2. Úpravy algebraických výrazů

Algebraické výrazy

- výrazy (zápisy) skládající se z čísel a z písmen označujících proměnné, jež jsou spojeny znaky operací $+, -, \cdot, /$, umocňování a odmocňování

- proměnné $\rightarrow$ obor proměnné $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \ldots)$, nejčastěji $\mathbb{R}$ $\times$ definiční obor proměnné $D(x)$

- racionální $\times$ iracionální (neznámá pod odmocninou)

- racionální celistvé $\times$ racionální lomené

Příklad.

$$3x^3 + 4x + 6, \quad D(x) = \mathbb{R}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}, \quad D(x) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\frac{1}{x - y}, \quad D(x) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq y\}, \quad D(y) = \{y \in \mathbb{R} : y \neq x\}$$

Mnohočleny

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

- mnohočlen (polynom) n-tého stupně (v proměnné x s koeficienty a_k, $k = 0, \ldots, n$)

- $a_k x^k$ – člen mnohočlenu

- jednočlen × dvojčlen × trojčlen (podle počtu členů)

- lineární × kvadratický × kubický (podle nejvyšší mocniny)

  rovnost mnohočlenů – rovnají se všechny koeficienty odpovídajících si členů (se stejnou mocninou proměnné)

Operace s mnohočleny

- součet, rozdíl – sčítáme, resp. odčítáme koeficienty u členů se stejnou mocninou proměnné

- násobení – každý člen prvního mnohočlenu znásobíme každým členem druhého mnohočlenu

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

- dělení mnohočlenů

Příklad.

Proveďte dělení mnohočlenů (proměnné $x \in \mathbb{R}$):

a) $(21x^3 - 31x^2 + 39x - 6) : (7x - 1)$

b) $(x^5 + 1) : (x - 2)$

Pozn.: předpoklad nenulového dělitele

Rozklady mnohočlenů v $\mathbb{R}$

- vyjádření mnohočlenu ve tvaru součinu mnohočlenů nižšího stupně

1. vytknutí společného činitele před závorku

2. binomické vzorce; vzorce $a^n \pm b^n$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

3. kvadratické trojčleny – Vietovy vzorce:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2), \qquad x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 x_2 = q$$

Příklad. Rozložte dané mnohočleny na součin:

a) $3x^4 - 2x^3 + 3x - 2$,

b) $x^4 - y^4$,

c) $2x^3 + 22x^2 + 48x$.

Doplnění kvadratického trojčlenu na druhou mocninu lineárního dvojčlenu

Příklad.

a) $4x^2 - 4x + 3$,

b) $x^2 + 12x + 21$,

c) $2x^2 + 2x + 5$.

Úpravy algebraických výrazů

- Nahrazení daného algebraického výrazu jiným výrazem, který se mu rovná ve společném definičním oboru

- definiční obor určíme z podmínek, za nichž daný výraz i jeho úpravy mají smysl

Příklad.

a) $\dfrac{11}{2x-6} - \dfrac{2x}{x^2-9}$

b) $\dfrac{x^2+8x+15}{x^2-4x-21}$

c) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

Výsledky:

b) $\dfrac{x^2+8x+15}{x^2-4x-21}=\dfrac{(x+3)(x+5)}{(x+3)(x-7)}=\dfrac{x+5}{x-7},\qquad x\neq 7,\ x\neq -3,\ \text{tj. } x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,7\}$

c) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{a+1}{a}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{a}{a+1}}=\dfrac{1}{\dfrac{a+1+a}{a+1}}=\dfrac{1}{\dfrac{2a+1}{a+1}}=\dfrac{a+1}{2a+1},\quad a\neq 0,\ a\neq -1,\ a\neq -\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y},\qquad x\geq 0,\ y\geq 0,\ x\neq y$