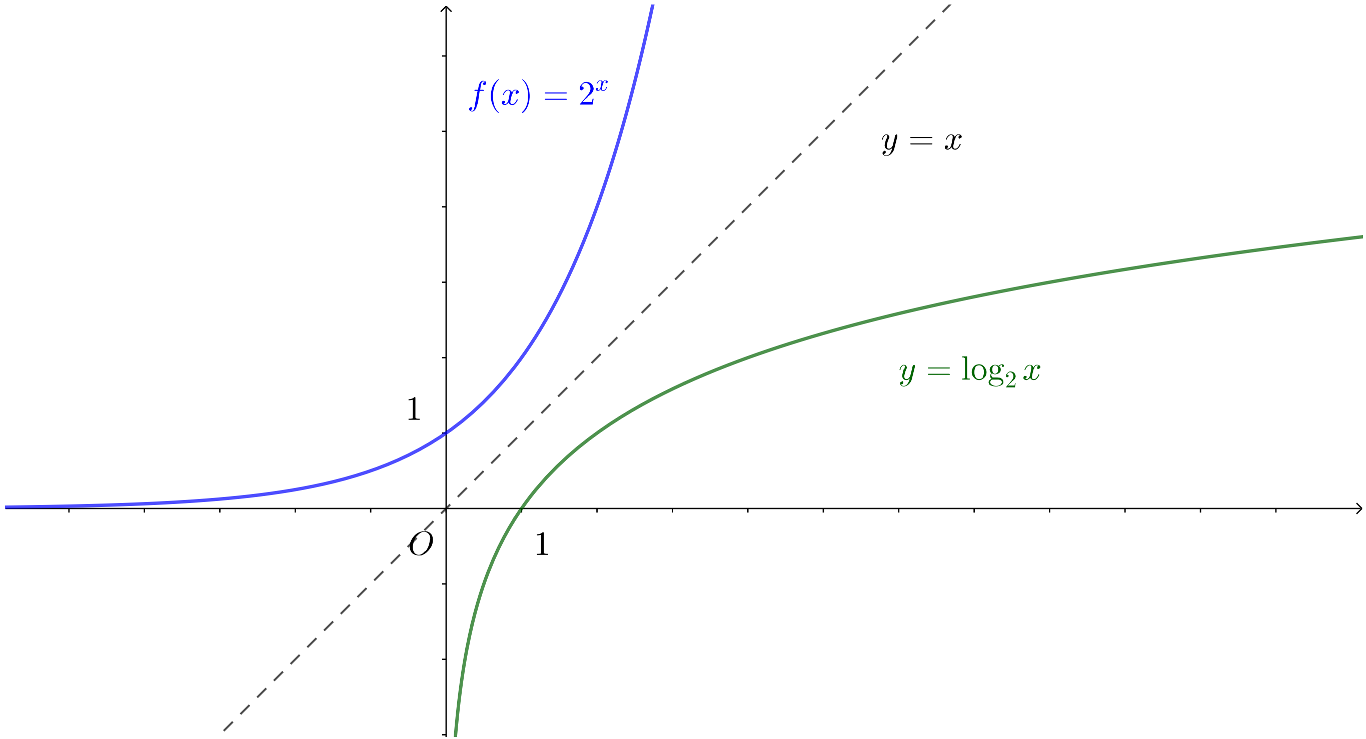
funkce f^{-1} je prostá na svém definičním oboru

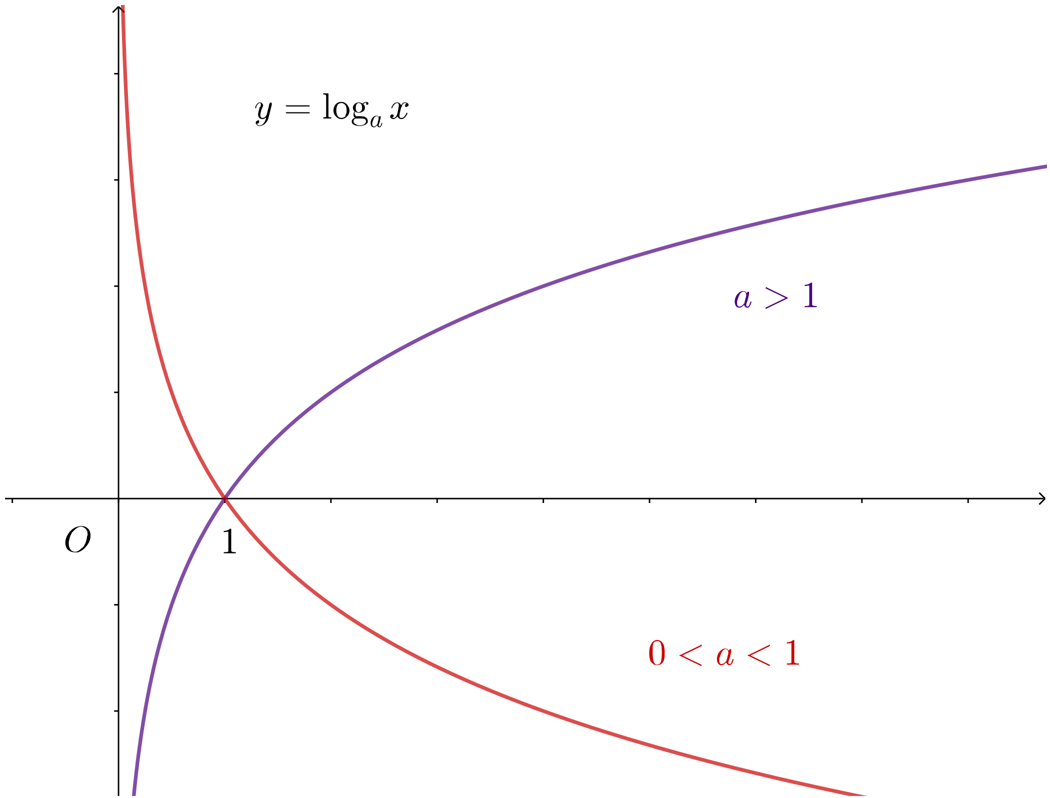
$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y\,, \qquad \text{kde} \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad y \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

funkční hodnoty logaritmické funkce ... *logaritmy*

$a = 10$ ... *dekadická logaritmická funkce*, $y = \log x$

$a = \mathrm{e}$ ... *přirozená logaritmická funkce*, $y = \ln x$


$f(x) = 2^x$
$y = x$
$y = \log_2 x$
1
O
1


$y = \log_a x$
$a > 1$
O
1
$0 < a < 1$

Pravidla pro počítání s logaritmy

1. Nechť $a > 0, a \neq 1$. Pak platí:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}^+$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}^+$$

$$\log_a x^s = s \log_a x\,, \qquad x \in \mathbb{R}^+\,,\ s \in \mathbb{R}$$

2. Nechť $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$. Pak platí:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},\ x \in \mathbb{R}^+$$

Příklady:

1. Vypočítejte:

$$\log 10\,, \qquad \log_7 1\,, \qquad \log_2 \sqrt{2}\,, \qquad \log_{0,2} 0,04$$

2. Určete n tak, aby platilo:

$$\log_2 n = 5\,, \qquad \log_n 100 = 2\,, \qquad \log_n 1 = 0$$

3. Určete definiční obory funkcí:

$$f_1 : y = \log_4 \frac{x-3}{x+3}$$

$$f_2 : y = \sqrt{\ln(x^2 - 1)}$$

4. Načrtněte graf funkce

$$f : y = \left(\frac{1}{e}\right)^{x+1} - 2$$

Exponenciální rovnice

Exponenciální rovnicí nazýváme každou rovnici, ve které je neznámá $x \in \mathbb{R}$ v exponentu nějaké mocniny.
Základní tvar exponenciální rovnice:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}$$

- jedna z funkcí f, g může být speciálně konstanta

$a = b, a \neq 1$:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$a \neq b, \quad a, b \neq 1$ - rovnici logaritmujeme:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \log a = g(x) \log b$$

Složitější exponenciální rovnice se řeší převedením na uvedený základní tvar a příp. na algebraickou rovnici, přičemž se často užívá *substituce* $a^x = y \quad (a > 0, a \neq 1)$.

Příklady:

Řeště rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

$$5^{1-x} = 7^{x-1}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} = 5^x$$

$$4^x + 3^{x+4} = 4^{x+3} - 3^{x+2}$$

$$2^{2x+1} + 2^{x+2} = 16$$

Logaritmické rovnice

Logaritmickou rovnicí nazýváme každou rovnici, ve které se vyskytují logaritmy výrazů s neznámou $x \in \mathbb{R}$.
Nejjednodušší případ:

$$\log_a x = b\,, \qquad a > 0, a \neq 1, b \in \mathbb{R}$$

- podle definice logaritmu řešení $x = a^b$

Složitější logaritmické rovnice obvykle řešení upravením do tvaru

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)\,, \qquad a > 0, a \neq 1\,.$$

- jedna z funkcí f, g může být speciálně konstanta
- logaritmická funkce je prostá $\Rightarrow$ $f(x) = g(x)$! při splnění podmínek $f(x) > 0$ a $g(x) > 0$
- pokud podmínky nestanovíme předem, je součástí řešení zkouška

Řešení složitějších logaritmických rovnic často usnadňuje vhodná substituce (např. $y = \log_a x$), kterou se logaritmická rovnice převede na algebraickou.

Příklady:

Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

$$\log(x^{logx}) = 1$$

$$5\log\sqrt[3]{x} - 4\log\sqrt[6]{x} + \frac{1}{2}\log x^8 = 9 - \log x^5$$

$$\log(x+3) + \log(x-2) = 2 - \log 2$$

Exponenciální a logaritmické nerovnice

- řešíme s využitím vlastností exponenciálních a logaritmických funkcí

Příklady:

V $\mathbb{R}$ řešte nerovnice:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{5x-2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+4}$$

$$\ln x^2 \leq \ln(5x-4)$$

$$\log \frac{x-1}{x+1} < 0$$