1. Výroky a množiny

Výroky

- základní pojem matematické logiky
- výrokem nazýváme jakékoliv tvrzení, o němž lze rozhodnout, zda je pravdivé nebo nepravdivé
- hypotézy - výroky, o jejichž pravdivosti dosud neumíme rozhodnout, musí však nastat jedna z možností pravda, nepravda

Příklad: Rozhodněte, zda se jedná o výroky.

Číslo 3 je liché.

Rozsviť!

Ve vesmíru existují vyspělé civilizace i mimo sluneční soustavu.

Všechna sudá čísla jsou dělitelná sedmi.

Má myšlenka je voskovicí světla mdlého.

Kolik je hodin?

- výrokům přiřazujeme pravdivostní hodnotu 1, je-li výrok pravdivý, nebo 0, je-li výrok nepravdivý,

- značíme malými písmeny a, b, v, ...

Negace výroku v:

výrok $\neg v$ ‘... Není pravda, že v’.

Příklad:

Součin dvou záporných reálných čísel je kladný.

$\sqrt{2} + \sqrt{3} \geq \sqrt{5}$.

Složené výroky:

- vytváříme z jednoduchých výroků pomocí logických spojek:

  konjunkce $\wedge$ ‘a (zároveň)’

  disjunkce $\vee$ ‘nebo’

  implikace $\Rightarrow$ ‘jestliže ..., pak ...’

  ekvivalence $\Leftrightarrow$ ‘..., právě tehdy když ...’

a	b	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

implikace $a \Rightarrow b$

- obrácená implikace $b \Rightarrow a$

- obměněná implikace $\neg b \Rightarrow \neg a$

Negace základních složených výroků:

Složený výrok	Negace složeného výroku
$a \wedge b$	$\neg a \vee \neg b$
$a \vee b$	$\neg a \wedge \neg b$
$a \Rightarrow b$	$a \wedge \neg b$
$a \Leftrightarrow b$	$(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$

Výroková forma

- výraz obsahující proměnné;
- výrokem se stává po dosazení přípustných hodnot proměnných nebo kvantifikací

Například: Číslo x je sudé.

Kvantifikované výroky:

tři základní kvantifikátory

- obecný (velký) kvantifikátor — *každý* prvek má danou vlastnost; značíme $\forall$;
- existenční (malý) kvantifikátor — *alespoň jeden* prvek má danou vlastnost; značíme $\exists$
- kvantifikátor jednoznačné existence — *právě jeden* prvek má danou vlastnost; značíme $\exists!$

Negace kvantifikovaných výroků:

zaměníme kvantifikátory $\forall \to \exists$; $\exists \to \forall$ a výrok negujeme

Příklad: Negujte následující kvantifikované výroky:

Každé prvočíslo je liché číslo.

Druhá mocnina každého reálného čísla je číslo nezáporné.

Existuje alespoň jedno reálné číslo x, pro než $\sqrt{x^2} = x$.

Množiny

množina - soubor (souhrn) navzájem rozlišitelných objektů, které nazýváme prvky množiny

- značíme velkými písmeny A, B, ...

$a \in A \dots a$ je prvkem množiny A

$x \notin B \dots x$ není prvkem množiny B

Zadání množiny

- výčtem; $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{k, \ell, m\}$, $D = \{\text{pondělí}, \text{úterý}, \text{čtvrtek}\}$
- charakteristickou vlastností; $F = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ je sudé číslo}\}$, $G = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$

$A \subset B$ ...'A je podmnožinou B' právě když $\forall x \in A$ platí $x \in B$,
(každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B)

$A = B$ ...'A je rovna B' právě když $A \subset B \wedge B \subset A$,
(každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B a každý prvek množiny B je zároveň prvkem množiny A)

prázdná množina $\emptyset = \{\}$ neobsahuje žádný prvek

Platí: $A \subset A, \quad \emptyset \subset A, \quad \emptyset \neq \{\emptyset\}$,

Když $A \subset B$ a zároveň $B \subset C$, pak $A \subset C$.

Příklad.

$\{1, 2\} = \{2, 1\}, \quad \{1, 2, 3\} \neq \{2, 3, 4\}$

Příklad.

Najděte všechny podmnožiny množiny $A = \{1, 2\}$.

Množinové operace:

$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ (sjednocení množin),

(množina takových prvků, které patří do množiny A nebo do množiny B)

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} = \{x \in A : x \in B\}$ (průnik množin),

(množina takových prvků, které patří do množiny A a zároveň do množiny B)

$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ (rozdíl množin),

(množina takových prvků, které patří do množiny A a zároveň nepatří do množiny B)

Nechť Z je základní množina, $A \subset Z$. Potom doplněk množiny A do množiny Z je množina

$A'_Z = A^c = Z \setminus A$ (množina takových prvků ze Z, které nepatří do množiny A)

Příklad.

Určete $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, jestliže $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$.

Důležité číselné množiny.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ množina přirozených čísel,

$\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ množina celých čísel,

$\mathbb{Q} = \{x = p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ množina racionálních čísel,

$\mathbb{R}$ množina reálných čísel,

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ množina iracionálních čísel,

$\mathbb{C}$ množina komplexních čísel.

Platí: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.