4. Algebraické elementární funkce

Algebraické funkce

Základní elementární funkce

- funkce mocninné, exponenciální, logaritmické, goniometrické, cyklometrické

Elementární funkce

- funkce, které lze vytvořit ze základních elementárních funkcí pomocí konečného počtu operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání funkcí

Algebraické funkce

- $f(x)$ lze vytvořit pomocí (konečného počtu) operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování proměnné x

SŠ:
lineární funkce, kvadratická funkce, mocninné funkce, lineární lomená funkce
transformace grafů těchto funkcí

Lineární funkce

Lineární funkcí nazýváme každou funkci

$$f : y = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad D(f) = \mathbb{R}\,.$$

- grafem lineární funkce je přímka (*linea*) různoběžná s osou y

speciálně:
$a = 0$ ... konstantní funkce
$a \neq 0\,, b = 0$ ... přímá úměrnost

Vlastnosti:
$a > 0$ ... rostoucí
$a < 0$ ... klesající

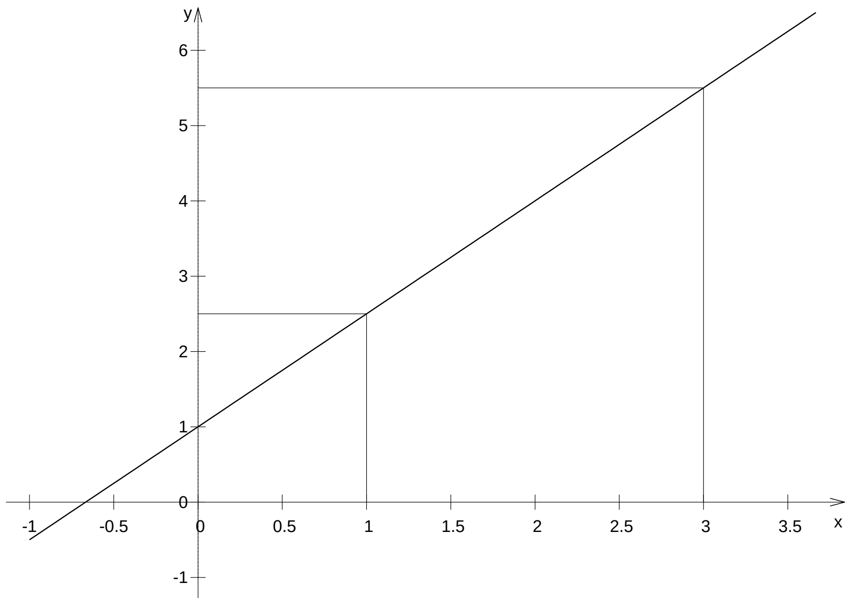
význam konstant a, b

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \alpha$$

Příklady:

1. Funkční předpis lineární funkce f zapište rovnicí, víte-li, že graf funkce f prochází body $A[1;2], B[3;-4]$.

2. Najděte předpis lineární funkce $f : y = ax + b$, jejíž graf je na obrázku. Využijte přitom významu koeficientů a, b.



3. Z plně naplněné vodní nádrže o objemu 1500 l vytéká 6 l vody za sekundu až do jejího vyprázdnění. Určete funkci f vyjadřující závislost objemu V vody zbylé v nádrži na době t, po kterou vytékala. Čas t počítejte od okamžiku, kdy voda začala vytékat ($t_0 = 0$ s), do okamžiku, kdy se nádrž vyprázdní. Sestrojte graf této funkce.

Kvadratická funkce

Kvadratickou funkcí nazýváme každou funkci tvaru

$$f : y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad D(f) = \mathbb{R}\,.$$

- grafem kvadratické funkce je parabola

speciálně:
$a = 1, b = c = 0$: $\quad y = x^2$ . . . základní kvadratická funkce

- úpravou kvadratického trojčlenu na druhou mocninu lineárního dvojčlenu upravíme předpis kvadratické funkce do tvaru

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

ze kterého je dobře vidět vrchol paraboly $V = [x_0, y_0]$ a její osa $x = x_0$

Průsečíky s osami:

s osou x:

$$P_{x,1} = [x_1, 0],\ P_{x,2} = [x_2, 0],\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},\ D = b^2 - 4ac$$

pro $D > 0$: $x_1 \neq x_2$ (2 průsečíky)

pro $D = 0$: $x_1 = x_2$ (1 průsečík = vrchol $V = [x_1, 0]$, osa x je tečna k parabole)

pro $D < 0$: $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$ (žádný průsečík s osou x)

s osou y:

$$P_y = [0, f(0)] = [0, c]$$

Transformace grafu funkce

$$f : y = f(x)$$

a) $f(x-a)$ ... posunutí ve směru osy x

b) $f(x)+b$ ... posunutí ve směru osy y

c) $-f(x)$ ... překlopení podle osy x

d) $f(-x)$ ... překlopení podle osy y

e) $k \cdot f(x)$

$k > 1$ dilatace ve směru osy y

$0 < k < 1$ kontrakce ve směru osy y

f) $f(c \cdot x)$ ... kontrakce/dilatace ve směru osy x

g) $|f(x)|$

h) $f(|x|)$

Mocninná funkce

Mocninnou funkcí nazýváme každou funkci tvaru

$$f : y = x^r, \quad r \in \mathbb{R}\,.$$

$r \in \mathbb{N} \ldots D(f) = \mathbb{R}$
$r \in \mathbb{Z},\, r \leq 0 \ldots D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ldots D(f) = (0, +\infty)$

$n \in \mathbb{Z}$ sudé $\ldots x^n$ je sudá funkce
$n \in \mathbb{Z}$ liché $\ldots x^n$ je lichá funkce

Lineární lomená funkce

Lineární lomenou funkcí nazýváme každou funkci tvaru

$$f : y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0.$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$, $\qquad H(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$

- grafem je rovnoosá hyperbola

vodorovná asymptota: $y = \frac{a}{c}$

svislá asymptota: $x = -\frac{d}{c}$

Průsečíky s osami:

s osou x: $P_x = \left[-\frac{b}{a}, 0 \right]$ pro $a \neq 0$ $\qquad$ s osou y: $P_y = [0, f(0)] = \left[0, \frac{b}{d} \right]$

je to prostá funkce, není ani shora ani zdola omezená

speciálně: pro $a = d = 0$ je to lichá funkce

speciálně: $y = \frac{1}{x}$ ... nepřímá úměrnost

Příklady:

Nakreslete grafy funkcí

1. $f_1 : y = -x^2 + 3$
2. $f_2 : y = (x-1)^{-2} - 3$
3. $f_3 : y = \dfrac{x}{x-2}$
4. $f_4 : y = \sqrt[3]{x+1}$
5. $f_5 : y = |x^2 + 2x - 3|$
6. $f_6 : y = \dfrac{|x|+1}{|x|-2}$
7. $f_7 : y = ||||x| - 1| - 1| - 1|$