Lineární algebra (UMB 551)

Jan.Eisner@prf.jcu.cz

přednáška: pondělí 12:30–14:00 C2, sudé týdny

fix.prf.jcu.cz/~eisner/lock/UMB-551/

1 Úvod

Obsah

1.0.1 Co budete po absolvování přednášky umět

- Co jsou matice a jaké jsou jejich vlastnosti. Počítání s maticemi.
- Co je aritmetický vektorový prostor.
- Hodnost matice. Báze vektorového prostoru.
- Soustavy lineárních rovnic. Gaussova eliminační metoda.
- Determinanty a jejich vlastnosti. Aplikace determinantů.
- Inverzní matice.
- Vlastní čísla a vlastní vektory matice.

Literatura:

Nicholson, W.K.:. Elementary linear algebra. PWS Publisher, 1986.

Strang, G.:. Linear algebra and its applications. Academia Press, New York, 1976.

TLUSTÝ, P.:. Lineární algebra pro učitele. České Budějovice, PF JU, 2003.

Holenda, J.:. O maticích. Plzeň 2007.

Zlatoš, P.: Lineárna algebra a geometria. Bratislava 2011.

Hefferon, J.: Linear Algebra. `http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/`

Starořecká moudrost: Žák není nádoba, jež se má naplnit, ale pochodeň, která se má zapálit.

2 Základní pojmy

2.0.2 Matice

Budeme mluvit o reálných, případně komplexních maticích, tj. prvky matic budou realná nebo komplexní čísla.

Definice: *Matice typu* $m \times n$ (m řádků $\times$ n sloupců) je obdélníkové schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Značení: $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$.

Je to vlastně tabulka čísel a index nám říká pozici prvku v tabulce.

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

je matice typu 2×3, prvek na 1. řádku a druhém sloupci je $a_{12} = 2$.

Obecněji: a_{ij} je prvek matice A, který je na i-tém řádku a j-tém sloupci.

Definice: Matice typu $1 \times n$ tvaru $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ nazýváme *i-tý řádek matice.*

Matice typu $m \times 1$ tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

nazýváme *j-tý sloupec matice*,

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$i = 2$, druhý řádek je $(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{23}) = (3, 4, -2)$

$j = 1$, první sloupec je $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

tak jak to je vidět v tabulce, jen to musíme nějak matematicky zapsat.

Definice: Je-li $m = n$, pak hovoříme o čtvercové matici a číslo $m(= n)$ nazýváme *řád matice.*

Příklad:

$$B = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ 33 & 44 \end{pmatrix}$$

řád $= 2$.

Hlavní diagonála (čtvercové) matice $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$

Příklad:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Hlavní diagonála matice C je $(1, 4, 9)$

Horní trojúhelníková matice je matice, která má pod hlavní diagonálou samé nuly.

Příklad: C není trojúhelníková matice

$H = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ je horní trojúhelníková matice

Analogicky, *dolní trojúhelníková matice* má nad diagonálou samé nuly.

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ je *diagonální* matice—má nuly pod i nad hlavní diagonálou, je to horní a zároveň dolní trojúhelníková matice.

Nulová matice

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

libovolného typu

Jednotková matice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

je čtvercová a diagonální, na hlavní diagonále má 1, jinde 0.

Dvě matice jsou si rovny, jestliže jsou stejného typu a mají na stejných pozicích stejné prvky.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 x + \cos^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2 x + \cos^2 x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definice: Čtvercovou matici (a_{ij}), řádu n, pro kterou platí $a_{ij} = a_{ji}$ pro všechna $i, j = 1, \ldots, n$, nazýváme *symetrickou* maticí.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Definice: Čtvercovou matici (a_{ij}), řádu n, pro kterou platí $a_{ij} = -a_{ji}$ pro všechna $i, j = 1, \ldots, n$, nazýváme *antisymetrickou* maticí.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -6 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1 Operace s maticemi

2.1.1 Vynásobení matice číslem

Umíme pro každou matici, definuje se po složkách.

Mějme číslo c a matici $A = (a_{ij})$. Potom $cA = (ca_{ij})$.

Příklad:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 25 \\ 15 & 20 & 30 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Součet matic

Sčítat můžeme pouze matice stejného typu, definuje se po složkách.

Mějme matice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Potom $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

NELZE $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, poslední sloupec levé matice $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ není s čím sečíst.

Platí: (komutativní zákon) $A + B = B + A$

Jistě platí

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

2.1.3 Rozdíl matic

Pouze pro matice stejného typu, definujeme $A - B := A + (-1)B$.

2.1.4 Transponovaná matice

Nechť A je matice typu $m \times n$, pak transponovanou matici A^T získáme tak, že matici A překlopíme podle (hlavní) diagonály. Výsledkem je matice typu $n \times m$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Prohodíme řádky za sloupce a sloupce za řádky.

Poznámka: Nechť A je čtvercová matice řádu n. Potom A je symetrická právě když $A = A^T$.

Mějme čísla c, d a matice A, B, C. Potom (pokud mají výrazy smysl) platí:

$$\begin{aligned} &A+B=B+A && (c+d)A=cA+dA \\ &A+(B+C)=(A+B)+C && c(A+B)=cA+cB \\ &A+O=O+A=A && c(dA)=(cd)A \\ &A-A=O && (A+B)^T=A^T+B^T \\ &\left(A^T\right)^T=A && (cA)^T=cA^T \end{aligned}$$

lze udělat přestávku

Příklad:

Mějme $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Vypočítejte A^T-B+A.

Řešení: $-B=-\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$,

$-B+A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$,

$A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,

$A^T-B+A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

2.1.5 Násobení matic

Formální definice:

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$, $B = (b_{k\ell})$ je matice typu $n \times p$. Položme

$$c_{i\ell} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k\ell}$$

pro $i = 1, \ldots, m$ a $\ell = 1, \ldots, p$.

Matice $C = (c_{i\ell})$ typu $m \times p$ se nazývá *součinem matice* A *s maticí* B, tj. $C = AB$.

Co to znamená lidsky?

Násobit umíme jen takové dvě matice, pro které platí, že první matice má tolik sloupců jako druhá matice řádků.

(i, j)-tý prvek součinu získáme tak, že "vynásobíme" i-tý řádek první matice j-tým sloupcem druhé matice.

Příklad:

Vypočítejte AB a BA pro $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Řešení: $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 4 + 1\cdot 7 & 0\cdot 5 + 1\cdot 8 & 0\cdot 6 + 1\cdot 9 \\ 2\cdot 4 + 3\cdot 7 & 2\cdot 5 + 3\cdot 8 & 2\cdot 6 + 3\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 29 & 34 & 39 \end{pmatrix}$,

BA NELZE, B je typu 2×3, A je typu 2×2, $3 \neq 2$.

Příklad:

Vypočítejte AB a BA pro $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Pozorování: Čtvercové matice stejného typu lze bez problémů násobit, dostaneme zase matici stejného typu.

V našem případě budou oba součiny typu 2×2.

Řešení:

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$,

$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Pozorování: $AB \neq BA$, násobení nekomutuje.

Příklad:

Vypočítejte AB a BA pro $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (typu 1×3), $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ (typu 3×1).

Pozorování: AB bude typu 1×1, čili vlastně "číslo"

BA bude typu 3×3.

Řešení:

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Obecně neplatí $AB = BA$.

Viděli jsme, že jeden ze součinů může existovat a druhý nemusí a i když oba součiny (obě strany rovnosti) existují, rovnost nastane spíše vyjímečně.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Nerovnají se.

Násobení je ještě podivnější, existují nenulové matice, jejichž součin je nulová matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V obráceném pořadí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definice: (Čtvercové) matice A, B se nazývají *zaměnitelné*, jestliže platí $AB = BA$.

Mějme čísla c, d a matice A, B, C. Potom (pokud mají výrazy smysl) platí:

$$
\begin{array}{ll}
A(BC) = (AB)C & (A+B)C = AC + BC \\
AE = EA = A & C(A+B) = CA + CB \\
AO = OA = O & (dA)B = A(dB) = d(AB) \text{ (číslo můžeme vytknout)} \\
(AB)^T = B^T A^T & A \text{ je čtvercová, potom } A + A^T \text{ je symetrická.}
\end{array}
$$

Speciální případ:

A budiž čtvercová matice

$A^2 = AA$ (maticově, nikoliv každý prvek),

$A^3 = AAA$

$\vdots$

Platí: Každou čtvercovou matici A lze rozložit na součet symetrické A_s a antisymetrické A_{as} matice

$$A = A_s + A_{as},$$

kde

$$A_s = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right), \quad A_{as} = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right).$$

3 Aritmetické vektorové prostory

Budeme uvažovat reálné vektory, tj. budeme se pohybovat v $\mathbb{R}^n$.

Vektorem budeme rozumět uspořádanou n-tici reálných čísel $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Pevně zvolené číslo n budeme nazývat *dimenzí* (=*rozměrem*).

Příklad: $n = 2$; vektory v $\mathbb{R}^2$ jsou uspořádané dvojice čísel $v = (a_1, a_2)$. To odpovídá představě vektorů v rovině ze střední školy.

Příklad: $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (-2, 1)$

[obrazek]

Na vektorech definujeme operace sčítání a vynásobením skalárem (=číslem) po složkách. Tedy pro vektory $u = (a_1, a_2 \ldots, a_n)$, $v = (b_1, b_2 \ldots, b_n)$ máme operace:

$u + v = (a_1, a_2 \ldots, a_n) + (b_1, b_2 \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2 \ldots, a_n + b_n)$

$ru = r \cdot (a_1, a_2 \ldots, a_n) = (ra_1, ra_2 \ldots, ra_n)$ pro reálné číslo r.

Platí:

Operace sčítání splňuje následující vlastnosti:

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ pro libovolné vektory $u, v, w \in \mathbb{R}^n$,

(2) $u+v = v+u$ pro libovolné vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$,

(3) Existuje prvek o takový, že $u+o = u$ pro všechny vektory u.

Říkáme mu *nulový vektor* $o = (0, 0, \dots, 0)$.

(4) Pro všechny vektory v existuje vektor $-v$ takový, že $v + (-v) = o$.

Jedná se o vektor *opačný* k vektoru $v = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, který je tvaru $-v = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$

Zřejmě platí:

$v + o = (v_1, v_2, \dots, v_n) + (0, 0, \dots, 0) = (v_1 + 0, v_2 + 0, \dots, v_n + 0) = (v_1, v_2, \dots, v_n) = v$

$v + (-v) = (v_1, v_2, \dots, v_n) + (-v_1, -v_2, \dots, -v_n) = (v_1 - v_1, v_2 - v_2, \dots, v_n - v_n) = (0, 0 \dots, 0) = o$

Operace sčítání a vynásobení skalárem splňují následující vlastnosti:

(5) $r(u+v) = ru + rv$ pro všechny vektory u, v a skalár r,

(6) $(r+s)u = ru + su$ pro všechny vektory u a skaláry r, s,

(7) $r \cdot (s \cdot u) = (rs) \cdot u$ pro všechny vektory u a skaláry r, s,

(8) $1 \cdot v = v$ pro libovolný vektor v.

Kterýkoliv další fakt o vektorech už lze odvodit z těchto 8 axiomů.

Příklad:

Operace s vektory v $\mathbb{R}^2$ a jejich vlastnosti:

$v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (-2, 1)$

Opačné vektory $-v_1 = (-1, -3)$, $-v_2 = (2, -1)$,

$v_1 + v_2 = (1, 3) + (-2, 1) = (-1, 4)$,

$2v_2 = 2(-2, 1) = (-4, 2)$

[obrazek]

Definice: Množinu všech vektorů v $\mathbb{R}^n$ spolu s operacemi sčítání a vynásobení (reálným) skalárem, které splňují vlastnosti (1)–(8), budeme nazývat (reálným) n-rozměrným *aritmetickým vektorovým prostorem* V_n.

Číslo n je tzv. *dimenze prostoru.*

Příklad:

$\mathbb{R}^2$ s "grafickými operacemi" je dvojrozměrný aritmetický vektorový prostor.

Odteď pro nás slovo "vektor" bude znamenat "prvek aritmetického vektorového prostoru".

Definice: Vektor $v = r_1v_1 + r_2v_2 + \ldots + r_kv_k \in V_n$ se nazývá *lineární kombinace* vektorů $v_1, \ldots, v_k \in V_n$ s koeficienty $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$.

Příklad: v $\mathbb{R}^2$ mějme $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (3, -1)$, $v_3 = (0, 7)$.

$v = (-2, 18)$ je lineární kombinací vektorů v_1, v_2, v_3, neboť

$1 \cdot (1, 3) + (-1) \cdot (3, -1) + 2 \cdot (0, 7) = (1, 3) - (3, -1) + (0, 14) = (-2, 18)$,

koeficienty přitom jsou $1, -1, 2$.

Definice: Vektory $v_1, \ldots, v_k$ (konečně mnoho) se nazývají *lineárně závislé*, jestliže existují koeficienty $r_1, \ldots, r_k$, z nichž alespoň jeden je nenulový, tak, že

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_k v_k = o \quad \text{(nulový vektor)}$$

V opačném případě nazýváme vektory *lineárně nezávislé*.

Poznámka: To znamená, že vektory jsou lineárně nezávislé, jestliže výše uvedená rovnost platí pouze pro $r_1 = r_2 = \ldots = r_k = 0$ (nulový vektor z nich nakombinujeme pouze triviální (=nulovou) kombinací).

Příklad: (v $\mathbb{R}^4$): Rozhodněte, zda vektory u, v, w jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

$u = (2, 1, 0, 3)$, $v = (-1, 1, 1, 2)$, $w = (1, 0, -4, 1)$.

Zkoumáme lineární kombinaci:

$a(2, 1, 0, 3) + b(-1, 1, 1, 2) + c(1, 0, -4, 1) = (0, 0, 0, 0)$.

Operace sčítání funguje po složkách, dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{array}{llllll} 2a & -b & +c & = & 0 \\ a & +b & & = & 0 \\ & b & -4c & = & 0 \\ 3a & +2b & +c & = & 0 \end{array}$$

Zajímá nás, jaká jsou řešení této soustavy—zda je jen nulové řešení nebo zda existují i nenulová řešení.

Soustavu vyřešíme například dosazováním

$$a = -b \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{llllll} -2b & -b & +c & = & 0 \\ & b & -4c & = & 0 \\ -3b & +2b & +c & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lllll} -3b & +c & = & 0 \\ b & -4c & = & 0 \\ -b & +c & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad a = b = c = 0.$$

Soustava má pouze nulové řešení $\Rightarrow$ jediné možné hledané koeficienty jsou samé nuly $\Rightarrow$ zadané vektory jsou lineárně nezávislé.

Příklad: (v $\mathbb{R}^3$): Rozhodněte, zda vektory u, v, w jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

$u = (1,1,0)$, $v = (0,1,2)$, $w = (2,3,2)$.

Zkoumáme lineární kombinaci:

$a(1,1,0) + b(0,1,2) + c(2,3,2) = (0,0,0)$,

která vede na soustavu rovnic

$$\begin{array}{cccccc} a & & +2c & = & 0 \\ a & +b & +3c & = & 0 \\ & 2b & +2c & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cccccc} a & & = -2c & & \\ -2c & +b & & +3c & = & 0 \\ & 2b & & +2c & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} a & = & -2c \\ b & +c & = 0 \\ b & +c & = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} a & = & -2c \\ b & = & -c \end{array}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení řešení tvaru $(-2t, -t, t)$ pro libovolné reálné číslo t.

Vezměme například $t = 1$, tedy řešení $(-2, -1, 1)$ naší soustavy. Dostáváme

$$-2(1,1,0) - 1(0,1,2) + 1(2,3,2) \quad = \quad (-2,-2,0) + (0,-1,-2) + (2,3,2) \quad = \quad (0,0,0),$$

zadané vektory jsou lineárně závislé.

Poznámky:

1. Všimněte si, že k vyřešení problému lineární (ne)závislosti vektorů musíme vyřešit soustavu rovnic a zatím k tomu nemáme efektivní metody; v budoucnu se k tomu vrátíme, až budeme efektivní metody znát.

2. Ve druhém případě jsme měli lineárně závislé vektory $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 2)$, $w = (2, 3, 2)$. Všimněte si, že v tomto případě umíme napsat jeden z nich jako lineární kombinaci ostatních. Máme

   $2(1, 1, 0) + 1(0, 1, 2) = (2, 3, 2).$

   V případě lineárně nezávislých vektorů toto neuděláme (zkuste si to pro náš první příklad).

Věta:

1. Pro $k \geq 2$ (tj. máme alespoň dva vektory) jsou vektory $v_1, \dots, v_k$ lineárně závislé právě tehdy, když existuje index i tak, že vektor v_i je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$.

2. Pro $k = 1$ je vektor v_1 lineárně závislý, právě když $v_1 = o$.

Důkaz: [jen pro pokročilé] ■

Důsledek:

1. Je-li některý z vektorů $v_1, \dots, v_k$ nulový vektor, pak jsou vektory lineárně závislé.

2. Existují-li různá přirozená čísla i, j tak, že $v_i = v_j$, pak jsou vektory lineárně závislé.

4 Báze VP

Definice: Soustava vektorů $(u, v, \ldots, w)$ z aritmetického vektorového prostoru se nazývá *báze*, jestliže

1. je lineárně nezávislá

2. každý vektor z aritmetického vektorového prostoru lze napsat jako jejich lineární kombinace.

Příklad: V $\mathbb{R}^2$ rozhodněte, zda se jedná o bázi:
$((1, 0), (0, 1))$.
[obrazek]
Ověříme podmínky v definici.

1. Jsou lineárně nezávislé, protože máme

   $a(1, 0) + b(0, 1) = (0, 0)$ a tedy

   $$\begin{aligned} 1 \cdot a + 0 \cdot b &= 0 \\ 0 \cdot a + 1 \cdot b &= 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad a = b = 0.$$

2. Každý vektor (p, q) napíšeme jako $(p, q) = p(1, 0) + q(0, 1)$.

Je to tedy báze.

Příklad: V $\mathbb{R}^2$ rozhodněte, zda se jedná o bázi: $((1,1),(1,-1))$.
Ověříme podmínky v definici.

- Jsou lineárně nezávislé, protože máme

  $a(1,1)+b(1,-1)=(0,0)$ a tedy

  $$\begin{array}{l} a+b=0 \\ a-b=0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad a=b=0.$$

- Chceme vektor (p,q) napsat jako kombinaci vektorů $(1,1),(1,-1)$.

  Hledejme koeficienty této lineární kombinace.

  $a(1,1)+b(1,-1)=(p,q)$ a tedy

  $$\left.\begin{array}{l} a+b=p \\ a-b=q \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Zde řesíme soustavu 2 rovnic se dvěma neznámými } a,b \\ \text{a dvěma parametry } p,q \text{ (} p \text{ a } q \text{ zde vystupují jako dvě libovolná reálná čísla).} \end{array}$$

  Z druhé rovnice dostaneme $a=q+b$ a dosadíme do první rovnice:

  $$\begin{aligned} q+b+b &= p \\ 2b &= p-q \\ b &= \tfrac{p-q}{2}. \end{aligned}$$

Po dosazení do $a = q + b$ a dostaneme $a = q + \dfrac{p-q}{2} = \dfrac{2q+p-q}{2} = \dfrac{p+q}{2}$.

Toto funguje pro libovolná p, q, tj. pro libovolný vektor (p, q) najdeme vhodné koefienty.

Například vektor $(p, q) = (3, 7)$ má koeficienty

$a = \dfrac{p+q}{2} = \dfrac{3+7}{2} = 5, \qquad b = \dfrac{p-q}{2} = \dfrac{3-7}{2} = -2$

a platí $5(1, 1) - 2(1, -1) = (3, 7)$. [obrazek]

Celkově $(p, q) = \dfrac{p+q}{2}(1, 1) + \dfrac{p-q}{2}(1, -1)$.

Je to tedy báze.

Příklad: V $\mathbb{R}^2$ rozhodněte, zda se jedná o bázi: $((1,0),(0,1),(1,1))$.

[obrazek]

Ověříme podmínky v definici.

- Jsou lineárně závislé, protože například vektor $(1,1)$ lze napsat jako kombinaci vektorů $(1,0)$ a $(0,1)$. Zřejmě

$$(1,1) = 1 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1)$$

Není to báze.

Příklad: V $\mathbb{R}^2$ rozhodněte, zda se jedná o bázi: $((1, 1))$.
Ověříme podmínky v definici.

- Je lineárně nezávislý, protože je to jeden vektor a je nenulový.
- Existují vektory, které nelze napsat jako lineární kombinaci (v tomto případě násobek) tohoto vektoru. Například neexistuje a takové, aby $a(1, 1) = (2, 3)$

Není to báze.
Postřehy:

- Báze vektorového prostoru (V.P.) je co možná nejmenší množina vektorů taková, že každý prvek V.P. pomocí ní popíšeme (vyrobíme, nakombinujeme).

  V teorii V.P. to znamená, že místo práce s celým V.P. stačí pracovat jen s touto malou množinou.
- Báze prostoru $\mathbb{R}^2$ měly stejný počet prvků, a to 2. Jeden vektor bylo málo, tři bylo zbytečně moc.
- Bází může být několik (viz první dva příklady). Najdete ještě nějakou?

Platí:

- Každý n-rozměrný aritmetický V.P. má nějakou bázi. Vezměme například tzv. standardní bázi (*kanonickou* bázi):

  $$\left.\begin{aligned} e_1 &= (1,0,\dots,0)\\ e_2 &= (0,1,\dots,0)\\ &\vdots\\ e_n &= (0,\dots,0,1) \end{aligned}\right\} \quad n \text{ vektorů, každý obsahuje právě jednu 1 a všude jinde nulu.}$$

  Systém $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ je zřejmě lineárně nezávislý a každý vektor je vhodnou lineární kombinací těchto vektorů.

- Každá báze n-dimenzionálního aritmetického V.P. má právě n prvků.

  POZOR, to neznamená, že každá n-tice vektorů je báze !

  I tak existuje “hodně” bází jednoho V.P.

Poznámka: Dimenze V.P. se v obecné teorii definuje jako počet prvků báze.

Věta: (Shrnutí)

1. Každé dvě báze jednoho V.P. mají stejný počet prvků.
2. Každou lineárně nezávislou množinu vektorů lze doplnit do báze.
3. Báze jsou právě maximální lineárně nezávislé množiny vektorů.
4. [`pro pokročilé`] Báze jsou právě minimální množiny generátorů.

Platí:

Z každé "dostatečně velké množiny vektorů" lze vybrat bázi. "Dostatečně velká množina vektorů" = každý vektor aritmetického V.P. lze napsat jako lineární kombinaci vektorů z této množiny (množina *generující*).

Věta: (`pro pokročilé`) Systém vektorů tvoří bázi n-dimenzionálního aritmetického V.P. právě tehdy, když každý vektor V.P. lze napsat jako lineární kombinaci jednoznačně.

Příklad: V $\mathbb{R}^2$ máme bázi $((1,0),(0,1))$ a například vektor $(3,7)$ lze zapsat jako $3(1,0)+7(0,1)$, nejde to s jinými koeficienty.

Příklad: Vezměme v $\mathbb{R}^2$ systém $((1,0),(0,1),(1,1))$, který není bází. Vektor $(3,7)$ umíme napsat jako kombinaci $3(1,0)+7(0,1)+0(1,1)$ ale také jako $(3,7)=2(1,0)+6(0,1)+1(1,1)$ a takových možností je hodně.

Příklady budou později. Až budeme umět lépe počítat s maticemi, ukážeme si algoritmy na řešení výše zmíněných otázek.

5 Hodnost matice

Buď $A = (a_{ij})$ reálná matice typu $m \times n$. Pak řádky matice jsou vlastně vektory a nás zajímá, jak je to s jejich lineární závislostí a nezávislostí.

Definice: *Hodnost* matice $h(A)$ je maximální počet jejích lineárně nezávislých řádků.

Poznámka: Hodnost matice je nulová, právě když matice je nulová.
Hodnost nenulové matice je přirozené (nenulové) číslo.

Platí: Pro matice A typu $m \times n$ je $h(A) \leq \min\{m, n\}$.

Věta:

- Hodnost matice je rovna maximálnímu počtu jejích lineárně nezávislých sloupců.
- Pro matici A platí $h(A) = h(A^T)$.

Při samotném hledání hodnosti matice si můžeme vybrat, co je snažší zkoumat (řádky nebo sloupce).

Věta: Nechť A je čtvercová matice řádu n. Pak je ekvivalentní:

- $h(A) = n$
- řádky matice A jsou lineárně nezávislé
- sloupce matice A jsou lineárně nezávislé.

Všimněte si, že už jsme začali řešit, jak rozhodovat o nezávislosti vektorů efektivnějším způsobem.

Věta: Nechť A je čtvercová matice řádu n. Pak je ekvivalentní:

- $h(A) < n$
- řádky matice A jsou lineárně závislé
- sloupce matice A jsou lineárně závislé.

5.1 Výpočet hodnosti matice

Definice: Nechť A je (reálná) matice typu $m \times n$. Pak každá z následujících úprav se nazývá *elementární řádková úprava* matice A:

1. prohození libovolných dvou řádků (⇒ libovolná záměna pořadí řádků)
2. vynásobení libovolného řádku *nenulovým* reálným číslem
3. přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku.

Platí: Provedení libovolné elementární řádkové úpravy nezmění hodnost matice.

Hodnost matice budeme počítat tak, že pomocí elementárních řádkových úprav matici převedeme do tvaru, ze kterého už hodnost bude vidět.

Definice: Nechť A je (reálná) matice typu $m \times n$. Řekneme, že matice A je ve *schodovitém tvaru*, jestliže

- každý nenulový řádek je nad každým nulovým
- první nenulové číslo ve vyšším řádku je na pozici více vlevo.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ je ve schodovitém tvaru}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & -5 & 8 \end{pmatrix} \text{ nejsou ve schodovitém tvaru.}$$

Musíme mít schody, kterými odřízneme nuly od nenulových čísel.

V každém nenulovém řádku je jeden schod.

Jak počítat hodnost matice?

Věta: Každou matici lze konečným počtem elementárních řádkových úprav převézt na schodovitý tvar.

Věta: Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Příklad: Určete hodnost matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

chceme nenulové číslo na pozici $(1,1)$ a nuly do zbytku prvního sloupce

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \left| \begin{array}{l} 3.\ \text{řádek} + 1.\ \text{řádek} \\ 4.\ \text{řádek} + (-2) * 1.\ \text{řádek} \end{array} \right| \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left| \begin{array}{l} 3.\ \text{řádek} + (-3) * 2.\ \text{řádek} \\ 4.\ \text{řádek} + 3 * 2.\ \text{řádek} \end{array} \right| \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

která už je ve schodovitém tvaru. Máme 3 nenulové řádky a $h(A) = 3$.

Jak toto použít k zjišťování lineární závislosti a nezávislosti vektorů?

Platí: V n-dimenzionálním aritmetickém V.P. je každý systém $(n+1)$ či více vektorů lineárně závislý.

Dostaneme-li n nebo méně vektorů, utvoříme z nich matici a určíme její hodnost.

Je-li hodnost matice rovna počtu vektorů, pak jsou tyto lineárně nezávislé, je-li ostře menší, pak jsou lineárně závislé.

Máme-li navíc rozhodnout, zda se jedná o bázi, musíme dostat právě n vektorů a ověřit jejich nezávislost.

V principu je jedno, jestli vektory píšeme do řádků nebo do sloupců. V budoucnu budou nekteré algoritmy vyžadovat zapis do sloupců.

Příklad: Rozhodněte, zda následující vektory jsou lineárně závislé či nezávislé, případně zda tvoří bázi daného prostoru.

$\mathbb{R}^3$, $(1,1,-1)$, $(1,3,1)$, $(1,0,-2)$.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice je $h = 2 < 3$, vektory jsou tedy lineárně závislé a nemohou tvořit bázi daného prostoru.

Příklad: Rozhodněte, zda následující vektory jsou lineárně závislé či nezávislé, případně zda tvoří bázi daného prostoru.

$\mathbb{R}^4$, $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$, $(1,1,1,1)$.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & |-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & |-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & |2 \end{pmatrix},$$

$h = 4$, vektory jsou lineárně nezávislé a (protože jsou 4) tvoří bázi v $\mathbb{R}^4$.

Příklad: Rozhodněte, zda následující vektory jsou lineárně závislé či nezávislé, případně zda tvoří bázi daného prostoru.

$\mathbb{R}^4$, $(1,1,0,1)$, $(1,1,-1,0)$, $(0,0,1,-1)$.

Řešení:

matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ nejprve transponujeme, abychom ušetřili několik kroků výpočtu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad h = 3$$

Vektory jsou lineárně nezávislé, ale netvoří bázi (je jich na to málo, báze $\mathbb{R}^4$ mají 4 prvky).

5.2 Algoritmus na výběr báze z množiny vektorů

Zadání: Z množiny vektorů vyberte bázi n-dimenzionálního aritmetického V.P., jde-li to.
Je zřejmé, že na začátku musíme dostat (od nepřítele) n nebo více vektorů.

1. Zapíšeme vektory sloupcově do matice.
2. Převedeme matici do schodovitého tvaru.
3. Sloupce, ve kterých je schod, určují pozici bázových prvků
4. Vybereme ty vektory *ze zadání* na příslušných pozicích (nikoli ty z upravené matice). Je-li jich n, máme bázi. Je-li jich méně než n, bázi nelze vybrat.

Příklad: Z následující množiny vektorů vyberte bázi $\mathbb{R}^3$: $\{(1,1,0),(0,1,1),(2,4,2),(1,0,1),(2,1,1)\}$.
Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & |1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & |2 & 2 \end{pmatrix}$$

Schody na pozicích $1,2,4$.

Bázi tvoří prvky $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$.

Příklad: Z následující množiny vektorů vyberte bázi $\mathbb{R}^3$: $\{(1,1,1),(1,0,0),(0,1,1),(2,1,1)\}$.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nelze vybrat bázi.

5.3 Algoritmus na doplnění lineárně nezávislé množiny do báze

Zadání: Doplňte množinu lineárně nezávislých vektorů do báze n-dimenzionálního aritmetického V.P.

1. Zapíšeme vektory sloupcově do matice.
2. Připíšeme standardní (kanonickou) bázi do sloupců.
3. Převedeme matici do schodovitého tvaru.
4. Sloupce, ve kterých je schod, určují bázové prvky.

Poznámka: Schod musí být na každé pozici, kde je vektor z původní množiny, jinak je množina lineárně závislá a nejde doplnit do báze.

Příklad: Doplňte do báze množinu vektorů $\{(1,1,1),(2,1,1)\}$.
Řešení:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Schody na pozicích $1,2,4$.
Bázi tvoří prvky $\{(1,1,1),(2,1,1),(0,1,0)\}$.

Příklad: Doplňte do báze množinu vektorů $\{(1,1,1,0),(0,1,1,1),(1,2,2,1)\}$.

Řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Levá polovina výsledné schodovité matice neobsahuje 3 schody (pouze 2), je lineárně závislá, tudíž zadanou množinu vektorů nelze doplnit do báze.

6 Soustavy lineárních rovnic

Soustava rovnic tvaru

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

se nazývá *soustava m lineárních rovnic o n neznamých*. Zde a_{ij}, b_i jsou reálná čísla.

Řešením soustavy je n-tice $(t_1, \dots, t_n)$ reálných čísel taková, že po dosazení t_i za x_i $(i = 1, \dots, n)$ všechny rovnice přejdou na identity.

Poznámka: (terminologie): Číslo a_{ij} se nazývá *koeficient* (v i-té rovnici u j-té neznámé) a číslo b_i se nazývá *absolutní člen* i-té rovnice.

Matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se nazývá *matice soustavy.*

Matice $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ se nazývá *rozšířená matice soustavy.*

Označíme-li $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ a $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektor absolutních členů a vektor řešení, lze soustavu zapsat pomocí maticového násobení zkráceně jako $Ax = b$. (Zkuste si to vynásobit.)

Definice: Soustava je *řešitelná* (*neřešitelná*), pokud existuje aspoň jedno (neexistuje žádné) její řešení.
Soustava se nazývá *určená* (*nedourčená*), je-li řešitelná a má jedno (více než jedno) řešení.
Dvě soustavy se nazývají *ekvivalentní*, jestliže mají stejné množiny řešení.

Uvědomme si, že řešit soustavu lineárních rovnic znamená buď najít všechna její řešení nebo zjistit, že je neřešitelná.
Pokud jde o počet řešení, nastane vždy právě jedna z možností:

- soustava nemá žádné řešení
- soustava má jediné řešení
- soustava má nekonečně mnoho řešení

Platí: Každá elementární řádková úprava rozšířené matice soustavy vede k ekvivalentní soustavě, tj. následující úpravy nemění řešení soustavy:

- prohození dvou rovnic (záměna rovnic),
- vynásobení rovnice nenulovým číslem,
- přičtení lineární kombinace ostatních rovnic k dané rovnici,
- vypuštění rovnice, která je lineární kombinací ostaních rovnic.

Elementární *sloupcové* úpravy k ekvivalentním soustavám *nevedou*, protože se míchají proměnné mezi sebou (například prohození dvou sloupců má za následek přejmenování proměnných).

7 Gaussova eliminační metoda

1. Ekvivalentními řádkovými úpravami převedeme rozšířenou matici soustavy $\overline{A}$ do schodovitého tvaru.
2. Získáme ekvivalentní soustavu, kterou snadno *dořešíme postupným dosazováním zdola.*
(V podstatě je to vlastně sčítací metoda, kterou jste se učili řešit soustavy 2 lineárních rovnic o 2 neznámých ale systematická a pro obecné soustavy. T.j. není to dosazovací metoda, která byla na střední škole možná častější.)

Přitom mohou nastat 3 rozdílné případy:

1. V získaném schodovitém tvaru je v posledním nenulovém řádku jediný nenulový prvek a to v posledním sloupci rozšířené matice (absolutní členy). Soustava potom *nemá řešení.*

   Poslední nenulový řádek má tvar $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = \ddagger \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} * & * & \ldots & \ldots & * & * \\ 0 & * & \ldots & \ldots & * & * \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & * & * \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ddagger \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2. Ve fázi zpětného dosazování je v právě diskutovaném řádku právě jedna dosud nevypočtená hodnota proměnné. Výpočet pokračuje jejím vypočtením.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} . & \dots & . & . & . & \dots & . & . \\ . & \dots & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & \dots & 0 & \clubsuit & \ddagger & \dots & \ddagger & \ddagger \\ . & \dots & . & . & . & \dots & . & . \\ . & \dots & . & . & . & \dots & . & . \end{array}\right) \qquad \text{prvky } \ddagger \text{ známe a odpovídající neznámou } \clubsuit \text{ dopočítáme}$$

3. Ve fázi zpětného dosazování je v právě diskutovaném řádku více než jedna dosud nevypočtená hodnota proměnné. První (nenulovou) z nich zvolíme jako "neznámou" a ostatní prohlásíme za volné proměnné. Ty chápeme jako parametry a zbývající vypočteme v závislosti na těchto parametrech.

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c} . & \dots & . & . & \dots & . & \dots & . & . \\ . & \dots & . & . & \dots & . & \dots & . & . \\ 0 & \dots & 0 & \clubsuit & \diamondsuit & \ddagger & \dots & \ddagger & \ddagger \\ . & \dots & . & . & \dots & . & \dots & . & . \\ . & \dots & . & . & \dots & . & \dots & . & . \end{array}\right)$$

prvky $\ddagger$ známe,
odpovídající neznámé $\diamondsuit$ zvolíme jako parametry,
prvek $\clubsuit \neq 0$, odpovídající neznámou dopočítáme

Příklad: Řešte soustavu pomocí GEM.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & - & 4x_5 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 3 \\ -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & & & - & 6x_5 & = & 2 \end{array}$$

Řešení: GEM: pomocí elementárních transformací převedeme matici soustavy do schodovitého tvaru.

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 2 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 0 & -6 & 2 \end{array}\right) \sim \left| \text{prohodíme řádky 1 a 2} \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 0 & -6 & 2 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{l} \text{(3.ř.)+ (1.ř.)} \\ \text{(4.ř.)+ 2*(1.ř.)} \\ \text{vynulují 1.podsloupec} \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \left| \text{ 1/2*(2.ř.) } \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{l} \text{(4.ř.)+ (-5)*(2.ř.)} \\ \text{vynulují 2. a 3. podsloupce} \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -\frac{9}{2} \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{l} \text{(4.ř.)+ (3/2)*(3.ř.)} \\ \text{vynulují 4. podsloupec} \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dostali jsme soustavu (za schodovitým maticovým zápisem vidíme tuto soustavu)

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 3 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & \frac{5}{2} \\ & & & & & & 2x_4 & & & = & 3 \end{array}$$

která má stejné řešení jako soustava původní.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 3 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & \frac{5}{2} \\ & & & & & & 2x_4 & & & = & 3 \end{array}$$

Kde není *pivot* (vedoucí prvek), tam je parametr (v tomto případě sloupec 3 a 5).

Jdeme od konce

$x_5 = t,$

$2x_4 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_4 = \frac{3}{2}$

$x_3 = s,$

$x_2 + s + \frac{3}{2} - 2t = \frac{5}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 1 - s + 2t,$

$x_1 + 1 - s + 2t + s + \frac{3}{2} - 2t = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{1}{2}.$

Řešení: $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 - s + 2t \\ s \\ \frac{3}{2} \\ t \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R} \right\}$

Obecné řešení systému lineárních rovnic je součtem nějakého partikulárního řešení tohoto systému a obecného řešení příslušného homogenizovaného systému.

Věta: (Frobeniova)
Soustava lineárních rovnic má řešení právě když je hodnost matice soustavy rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.

Věta: Soustava $Ax = b$, kde A je matice typu $m \times n$, je *nedourčená* právě když je řešitelná a počet neznámých je větší než $h(A)$ a je *určená* právě když je řešitelná a počet neznámých je roven $h(A)$.

7.1 Homogenní soustavy

Definice: Soustava lineárních rovnic se nazývá *homogenní*, jestliže $b = 0$, tj. vektor absolutních členů je nulový.
Jestliže $b \neq 0$, pak se soustava nazývá *nehomogenní*.

Platí: Každá homogenní soustava $Ax = 0$ má vždy nulové řešení $x = 0$.
Zřejmě pro homogenní rovnici stačí pracovat s maticí soustavy (místo rozšířené matice soustavy), protože pravý sloupec rozšířené matice zůstane vždy nulový.

Věta: Mějme homogenní soustavu $Ax = 0$, A typu $m \times n$. Pak:

1. Soustava má pouze nulové řešení $\iff h(A) = n$.

2. Soustava má také nenulové řešení $\iff h(A) < n$.

Věta: Mějme soustavu lineárních rovnic $Ax = b$. Pak:

1. Součet libovolného řešení soustavy $Ax = b$ a libovolného řešení soustavy $Ax = 0$ (tzv. soustavy *zhomogenizované*) je řešením soustavy $Ax = b$.
2. Rozdíl dvou libovolných řešení soustavy $Ax = b$ je řešením soustavy $Ax = 0$.
3. Obecné řešení systému lineárních rovnic je součtem nějakého partikulárního řešení tohoto systému a obecného řešení příslušného homogenizovaného systému.

Důkaz:

1. Nechť c je řešením $Ax = b$, d je řešením $Ax = 0$. Potom $A(c + d) = Ac + Ad = b + 0 = b$.
2. Nechť c, d jsou řešením $Ax = b$. Potom $e = c - d$ je řešením $Ax = 0$, protože $Ae = A(c - d) = Ac - Ad = b - b = 0$.

■

Poznámka: Toto funguje u lineárních rovnic obecně (například u lineárních diferenciálních rovnic).

8 Determinanty

8.1 Permutace

Mějme množinu $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Bijektivní (na-prosté) zobrazení σ množiny X na sebe, tj. $\sigma : X \to X$, se nazývá *permutace* množiny X.

Zapisujeme ve formě tabulky (první řádek vzestupně):

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} \text{první řádek vzestupně} \\ \text{druhý řádek = přeskládané pořadí} \end{array} \right|$$

Na permutace můžeme nahlížet jako na přeskládání pořadí n-tice $(1, 2, 3, \dots, n)$.

Takovýchto přeskládání je právě $n!$

(Na rozdíl od kombinatorických zjišťování počtu přeskládání budeme potřebovat i samotná přeskládání).

Množinu všech permutací budeme značit Σ_n.

Dvojice prvků $i, j \in X = \{1, 2, \dots, n\}$ tvoří *inverzi* v permutaci σ, je-li $i < j$ a $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Parita permutace σ je číslo $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{počet inverzí}}$.

Tedy:

Sudá permutace ... sudý počet inverzí,

Lichá permutace ... lichý počet inverzí.

Příklad: Napište všechny permutace trojprvkové množiny, určete jejich paritu.

Řešení: Máme množinu $X = \{1, 2, 3\}$, permutací je $3! = 6$.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{žádná inverze}, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_1) = (-1)^0 = 1, \quad \text{sudá},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{jedna inverze} \begin{vmatrix} 2 < 3 \\ 3 > 2 \end{vmatrix}, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_2) = (-1)^1 = -1, \quad \text{lichá},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{jedna inverze} \begin{vmatrix} 1 < 2 \\ 2 > 1 \end{vmatrix}, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_3) = (-1)^1 = -1, \quad \text{lichá},$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{tři inverze} \begin{vmatrix} 1 < 2 & 1 < 3 & 2 < 3 \\ 3 > 2 & 3 > 1 & 2 > 1 \end{vmatrix}, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_4) = (-1)^3 = -1, \quad \text{lichá},$$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{dvě inverze} \begin{vmatrix} 1 < 2 & 1 < 3 \\ 3 > 1 & 3 > 2 \end{vmatrix}, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_5) = (-1)^2 = 1, \quad \text{sudá},$$

$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{dvě inverze} \begin{vmatrix} 1 < 3 & 2 < 3 \\ 2 > 1 & 3 > 1 \end{vmatrix}, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_6) = (-1)^2 = 1, \quad \text{sudá}.$$

8.2 Determinanty

Definice: Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. *Determinantem* matice A je číslo $\det A = |A|$ definované vztahem

$$|A| = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

Sčítáme přes všechny permutace n-prvkové množiny.
Vybíráme prvky z matice tak, že z 1. řádku vybereme $\sigma(1)$-ní prvek, z 2. řádku vybereme $\sigma(2)$-hý prvek, atd., a násobíme mezi sebou. Z každého řádku a každého sloupce musíme vybrat právě jeden prvek. To, že to děláme přes všechny permutace, znamená, že prvky vybíráme všemy možnými způsoby (a součiny navzájem sčítáme nebo odečítáme).

Příklad: Určete z definice determinant obecné matice 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Budeme mít 6 permutací, čili 6 sčítanců.

$$\begin{pmatrix} \clubsuit & \cdot & \cdot \\ \cdot & \clubsuit & \cdot \\ \cdot & \cdot & \clubsuit \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \clubsuit & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \clubsuit \\ \cdot & \clubsuit & \cdot \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & \clubsuit & \cdot \\ \clubsuit & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \clubsuit \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \clubsuit \\ \cdot & \clubsuit & \cdot \\ \clubsuit & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \clubsuit \\ \clubsuit & \cdot & \cdot \\ \cdot & \clubsuit & \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \clubsuit & \cdot \\ \cdot & \cdot & \clubsuit \\ \clubsuit & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad - a_{12}a_{21}a_{33} \quad - a_{13}a_{22}a_{31} \quad + a_{13}a_{21}a_{32} \quad + a_{12}a_{23}a_{31} \; .$$

Takto to nejde počítat, ukážeme si některé metody výpočtu determinantu matic.

8.3 Metody výpočtu determinantů

Determinant matice řádu 2 získáme tzv. *křížovým pravidlem.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad \searrow \text{přičítání} \quad \swarrow \text{odečítání}$$

Determinant matice řádu 3 získáme tzv. *Sárusovým pravidlem.*

$$\begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & = & \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \end{array} \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} & & \end{array} \qquad \searrow \text{přičítání} \quad \swarrow \text{odečítání}$$

Jedná se vlastně o výpočet z definice, ale přehledně.

Příklad: Určete determinant matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 6 \cdot 8 \cdot 1 - 9 \cdot 2 \cdot 4 \\ &= 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0. \end{aligned} \\ \;\;\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{matrix} \end{array}$$

Podobné křížové metody **nefungují pro matice řádu 4 a více**.

Musíme použít jiné postupy.

Dnešní tabulkové procesory mají zabudované funkce na výpočet determinantu

OpenCalc podle `https://wiki.openoffice.org/wiki/Documentation/How_Tos/Calc:_MDETERM_function`

`MDETERM(pole)` čili například `=MDETERM(A1:B2)`

v Excelu je to podle `http://office.microsoft.com/cs-cz/excel-help/determinant-HP005209172.aspx`

pro změnu zasejc `DETERMINANT(pole)` čili například `=DETERMINANT(A2:D5)`

Věta: Buď A matice řádu n. Platí:

1. $|A| = |A^T|$.
2. Je-li v matici A nulový řádek, pak $|A| = 0$.
3. Jestliže B vznikla z A výměnou (libovolných) dvou řádků, pak $|B| = -|A|$.
4. Jestliže B vznikla z A vynásobením řádku číslem a, pak $|B| = a|A|$.
5. Determinant $|A|$ se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku lineární kombinaci ostatních řádků.

Poznámka: (1) říká, že (2)–(5) platí i pro sloupce.

Věta: Determinant matice A v trojúhelníkovém tvaru je roven součinu prvků na diagonále, tj.

$$|A| = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

(Jediná nenulová permutace je právě diagonála, ostatní zasahují jak do horního tak do dolního (nulového) trojúhelníku.)

Předchozí věty poskytují efektivní metodu pro výpočet determinantu libovolného řádu.
Pomocí elementárních úprav převedeme matici do schodovitého tvaru a hlídáme si ty úpravy, které mění hodnotu determinantu (ta se snadno sleduje).

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = |\text{prohodíme řádek 1. a 4.}| = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \\ (2.\ \text{řádek})\ -3^*\ (1.\ \text{řádek}) \\ (3.\ \text{řádek})\ +2^*\ (1.\ \text{řádek}) \\ (4.\ \text{řádek})\ +3^*\ (1.\ \text{řádek}) \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 10 & 1 \end{vmatrix} = |\text{prohodíme řádek 2. a 3.}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & -7 & -3 \\ 0 & -2 & 10 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \\ \\ (3.\ \text{řádek})\ +5^*\ (2.\ \text{řádek}) \\ (4.\ \text{řádek})\ +2^*\ (2.\ \text{řádek}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -13 \\ 0 & 0 & 18 & -3 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 18 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \\ \\ \\ (4.\ \text{řádek})\ -18^*\ (3.\ \text{řádek}) \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{vmatrix}$$

$$= 13 \cdot (-1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 15) = 13 \cdot (-15) = -195.$$

Definice: Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ a $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_\ell \leq n$ jsou pevně zvolená přirozená čísla. Pak matice

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_\ell} \\ \vdots & & & \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \ldots & a_{i_k j_\ell} \end{pmatrix} \text{ typu } k \times \ell$$

nazýváme *submaticí* matice A určenou řádky $i_1, \ldots, i_k$ a sloupci $j_1, \ldots, j_\ell$.

Zbývajícími $(m-k)$ řádky a $(n-\ell)$ sloupci je určena matice M^* typu $(m-k) \times (n-\ell)$, která se nazývá *doplňková submatice k M v A*.

Pro $k = \ell$ je definován determinant $|M|$, který nazýváme *minor* řádu k matice A.

Je-li $m = n$, pak pro $k = \ell$ je i M^* čtvercová matice a $|M^*|$ se nazývá *doplněk* minoru $|M|$ (nebo *doplňkový minor* k submatici M) v A.

Příklad: Pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ -6 & -7 & -8 & -9 & -10 \\ 0 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix}$ napište submatici M určenou řádky $2, 3, 5$ a sloupci $1, 4, 5$. Napište doplňkovou submatici M^* a určete minory $|M|$ a $|M^*|$.

Řešení: Matice M je typu 3×3 a je tvaru $M = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{34} & a_{35} \\ a_{51} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 10 \\ -1 & -4 & -5 \\ 0 & 13 & 14 \end{pmatrix}$.

Pak matice M^* je typu 2×2 a je tvaru $M = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$.

Minory jsou $|M| = 50$, $|M^*| = 5$.

(Přitom $|A| = 0$.)

Definice: Číslo $(-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_\ell}|M^*|$ se nazývá *algebraický doplněk k minoru* $|M|$.

Poznámka: Čtvercové submatice tvořené prvními k řádky a sloupci matice A se nazývají *hlavní submatice* a jejich determinanty *hlavními minory* matice A.

Pro $m = n$ a $k = \ell = 1$ hovoříme o *algebraickém doplňku* A_{ij} prvku a_{ij} matice A.

Příklad: Pro předchozí matici určete A_{34}.

Řešení: Vynecháme 3. řádek a 4. sloupec.

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 10 \\ -6 & -7 & -8 & -10 \\ 0 & 11 & 12 & 14 \end{vmatrix} = 0.$$

Minory lze využít pro výpočet determinantu matice libovolného řádu (obzvláště pro matice s hodně nulama) následovně.

Věta: (Laplaceův rozvoj) Pro determinant matice A řádu n a libovolný řádek resp. sloupec platí:

$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ Laplaceův rozvoj podle i-tého řádku.

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ Laplaceův rozvoj podle j-tého sloupce.

Příklad: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |\text{podle 1. řádku}| = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$+0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \left(2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot (4-1) - (2-0)) - (4-1) = 2 \cdot (2 \cdot 3 - 2) - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5.$$

Platí obecnější tvrzení:

Věta: (Laplaceova věta) Nechť A je čtvercová matice řádu n a nechť je pevně zvoleno k jejích řádků. Pak $|A|$ je součet všech $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ součinů minorů řádu k, vybraných ze zvolených řádků, s jejich algebraickými doplňky. (Již nepraktické pro výpočet.)

S využitím této věty lze ukázat

Věta: (Cauchyova věta) Pro A, B čtvercové matice řádu n platí $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Poznámka: Nic podobného neplatí pro součet matic!! (obecně $|A + B| \neq |A| + |B|$) !!

Například $|E| = 1$, $|E + E| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$.

8.4 Užití determinantů k řešení soustav lineárních rovnic

Definice: Čtvercová matice A se nazývá *regulární*, jestliže $|A| \neq 0$.

Je-li $|A| = 0$, pak se matice A nazývá *singulární*.

Věta: (Cramerovo pravidlo) Nechť je dána soustava n lineárních rovnic o n neznámých, jejíž matice soustavy je regulární. Pak soustava má jediné řešení $(x_1, \ldots, x_n)$, přičemž

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

kde A_j je matice vzniklá z A nahrazením j-tého sloupce sloupcem absolutních hodnot (tj. sloupcem pravých stran).

Příklad: Cramerovým pravidlem řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Řešení:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad |A| = -1 + 1 + (-2) - 2 + 1 + 1 = -2,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad |A_1| = -6 + 0 - 1 - 1 + 6 - 0 = -2, \quad x_1 = \frac{-2}{-2} = 1,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad |A_2| = 0 + 1 - 12 - 0 + 1 + 6 = -4, \quad x_2 = \frac{-4}{-2} = 2,$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A_3| = 1 + 6 + 0 - 12 - 1 - 0 = -6, \quad x_3 = \frac{-6}{-2} = 3,$$

Řešení je $(1, 2, 3)$.

9 Inverzní matice

Motivace:

$\mathbb{R}$, každé nenulové reálné číslo a má svoji inverzi $a^{-1} = \frac{1}{a}$ tak, že $a^{-1} \cdot a = 1$. Matice také umíme násobit. Roli jedničky hraje jednotková matice E. Existuje k dané matici A nějaká matice A^{-1}, že $A^{-1}A = E$?

Definice: Buď A čtvercová matice řádu n. Pak matice A^{-1} splňující $A^{-1}A = E$, $AA^{-1} = E$ se nazývá *inverzní matice* k matici A.

Matice A^{-1} je zřejmě čtvercová matice řádu n.

Poznámka: Inverzní matice může a nemusí existovat. Matice, ke které existuje inverzní matice, se nazývá *invertibilní*.

Věta: Buď A čtvercová matice řádu n. Pak k matici A existuje inverzní matice právě když A je regulární (tj. právě když $|A| \neq 0$ což je právě když $h(A) = n$).

Platí: Buďte A, B regulární čtvercové matice řádu n.

$(A^{-1})^{-1} = A$, $\qquad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$,

$(A^{-1})^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$, $\qquad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Jak hledat inverzi?

9.1 Algoritmus pro výpočet inverzní matice

1. Vedle sebe napíšeme matici A a jednotkovou matici E. Získáme tak matici $(A|E)$ typu $n \times 2n$.
2. Matici $(A|E)$ upravujeme na schodovitý tvar pomocí EŘU (elementárních řádkových úprav).
3. Pomocí tzv. zpětné eliminace upravíme levou polovinu na jednotkovou matici (odspodu a zprava).
4. V pravé polovině získáme inverzní matici A^{-1}.

   $(A|E) \sim \ldots \sim (E|A^{-1})$
5. Vyskytne-li se v průběhu výpočtu v levé polovině (na místě původní matice A) nulový řádek, pak inverzní matice neexistuje.

Příklad:

Najděte inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -17 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -17 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right),$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -17 & 7 & 4 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Konrola:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -17 & 7 & 4 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.2 Jiná metoda výpočtu - pomocí adjungované matice

Definice: *Adjungovanou maticí* k matici A (čtvercová řádu n) nazýváme matici

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

(matice algebraických doplňků a ještě k tomu transponovaná).

Věta: Nechť A je regulární matice. Pak $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot A^*$.

Příklad: Pomocí adjungované matice najděte A^{-1} k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: $|A| = 1 + 2 + 0 - 1 - 0 - 0 = 2$,

$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot A^*$,

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

9.3 Použití inverzních matic k řešení soustav lineárních rovnic

Mějme soustavu $Ax = b$, kde A je čtvercová matice řádu n a $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Je-li matice A regulární, pak soustava má jediné řešení, které lze získat pomocí inverze A^{-1} následovně.
Rovnici $Ax = b$ vynásobíme zleva maticí A^{-1} a dostaneme

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \qquad \text{(víme, že } A^{-1}A = E\text{)}$$

Řešení: $x = A^{-1}b$.

Příklad: Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -3 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 &= 14 \end{aligned}$$

Řešení:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Matice A je z prvního příkladu na inverzní matici, čili víme $A^{-1} = \begin{pmatrix} -17 & 7 & 4 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$

Dostáváme řešení $x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -17 & 7 & 4 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 - 21 + 56 \\ 26 + 15 - 42 \\ 10 + 6 - 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

10 Maticové rovnice

Rovnice, ve kterých je neznámou matice, nazýváme *maticové rovnice*.
Můžeme rozlišit několik základních typů maticových rovnic.

- $A + X = B$, kde X je neznámá matice a A, B, X jsou matice stejného typu.
- $AX = B$, resp. $XA = B$, kde X je neznámá matice a A, X, resp. X, A jsou násobitelné matice.
- $AXB = C$, kde X je neznámá matice a A, X, B jsou násobitelné matice.

Řešit maticovou rovnici znamená najít všechny takové matice, po jejichž dosazení do rovnice na místo neznámé dostaneme pravdivý výrok. Při řešení rovnic, které nejsou v základním tvaru postupujeme tak, že je pomocí pravidel pro počítání s maticemi upravíme do základního tvaru a ty pak řešíme níže popsaným způsobem.

Rovnice typu $A + X = B$ řešíme odečtením matice A od obou stran rovnice.

U řešení rovnic typu $AX = B$ záleží na tom, je-li matice A regulární. Pokud A je regulární, existuje inverzní matice A^{-1}. Vynásobíme-li zleva obě strany rovnice touto inverzní maticí, převedeme tím rovnici do tvaru $A^{-1}AX = A^{-1}B$, a dostaneme řešení:

$$X = A^{-1}B.$$

V případě, kdy matice A není regulární, tj. je singulární nebo není čtvercová, zřejmě inverzní matici A^{-1} nenalezneme a musíme použít jiný postup. (Rozepsat součin AX podle definice součinu matic, a porovnat matice na levé a pravé straně rovnice. Tím dostaneme soustavu lineárních rovnic, jejímž řešením jsou prvky neznámé matice.)

Stejně tak záleží na regulárnosti matic A, B i u rovnic typu $AXB = C$.

Jestliže jsou obě matice regulární, najdeme k nim inverzní matice A^{-1}, B^{-1}. Vynásobíme-li pak obě strany rovnice zleva A^{-1} a zprava B^{-1} převedeme tím rovnici do tvaru $A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$, tedy:

$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Řešit rovnice, kde alespoň jedna z matic A, B není regulární, v tomto kurzu nebudeme.

Příklad: Řešte maticovou rovnici $3A + 2X = C - 2B$, kde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 21 \\ 4 & 15 & 15 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$2X = C - 2B - 3A,$$

$$X = \frac{1}{2}(C - 2B - 3A),$$

$$X = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 5 & 10 & 21 \\ 4 & 15 & 15 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Příklad: Nalezněte řešení maticové rovnice $AX + 2B = BX - 2C$, kde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Rovnici upravíme tak, aby na jedné straně rovnice byly výrazy s neznámou maticí X a na druhé straně výrazy, ve kterých se X nevyskytuje.

$$AX + 2B = BX - 2C$$

$$AX - BX = -2B - 2C$$

$$BX - AX = 2B + 2C$$

Na levé straně rovnice vytkneme zprava matici X, na pravé straně vytkneme číslo 2, tj.

$$(B - A)X = 2(B + C).$$

Matice $(B - A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ je regulární, a proto k ní existuje právě jedna inverzní matice $(B - A)^{-1}$.

Obě strany rovnice tedy vynásobíme zleva maticí $(B-A)^{-1}$ a dostáváme

$$(B-A)^{-1}(B-A)X = (B-A)^{-1}\, 2(B+C),$$

$$X = 2(B-A)^{-1}(B+C).$$

Vzhledem k tomu, že

$$(B-A)^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B+C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

získáváme řešení

$$X = 2\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

11 Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Definice: Nechť A je čtvecová matice řádu n. Číslo λ se nazývá *vlastní číslo (vlastní hodnota) matice* A, jestliže existuje nenulový (sloupcový) n-rozměrný vektor v tak, že

$$Av = \lambda v.$$

(vlevo je maticové násobení, vpravo násobíme vektor číslem)

Vektor v se nazývá *vlastní vektor matice* A s vlastní hodnotou λ.

Je-li λ vlastní číslo, označíme $V_\lambda := \{v \in \mathbb{R}^n \, : \, Av = \lambda v\}$ množinu všech vlastních vektorů (společně s nulovým vektorem).

Definice: Neprázdná podmnožina V aritmetického vektorového prostoru se nazývá *podprostorem*, jestliže platí

1. pro $u, v \in V$ je i $u + v \in V$,

2. pro $u \in V$ je i $ku \in V$ pro libovolné $k \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Podprostor je vlastně neprázdná podmnožina (vektorů z) $\mathbb{R}^n$ uzavřená na operaci sčítání a vynásobení reálným číslem, tj. uzavřená na lineární kombinace.

Příklad: V $\mathbb{R}^2$ uvažujme množinu $V := \{(t,t) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ (obrázkem je přímka $y = x$ procházející počátkem). Jedná se o podprostor, neboť množina je neprázdná (obsahuje např. počátek $(0,0)$) a pro všechna $t, r, s \in \mathbb{R}$ platí

1. $(t,t) + (s,s) = (t+s, t+s) \in V$,

2. $r(t,t) = (rt, rt) \in V$,

Věta: Mějme neprázdnou množinu vektorů. Pak množina všech lineárních kombinací těchto vektorů tvoří podprostor aritmetického vektorového prostoru, tzn. ten podprostor je těmi vektory generovaný.

Platí: Pro každé vlastní číslo λ je $V_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n \,:\, Av = \lambda v\}$ vektorovým podprostorem aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$. Ten se nazývá *vlastní podprostor s vlastním číslem* λ.

Důkaz:

1. $o \in V_\lambda$ (neboť $Ao = o = \lambda o$) pro libovolné λ,

2. $A(u+v) = Au + Av = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)$ pro libovolné $u, v \in V_\lambda$,

3. $A(ku) = k(Au) = k\lambda u = \lambda(ku)$ pro libovolné $u \in V_\lambda$ a $k \in \mathbb{R}$.

■

Pro vlastní číslo λ platí: $\quad V_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n \,:\, (A - \lambda E)v = 0\}$.

Prostor V_λ je tedy řešením homogenního systému lineárních rovnic o n neznámých s maticí soustavy $A - \lambda E$.

Příklad: Ukažte, že $\lambda = -3$ je vlastní číslo matice $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{pmatrix}$ a najděte příslušný vlastní podprostor V_{-3}.

Řešení: Vyjádříme matici

$$A - (-3)E = A + 3E = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 16 \\ 4 & 4 & 8 \\ -4 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

a vyřešíme homogenní soustavu s touto maticí (nulový sloupec pravých stran není třeba psát).

Zřejmě $\begin{pmatrix} 8 & 8 & 16 \\ 4 & 4 & 8 \\ -4 & -4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, a tedy $\det(A + 3E) = 0$,

výsledná soustava je tvaru $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, a jejím řešením je každý vektor tvaru $\begin{pmatrix} s \\ t \\ -\frac{1}{2}(s+t) \end{pmatrix}$.
[Porušeno pravidlo pro výběr neznámých jakožto parametrů. Nevadí to.]

Například $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ je vlastní vektor s vlastní hodnotou -3 a $\lambda = -3$ je tedy vlastní číslo.

$$V_{-3} = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ -\frac{1}{2}(s+t) \end{pmatrix} ; s, t \in \mathbb{R} \right\} \quad = \quad \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} ; s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definice: *Charakteristický polynom* čtvercové matice A řádu n je definován jako

$$\det(A - \lambda E)$$

s neznámou λ.

Věta: Množina všech vlastních čísel matice A je rovna množině všech kořenů charakteristického polynomu matice A.

Poznámka: Polynom n-tého stupně má právě n (obecně komplexních) kořenů (reálných kořenů může být obecně méně než n).

Poznámka: Matice A řádu n má právě n vlastních čísel (bráno s násobnostmi).

Platí: Determinant matice je součin vlastních čísel i s násobnostmi.
(Má-li reálná matice komplexní vlastní číslo, má i komplexně sdružené vlastní číslo, a součin je číslo reálné.)

Definice: Součet prvků na hlavní diagonále čtvercové matice A je označován jako *stopa matice* $Tr(A)$.

Platí: Stopa matice je právě součet vlastních čísel včetně násobností.

Věta: Všechny kořeny charakteristického polynomu symetrické matice jsou reálné.

11.1 Jak hledat vlastní čísla a vlastní vektory

1. Napíšeme charakteristický polynom a najdeme všechny kořeny = vlastní čísla.

2. Pro každé vlastní číslo λ vytvoříme soustavu $(A - \lambda E)x = o$ a vyřešíme.

   Všechna řešení jsou právě všechny příslušné vlastní vektory.

Příklad: Najděte všechna vlastní čísla a všechny příslušné vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení: Napíšeme charakteristický polynom $\det(A - \lambda E)$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 + 1 + \lambda + \lambda + \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda + 2.$$

Najdeme kořeny polynomu $-\lambda^3 + 3\lambda + 2$, tj. vyřešíme rovnici

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Možné celočíselné kořeny rovnice

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

jsou dělitele absolutního koeficientu 2, tj. $\{1, -1, 2, -2\}$.

Uhodneme kořen $\lambda_1 = -1$.

(Pro zájemce: Polynomiální rovnici můžeme vyřešit také pomocí tzv. Hornerova schématu.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = -1$$

V posledním řádku jsou koeficienty polynomu po vydělení kořenovým činitelem $(\lambda + 1)$).

Po vydělení původní rovnice činitelem $(\lambda + 1)$ dostáváme rovnici 2. řádu

$$-\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

kterou vyřešíme například rozkladem na činitele $0 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$
a dostáváme kořeny $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$.

Vlastní čísla jsou tedy $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \quad$ a $\quad \lambda_3 = 2$.

Pro nalezená vlastní čísla najdeme vlastní prostory.

$\lambda = 2$:

Dosadíme a dostaneme matici soustavy

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soustava musí mít netriviální řešení;

máme soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 - \ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a řešení je tvaru $\quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$

$\lambda = -1$:

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a řešení je tvaru $\quad V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}.$

Poznámka:

- V soustavě musí (po úpravách pomocí EŘÚ) vyjít vždy alespoň jeden parametr.
- Počet parametrů (=dimenze podprostoru) se nazývá *geometrická násobnost vlastního čísla.*

  Násobnost čísla jakožto kořene charakteristického polynomu se nazývá *algebraická násobnost vlastního čísla.*

  Tyto násobnosti se nemusí rovnat.

Věta: Vlastní vektory příslušející různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé.

Věta: Uvažujme nyní reálnou matici A a případná její komplexní vlastní čísla a vektory.
Je-li $\lambda = a + bi$ vlastní číslo matice A s vlastním vektorem $u = u_1 + iu_2$, pak $\overline{\lambda} = a - bi$ je vlastní číslo matice A s vlastním vektorem $u = u_1 - iu_2$.

Věta: Jestliže matice splňuje $A^{-1} = \overline{A}^T$ (matice A je tzv *unitární*), pak její vlastní čísla mají absolutní hodnotu rovnu 1. (Tj. její reálná vlastní čísla moho být pouze 1 nebo -1.)

12 Skalární součin

Mějme V vektorový prostor.

Definice: *Skalárním součinem* rozumíme operaci, která každé dvojici vektorů $u, v \in V$ přiřazuje reálné číslo (skalár) $(u, v) \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $u, v, w \in V$ a číslo $r \in \mathbb{R}$ platí:

(i) $(u, v) = (v, u)$ (symetrie)

(ii) $(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$ (bilinearita)

(iii) $(ru, v) = r(u, v)$

(iv) $(u, u) \geq 0$ a $(u, u) = 0$ právě když $u = o$ (pozitivita)

Potom o V hovoříme jako o *vektorovém prostoru se skalárním součinem*, nebo stručněji o *unitárním prostoru.*

Poznámka: Jiné formy zápisu

$(u, v) = u \cdot v = uv = \langle u, v \rangle = [u, v] = (u|v)$

Existují různé skalární součiny. Za skalární součin považujeme každou operaci, která splňuje (i)–(iv) v definici výše.

Příklad: Eukleidovský skalární součin $\quad (u, v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \quad$ pro $u, v \in V_n = \mathbb{R}^n$

Příklad: Určete skalární součin (pokud není specifikován, myslí se Eukleidovský) vektorů $u = (1, 4)$ a $v = (2, 5)$.
Řešení: $(u, v) = ((1, 4), (2, 5)) = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 2 + 20 = 22.$

Příklad: Vážený skalární součin $\quad (u, v) = 3u_1v_1 + 5u_2v_2.$
(Ověřte (i)–(iv) v definici skalárního součinu.)

Příklad: Skalární součin v prostoru spojitých reálných funkcí na uzavřeném intervalu $[a, b]$

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

12.1 Norma (velikost) vektoru

Ke každému skalárnímu součinu je zavedena norma vektoru.

Definice: *Normou (velikostí) vektoru* $u \in V$ rozumíme číslo

$$\|u\| := \sqrt{(u,u)}.$$

(Zobrazení $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$.)

Jiné značení: $\|u\| = |u|$.

Vektor u s velikostí $\|u\| = 1$ nazýváme *jednotkový vektor.*

Příklad: Eukleidovská norma (tzv. 2-norma) na V_n

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$

Ne každá norma je definována pomocí skalárního součinu

Příklad: 1-norma

$$\|u\| = \sum_{i=1}^{n} |u_i|.$$

Příklad: maximová norma

$$\|u\| = \max\{|u_i| \,:\, i = 1, \ldots, n\}.$$

12.2 Rovnoběžníkové pravidlo

Věta: (Rovnoběžníkové pravidlo). Nechť V je unitární prostor. Potom platí

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

pro všechny vektory $u, v \in V$.

12.3 Cauchyova-Schwarzova nerovnost

Věta: (Cauchyova-Schwarzova nerovnost). Pro jakýkoliv skalární součin platí:

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

pro všechny vektory $u, v \in V_n$.

Rovnost nastává právě když jsou vektory u a v lineárně závislé (rovnoběžné).

Důkaz: Uvažujme vektor $u + rv$. Platí

$$\|u + rv\|^2 = \|u\|^2 + 2r(u, v) + r^2\|v\|^2 \geq 0.$$

Kvadratický trojčlen

$$r^2v^2 - 2r(u, v) + u^2$$

je pro všechna $r \in \mathbb{R}$ nezáporný, právě když diskriminant příslušné kvadratické rovnice není kladný.

Tj. právě když platí

$$D = 4(u, v)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0.$$

Odtud

$$4(u, v)^2 \leq 4\|u\|^2\|v\|^2.$$

12.4 Trojúhelníková nerovnost

Věta: (Trojúhelníková nerovnost, Minkowského věta). Pro normu vektoru příslušnou libovolnému skalárnímu součinu platí:

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

pro všechny vektory $u, v \in V_n$.

Důkaz: Z Cauchyovy nerovnosti dostáváme

$$\|u+v\|^2 \quad = \quad \|u\|^2 + 2(u,v) + \|v\|^2 \quad \leq \quad \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \quad = \quad (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Příklad: Zapište skalární součin vektorů u a v pouze užitím normy vektoru.

Řešení: Uvědomme si, že platí vztah $(u,u) = u^2 = \|u\|^2$.

Dostáváme

$$(u,v) = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|u\|^2 - \|u-v\|^2),$$

$$(u,v) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2).$$

Poslední rovnost se jmenuje *Formule polarity.*

12.5 Odchylka vektorů

Z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti plyne, že existuje jediné číslo $\alpha \in [0, \pi]$ takové, že

$$(u, v) = \|u\|\|v\| \cos\alpha$$

Číslo α nazýváme *odchylka vektorů* u a v.

Poznámka: Je zřejmé, že velikost úhlu je, stejně jako délka, závislá na zvoleném skalárním součinu.
Definice: (Ortogonální a ortonormální vektory). Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k \in V_n$ jsou:

(i) *ortogonální* právě když $(u_i, u_j) = 0$ pro všechna $i, j = 1, 2, ..., k$; $i \neq j$. Píšeme $u_i \perp u_j$.

(ii) *ortonormální* právě když jsou ortogonální a jednotkové $\|u_i\| = 1$, pro všechna $i = 1, 2, \dots, k$

Příklad: Určete odchylku vektorů $u = (3, 4)$ a $v = (4, 3)$.
Řešení:

$$\cos\alpha = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{((3, 4), (4, 3))}{\|(3, 4)\|\|(4, 3)\|} = \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{24}{25}.$$

Příklad: Určete vnitřní úhly trojúhelníka ABC, kde

$A = [1, -2, 3]$

$B = [4, 5, 2]$

$C = [-3, -2, -2]$.

Řešení: $u = B - A$, $v = C - A$,

$$\cos\alpha = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{((3, 7, -1), (-4, 0, -5))}{\|(3, 7, -1)\| \cdot \|(-4, 0, -5)\|} = \frac{-12 + 5}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{41}}.$$

Úhel α při vrcholu A je asi 98 stupňů.