3. Funkce a jejich vlastnosti

Pojem funkce

Definice: Nechť A, B jsou množiny. *Kartézským součinem množin A a B* nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic (x, y) takových, že $x \in A$ a $y \in B$. Značíme jej $A \times B$. Tedy

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Definice: *Zobrazením f množiny A do množiny B* nazýváme takovou podmnožinu kartézského součinu $A \times B (f \subset A \times B)$, že platí: ke každému prvku x množiny A existuje právě jeden prvek y z množiny B takový, že $(x, y) \in f$, tj.

$$\forall x \in A \; \exists!\, y \in B : (x, y) \in f \, .$$

Definice: Nechť $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Zobrazení f množiny A do množiny $\mathbb{R}$ $(f : A \to \mathbb{R})$ nazýváme *reálnou funkcí jedné reálné proměnné* (dále jen *funkcí*). Množina A se nazývá *definiční obor* funkce f a značí se $D(f)$.

x ... proměnná, argument funkce f

y ... funkční hodnota, hodnota funkce f v bodě x

$y = f(x)$ ... funkce f přiřazuje prvku x prvek y / y je hodnotou funkce f v bodě x

obor hodnot funkce f:

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in D(f) \text{ takové, že } y = f(x)\}$$

Zadání funkce

1. definiční obor funkce $D(f)$
2. funkční předpis (pravidlo)

Pozn.: definiční obor nemusí být výslovně uveden $\rightarrow$ množina všech takových $x \in \mathbb{R}$, pro která má daný předpis smysl

Příklad.

- $f : y = 3x^2 - 1\,, \quad x \in \langle 0, +\infty)$
- $f : y = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

Graf funkce

– grafické znázornění funkce

= množina bodů (v rovině $\mathbb{R}^2$), jejichž první souřadnice je $x \in D(f)$ a pro druhou souřadnici platí rovnost $y = f(x)$

Jak poznáme, že je nějaká množina bodů grafem funkce?
definice funkce $\rightarrow$ množina nesmí obsahovat body, které leží nad sebou

Příklad. Nakreslete graf funkce

a)

$$f\,:\,y = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

b)

$$f\,:\,y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Vlastnosti funkcí

Omezená funkce

Definice: Řekneme, že funkce f je

(i) *shora omezená na množině* $M \subset D(f) \Leftrightarrow$ existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) \leq K \quad \forall x \in M$,

(ii) *zdola omezená na množině* $M \subset D(f) \Leftrightarrow$ existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) \geq L \quad \forall x \in M$,

(iii) *omezená na množině* $M \subset D(f) \Leftrightarrow f$ je na M omezená shora i zdola.

Řekneme, že funkce f je *shora*, resp. *zdola omezená*, jestliže je omezená na $D(f)$.

Příklad.

a) $f : y = 3 - x^2$

b) $f : y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

$\rightarrow$ graf funkce ohraničené shora leží celý pod přímkou $y = K$
$\rightarrow$ graf funkce ohraničené zdola leží celý nad přímkou $y = L$
$\rightarrow$ graf ohraničené funkce leží mezi dvěma rovnoběžkami ve výškách L a K

Prostá funkce

Definice: Řekneme, že funkce f je *prostá na množině* $M \subset D(f)$, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Příklad. Rozhodněte, zda-li je funkce $f : y = 2x + 5$ prostá na svém definičním oboru.

libovolná rovnoběžka s osou x protne graf prosté funkce nejvýše jednou

Monotónní funkce

Definice: Řekneme, že funkce f je

(i) *rostoucí na množině* $M \subset D(f)$, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$,

(ii) *klesající na množině* $M \subset D(f)$, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$,

(iii) *nerostoucí na množině* $M \subset D(f)$, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \geq f(x_2)$,

(iv) *neklesající na množině* $M \subset D(f)$, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Příklad. Dokažte, že funkce $f : y = -3x + 6$ je klesající v $\mathbb{R}$.

Sudá, lichá funkce

Definice: Řekneme, že funkce f je *sudá*, resp. *lichá*, jestliže

(i) je-li $x \in D(f)$, pak $-x \in D(f)$,

(ii) $f(-x) = f(x)$, resp. $f(-x) = -f(x)$ pro každé $x \in D(f)$.

Příklad. Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou sudé (liché) ve svém definičním oboru.

a) $f : y = \dfrac{1}{x-3}$

b) $f : y = x^3$

c) $f : y = \dfrac{|x|}{x^2-4}$

graf sudé funkce …souměrný podle osy y
graf liché funkce …souměrný podle počátku

Operace s funkcemi

Součet, rozdíl, součin a podíl funkcí

Definice: Nechť f a g jsou funkce. *Součtem* $f+g$, *rozdílem* $f-g$, *součinem* $f \cdot g$ a *podílem* f/g funkcí f a g nazveme funkce definované následujícími předpisy

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x) && \text{pro } x \in D(f) \cap D(g),\\
(f-g)(x) &= f(x)-g(x) && \text{pro } x \in D(f) \cap D(g),\\
(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) && \text{pro } x \in D(f) \cap D(g),\\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} && \text{pro } x \in D(f) \cap D(g) \setminus \{z \in \mathbb{R} : g(z)=0\}.
\end{aligned}
$$

Skládání funkcí

Definice: Nechť f a g jsou funkce. *Složenou funkcí* $f \circ g$ nazýváme funkci definovanou předpisem

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{pro } x \in D(g) \wedge g(x) \in D(f).$$

Funkci g nazýváme *vnitřní složka*, funkci f *vnější složka* složené funkce $f \circ g$.

vícenásobně složená funkce – složky jsou samy o sobě složenými funkcemi

$D(f \circ g)$ - obecně vždy součástí $D(g)$; musíme vždy zvážit, která x je možno vzít, abychom mohli $g(x)$ dosadit do předpisu pro funkci f

Příklad. Jsou dány funkce $f(x) = -2x + 3$ a $g(x) = \sqrt{x}$. Napiště předpisy pro následující složené funkce a určete jejich definiční obory:

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$

Příklad. U daných složených funkcí určete vnitřní a vnější složku:

a) $y = \log^2 x - 4 \log x$ b) $y = \sqrt{5^x}$

Inverzní funkce

Definice: Nechť f je funkce. Funkce f^{-1} se nazývá *funkce inverzní k funkci* f, jestliže

(i) $D(f^{-1}) = H(f)$,

(ii) pro každé $y \in D(f^{-1})$ platí $\quad f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

nezávisle proměnnou obvykle značíme písmenem x (kreslení grafů - vodorovná osa)

(!) Inverzní funkce f^{-1} existuje právě tehdy, když f je prostá.

Platí:

$(f^{-1} \circ f)(x) = x$ pro každé $x \in D(f)$

$(f \circ f^{-1})(x) = x$ pro každé $x \in D(f^{-1})$

Příklad. Ověřte, že k funkci $f : y = \dfrac{1+x}{1-x}$ existuje inverzní funkce, a najděte ji.